

УДК 514.16

ПЛАНАРНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ С КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРОЙ ДВУХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

С.Г. Лейко

Аннотация

В настоящей работе мы изучаем специальные аффинные связности на многообразиях с аффинорной структурой $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$, $\overset{1}{F}^2 = \overset{2}{F}^2 = E$, $\overset{1}{F}\overset{2}{F} = \overset{2}{F}\overset{1}{F} = \overset{1}{F} + \overset{2}{F} - E$.

1. Введение

Рассмотрим на гладком многообразии M^n аффинорную структуру $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$, где E – единичный аффинор, удовлетворяющую структурным соотношениям

$$\overset{1}{F}^2 = \overset{2}{F}^2 = E, \quad \overset{1}{F}\overset{2}{F} = \overset{2}{F}\overset{1}{F} = \overset{1}{F} + \overset{2}{F} - E. \quad (1)$$

Эти соотношения изоморфно определяются трехмерной унитальной, коммутативной, ассоциативной и приводимой алгеброй \mathfrak{R} над полем вещественных чисел R с соответствующими базисными элементами $(\delta, f, \overset{1}{f}, \overset{2}{f})$, где δ – главная единица, и $\overset{1}{f}^2 = \overset{2}{f}^2 = \delta$, $\overset{1}{f}\overset{2}{f} = \overset{2}{f}\overset{1}{f} = \overset{1}{f} + \overset{2}{f} - \delta$.

В алгебре \mathfrak{R} есть три базисных попарно ортогональных идемпотента

$$\overset{0}{\delta} = \frac{1}{2}(\overset{1}{f} + \overset{2}{f}), \quad \overset{\alpha}{\delta} = \frac{1}{2}(\delta - \overset{\alpha}{f}), \quad \alpha = 1, 2, \quad \overset{0}{\delta}^2 = \overset{0}{\delta}, \quad \overset{\alpha}{\delta}^2 = \overset{\alpha}{\delta},$$

дающих в сумме главную единицу $\delta = \overset{0}{\delta} + \overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta}$. Следовательно, алгебра раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{R} = \overset{0}{\delta}\mathfrak{R} \oplus \overset{1}{\delta}\mathfrak{R} \oplus \overset{2}{\delta}\mathfrak{R}$ главных идеалов, порожденных этими идемпотентами, т. е. приводимая. Очевидно, алгебра \mathfrak{R} изоморфна прямой сумме $R \oplus R \oplus R$. Условимся для краткости называть аффинорную структуру $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$ в дальнейшем \mathfrak{R} -структурой, имея ввиду вышеуказанную алгебру \mathfrak{R} .

Каждый из аффиноров $\overset{\alpha}{F}$ порождает на многообразии структуру почти произведения. В случае, когда на многообразии существует гладкий атлас локальных карт, в которых компоненты аффинора принимают постоянные значения (интегрируемость структурного аффинора), многообразие класса C^ω представляется произведением двух подмногообразий. Как известно [1], этот случай характеризуется аннулированием тензора Нейенхайса аффинора $\overset{\alpha}{F}$ или, что эквивалентно, существованием на многообразии (класса C^ω) аффинной связности без кручения, относительно которой структурный аффинор является ковариантно постоянным.

Рассмотрим тензор кручения двух аффиноров $\overset{\alpha}{F}$, определенный формулой [2, с. 44]:

$$\begin{aligned} [\overset{1}{F}, \overset{2}{F}](X, Y) &= [\overset{1}{F}X, \overset{2}{F}Y] + [\overset{2}{F}X, \overset{1}{F}Y] + (\overset{1}{F}\overset{2}{F} + \overset{2}{F}\overset{1}{F})[X, Y] - \\ &- \overset{1}{F}([\overset{2}{F}X, \overset{2}{F}Y] + [\overset{2}{F}X, Y]) - \overset{2}{F}([\overset{1}{F}X, \overset{1}{F}Y] + [\overset{1}{F}X, Y]). \end{aligned}$$

Здесь X, Y – векторные поля.

Обозначим $\overset{\alpha, \beta}{N} = \frac{1}{2}[\overset{\alpha}{F}, \overset{\beta}{F}]$, $\overset{\alpha}{N} \equiv \overset{\alpha, \alpha}{N} = \frac{1}{2}[\overset{\alpha}{F}, \overset{\alpha}{F}]$. Эти тензоры называют тензорами Нейенхайса аффиноров $\overset{\alpha}{F}$. Было установлено [3], что для одновременной интегрируемости двух коммутирующих структур почти произведения (или почти комплексных структур) необходимо и достаточно аннулирования трех тензоров $\overset{\alpha, \beta}{N}$:

$$\overset{1}{N} = \overset{2}{N} = \overset{1,2}{N} = 0.$$

Таким образом, это условие является необходимым и достаточным условием интегрируемости и для \mathfrak{R} -структур.

