8 класс

1. Имеется 29 *кг* крупы и одна пятикилограммовая гиря. Можно ли на чашечных весах отмерить *а*) 12 *кг* с помощью одного взвешивания? *б*) 1 *кг* с помощью трёх взвешиваний?

2. В ряд записано 50 чисел. Обязательно ли сумма всех данных чисел положительна, если известно, что *а*) сумма любых семи чисел положительна? *б*) сумма любых семи подряд идущих чисел положительна?

3. Числа a, b, c такие, что $a > b > c$. Какое из двух чисел больше: $a^2 - b^2 + c^2$ или $(a - b + c)^2$?

4. За круглым столом сидят учёные из двух стран — Красногории и Синегории. Известно, что учёных одной страны в три раза больше, чем другой, а пар рядом сидящих учёных из одной страны в два раза больше, чем пар рядом сидящих учёных из разных стран. При каком наименьшем количестве учёных, сидящих за столом, это возможно?

5. В треугольнике ABC угол ABC равен $90°$, и на катете AB отмечена точка D так, что $AD = 2 \cdot DB$, точка E — середина гипотенузы AC. Известно, что $DE = 1$. Найдите CD.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. В магазине продают винтики и гаечки. У механика Болтикова есть ровно столько денег, сколько нужно для покупки 10 винтиков и 10 гаечек. Если магазин увеличит цену винтиков на 20%, а цену гаечек снизит на 40%, то денег у Болтикова всё равно хватит. Если же магазин снизит цену винтиков на 20%, а цену гаечек увеличит на 40%, то денег ему тоже хватит. В обоих случаях не обязательно будут израсходованы все деньги. Что дороже и во сколько раз — 10 винтиков или 10 гаечек?

2. Все целые числа от 0 до 100 000 разделили на две группы. В первой группе — числа с нечётной суммой цифр, а во второй — с чётной суммой цифр. В какой группе больше чисел?

3. Положительные числа x, y и z таковы, что квадрат суммы любых двух больше третьего на одно и то же число a. Найдите наименьшее возможное значение a.

4. Натуральное число n назовём *замечательным*, если его можно единственным образом представить в виде суммы 10 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все замечательные числа.

5. В равностороннем треугольнике ABC выбрали точку D на стороне AC и точку E на стороне AB так, что $AE = CD$, AM — медиана в треугольнике AED. Найдите отношение $BD : AM$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 15 января 2024 г.

---

10 класс

1. Найдите два таких двузначных числа x и y, что сумма всех остальных двузначных чисел равна $100x$.

2. За круглым столом сидят учёные из двух стран — Красногории и Синегории. Известно, что учёных одной страны в три раза больше, чем другой, а пар рядом сидящих учёных из одной страны в четыре раза больше, чем пар рядом сидящих учёных из разных стран. При каком наименьшем количестве учёных, сидящих за столом, это возможно?

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 = y + y^3, \\ y^3 = z + z^3, \\ z^3 = x + x^3. \end{cases}$$

4. Натуральное число n назовём *замечательным*, если его можно единственным образом представить в виде суммы 30 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все замечательные числа.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательная в точке A к окружности ω_1 пересекает ω_2 в точке P. Прямая PB вторично пересекает ω_1 в точке Q. Из точки Q проведена касательная QD к окружности ω_2 такая, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой PQ. Эта касательная вторично пересекает ω_1 в точке C. Докажите, что AD является биссектрисой угла CAP.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 15 января 2024 г.

---

11 класс

1. Найдите два таких трёхзначных числа x и y, что сумма всех остальных трёхзначных чисел равна $600x$.

2. Все натуральные числа от 1 до 1 000 000 разделили на две группы. В первой группе — числа с нечётной суммой цифр, а во второй — с чётной суммой цифр. В какой группе больше чисел и на сколько?

3. Положительные числа x, y, z и t таковы, что квадрат суммы любых трёх больше четвёртого на одно и то же число a. Найдите наименьшее возможное значение a.

4. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{1-c^2}} \geqslant 2.$$

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательная в точке A к окружности ω_1 пересекает ω_2 в точке P. Прямая PB вторично пересекает ω_1 в точке Q. Из точки Q проведена касательная QD к окружности ω_2 такая, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой PQ. Эта касательная вторично пересекает ω_1 в точке C. Докажите, что AD является биссектрисой угла CAP.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

8 класс

1. Имеется 29 *кг* крупы и одна пятикилограммовая гиря. Можно ли на чашечных весах отмерить *а*) 12 *кг* с помощью одного взвешивания? *б*) 1 *кг* с помощью трёх взвешиваний?

Ответ: *а) можно; б) можно.*

Решение. *а*) Одним взвешиванием можно получить 12 *кг* крупы, если на одну (левую) чашку весов положить гирю и, отсыпая крупу из правой чашки на левую, уравновесить весы. Действительно, из уравнения $5 + x = 29 - x$ находим $x = 12$, то есть на чашке с гирей будет 12 *кг* крупы.

б) Сначала с помощью одного взвешивания получим 12 *кг* крупы, как это показано в пункте *а*). Вторым взвешиванием разделим этот вес пополам, отсыпая и уравновешивая чашки весов. Третьим взвешиванием получим 1 *кг*, если на одну чашку положим гирю, а на другую 6 *кг* крупы, и затем отсыпем для равновесия ровно 1 *кг* (из оставшихся 23 *кг* крупы).

Замечание. В пункте *б*) возможны и другие решения.

Критерии. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла, пункта *б*) — 4 балла. Только ответ в любом пункте задачи — 0 баллов.

2. В ряд записано 50 чисел. Обязательно ли сумма всех данных чисел положительна, если известно, что *а*) сумма любых семи чисел положительна? *б*) сумма любых семи подряд идущих чисел положительна?

Ответ: *а) да, обязательно; б) нет.*

а) **Первое решение.** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ — данные числа. Вычислим 50 *положительных* сумм $s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$, $s_2 = a_2 + a_3 + \ldots + a_8$, ... , $s_{50} = a_{50} + a_1 + a_2 + \ldots + a_6$, то есть складываются семёрки подряд идущих чисел в циклическом расположении. Каждое число исходного набора здесь встречается в семи семёрках, поэтому $s_1 + s_2 + \ldots + s_{50} = 7s$, где s — сумма всех чисел. Значит, $s > 0$.

Второе решение. Ясно, что в исходном наборе $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ есть хотя бы одно положительное число a. (Действительно, если все числа неположительные, то сумма любых семи таких чисел будет неположительным числом, а это противоречит условию.) Остальные 49 чисел разобьём на 7 групп по семь чисел. Сумма чисел в каждой такой семёрке по условию > 0, значит, сумма этих 49 чисел тоже больше 0. Добавляя к ней число $a > 0$, получаем, что сумма всех данных чисел положительна.

б) Рассмотрим набор из 50 чисел, в котором 8 чисел равны -6, а остальные 42 числа равны $1,1$. А именно, пусть $a_1 = a_8 = a_{15} = \ldots = a_{43} = a_{50} = -6$, то есть каждое седьмое число равно -6. Тогда в любой семёрке подряд идущих чисел сумма положительна и равна $-6 + 1,1 \cdot 6 = 0,6 > 0$, а сумма всех 50 чисел отрицательна: $(-6) \cdot 8 + 1,1 \cdot 42 = -1,8 < 0$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. За решение пункта *а*) — 4 балла, пункта *б*) — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Числа a, b, c такие, что $a > b > c$. Какое из двух чисел больше: $a^2 - b^2 + c^2$ или $(a - b + c)^2$?

Ответ: $a^2 - b^2 + c^2$.

Первое решение. Докажем, что $a^2 - b^2 + c^2 > (a - b + c)^2$ для любых чисел a, b, c таких, что $a > b > c$. Запишем доказываемое неравенство в равносильной форме:

$$a^2 - b^2 > (a - b + c)^2 - c^2, \quad \text{или} \quad (a - b)(a + b) > (a - b)(a - b + 2c),$$
$$(a - b)(a + b) - (a - b)(a - b + 2c) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(a - b)(b - c) > 0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $a > b > c$.

