

Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского



Н. И. Лобачевский

Том 68

Министерство науки и высшего образования РФ
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Региональный научно-образовательный математический центр ПФО

Всероссийская школа-конференция "Лобачевские чтения"

Сборник трудов

(Казань, 27 ноября – 2 декабря 2024 г.)



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2024

Институт математики и механики им.
Н.И. Лобачевского Казанского (Приволж-
ского) федерального университета
Региональный научно-образовательный
математический центр Приволжского
федерального округа
ул. Кремлевская, 35, Казань
Республика Татарстан, Всероссийская
Федерация, 420008

Lobachevsky Institute of Mathematics
and Mechanics of Kazan (Volga region)
Federal University
Regional Scientific and Educational
Mathematical Center of the Volga
Federal District

35, Kremlevskaya str., Kazan, Republic of
Tatarstan, Russian Federation, 420008

Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного
математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2024-
1438

УДК 510:512:514:517
ББК 22.1

Редакционная коллегия: А.Н. Абызов, Ю.Р. Агачев, А.А. Агафонов, Д.В. Бережной,
С.Р. Насыров, А.А. Попов, К.А. Поташев, О.А. Саченков, Е.А. Турилова, Л.Р. Шакирова

**Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.68 // *Материалы
Всероссийской школы-конференции "Лобачевские чтения - 2024"* – Казань: Изд-во
КФУ, 2024. – Т.68. – 109 с.**

Сборник содержит материалы Всероссийской школы-конференции "Лобачевские чтения - 2024",
организованной на базе Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского
(Приволжского) федерального университета. Школа-конференция проведена в Казани с 27 ноября
по 2 декабря 2024 года.

Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, маги-
странтов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и
ее приложений.

УДК 510:512:514:517
ББК 22.1

- © Региональный научно-образовательный математический центр при КФУ, 2024
- © Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, 2024
- © Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Ю.Р. Агачев, М.Ю. Першагин, А.В. Попова. О сходимости одного варианта метода механических квадратур для условно корректного интегродифференциального уравнения второго порядка	6
Ю.Р. Агачев, Р.К. Губайдуллина, А.В. Гуськова. Сходимость общего "полиномиального" проекционного метода решения одного класса нелинейных интегродифференциальных уравнений дробного порядка	9
И.Р. Альбеков, Л.У. Султанов. Определение параметров закона деформационного упрочнения методом инверсного анализа	12
А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов. Негомотетические проективные алгебры Ли в h -пространстве $H_{32,2}$	16
И.М. Асадуллин, К. И. Гареев, Д. В. Беденьгов. Рекомендательная система формирования набора схожих документов цифровой библиотеки на основе анализа формульного содержания	18
О. Асман, А.А. Попов. Самодействие электромагнитного заряда в кротовой норе с бесконечно короткой горловиной	21
Р.Р. Байгильдина. Приложение анализа временных рядов для оценки динамики доходов населения	24
Д. В. Беденьгов, К. И. Гареев, И.М. Асадуллин. Агрегатор для системы формирования очереди на автомойке.	26
Т.А. Беликова. Применение алгоритма поиска устойчивых гомологий в анализе данных.	30
И.А. Беспалов. Определение физико-механических характеристик решетчатых структур	31
Н.Ф. Билалова. Оценки малых вероятностей успеха в испытаниях Бернулли и их d -риск.	33
М.Ш. Бутаев. Самодействие заряда в пространстве конуса	36
П.С. Вансков . Задача стабилизации динамической системы под влиянием бионической системы управления	40
К. И. Гареев, Д. В. Беденьгов, И.М. Асадуллин. Сервис восстановления научных документов на основе графа знаний	43
Д.А. Исмагилов, Н.Н. Гумеров, А.Н. Нуриев. Численное исследование пропульсивного волнообразного движения тела в жидкости	47
И.А. Кашапов. Космологические решения в $f(R)$ гравитации с дополнительными измерениями	50
И.К. Курбанов, Х.П. Сайдалиев. Точные решения для некоторых нелинейных задач уравнения электромагнитоупругости	54
С.Е. Латыпова, Д.В. Маклаков. Применение схемы Ву для решения обратной задачи о кавитационном обтекании гидропрофиля	58
А.Д. Маклаков. Топологические аналоги китайской теоремы об остатках	59
А.В. Марьян, А.А. Попов. Черные дыры в полуклассической $f(R)$ теории гравитации с дополнительными измерениями	62
А.Н. Миронов, Е.Ф. Коськова. Об одной задаче для гиперболической системы уравнений с двукратными характеристиками	64