Если $\delta_i^k, \overset{\alpha}{F}_i^k$ – компоненты структурных аффиноров, тогда (1) дают

$$\overset{\alpha}{F}_s^k \overset{\alpha}{F}_i^s = \delta_i^k, \quad \overset{1}{F}_s^k \overset{2}{F}_i^s = \overset{2}{F}_s^k \overset{1}{F}_i^s = \overset{1}{F}_i^k + \overset{2}{F}_i^k - \delta_i^k. \quad (2)$$

С учетом (2) компоненты тензоров $\overset{\alpha, \beta}{N}$ для \mathfrak{R} -структуры имеют вид

$$\overset{\alpha, \beta}{N}_{ij}^k = \partial_s \overset{\beta}{F}_{[j}^k \overset{\alpha}{F}_{i]}^s + \partial_s \overset{\alpha}{F}_{[j}^k \overset{\beta}{F}_{i]}^s + \overset{\beta}{F}_s^k \partial_{[j} \overset{\alpha}{F}_{i]}^s + \overset{\alpha}{F}_s^k \partial_{[j} \overset{\beta}{F}_{i]}^s$$

(альтернация с делением). Частное дифференцирование в компонентном представлении можно заменить на ковариантное дифференцирование относительно любой аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$ без кручения на данном многообразии с \mathfrak{R} -структурой. Тогда

$$\overset{\alpha}{N}_{ij}^k = 2\overset{0}{\nabla}_s \overset{\alpha}{F}_{[j}^k \overset{\alpha}{F}_{i]}^s + 2\overset{\alpha}{F}_s^k \overset{0}{\nabla}_{[j} \overset{\alpha}{F}_{i]}^s, \quad (3)$$

$$\overset{1,2}{N}_{ij}^k = \overset{0}{\nabla}_s^0 \overset{2}{F}_{[j}^k \overset{1}{F}_{i]}^s + \overset{0}{\nabla}_s^1 \overset{2}{F}_{[j}^k \overset{2}{F}_{i]}^s + \overset{2}{F}_s^k \overset{0}{\nabla}_{[j} \overset{1}{F}_{i]}^s + \overset{1}{F}_s^k \overset{0}{\nabla}_{[j} \overset{2}{F}_{i]}^s. \quad (4)$$

Аффинорные структуры, определенные алгеброй, представляют интерес во многих направлениях геометрии многообразий [4, 5]. Мы изучим вопрос существования на многообразии с \mathfrak{R} -структурой аффинных связностей без кручения ∇ , для которых при некоторых ковекторах (их будем называть *определяющими ковекторами*) выполняются условия

$$\nabla_{(i} \overset{\alpha}{F}_{j)}^k = \overset{\alpha}{\omega}_0 (i \delta_j^k) + \overset{\alpha}{\omega}_1 (i \overset{1}{F}_j^k) + \overset{\alpha}{\omega}_2 (i \overset{2}{F}_j^k) \quad (5)$$

(круглыми скобками обозначаем симметризацию с делением). Такие связности называем *планарными связностями*. В частности, они играют важную роль в теории уплощающих отображений [6–8].

2. Адаптированные реперы и канонические координаты

Введем в рассмотрение собственные подпространства аффиноров $\overset{\alpha}{F}$ в касательном пространстве $T_x(M)$ многообразия в точке $x \in M$, которые отвечают собственным значениям ± 1 . Обозначим их через $\overset{1}{F}^+$, $\overset{2}{F}^-$ соответственно. Покажем, что касательное пространство многообразия с аффинорной \mathfrak{R} -структурой имеет в каждой точке строение

$$T_x(M) = \overset{1}{F}^+ \cap \overset{2}{F}^+ \oplus \overset{1}{F}^- \oplus \overset{2}{F}^-.$$

Действительно, рассмотрим аффиноры

$$\overset{\alpha}{P} = \frac{1}{2}(E + \overset{\alpha}{F}), \quad \overset{\alpha}{Q} = \frac{1}{2}(E - \overset{\alpha}{F}).$$

На основании (1) они обладают свойствами:

$$\begin{aligned} \overset{\alpha}{P}^2 &= \overset{\alpha}{P}, \quad \overset{\alpha}{Q}^2 = \overset{\alpha}{Q}, \quad \overset{\alpha}{P}\overset{\alpha}{Q} = \overset{1}{Q}\overset{2}{Q} = \overset{2}{Q}\overset{1}{Q} = 0, \\ \overset{1}{P}\overset{2}{P} &= \overset{2}{P}\overset{1}{P} = \frac{1}{2}(F + \overset{2}{F}), \quad \overset{1}{P}\overset{2}{Q} = \overset{2}{Q}\overset{1}{P} = \overset{2}{Q}, \quad \overset{2}{P}\overset{1}{Q} = \overset{1}{Q}\overset{2}{P} = \overset{1}{Q}. \end{aligned}$$

Таким образом, аффиноры $\overset{\alpha}{P}$, $\overset{\alpha}{Q}$ являются проекторами, и для них имеем $E = \overset{1}{P}\overset{2}{P} + \overset{2}{Q}\overset{1}{Q}$. Отсюда для произвольного вектора $\xi \in T_x(M)$ получаем разложение $\xi = \overset{1}{P}\overset{2}{P}(\xi) + \overset{2}{Q}(\xi) + \overset{1}{Q}(\xi)$. Так как $\overset{\alpha}{P}\overset{\alpha}{Q} = -\overset{\alpha}{Q}$, то $\overset{\alpha}{Q}(\xi) \in \overset{\alpha}{F}^-$. В свою очередь из равенств $\overset{\alpha}{P}\overset{1}{P}(\overset{1}{P}\overset{2}{P})^1 = \overset{1}{P}\overset{2}{P}$ вытекает $\overset{1}{P}\overset{2}{P}(\xi) \in \overset{1}{F}^+ \cap \overset{2}{F}^+$, что и доказывает указанную структуру $T_x(M)$.