Второе решение. Поскольку $a > b$, число $x = a - b$ положительное и $a = b + x$. Тогда

$$a^2 - b^2 + c^2 = (b+x)^2 - b^2 + c^2 = x^2 + 2bx + c^2 \quad \text{и}$$
$$(a - b + c)^2 = (x + c)^2 = x^2 + 2cx + c^2.$$

Отсюда ясно, что первое число больше второго, так как $2bx > 2cx$ при $x > 0$ и $b > c$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Число a (или b) представлено в виде $b + x$, где $x > 0$, — 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

4. За круглым столом сидят учёные из двух стран — Красногории и Синегории. Известно, что учёных одной страны в три раза больше, чем другой, а пар рядом сидящих учёных из одной страны в два раза больше, чем пар рядом сидящих учёных из разных стран. При каком наименьшем количестве учёных, сидящих за столом, это возможно?

Ответ: 12.

Решение. Пусть n — количество учёных из Красногории (K), $3n$ — из Синегории (C). Пусть количество пар учёных из разных стран, сидящих рядом, равно m, тогда количество пар учёных из одной страны, сидящих рядом, равно $2m$. Общее число учёных, с одной стороны, равно $n + 3n = 4n$, а с другой — равно $m + 2m = 3m$. Тогда $4n = 3m$, откуда n делится на 3, и значит, $n \geqslant 3$. Поэтому общее количество учёных не меньше 12.

Осталось привести пример рассадки 3 учёных из Красногории и 9 учёных из Синегории, при которой образуются 4 пары соседей из разных стран и 8 пар соседей — из одной страны. Таковой является, например, рассадка: $-C-K-K-C-K-C-C-C-C-C-C-C-$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Получено уравнение $4n = 3m$ — 1 балл. Доказано, что $n \geqslant 3$ — 2 балла. Доказано, что общее число учёных не менее 12 (*оценка*) — 4 балла. Пример рассадки для 12 учёных — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC угол ABC равен $90°$, и на катете AB отмечена точка D так, что $AD = 2 \cdot DB$, точка E — середина гипотенузы AC. Известно, что $DE = 1$. Найдите CD.

Ответ: 2.

Первое решение. (Рис. 1.) Продолжим отрезок DE за точку E и отложим $EF = DE$. Треугольники AED и CEF равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FC = AD$. В треугольнике CDF проведём высоту DH. В четырёхугольнике $CBDH$ все углы прямые, поэтому $CBDH$ — прямоугольник. Тогда $HC = DB = AD/2 = FC/2$, то есть высота DH будет и медианой. Значит, треугольник CDF — равнобедренный, и $CD = DF = 2 \cdot DE = 2$.

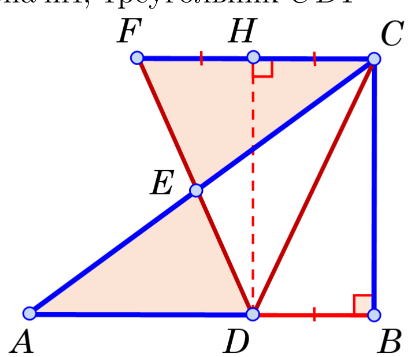

Рис. 1

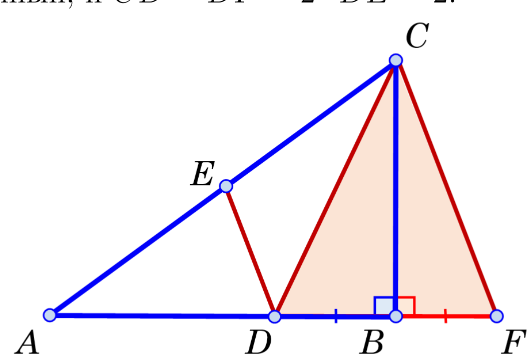

Рис. 2

Второе решение. (Рис. 2.) Продолжим отрезок AB за точку B и отложим отрезок $BF = BD$. В треугольнике CDF высота BC будет медианой, поэтому CDF — равнобедренный, и значит, $CD = CF$. Поскольку $AD = 2 \cdot DB = DF$ и $AE = EC$, отрезок DE является средней линией треугольника ACF, и $CF = 2 \cdot DE = 2$. Тогда $CD = CF = 2$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Указано правильное дополнительное построение (продолжить отрезок DE или DB) — 2 балла. Доказано, что треугольников CDF — равнобедренный, — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

