

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор  
Проректор по научной деятельности

Д. А. Танорский

« 26 »

2025 г.



Программа кандидатского экзамена по научной специальности  
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

## **Цель и задачи кандидатского экзамена по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика**

### **Цель.**

Кандидатские экзамены являются составной частью аттестации научных и научно-педагогических кадров. Цель экзамена – установить глубину профессиональных знаний соискателей ученой степени, уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе. Сдача кандидатских экзаменов обязательна для присуждения ученой степени. Экзамен по специальной дисциплине должен выявить уровень теоретической и профессиональной подготовки соискателя, знание общих концепций и методологических вопросов соответствующей науки, истории её формирования и развития, фактического материала, основных теоретических и практических проблем данной отрасли знаний.

### **Задачи.**

- способность формулировать и доказывать основные положения и результаты математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики;
- готовность понимать, излагать и критически оценивать абстрактную информацию;
- способность анализировать современные научные достижения в области математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики и применять их при решении исследовательских и практических задач;
- способность владеть навыками решения задач математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики;
- готовность использовать знания в области математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики для постановки и решения научно-исследовательских задач.

### **Основные требования.**

Основным требованием допуска к сдаче кандидатского экзамена является наличие подписанного заявления и утвержденной дополнительной программы кандидатского экзамена.

Сдача кандидатского экзамена осуществляется в соответствии с календарным учебным графиком и индивидуальным учебным планом аспиранта. Кандидатские экзамены у прикрепленных лиц принимаются в период, установленный приказом ректора КФУ. В случае представления диссертации в совет по защите на соискание ученой степени кандидата наук, возможен прием кандидатских экзаменов вне сроков сессии.

### **Порядок проведения кандидатского экзамена.**

Кандидатский экзамен по специальности проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете 2 вопроса по основной программе и 1 вопрос по дополнительной программе. Дополнительная программа утверждается на Ученом совете Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского для каждого аспиранта персонально со списком вопросов по теме диссертационного исследования аспиранта. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 5 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

### **Критерии оценивания.**

Оценка соискателю за письменную работу выставляется в соответствии со следующими критериями:

#### **Отлично (5 баллов)**

Соискатель обнаружил всестороннее, систематическое и глубокое знание материала, умение свободно выполнять задания, усвоил основную литературу и знаком с дополнительной литературой, рекомендованной данной программой, усвоил взаимосвязь основных понятий математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики в их значении для приобретаемой профессии, проявил творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.

#### **Хорошо (4 балла)**

Соискатель обнаружил полное знание вопросов математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики, успешно выполнил предусмотренные тестовые задания, показал систематический характер знаний по перечисленным областям и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

#### **Удовлетворительно (3 балла)**

Соискатель обнаружил знание основ математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справился с выполнением тестовых заданий, знаком с основной литературой, рекомендованной данной программой, допустил погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

#### **Неудовлетворительно (2 и менее баллов)**

Соискатель обнаружил значительные пробелы в знаниях основ математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики, допустил принципиальные ошибки в выполнении тестовых заданий и не способен продолжить обучение по перечисленным дисциплинам.

### **Вопросы программы кандидатского экзамена по научной специальности**

#### **1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.**

##### **1. Математическая логика и теория алгоритмов**

1.1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.

1.2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.

1.3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.

1.4. Классы Р и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи. Выполнимость.

1.5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

1.6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.

1.7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.

1.8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.

- 1.9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
- 1.10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
- 1.11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
- 1.12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
- 1.13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
- 1.14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
- 1.15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

## **2. Алгебра**

- 2.1. Теоремы Силова.
- 2.2. Простота группы  $A_n$ ,  $n \geq 5$ ,  $SO_3$ .
- 2.3. Свободные группы и определяющие соотношения.
- 2.4. Основная теорема о конечно-порожденных абелевых группах.
- 2.5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
- 2.6. Конечные поля, их под поля и автоморфизмы.
- 2.7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.
- 2.8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
- 2.9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
- 2.10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
- 2.11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
- 2.12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
- 2.13. Решетки. Модулярные решетки. Дистрибутивные решетки и булевы алгебры. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

## **3. Теория чисел**

- 3.1. Квадратичный закон взаимности.
- 3.2. Первообразные корни и индексы.
- 3.3. Неравенства Чебышева для функции  $\pi(x)$ .
- 3.4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
- 3.5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
- 3.6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
- 3.7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.

- 3.8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
- 3.9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
- 3.10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
- 3.11. Трансцендентность чисел  $e$  и  $\pi$ .

**Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы кандидатского экзамена в аспирантуру по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.**

**Основная литература.**

1. Арсланов М. М. Иерархия Ершова / М. М. Арсланов. — Казань: Из-во АН РТ, 2024. — 405 с. — ISBN 978-5-9690-1311-7.
2. Бухштаб, А. А. Теория чисел : учебное пособие для вузов / А. А. Бухштаб. — 9-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 384 с. — ISBN 978-5-507-53510-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/489338> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Винберг, Э. Б. Курс алгебры : учебник / Э. Б. Винберг. — 5-е изд., стереотип. — Москва : МЦНМО, 2021. — 590 с. — ISBN 978-5-4439-2183-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/267500> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Глухов, М. М. Алгебра : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 608 с. — ISBN 978-5-507-51124-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/505362> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Гамова, А. Н. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / А. Н. Гамова. — 4-е изд., доп. — Саратов : СГУ, 2020. — 92 с. — ISBN 978-5-292-04649-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/170590> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Гашков, С. Б. Теория алгоритмов и вычислений / С. Б. Гашков. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 168 с. — ISBN 978-5-507-46897-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/352274> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
7. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник : в 3 частях / А. И. Кострикин. — 3-е изд., стер. — Москва : МЦНМО, 2020 — Часть III : Основные структуры алгебры — 2020. — 271 с. — ISBN 978-5-4439-3266-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/146751> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

8. Тыртышников, Е. Е. Основы алгебры : учебное пособие / Е. Е. Тыртышников. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020. — 464 с. — ISBN 978-5-9221-1728-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/185738> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

## Дополнительная литература.

1. Ершов, Ю. Л. Математическая логика : учебное пособие / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. — 6-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 356 с. — ISBN 978-5-9221-1301-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/59599> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Манин, Ю. И. Введение в современную теорию чисел / Ю. И. Манин, А. А. Панчишкин. — Москва : МЦНМО, 2009. — 552 с. — ISBN 978-5-94057-511-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/9368> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Успенский, В. А. Вводный курс математической логики : учебное пособие / В. А. Успенский. — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 128 с. — ISBN 978-5-9221-0278-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2355> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Колмогоров, А. Н. Математическая логика / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. — 3-е изд. — Москва.: КомКнига, 2006. — 240 с. — ISBN 5-484-00520-3.
5. Мальцев, А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. — 2-е изд. — Москва.: Наука, 1986. — 368 с.
6. Соар, Р. И. Вычислимые перечислимые множества и степени: Пер. с англ. / Р. И. Соар. — Казань: Казанское математическое общество, 2000. — 576 с.
7. Роджерс, Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость / Х. Роджерс. — Москва.: Мир, 1972. — 624 с.
8. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. — 3-е изд. — Москва.: Наука, 1984. — 320 с.
9. Новиков, П. С. Элементы математической логики / П. С. Новиков. — 2-е изд. испр. — Москва.: Наука, 1973. — 399 с.
10. Мальцев, А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. — Москва.: Наука, 1970. — 392 с.
11. Ершов, Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели / Ю. Л. Ершов. — Москва.: Наука, 1980. — 416 с.
12. Артин, Э. Теория Галуа : учебное пособие / Э. Артин ; переводчик А. В. Самохин. — 3-е изд., стер. — Москва : МЦНМО, 2021. — 65 с. — ISBN 978-5-4439-2163-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/267461> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

13. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 556 с. — ISBN 978-5-507-47036-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/322487> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
14. Кравченко, А. В. Универсальная алгебра и теория решеток : учебное пособие / А. В. Кравченко, М. В. Швидефски. — Новосибирск : НГТУ, 2019. — 75 с. — ISBN 978-5-7782-4061-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152277> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
15. Романовский, Н. С. Теория Галуа : учебно-методическое пособие / Н. С. Романовский, П. С. Колесников, А. А. Бутурлакин. — Новосибирск : НГУ, 2023. — 86 с. — ISBN 978-5-4437-1388-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/388313> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
16. Вечтомов, Е. М. Упорядоченные множества и решетки / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 248 с. — ISBN 978-5-507-48266-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/367463> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
17. Туганбаев, А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца : учебное пособие / А. А. Туганбаев. — Москва : МЦНМО, 2021. — 472 с. — ISBN 978-5-4439-2208-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/267554> (дата обращения: 18.12.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

## Информационное обеспечение.

- Сайт Научной библиотеки им. Н. И. Лобачевского <http://kpfu.ru/library>
- Сайт кафедры алгебры и математической логики КФУ <https://kpfu.ru/math-d/strctre/otdeleniya-i-kafedry/algebra>
- Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ <http://lib.mexmat.ru/>
- Поисковик электронных книг <http://www.poiskknig.ru>
- EqWorld. Мир математических уравнений. Математическая логика <https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>
- Учебные материалы DMVN. Логика / Дискретная математика <https://dmvn.mexmat.net/logic.php>