Пусть n_0, n_1, n_2 – соответствующие размерности подпространств $\overset{1}{F}^+ \cap \overset{2}{F}^+$, $\overset{1}{F}^+$, $\overset{2}{F}^-$. Возьмем в этих подпространствах базисные векторы $e_{i_0}, e_{i_1}, e_{i_2}$, занумеровав их в порядке

$$\begin{aligned} i_0, \dots &= 1, 2, \dots, n_0; \quad i_1, \dots = n_0 + 1, \dots, n_0 + n_1; \\ i_2, \dots &= n_0 + n_1 + 1, \dots, n = n_0 + n_1 + n_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\overset{\alpha}{F}(e_{i_0}) = e_{i_0}, \quad \overset{1}{F}(e_{i_1}) = -e_{i_1}, \quad \overset{2}{F}(e_{i_2}) = -e_{i_2}.$$

Кроме того, из структурных соотношений (1) вытекает

$$\overset{1}{F}(e_{i_2}) = -e_{i_2}, \quad \overset{2}{F}(e_{i_1}) = -e_{i_1}.$$

Выберем теперь локальные координаты x^i так, чтобы в точке x взятые векторы совпали с касательными векторами к координатным кривым, т. е. $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$. Построенный репер $(x, e_{i_0}, e_{i_1}, e_{i_2})$ называют *адаптированным репером*, а координаты x^i – *каноническими координатами* \mathfrak{R} -структуры в точке x . Относительно канонических координат структурные аффиноры имеют в точке x компоненты

$$(F_i^k) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad (\overset{1}{F}_i^k) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & -E_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где E_0, E_1, E_2 – квадратные матрицы размерностей n_0, n_1, n_2 соответственно. Использование канонических координат оказывается весьма полезным в конкретных задачах. Для интегрируемой \mathfrak{R} -структуры существует гладкий атлас карт с каноническими координатами.

3. Существование планарных связностей

При конструировании специальных связностей на многообразиях с аффинорными структурами используют метод введения априорной связности. На многообразиях с классическими аффинорными структурами (почти произведения, почти комплексной и кватернионной) введение априорной связности впервые использовалось для построения связностей, сохраняющих эти структуры [9, 10]. Все такие связности в общем случае имеют кручение, за исключением случая интегрируемых структур. Для структур почти произведения и почти комплексной задача отыскания планарных связностей без кручения решена в работе [6]. Условия для отыскания планарных связностей с несколькими структурными аффинорами являются более общими, что значительно усложняет задачу их конструирования.

Пусть на многообразии с \mathfrak{R} -структурой искомая планарная аффинная связность ∇ без кручения имеет коэффициенты Γ_{ij}^k . Введем на этом многообразии априорную связность без кручения $\overset{0}{\nabla}$ с коэффициентами $\overset{0}{\Gamma}_{ij}^k$ и положим $\Gamma_{ij}^k - \overset{0}{\Gamma}_{ij}^k = A_{ij}^k$. Тогда

$$\nabla_j \overset{\alpha}{F}_i^k = \overset{0}{\nabla}_j \overset{\alpha}{F}_i^k + A_{is}^k \overset{\alpha}{F}_i^s - A_{ij}^t \overset{\alpha}{F}_t^k. \quad (7)$$

Обозначим

$$\overset{\alpha}{F}_{ij}^k = 2 \overset{\alpha}{\omega}_0^{(i} \delta_j^{k)} + 2 \overset{\alpha}{\omega}_1^{(i} F_j^{k)} + 2 \overset{\alpha}{\omega}_2^{(i} F_j^{k)}.$$

По определению планарной связности из (5) должны иметь

$$\begin{aligned} A_{js}^k \overset{\alpha}{F}_i^s + A_{is}^k \overset{\alpha}{F}_j^s - 2 A_{ij}^t \overset{\alpha}{F}_t^k &= \overset{\alpha}{B}_{ij}^k, \\ \overset{\alpha}{B}_{ij}^k &= \overset{\alpha}{F}_{ij}^k - 2 \overset{0}{\nabla}_{(j} \overset{\alpha}{F}_{i)}^k. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножим (8) на $\overset{\alpha}{F}_l^i$ и просуммируем по индексу i , а результат просимметрируем по j, l . Получим

$$A_{st}^k \overset{\alpha}{F}_l^s \overset{\alpha}{F}_j^t - A_{lj}^k = \overset{\alpha}{B}_{lj}^s \overset{\alpha}{F}_s^k + \overset{\alpha}{B}_{s(j}^k \overset{\alpha}{F}_{l)}^s. \quad (9)$$

В свою очередь, умножая (9) на $\overset{\alpha}{F}_i^l$, суммируя по индексу l и альтернируя результат по i, j , имеем

$$A_{si}^k \overset{\alpha}{F}_j^s - A_{sj}^k \overset{\alpha}{F}_i^s = \overset{\alpha}{F}_s^k \overset{\alpha}{B}_{t[j}^s \overset{\alpha}{F}_{i]}^t.$$