9 класс

1. В магазине продают винтики и гаечки. У механика Болтикова есть ровно столько денег, сколько нужно для покупки 10 винтиков и 10 гаечек. Если магазин увеличит цену винтиков на 20%, а цену гаечек снизит на 40%, то денег у Болтикова всё равно хватит. Если же магазин снизит цену винтиков на 20%, а цену гаечек увеличит на 40%, то денег ему тоже хватит. В обоих случаях не обязательно будут израсходованы все деньги. Что дороже и во сколько раз — 10 винтиков или 10 гаечек?

Ответ: 10 *винтиков стоят вдвое дороже* 10 *гаечек.*

Решение. Пусть 10 винтиков стоят x денег, а 10 гаечек — y денег. Тогда у механика Болтикова есть $x+y$ денег. Если цена винтиков увеличится на 20%, а цена гаечек уменьшится на 40%, то он потратит $1,2x+0,6y$, и это не больше, чем $x+y$. Если же цена винтиков уменьшится на 20%, а цена гаечек увеличится на 40%, то это будет стоить $0,8x+1,4y$, и это не больше, чем $x+y$. Получаем два неравенства:

$$\begin{cases} 1,2x+0,6y \leqslant x+y, \\ 0,8x+1,4y \leqslant x+y. \end{cases}$$

Из первого неравенства следует что $0,2x \leqslant 0,4y$, то есть $x \leqslant 2y$. А из второго получаем: $0,4y \leqslant 0,2x$, то есть $2y \leqslant x$. Сравнивая два неравенства, приходим к выводу, что $x = 2y$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Правильно составлена система из двух неравенств — 3 балла. Решение получено из системы уравнений (вместо системы неравенств) — не более 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Все целые числа от 0 до 100 000 разделили на две группы. В первой группе — числа с нечётной суммой цифр, а во второй — с чётной суммой цифр. В какой группе больше чисел?

Ответ: *чисел больше в группе с нечётной суммой цифр.*

Среди любых *десяти* целых чисел $\overline{a_1 \ldots a_n 0}$, $\overline{a_1 \ldots a_n 1}$, ..., $\overline{a_1 \ldots a_n 9}$ есть ровно пять чисел с нечётной суммой и пять чисел с чётной суммой. Таким образом, среди целых чисел 0, 1, ..., 99 999 у нас одинаковое количество чисел обоих типов. Оставшееся число 100 000 имеет сумму цифр, равную нечётному числу 1, поэтому будет больше чисел с нечётной суммой.

Критерии. Только верный ответ — 0 баллов. Правильно указано количество чисел в каждой из двух групп для множества из 10 или более чисел — 3 балла. Доказано, что в одной из групп чисел на одно больше, чем в другой, — ещё 4 балла. При итоговом подсчёте пропущено число 100 000 — снимается 1 балл. Баллы за продвижения суммируются. Полное решение — 7 баллов.

3. Положительные числа x, y и z таковы, что квадрат суммы любых двух больше третьего на одно и то же число a. Найдите наименьшее возможное значение a.

Ответ: $-\frac{1}{16}$.

Решение. Оценка. Пусть x, y, z — данные числа. Имеем три уравнения: $(x+y)^2 = z+a$, $(y+z)^2 = x+a$, $(z+x)^2 = y+a$. Вычитая из первого уравнения второе, получим: $x = z$ или $x+2y+z = -1$. В силу положительности исходных чисел последнее невозможно, и значит, $x = z$. Аналогично, используя третье уравнение, получим: $x = y = z$. Тогда получаем квадратное уравнение $(x+x)^2 = x+a$, или $4x^2 - x - a = 0$, дискриминант которого $D = 1+16a$ должен быть неотрицательным, то есть $a \geqslant -\frac{1}{16}$.