<i>Е.В. Мымрина.</i> Моделирование гемодинамики в сети сосудов с использованием одномерного приближения	66
<i>Р.М. Османова.</i> Исследование сигналов	70
<i>К.Р. Рашидова.</i> Динамические модели оценки влияния инвестиций на экономический рост в странах БРИКС	71
<i>А.А. Саламатин, А.С. Халиуллина.</i> Гидродинамическая неустойчивость фронта вытеснения в условиях сверхкритической флюидной экстракции.	75
<i>Д.С. Сафаров , С.К. Миратов , Ганиев М.Ш..</i> Точные решения для некоторых классов нелинейных эллиптических систем уравнений второго порядка на плоскости	78
<i>Д. В. Седова, В.В.Трофимов.</i> Решение статических задач электромагнитной теории с помощью ажурной и моментной схем МКЭ.	81
<i>К.О. Спиридонова.</i> Проектирование винтового пресса для испытаний совмещенных с оптическими измерениями	82
<i>Ф.М. Талбакзода.</i> Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье некоторых почти-периодических функций	84
<i>А.Н. Токарева.</i> Модель аугментации выборочных данных многомерного случайного процесса для задач поиска аномалий.	88
<i>П.Д. Туктарова.</i> Исследования жесткостных свойств решетчатых структур интрамедуллярного эндопротеза	91
<i>Д.М. Фархутдинов.</i> Сегментация объекта на трехмерном изображении по его геометрическим признакам	92
<i>Хадур Махмуд.</i> Один метод построения идемпотентов в унитарной алгебре	93
<i>Д.Э. Хамзин.</i> Оптимизация конструкций на основе данных компьютерной томографии	95
<i>Д.Ю. Хубиева.</i> Оценка кредитоспособности заемщика с помощью метода случайного леса	98
<i>Е.А. Частоедова.</i> Эконометрические методы анализа влияния миграционных потоков на уровень занятости	100
<i>Е.Е. Шабардин.</i> Вычисление истинных и фиктивных собственных значений граничных интегральных уравнений Мюллера	101
<i>Ф.М. Шамсудинов, Р.С. Валиев.</i> Интегральные представления решений для одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними суперсингулярными линиями	105

УДК 517.968:519.642.2

**О СХОДИМОСТИ ОДНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР
ДЛЯ УСЛОВНО КОРРЕКТНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Ю.Р. Агачев¹, М.Ю. Першагин², А.В. Попова³

¹ *juryi.agachev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

² *michael.pershagin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

³ *apasvropova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье строится вычислительная схема одного варианта метода механических квадратур для условно корректного интегро-дифференциального уравнения второго порядка и дается ее теоретическое обоснование. В частности, при минимальных условиях на известные функции доказана сходимость соответствующих полиномиальных приближений к точному решению по норме пространства дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: пространство $C^{(2)}$, условно корректное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, полиномиальное приближение, метод механических квадратур, сходимость метода.

Пусть $p \in \mathbb{N}$ – произвольно фиксированное, $y(t)$ и $h_j(t, s)$, $j = \overline{0, p}$, – известные функции на $[-1, 1]$ и $[-1, 1] \times [-1, 1]$ соответственно, обладающие гладкостными свойствами определенного порядка, $q(t)$, $t \in [-1, 1]$, – вес Чебышева первого или второго рода.

В работе [1] для условно корректного интегро-дифференциального уравнения

$$x(t) + \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 q(s) h_j(t, s) x^{(j)}(s) ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

в пространстве $C^{(p)} \equiv C^{(p)}[-1, 1]$ p -раз непрерывно-дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций с нормой

$$\|x\|_p \equiv \|x\|_{C^{(p)}} = \|x\|_C + \|x^{(p)}\|_C, \quad x \in C^{(p)},$$