Сложив полученные равенства с (8), получим

$$A_{si}^k \overset{\alpha}{F}_j^s - A_{ij}^t \overset{\alpha}{F}_t^k = \frac{1}{2} B_{ij}^k + \frac{1}{2} \overset{\alpha}{F}_s^k \overset{\alpha}{B}_{t[j}^s \overset{\alpha}{F}_{i]}^t.$$

Подстановка полученных соотношений в равенства (7) дает

$$\begin{aligned} \nabla_j \overset{\alpha}{F}_i^k &= \frac{1}{2} \overset{\alpha}{F}_{ij}^k + \frac{1}{2} \overset{\alpha}{F}_s^k \overset{\alpha}{B}_{t[j}^s \overset{\alpha}{F}_{i]}^t + \overset{*}{N}_{ij}^k, \\ \overset{*}{N}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \overset{0}{\nabla}_{[j} \overset{\alpha}{F}_{i]}^k + \frac{1}{2} \overset{0}{\nabla}_{[t} \overset{\alpha}{F}_{s]}^k \overset{\alpha}{F}_i^s \overset{\alpha}{F}_j^b. \end{aligned} \quad (10)$$

Последний тензор связан с тензором Нейенхайса равенством

$$\overset{*}{N}_{ij}^k = \frac{1}{4} N_{ij}^s \overset{\alpha}{F}_s^k,$$

и удовлетворяет на основании (2), (3) тождествам

$${}^{*\alpha} N_{sj}^k F_i^s + {}^{*\alpha} N_{ij}^s F_s^k = 0. \quad (11)$$

Ковариантное дифференцирование первой группы структурных соотношений (2) дает

$$F_i^s \nabla_j F_s^k + F_s^k \nabla_j F_i^s = 0.$$

Подставив сюда (10), получим с учетом тождества (11) следующие равенства

$${}^{*\alpha} F_s^k F_{ij}^s + 2 F_{s(j}^k F_{i)}^s + F_{st}^u F_u^k F_i^s F_j^t = 0.$$

Принимая здесь во внимание явное выражение тензора $\overset{\alpha}{F}_{ij}^k$, на основании структурных соотношений (2) придем к равенствам вида

$$\overset{\alpha}{a}_0(i\delta_j^k) + \overset{\alpha}{a}_1(iF_j^k) + \overset{\alpha}{a}_2(iF_j^k) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрение равенств (12) в канонических координатах в произвольной точке показывает, что они возможны только при нулевых ковекторах. Выписывая явные выражения этих ковекторов приходим к следующей системе

$$\begin{aligned} \overset{2}{\omega}_i + \overset{2}{\omega}_s F_i^s &= 0, & \overset{1}{\omega}_i + \overset{1}{\omega}_s F_i^s &= 0, \\ \overset{0}{\omega}_i + \overset{2}{\omega}_i + \overset{1}{\omega}_s F_i^s &= 0, & \overset{0}{\omega}_i + \overset{1}{\omega}_i + \overset{2}{\omega}_s F_i^s &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Если теперь в (10) учесть полученные условия (13) на ковекторы, приходим к выражению

$$\nabla_j \overset{\alpha}{F}_i^k = \overset{\alpha}{\omega}_0 i \delta_j^k + \overset{\alpha}{\omega}_1 i F_j^k + \overset{\alpha}{\omega}_2 i F_j^k + {}^{*\alpha} N_{ij}^k. \quad (14)$$

Поскольку тензор $\overset{\alpha}{N}_{ij}^k$ не зависит от выбора априорной связности $\overset{0}{\nabla}$, то (14) эквивалентны исходным условиям планарности связности (5).

Ковариантное дифференцирование второй группы структурных соотношений (2) относительно планарной связности ∇ и последующая подстановка (14) дают

$$\overset{\alpha}{b}_0 i \delta_j^k + \overset{\alpha}{b}_1 i F_j^k + \overset{\alpha}{b}_2 i F_j^k + F_s^k {}^{*\beta} N_{ij}^s + F_i^s {}^{*\alpha} N_{sj}^k - {}^{*1} N_{ij}^k - {}^{*2} N_{ij}^k = 0. \quad (15)$$

Здесь $\alpha \neq \beta$ и $\overset{\alpha}{b}_i = \overset{\alpha}{\omega}_s F_i^s - \overset{1}{\omega}_i - \overset{2}{\omega}_s + \overset{\beta}{\omega}_i C_r^q$, где для удобства представления ковекторов введены матрицы ($q, r = 0, 1, 2$ – номера строк столбцов соответственно)

$$(C_r^q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\overset{2}{C}_r^q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрение (15) в канонических координатах в произвольной точке дает $\overset{\alpha}{b}_i = 0$ или в развернутой записи

$$\begin{aligned} \overset{1}{\omega}_i - \overset{1}{\omega}_s F_i^s &= 0, & \overset{2}{\omega}_i - \overset{2}{\omega}_s F_i^s &= 0, \\ \overset{2}{\omega}_i - \overset{2}{\omega}_s F_i^s - \overset{1}{\omega}_i + \overset{1}{\omega}_s F_i^s &= 0, & \overset{1}{\omega}_i - \overset{1}{\omega}_s F_i^s - \overset{2}{\omega}_i + \overset{2}{\omega}_s F_i^s &= 0, \\ \overset{1}{\omega}_s F_i^s - \overset{1}{\omega}_i + \overset{2}{\omega}_i + \overset{2}{\omega}_s F_i^s &= 0, & \overset{2}{\omega}_s F_i^s - \overset{2}{\omega}_i + \overset{1}{\omega}_i + \overset{1}{\omega}_s F_i^s &= 0. \end{aligned}$$