Пример. Наименьшее значение $a = -\frac{1}{16}$ достигается при $x = y = z = \frac{1}{8}$.

Критерии. Доказано, что все переменные равны друг другу — 2 балла. Пропущено обоснование того, что равенство $x+2y+z = -1$ (или аналогичное ему) невозможно, — снимается 1 балл. Получено уравнение вида $4x^2 - x - a = 0$ — 3 балла. Доказана оценка — 5 баллов. Пример — 2 балла. Арифметическая ошибка в примере — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

4. Натуральное число n назовём *замечательным*, если его можно единственным образом представить в виде суммы 10 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все замечательные числа.

Ответ: 55 *и* 56.

Решение. Пусть число n — замечательное, $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ — натуральные слагаемые. Если предположить, что $a_1 > 1$, то n можно представить в виде суммы различных натуральных слагаемых еще одним способом: $n = (a_1 - 1) + a_2 + \ldots + (a_{10} + 1)$. Таким образом, $a_1 = 1$.

Далее, если предположить, что $a_2 > 2$, то для n опять можно привести другое разбиение: $n = = a_1 + (a_2 - 1) + a_3 + \ldots + (a_{10} + 1)$. Значит, $a_2 = 2$. Продолжая так далее, получаем $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $\ldots$, $a_9 = 9$. Если $a_{10} > 11$, то $a_9 + 1 < a_{10} - 1$, и снова можно сконструировать другое разбиение.

Наконец, нетрудно видеть, что при $a_{10} = 10$ или $a_{10} = 11$ получающиеся числа 55 и 56 являются замечательными.

Критерии. Только пример одного или двух замечательных чисел — 1 балл. Обосновано, что $a_1 = 1$ — 2 балла. Доказано, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$ — 3 балла. Доказано, что $a_i = i$ для всех i от 1 до 9 — 5 баллов. Баллы не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

5. В равностороннем треугольнике ABC выбрали точку D на стороне AC и точку E на стороне AB так, что $AE = CD$, AM — медиана в треугольнике AED. Найдите отношение $BD : AM$.

Ответ: $BD : AM = 2 : 1$.

Решение. (Рис. 3.) Проведём через точку E прямую параллельно стороне AC до пересечения со стороной BC в точке F. Полученная трапеция $AEFC$ — равнобедренная, поскольку углы при её основании AC равны $60°$. Отсюда $FC = AE = CD$, то есть треугольник FCD — равносторонний, $FD = FC = AE$, и значит, $AEFD$ — параллелограмм. Середина M диагонали ED — центр параллелограмма. Из равенства треугольников BDC и AFC (по двум сторонам и углу между ними) следует равенство отрезков AF и BD. Поэтому $AM = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}BD$. Следовательно, $BD : AM = 2 : 1$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Дополнительное построение, связанное с трапецией $AEFC$ — 2 балла. Доказано, что треугольник FCD — равносторонний — ещё 1 балл. Доказано, что $AEFD$ параллелограмм — ещё 1 балл. Доказано, равенство треугольников BDC и AFC — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

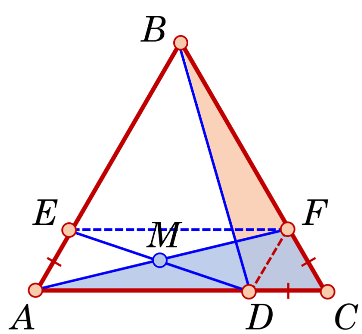

Рис. 3

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 15 января 2024 г.

---

10 класс

1. Найдите два таких двузначных числа x и y, что сумма всех остальных двузначных чисел равна $100x$.

Ответ: $x = 48,\ y = 57$.