дано обоснование метода механических квадратур. В основу этого метода была положена квадратурная формула типа Гаусса по весу $q(t)$, т.е. интерполяционная квадратурная формула с узлами Чебышева первого рода в случае веса Чебышева первого рода, с узлами Чебышева второго рода в случае веса Чебышева второго рода. Указанная квадратурная формула, как хорошо известно, имеет вид:

$$\int_{-1}^1 q(t) z(t) dt \approx \sum_{i=0}^n A_i z(t_i),$$

где $\{t_i\}$ – узлы соответствующей квадратурной формулы, а коэффициенты $A_i = \pi/(n+1)$, $i = \overline{0, n}$, в случае веса Чебышева первого рода и $A_i = (1 - t_i^2)\pi/(n+2)$ – в случае веса Чебышева второго рода. Доказано, что интерполяционные полиномы, построенные через решения соответствующей системы метода квадратур, построенной по узлам коллокации, совпадающим с узлами квадратурной формулы, сходятся по норме пространства $C^{(p)}$ к решению уравнения ((1)), если функции $y(t)$ и $h(t, s)$ (по обоим переменным) имеют непрерывные производные порядка $2p$, удовлетворяющие условию Гельдера некоторого порядка α , $0 < \alpha \leq 1$. Соответствующий класс Гельдера обозначим через H_α . При этом для разрешимости системы метода квадратур достаточно требования принадлежности правой части $y(t)$ пространству $C^{(p)}$.

С целью ослабления условий на известные функции, здесь нами предлагается другой вариант метода механических квадратур приближенного решения уравнения (1) в частном случае $p = 2$:

$$x(t) + \sum_{j=0}^2 \int_{-1}^1 q(s) h_j(t, s) x^{(j)}(s) ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (1')$$

Вес $q(t)$, как и в работе [1], является весом Чебышева первого рода $(1 - t^2)^{-1/2}$ или весом Чебышева второго рода $(1 - t^2)^{+1/2}$. Через t_i , $i = \overline{0, n}$, будем обозначать нули полинома степени $n \in N$ из системы полиномов, ортогональных с весом $q(t)$ на отрезке $[-1, 1]$:

$$t_i = \cos \frac{2i+1}{2n+2} \pi, \quad q(t) = (1 - t^2)^{-1/2};$$

$$t_i = \cos \frac{i+1}{n+2} \pi, \quad q(t) = (1 - t^2)^{+1/2}.$$

Введем также точки τ_k , $k = \overline{0, n}$, являющиеся нулями полинома Чебышева первого рода степени $n - 1$, обогатенные концевыми точками:

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_k = \cos \frac{2k-1}{2n-2} \pi, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \tau_n = -1.$$

Приближенное решение уравнения (1') будем строить в виде полинома степени n

$$x_n(t) = \sum_{m=0}^n c_m t^m, \quad (2)$$

неизвестные коэффициенты $\{c_m\}$ которого определим из условий

$$x_n(\tau_k) + \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^n A_i h_j(\tau_k, t_i) x_n^{(j)}(t_i) = y(\tau_k), \quad k = \overline{0, n}. \quad (3)$$

Условия (3) относительно коэффициентов $\{c_m\}$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{m=0}^n \gamma_{km} c_m = y(\tau_k), \quad k = \overline{0, n}, \quad (4)$$

где

$$\gamma_{km} = \tau_k^m + \sum_{i=0}^n A_i \sum_{j=0}^2 \frac{m!}{(m-j)!} h_j(\tau_k, t_i) t_i^{m-j}. \quad (5)$$

Пусть D – класс Дини–Липшица в пространстве C непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены предположения:

1) функция $y(t)$ имеет производную второго порядка $y''(\cdot) \in D$;
 2) непрерывные на $[-1, 1] \times [-1, 1]$ функции $h_j(t, s)$, $j = \overline{0, 2}$, имеют частную производную второго порядка по t , принадлежащую классу D по переменной t равномерно относительно s ;

3) уравнение (1') имеет единственное решение при любой правой части из $C^{(2)}$.

Тогда система (4), (5) для всех натуральных n , начиная с некоторого, также имеет единственное решение $\{c_m^*\}$. Приближенные решения $x_n^*(t) = \sum_{m=0}^n c_m^* t^m$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ по норме пространства $C^{(2)}$.

Следствие. Если, в условиях теоремы, $y''(\cdot) \in H_\alpha$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_j(t, s) \in H_\alpha$, $j = \overline{0, 2}$, по t равномерно относительно s , то для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^{(2)}} = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Доказательство теоремы и следствия проводится на базе общей теории приближенных методов анализа (см., напр., гл. I монографии [2]) и некоторых результатов теории приближений и механических квадратур (см. работы [3, 4]).