Последние условия вместе с (13) дают следующие ограничения на выбор определяющих ковекторов планарной связности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_i = -\frac{1}{2}\omega_s F_i^s &= \frac{1}{2}\omega_s F_i^s, & \frac{2}{1}\omega_i = -\frac{2}{1}\omega_s F_i^s &= \frac{2}{1}\omega_s F_i^s, \\ \frac{1}{1}\omega_i + \frac{1}{0}\omega_s F_i^s - \frac{1}{2}\omega_i &= 0, & \frac{1}{2}\omega_i + \frac{1}{0}\omega_s F_i^s - \frac{1}{1}\omega_i &= 0, \\ 2\frac{2}{1}\omega_i + \frac{1}{1}\omega_i - \frac{2}{2}\omega_i + \frac{2}{2}\omega_s F_i^s - \frac{1}{1}\omega_s F_i^s &= 0, & 2\frac{1}{2}\omega_i + \frac{2}{2}\omega_i - \frac{1}{1}\omega_i + \frac{1}{1}\omega_s F_i^s - \frac{2}{2}\omega_s F_i^s &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме того, из (15) получаем необходимые условия на структурные аффиноры

$$F_s^k N_{ij}^{*\beta} + F_i^s N_{sj}^{*\alpha} - N_{ij}^{*1} - N_{ij}^{*2} = 0. \quad (17)$$

Используя условия (2), а также тождества (11), которым удовлетворяет каждый структурный аффинор, можно убедиться в том, что связность с коэффициентами $\overset{0}{\Gamma}_{ij}^k + \overset{\alpha}{C}_{ij}^k$, где

$$\begin{aligned} \overset{\alpha}{C}_{ij}^k &= -\frac{1}{4}[3F_s^0(i\nabla_j)F_s^k - \nabla_s F_{(i}^k F_{j)}^s] - \overset{\alpha}{w}_0(i\delta_j^k) - \overset{\alpha}{w}_1(iF_{j)}^k - \overset{\alpha}{w}_2(iF_{j)}^k, \\ \overset{1}{w}_0 &= \frac{1}{1}\omega_i, \quad \overset{1}{w}_1 = \frac{1}{0}\omega_i, \quad \overset{1}{w}_2 = \frac{1}{2}\omega_i, \quad \overset{2}{w}_0 = \frac{2}{2}\omega_i, \quad \overset{2}{w}_1 = \frac{2}{1}\omega_i, \quad \overset{2}{w}_2 = \frac{2}{0}\omega_i, \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнение (5) с соответствующим номером α . Более того, связность с коэффициентами

$$\overset{0}{\Gamma}_{ij}^k + \overset{\alpha}{C}_{ij}^k + \overset{\alpha}{T}_{ij}^k, \quad \overset{\alpha}{T}_{ij}^k = \overset{\alpha}{t}_{ij}^k + 2\overset{\alpha}{t}_s^u \overset{\alpha}{F}_{(i}^s F_{j)}^u + \overset{\alpha}{t}_{su}^k \overset{\alpha}{F}_i^s F_j^u \quad (18)$$

при любом симметричном тензоре $\overset{\alpha}{t}_{ij}^k$ также удовлетворяет соответствующее этому номеру уравнение (5). Как показывает проверка в канонических координатах, представлениями (18) исчерпываются все такие решения. Коэффициенты искомой планарной связности должны быть решениями обоих уравнений (5) одновременно. Следовательно, необходимо существовать два тензора $\overset{\alpha}{t}_{ij}^k$, для которых

$$\overset{1}{C}_{ij}^k + \overset{1}{T}_{ij}^k = \overset{2}{C}_{ij}^k + \overset{2}{T}_{ij}^k.$$

Рассмотрев это стыковочное условие в канонических координатах в произвольной точке, учитывая при этом (16), получаем $\overset{1,2}{N}_{ij}^k = 0$.

Если в выражение (4) для тензора $\overset{1,2}{N}_{ij}^k$ подставить в качестве произвольной связности искомую планарную связность, получаем

$$2\overset{1,2}{N}_{ij}^k = F_i^s N_{js}^k - F_j^s N_{is}^k + F_i^s N_{js}^k - F_j^s N_{is}^k + 2F_s^k N_{ij}^s + 2F_s^k N_{ij}^s = 0.$$

Вместе с (17) последние равенства дают

$$\overset{*1}{N}_{ij}^k = \overset{*1}{N}_{ij}^s F_s^k = \overset{*1}{N}_{sj}^s F_i^k, \quad \overset{*2}{N}_{ij}^k = \overset{*2}{N}_{ij}^s F_s^k = \overset{*2}{N}_{sj}^s F_i^k. \quad (19)$$

В итоге получена

Теорема 1. Для того чтобы на многообразии с \mathfrak{R} -структурой существовала планарная связность без кручения, необходимо и достаточно, чтобы структурные аффиноры удовлетворяли условия (19), а определяющие ковекторы – условия (16).