Решение. Сумма всех двузначных чисел равна $10 + 11 + \ldots + 99 = 45 \cdot (10 + 99) = 4905$. По условию $4905 - x - y = 100x$, откуда

$$x = 48 + \frac{57 - y}{101}\,.$$

Так как x – натуральное, то $57 - y$ делится на 101. Для двузначного y это возможно только при $y = 57$, и значит, $x = 48$.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Правильно составлено уравнение — ещё 1 балл. Доказано, что $57 - y$ кратно 101 — ещё 2 балла. Допущена арифметическая ошибка — снимается 1 балл. Баллы за продвижения суммируются. Полное решение — 7 баллов.

2. За круглым столом сидят учёные из двух стран — Красногории и Синегории. Известно, что учёных одной страны в три раза больше, чем другой, а пар рядом сидящих учёных из одной страны в четыре раза больше, чем пар рядом сидящих учёных из разных стран. При каком наименьшем количестве учёных, сидящих за столом, это возможно?

Ответ: 20.

Решение. Пусть n — количество учёных из Красногории (K), $3n$ — из Синегории (C). Пусть количество пар учёных из разных стран, сидящих рядом, равно m, тогда количество пар учёных из одной страны, сидящих рядом, равно $4m$. Общее число учёных, с одной стороны, равно $n + 3n = 4n$, а с другой — равно $m + 4m = 5m$. Тогда $4n = 5m$, откуда n делится на 5, и значит, $n \geqslant 5$. Поэтому общее количество учёных не меньше 20.

Осталось привести пример рассадки 5 учёных из Красногории и 15 учёных из Синегории, при которой образуются 4 пары соседей из разных стран и 16 пар соседей — из одной страны. Таковой является, например, рассадка: $-C-K-K-K-K-C-K-C-C-C-C-C-C-C-C-C-C-C-C-C-$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Получено уравнение $4n = 5m$ — 1 балл. Доказано, что $n \geqslant 5$ — 2 балла. Доказано, что общее число учёных не менее 20 (*оценка*) — 4 балла. Пример рассадки для 20 учёных — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 = y + y^3, \\ y^3 = z + z^3, \\ z^3 = x + x^3. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = z = 0$.

Решение. Складывая все три уравнения, получим $x + y + z = 0$. Предположим, хотя бы одно неизвестное отлично от нуля. Пусть, например, $x > 0$. Тогда из последнего уравнения следует, что $z > 0$, а из второго получаем, что $y > 0$. Полученные неравенства противоречат соотношению $x + y + z = 0$. Итак, все неизвестные равны 0. Набор $x = y = z = 0$ удовлетворяет исходной системе.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Получено уравнение $x + y + z = 0$ — 1 балл. Доказано, что все числа x, y, z одного знака — 4 балла. За отсутствие проверки набора $(0, 0, 0)$ баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.

4. Натуральное число n назовём *замечательным*, если его можно единственным образом представить в виде суммы 30 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все замечательные числа.

Ответ: 465 *или* 466.

Решение. Пусть число n — замечательное, $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{30}$, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{30}$ — натуральные слагаемые. Если предположить, что $a_1 > 1$, то n можно представить в виде суммы различных натуральных слагаемых еще одним способом: $n = (a_1 - 1) + a_2 + \ldots + (a_{30} + 1)$. Таким образом, $a_1 = 1$.

Далее, если предположить, что $a_2 > 2$, то для n опять можно привести другое разбиение: $n = a_1 + (a_2 - 1) + a_3 + \ldots + (a_{30} + 1)$. Значит, $a_2 = 2$. Продолжая так далее, получаем $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $\ldots$, $a_{29} = 29$. Теперь, если $a_{30} > 31$, то $a_{29} + 1 < a_{30} - 1$, и снова можно сконструировать другое разбиение. Поэтому слагаемое a_{30} равно 30 или 31.

Наконец, нетрудно видеть, что при $a_{30} = 30$ или $a_{30} = 31$ получающиеся числа 465 и 466 являются замечательными.

