Научный дайджест.

Экстремальные свойства конформных радиусов и обобщенных приведенных модулей. Второй год реализации проекта «Конформные инварианты римановых поверхностей гиперболического типа и плоских областей произвольной связности в задачах теории функций и математической физики» (2019 – 2020).

Подготовил Казанцев А.В. Отчетный период: июнь 2020 г.

В основе исследований Проекта лежит эквивалентность между отсутствием особенностей у решения внешней обратной краевой задачи, уравнением Гахова для решения f внутренней обратной краевой задачи и необходимым условием экстремума конформного радиуса $R = R_f$ области – образа единичного круга $\mathbf{E}$ под действием f.

Сформировавшееся вокруг этой эквивалентности научное направление развивается с середины XX века и связано с именами Ф.Д. Гахова, Х. Хиги, Г.Г. Тумашева, М.Т. Нужина, Л.А. Аксентьева, С.Н. Кудряшова, Ф.Г. Авхадиева, А.М. Елизарова, Ю.Е. Хохлова, Е.А. Широковой, С.Р. Насырова и других математиков. Возникнув как ответ математики на актуальные вызовы гидроаэромеханики, в настоящее время данное направление развивается на стыке геометрической теории функций, математической физики и функционального анализа.

Второй этап реализации настоящего Проекта продолжил исследования двух математиков из приведенного выше списка – С.Н. Кудряшова и Ю.Е. Хохлова. Основным объектом исследования стал предшварциан f''/f' функции f, основным методом – подчиненность (представление функций в $\mathbf{E}$

как суперпозиций однолистных функций и функций из леммы Шварца), а основной темой – принадлежность регулярному классу Г. Класс Г состоит из всех голоморфных, локально однолистных ($f' \neq 0$) в **E** и нормированных ($f(0) = f'(0) - 1 = 0$) функций с единственной критической точкой конформного радиуса R_f, которая является максимумом.

1) Исследованиями второго этапа установлено, что если левая часть уравнения Гахова ограничена двойкой ($|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \leq 2$ в круге **E**), то оно имеет ровно один корень в единичном круге, причем двойка неулучшаема, а указанный корень не обязательно нулевой. Раскрыто два момента, возникающих в связи с этим утверждением. Первый из них касается задаваемого предшварцианами погружения класса Гахова в пространство ограниченных голоморфных функций. Показано, что поперечник такого погружения равен двум, и дано полное описание пересечения границы этого погружения с шаром радиуса 2 с центром в нуле. Второй момент связан с сохранением единственности корня при условии ограниченности линейных и дробно-линейных действий на предшварциан с домножением на переменную единичного круга. Несколько признаков единственности построены в форме условий однолистности С.Н. Кудряшова.

2) Обнаружен пример ситуации, когда выход из класса Гахова вдоль некоторого параметрического семейства функций связан с граничной бифуркацией. Соответствующее условие попадания в класс Гахова является условием подчиненности (вида $(f''/f')(\zeta) \prec F(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{E}$), в котором мажоранта F сама определяется с помощью подчинения (конструкция типа Горяйнова–Хохлова). Далее, мы вводим и исследуем новую концепцию неулучшаемости в условиях принадлежности классу Гахова в форме подчинения предшварцианов звездообразным функциям; эта концепция базируется на эффекте Новикова–Хохлова в обратных задачах для потенциалов и для аналитических функций и обосновывается с помощью принципа гиперболической метрики. Наконец, мы исследуем уравнение Гахова для оператора Бернацкого-Хохлова.

3) Отход от предшварцианов к логарифмам производных возвращает нас к классам Авхадиева (классам голоморфных функций с ограниченным искажением), которые уже возникали на первом этапе Проекта. На данном этапе классы Авхадиева исследуются в областях, отличных от **E**. Приведены условия, при которых образы указанных областей при отображении функциями классов Авхадиева будут иметь единственную критическую точку конформного радиуса. Используется аналог постановки, предложенной в свое время О. Лехто для исследования однолистности функций с условиями типа Нехари в областях, конформно эквивалентных кругу.

Необычайно плодотворным стало обобщение конформного радиуса односвязной области на многосвязный случай, осуществленное в свое время И.П. Митюком. Введенный им обобщенный приведенный модуль $\mathrm{M}(w)$, названный позднее функцией Митюка, связан с радиусом Митюка $\Omega(w)$, обобщающим конформный радиус R, соотношением $\Omega(w) = \exp[2\pi\, \mathrm{M}(w)]$. Исследования второго этапа продолжились по двум направлениям – конечносвязному и бесконечносвязному.

4) *Области конечной связности.* Исследовались условия существования критических точек радиусов Митюка относительно различных канонических областей. В качестве последних рассматривались уже не круги с разрезами, а области, ограниченные звездообразными кривыми специального вида и разрезами одного из двух типов – радиальными или круговыми. В двусвязном случае получается такой результат. Функция Митюка кольца относительно звездообразной области с радиальным разрезом имеет континуум критических точек, а если тип разреза изменить на круговой, то соответствующая функция Митюка вообще не будет иметь критических точек.

5) *Области бесконечной связности.* Рассматривается простейший класс счетносвязных областей с единственной предельной точечной граничной компонентой. Показано, что в данном классе существуют области, для которых указанная предельная компонента одновременно является идеальной по Грётшу, т.е. соответствует точечной граничной компоненте при любых конформных отображениях, и регулярной в смысле задачи Дирихле. Регулярную точку мы называем точкой Винера в ознаменование той роли, которую сыграл в нашем исследовании легендарный критерий Винера.