Следствие 1. Из этой теоремы вытекает, в частности, что для того, чтобы на многообразии (класса C^ω) с \mathfrak{R} -структурой существовала планарная связность ∇ , сохраняющая структуру: $\nabla_j^0 F_i^k = 0$, необходимо и достаточно, чтобы структура была интегрируемой. В самом деле, если на многообразии такая связность существует, тогда из (3) и (4) вытекает, что аннулируются всех три тензора Нейенхайса N и, следовательно, \mathfrak{R} -структура интегрируемая. Обратно, если \mathfrak{R} -структура интегрируемая ($N = 0$) и все определяющие ковекторы планарной связности нулевые, тогда вследствие теоремы 1 существует планарная связность, сохраняющая структуру.

Допустим, что выполнены условия теоремы 1 и ∇^0 – некоторая планарная связность \mathfrak{R} -структуры. Тогда общее представление коэффициентов любой другой планарной связности имеет вид $\Gamma_{ij}^k + Q_{ij}^k$, где симметричный тензор Q_{ij}^k удовлетворяет систему

$$Q_{s(j}^k F_{i)}^s - F_s^k Q_{ij}^s = 0 \quad (20)$$

сразу для двух значений $\alpha = 1, 2$.

С целью отыскания общего решения системы (20) введем в рассмотрение тензор

$$\begin{aligned} Q_{ij}^k = & a_1 t_{ij}^k + a_2 F_c^1 t_{ij}^c + a_3 F_c^2 t_{ij}^c + 2a_4 t_{a(j}^k F_{i)}^a + 2a_5 t_{a(j}^k F_{i)}^2 + 2a_6 F_c^1 t_{a(j}^c F_{i)}^a + \\ & + 2a_7 F_c^2 t_{a(j}^c F_{i)}^a + 2a_8 F_c^2 t_{a(j}^c F_{j)}^a + 2a_9 F_c^1 t_{a(j}^c F_{j)}^2 + a_{10} t_{ab}^k F_i^a F_j^b + a_{11} t_{ab}^k F_i^a F_j^2 + \\ & + a_{12} F_c^1 t_{ab}^c F_i^a F_j^b + a_{13} F_c^2 t_{ab}^c F_i^a F_j^2 + a_{14} F_c^2 t_{ab}^c F_i^a F_j^b + \\ & + a_{15} F_c^1 t_{ab}^c F_i^2 F_j^b + 2a_{16} t_{ab}^k F_{(i}^a F_{j)}^b + 2a_{17} F_c^1 t_{ab}^c F_{(i}^a F_{j)}^2 + 2a_{18} F_c^2 t_{ab}^c F_{(i}^a F_{j)}^2. \end{aligned}$$

Здесь a_1, \dots, a_{18} – некоторые функции, t_{ij}^k – произвольный симметричный тензор. Искомый тензор Q_{ij}^k сконструирован из всех возможных симметричных сверток тензора t_{ij}^k со структурными аффинорами. Подставим этот тензор в систему (20) и приравняем затем к нулю коэффициенты при одинаковых свертках. Используя при этом структурные соотношения (1), приходим к следующей линейной однородной системе относительно неизвестных функций a_1, \dots, a_{18} :

1. $-a_2 + a_3 + a_4 - a_5 = 0, a_2 - a_3 - a_4 + a_5 = 0;$
2. $a_1 - a_3 + a_6 - a_9 = 0, -a_2 - a_6 + a_9 = 0;$
3. $-a_3 - a_7 + a_8 = 0, -a_1 - a_2 + a_7 - a_8 = 0;$
4. $a_1 + a_5 - 2a_6 + 2a_8 + a_{10} - a_{16} = 0, a_4 + 2a_6 - 2a_8 - a_{10} + a_{16} = 0;$
5. $a_5 + 2a_7 - 2a_9 - a_{11} + a_{16} = 0, a_1 + a_4 - 2a_7 + 2a_9 + a_{11} - a_{16} = 0;$
6. $a_8 - 2a_4 - 2a_8 + a_9 + a_{12} - a_{17} = 0, -a_6 - a_{12} + a_{17} = 0;$
7. $-a_7 - a_{13} + a_{18} = 0, a_3 - 2a_5 + a_8 - 2a_9 + a_{13} - a_{18} = 0;$

8. $a_3 + a_7 - 2a_8 + a_{14} - a_{18} = 0, -2a_4 - 2a_6 + a_8 - a_{14} + a_{18} = 0$;
9. $-2a_5 - 2a_7 + a_9 - a_{15} + a_{17} = 0, a_2 + a_6 - 2a_9 + a_{15} - a_{17} = 0$;
10. $a_4 - a_{12} + a_{14} + a_{16} = 0, a_{10} + a_{12} - a_{14} = 0$;
11. $a_{11} + a_{13} - a_{15} = 0, a_5 - a_{13} + a_{15} + a_{16} = 0$;
12. $a_6 - a_{10} - a_{14} + a_{17} = 0$;
13. $a_7 - a_{11} - a_{15} + a_{18} = 0$;
14. $a_8 - a_{14} + a_{18} = 0, -a_{10} - a_{12} + a_{14} = 0$;
15. $-a_{11} - a_{13} + a_{15} = 0, a_9 - a_{15} + a_{17} = 0$;
16. $a_5 + a_{11} + a_{16} - 2a_{17} + 2a_{18} = 0, a_4 + a_{10} + a_{16} + 2a_{17} - 2a_{18} = 0$;
17. $a_9 + a_{15} + a_{17} - 2a_{16} - 2a_{18} = 0, a_6 + a_{12} - a_{17} = 0$;
18. $a_7 + a_{13} - a_{18} = 0, a_8 + a_{14} - 2a_{16} - 2a_{17} + a_{18} = 0$

(коэффициенты при некоторых свертках равны нулю автоматически).