Критерии. Только пример одного или двух замечательных чисел — 1 балл. Обосновано, что $a_1 = 1$ — 2 балла. Доказано, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$ — 3 балла. Доказано, что $a_i = i$ для всех i от 1 до 29 — 5 баллов. Баллы не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательная в точке A к окружности ω_1 пересекает ω_2 в точке P. Прямая PB вторично пересекает ω_1 в точке Q. Из точки Q проведена касательная QD к окружности ω_2 такая, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой PQ. Эта касательная вторично пересекает ω_1 в точке C. Докажите, что AD является биссектрисой угла CAP.

Решение. (Рис. 4.) Угол между касательной QD и хордой BD измеряется половиной дуги, которую стягивает эта хорда, поэтому $\angle BDQ = \angle BAD$. Угол PBD — внешний для треугольника BDQ, поэтому $\angle PBD = \angle DQB + \angle BDQ = \angle CQB + \angle BAD$. По свойству вписанных углов $\angle PAD = \angle PBD$ и $\angle CQB = \angle CAB$, поэтому

$$\angle PAD = \angle PBD = \angle CQB + \angle BAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAD\,.$$

Значит, AD — биссектриса угла CAP.

Критерии. Доказано равенство $\angle DQB = \angle PBD - \angle BPD$ или аналогичное ему, — 2 балла. Установлено равенство $\angle PAD = \angle CQB + \angle BAD$ — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

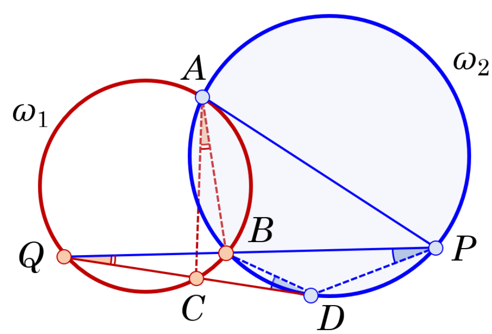

Рис. 4

Республиканская олимпиада школьников «Путь к Олимпу» по математике
Заключительный этап, 15 января 2024 г.

11 класс

1. Найдите два таких трёхзначных числа x и y, что сумма всех остальных трёхзначных чисел равна $600x$.

Ответ: $x = 822,\ y = 528$.

Решение. Сумма всех трёхзначных чисел равна $100+101+\ldots+999 = 450\cdot(100+999) = 494\,550$. По условию $494\,550 - x - y = 600x$, откуда

$$x = 822 + \frac{528-y}{601}\,.$$

Так как x – натуральное, то $528-y$ делится на 601. Для трёхзначного y это возможно только при $y = 528$, и значит, $x = 822$.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Правильно составлено уравнение — ещё 1 балл. Доказано, что $528 - y$ кратно 601 — ещё 2 балла. Допущена арифметическая ошибка — снимается 1 балл. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

2. Все натуральные числа от 1 до $1\,000\,000$ разделили на две группы. В первой группе — числа с нечётной суммой цифр, а во второй — с чётной суммой цифр. В какой группе больше чисел и на сколько?

Ответ: *в группе с нечётной суммой цифр на два числа больше, чем в группе с чётной суммой цифр.*

Среди любых *десяти* целых чисел $\overline{a_1\ldots a_n0}$, $\overline{a_1\ldots a_n1}$, $\ldots$, $\overline{a_1\ldots a_n9}$ есть ровно пять чисел с нечётной суммой и пять чисел с чётной суммой. Таким образом, среди целых чисел $0, 1, \ldots, 999\,999$ у нас одинаковое количество чисел обоих типов. В исходном наборе нет числа 0 с суммой цифр, равной чётному числу 0, и, кроме того, оставшееся число $1\,000\,000$ имеет сумму цифр, равную нечётному числу 1. Поэтому в группе с нечётной суммой цифр на два числа больше, чем в группе с чётной суммой цифр.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что среди любых десяти целых чисел поровну чисел с нечётной и чётной суммой цифр — 3 балла. Доказано только, что в группе с нечётной суммой цифр чисел больше, чем в другой, — 5 баллов. При итоговом подсчёте пропущено число $1\,000\,000$ — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. Положительные числа x, y, z и t таковы, что квадрат суммы любых трёх больше четвёртого на одно и то же число a. Найдите наименьшее возможное значение a.