Эта система оказывается совместной и ее общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 &= -f_1 - f_2, \quad a_2 = a_4 = -a_6 = -a_{10} = f_1, \\ a_3 &= a_5 = -a_7 = -a_{11} = f_2, \quad a_{12} = f_0 + f_1, \quad a_{13} = f_0 + f_2, \\ a_{14} &= a_{15} = a_{17} = a_{18} = f_0, \quad a_8 = a_9 = a_{16} = 0, \end{aligned}$$

где функции f_0, f_1, f_2 можно выбирать произвольно.

Заметим, что всякое решение системы (20) в канонической системе координат в произвольной точке имеет вид: $Q_{i_0 j_0}^{k_0}, Q_{i_1 j_1}^{k_1}, Q_{i_2 j_2}^{k_2}$ любые, остальные – нули.

В то же время для построенного тензора имеем в той же системе: $Q_{i_0 j_0}^{k_0} = 8f_0 t_{i_0 j_0}^{k_0}, Q_{i_1 j_1}^{k_1} = 8f_1 t_{i_1 j_1}^{k_1}, Q_{i_2 j_2}^{k_2} = 8f_2 t_{i_2 j_2}^{k_2}$, остальные – нули.

Тем самым сконструированный тензор Q_{ij}^k является общим решением системы (20), и мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. Если $\overset{0}{\nabla}$ – некоторая планарная связность \mathfrak{R} -структурь, тогда общее представление коэффициентов планарной связности с теми же определяющими ковекторами имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \overset{0}{\Gamma}_{ij}^k + f_0(F_c^k t_{ab}^c \overset{1}{F}_i^a \overset{1}{F}_j^b + F_c^k t_{ab}^c \overset{2}{F}_i^a \overset{2}{F}_j^b + F_c^k t_{ab}^c \overset{2}{F}_i^a \overset{1}{F}_j^b + \\ &\quad + F_c^k t_{ab}^c \overset{1}{F}_i^a \overset{2}{F}_j^b + 2F_c^k t_{ab}^c \overset{1}{F}_{(i}^a \overset{2}{F}_{j)}^b + 2F_c^k t_{ab}^c \overset{2}{F}_{(i}^a \overset{1}{F}_{j)}^b + \\ &\quad + f_1(-t_{ij}^k + \overset{1}{F}_c^k t_{ij}^c + 2t_{a(j}^k \overset{1}{F}_{i)}^a - 2F_c^k t_{a(j}^c \overset{1}{F}_{i)}^a - t_{ab}^k \overset{1}{F}_i^a \overset{1}{F}_j^b + \overset{1}{F}_c^k t_{ab}^c \overset{1}{F}_i^a \overset{1}{F}_j^b) + \\ &\quad + f_2(-t_{ij}^k + \overset{2}{F}_c^k t_{ij}^c + 2t_{a(j}^k \overset{2}{F}_{i)}^a - 2F_c^k t_{a(j}^c \overset{2}{F}_{i)}^a - t_{ab}^k \overset{2}{F}_i^a \overset{2}{F}_j^b + \overset{2}{F}_c^k t_{ab}^c \overset{2}{F}_i^a \overset{2}{F}_j^b), \end{aligned}$$

где t_{ij}^k – произвольный симметричный тензор, f_0, f_1, f_2 – произвольные функции.

4. Преобразования планарной связности

Рассмотрим планарную связность ∇ с коэффициентами Γ_{ij}^k и определяющими ковекторами $\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix} \omega_i \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \omega_i$ и ее преобразование $\bar{\nabla} = \nabla + P$ тензором аффинной деформации

$$P_{ij}^k = 2p_0(i\delta_j^k) + 2p_1(iF_j^k) + 2p_2(iF_j^k). \quad (21)$$

Обозначим коэффициенты преобразованной связности $\bar{\nabla}$ через $\bar{\Gamma}_{ij}^k$, тогда

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + 2p_0(i\delta_j^k) + 2p_1(iF_j^k) + 2p_2(iF_j^k). \quad (22)$$

Приняв во внимание связь между ковариантными производными

$$\bar{\nabla}_j F_i^k = \nabla_j F_i^k + F_i^s P_{js}^k - F_s^k P_{ji}^s$$

и структурные соотношения (2), получим

$$\bar{\nabla}_j F_i^k = \theta_0(i\delta_j^k) + \theta_1(iF_j^k) + \theta_2(iF_j^k), \quad \theta_i = \begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix} \omega_i + \begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix} q_i, \quad \theta_i = \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \omega_i + \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} q_i, \quad (23)$$

где ковекторы $\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \end{smallmatrix} q_i, \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} q_i$ определенным образом выражаются через ковекторы p_i, p_i^α и их свертки со структурными аффинорами. Таким образом, преобразование всякой планарной связности тензором аффинной деформации (21) дает снова планарную связность, в общем случае с другими определяющими ковекторами.