Ответ: $-\frac{1}{36}$.

Решение. Оценка. Пусть x, y, z и t — данные числа. Имеем четыре уравнения: $(x+y+z)^2 = t+a$, $(y+z+t)^2 = x+a$, $(z+t+x)^2 = y+a$ и $(t+x+y)^2 = z+a$. Вычитая из первого уравнения второе, получим, что $x = t$ или $x+2y+2z+t = -1$. В силу положительности исходных чисел последнее невозможно, и значит, $x = t$. Аналогично, используя второе и третье, а также третье и четвёртое уравнения, получим: $x = y = z = t$. Тогда получаем квадратное уравнение $(x+x+x)^2 = x+a$, или $9x^2-x-a = 0$, дискриминант которого $D = 1+36a$ должен быть неотрицательным, то есть $a \geqslant -\frac{1}{36}$.

Пример. Наименьшее значение $a = -\frac{1}{36}$ достигается при $x = y = z = t = \frac{1}{18}$.

Критерии. Доказано, что все переменные равны друг другу — 2 балла. Пропущено обоснование того, что равенство $x+2y+2z+t = -1$ (или аналогичное ему) невозможно, — снимается 1 балл. Получено уравнение вида $9x^2-x-a = 0$ — 3 балла. Доказана оценка для a — 5 баллов. Пример — 2 балла. Арифметическая ошибка в примере — снимается 1 балл. Баллы по критериям не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

4. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^3+b^3+c^3=1$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{1-c^2}}\geqslant 2.$$

Решение. Для положительных значений x имеем

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\geqslant 2x^3 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x\sqrt{1-x^2}\leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4x^2(1-x^2)\leqslant 1.$$

Последнее неравенство сводится к очевидному $0\leqslant(2x^2-1)^2$. Поэтому

$$\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}\geqslant 2a^3,\quad \frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}}\geqslant 2b^3,\quad \frac{c^2}{\sqrt{1-c^2}}\geqslant 2c^3.$$

Складывая эти три неравенства, получим требуемое утверждение.

Критерии. Доказано верное неравенство для каждой отдельной дроби — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательная в точке A к окружности ω_1 пересекает ω_2 в точке P. Прямая PB вторично пересекает ω_1 в точке Q. Из точки Q проведена касательная QD к окружности ω_2 такая, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой PQ. Эта касательная вторично пересекает ω_1 в точке C. Докажите, что AD является биссектрисой угла CAP.

Решение. (Рис. 5.) Угол между касательной QD и хордой BD измеряется половиной дуги, которую стягивает эта хорда, поэтому $\angle BDQ=\angle BAD$. Угол PBD — внешний для треугольника BDQ, поэтому $\angle PBD=\angle DQB+\angle BDQ=\angle CQB+\angle BAD$. По свойству вписанных углов $\angle PAD=\angle PBD$ и $\angle CQB=$ $=\angle CAB$, поэтому

$$\angle PAD=\angle PBD=\angle CQB+\angle BAD=\angle CAB+\angle BAD=\angle CAD\,.$$

Значит, AD — биссектриса угла CAP.

Критерии. Доказано равенство $\angle DQB=\angle PBD-\angle BPD$ или аналогичное ему, — 2 балла. Установлено равенство $\angle PAD=\angle CQB+\angle BAD$ — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

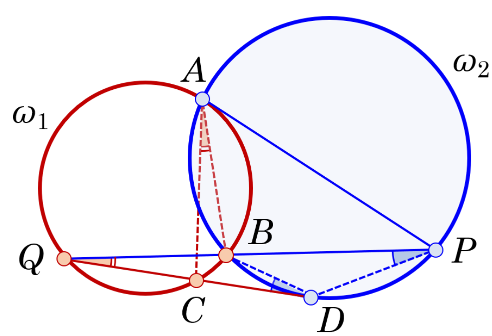

Рис. 5