Кривая $\gamma : x^i = x^i(t)$ в многообразии M^n называется (E, F, \bar{F}) -планарной кривой относительно связности ∇ , если при некоторых функциях параметра вдоль этой кривой выполняются равенства

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = f(t) \frac{dx^k}{dt} + f(t) F_s^k \frac{dx^s}{dt} + f(t) \bar{F}_s^k \frac{dx^s}{dt}. \quad (24)$$

При преобразовании связности ∇ тензором аффинной деформации (21) структура уравнений (23) не изменяется. Следовательно, у связностей $\nabla, \bar{\nabla} = \nabla + P$ общие (E, F, \bar{F}) -планарные кривые. Если к тому же связности ∇ является планарной, то ее (E, F, \bar{F}) -планарные кривые имеют уплощение порядка не менее $n - 3$. Действительно, если из касательного вектора $\xi^i = dx^i/dt$ построить ее векторы кривизны $\xi_1^i = \nabla_t \xi^i, \xi_2^i = \nabla_t \xi_1^i, \xi_3^i = \nabla_t \xi_2^i$, то, как нетрудно убедиться, вдоль (E, F, \bar{F}) -планарной кривой $\xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k \xi^l \equiv 0$.

Таким образом, каждая геодезическая кривая многообразия относительно планарной связности ∇ :

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$$

получает вследствие преобразования (21) в каждой точке уплощение порядка не менее $n - 3$ [11, с. 473]. В связности $\bar{\nabla} = \nabla + P$ эта кривая будет (E, F, \bar{F}) -планарной кривой. С точки зрения теории уплощающих отображений преобразование (21) планарной связности ∇ является 3-геодезическим преобразованием (первого линейного типа), обладающим свойством взаимности [8]. Совокупность всех таких преобразований данной планарной связности ∇ образует группу.

Как было показано в п. 1, касательное пространство многообразия с \mathfrak{K} -структурой распадается в каждой точке в прямую сумму трех подпространств. Рассмотрим соответствующие им распределения $D_0 : x \rightarrow F^+ \cap F^+$, $D_1 : x \rightarrow F^+$, $D_2 : x \rightarrow F^-$. Для интегрируемой \mathfrak{K} -структуры на многообразии класса C^ω эти распределения будут инволютивными, и существуют их максимальные интегральные многообразия M^{n_0} , M^{n_1} , M^{n_2} . Всякое преобразование канонических координат имеет якобиеву матрицу

$$J(x^1, \dots, x^n) = \begin{pmatrix} J(x^{i_0}) & 0 & 0 \\ 0 & J(x^{i_1}) & 0 \\ 0 & 0 & J(x^{i_2}) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица коммутирует с матрицами (6), т. е. структурные аффиноры относительно таких допустимых преобразований имеют канонический вид. Тем самым структурная группа $GL(n, R)$ касательного расслоения $T(M^n)$ редуцируется к подгруппе матриц $J(x^1, \dots, x^n)$. Поскольку внутри каждой серии канонических координат они преобразуются независимо от координат другой серии, то мы получаем гладкий атлас карт, относительно которого многообразие представляется двойным произведением $M^n = M^{n_0} \times M^{n_1} \times M^{n_2}$.

Когда $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$ -планарная кривая многообразия M^n относительно связности ∇ лежит в интегральном многообразии M^{n_0} , то она является геодезической кривой и при преобразовании $\overline{\nabla} = \nabla + P$ остается также геодезической кривой. Если же $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$ -планарная кривая лежит в интегральном многообразии M^{n_1} или M^{n_2} , то она является соответственно $(E, \overset{2}{F})$ -планарной или $(E, \overset{1}{F})$ -планарной кривой, оставаясь таковой при преобразовании $\overline{\nabla} = \nabla + P$. В общем случае $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$ -планарные кривые связности ∇ остаются $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$ -планарными кривыми связности $\overline{\nabla} = \nabla + P$.

Summary

S.G. Leiko. Planar connections onto manifold with commutative algebra of two almost product structures.

In the present paper we study special affine connections on manifolds with affinor structure $(E, \overset{1}{F}, \overset{2}{F})$, $\overset{1}{F}^2 = \overset{2}{F}^2 = E$, $\overset{1}{F}\overset{2}{F} = \overset{2}{F}\overset{1}{F} = \overset{1}{F} + \overset{2}{F} - E$.

Литература

1. *Yano K.* Differential geometry of complex and almost complex spaces. – Pergamon Press. – 1965.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.
3. *Houch Chorn-Shi.* The integrability of a structure on a differentiable manifold // Tohoku Math. J. – 1965. – V. 17, No 1. – С. 72–75.
4. *Вишневский В.В., Шурыгин В.В., Широков А.П.* Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – 262 с.
5. *Широков А.П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. – ВИНИТИ. – 1974. – Т. 11. – С. 153–207.

6. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 225 с.
7. Лейко С.Г. Специальные p -геодезические отображения пространств аффинной связности // Rev. Roum. pure et appl. – 1982. – V. 27, No 10. – P. 1003–10026.
8. Лейко С.Г. Линейные p -геодезические диффеоморфизмы многообразий с аффинной связностью // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 5. – С. 80–83.
9. Frölicher A. Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen // Math. Ann. – 1955. – V. 129. – P. 50–95.
10. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure // J. Math. Soc. Japan. – 1956. – V. 26. – P. 43–77.
11. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.

Поступила в редакцию
16.12.04

Лейко Святослав Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Одесского государственного университета.

E-mail: *leiko@normaplus.com*