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов, II.* // Изв. вузов. Математика. – 1968, № 10. – С. 21–29.
2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань, изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.
3. Байгузов Н. С. *Некоторые оценки производных алгебраических многочленов и их приложения к приближенному дифференцированию.* // Матем. заметки. – 1969. – Т. 5, № 2. – С. 183–194.
4. Габдулхаев Б. Г. *Квадратурные формулы наивысшей тригонометрической степени точности и их приложения* // Изв. вузов. Математика. – 2007, № 7. – С. 28–41.

ON THE CONVERGENCE OF ONE VERSION OF THE METHOD OF MECHANICAL QUADRATURES FOR A CONDITIONALLY CORRECT INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Yu.R. Agachev, M.Yu. Pershagin, A.V. Popova

The article constructs a computational scheme of one version of the mechanical quadrature method for a conditionally correct integro-differential equation of the second order and provides its theoretical justification. In particular, under minimal conditions on known functions, the convergence of the

corresponding polynomial approximations to the exact solution in the norm of the space of twice continuously differentiable functions is proven.

Keywords: space $C^{(2)}$, conditionally correct equation, integro-differential equation, polynomial approximation, mechanical quadrature method, convergence of the method.

УДК 517.968: 519.6

СХОДИМОСТЬ ОБЩЕГО "ПОЛИНОМИАЛЬНОГО" ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ю.Р. Агачев¹, Р.К. Губайдуллина², А.В. Гуськова³

¹ *jury.agachev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

² *rkubajdullina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

³ *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Работа посвящена построению "полиномиальных" приближений к решению одного класса нелинейных интегральных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля, рассматриваемых в паре пространств Гёльдера. С использованием метода гладких операторов дано теоретическое обоснование общего проекционного метода. В частности, доказана сходимость соответствующих "полиномиальных" приближений к точному решению исходного уравнения.

Ключевые слова: пространство Гёльдера, нелинейное уравнение, интегральное уравнение, дробный интеграл, "полиномиальное" приближение, проекционный метод, сходимость метода

Пусть фиксированы вещественные числа $0 < \alpha < 1, 0 < \beta \leq \alpha$. Рассмотрим нелинейное дробно-интегральное уравнение вида

$$A(x) \equiv F\left(t, (I_+^\alpha x)(t), \int_0^1 \Phi(t, s, (I_+^\beta x)(s)) ds\right) = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где F, Φ – известные функции. Здесь I_{a+}^α – левосторонний дробно-интегральный оператор Римана–Лиувилля порядка α (см., например, в [1, с. 42]):

$$(I_{a+}^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Введем в рассмотрение пространство $H_\delta, 0 < \delta < 1$, непрерывных на $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем δ , с нормой

$$\|x\|_\delta = \|x\|_C + H(x; \delta),$$

где $\|x\|_C = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ и $H(x; \delta) = \sup_{t_1, t_2 \in [0, 1]} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\delta}$ – наименьшая постоянная Гёльдера.

Как хорошо известно, оно является банаховым пространством. Через $H_{\delta, 0}$ будем обозначать подпространство пространства H_δ функций, обращающихся в нуль на левом конце промежутка.

В предположении, что $\alpha + \delta < 1$, уравнение (1) будем рассматривать в паре банаховых пространств $X = H_{\delta, 0}$ и $Y = H_{\alpha + \delta, 0}$. Это возможно, если в уравнении (1) оператор A отображает X в Y . Очевидно, для этого достаточно выполнения условий:

- 1) $y \in Y$;
- 2) функция F при $t = 0$ обращается в нуль;
- 3) $F(t, u, v)$ по t удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha + \delta$, по u, v – условию Липшица;
- 4) $\Phi(t, s, u)$ по t удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha + \delta$, по u – условию Липшица.

Предположим, что уравнение (1) имеет изолированное решение $x^*(\cdot) \in X$ в некотором шаре $\|x - x^*\|_\delta < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – фиксированное. Поскольку это решение с практической точки зрения нам неизвестно, займемся вопросом построения обобщенных полиномов, сколь угодно близких по норме пространства X к x^* . Для их построения воспользуемся методом гладких операторов. Для этого потребуем дополнительно, что функция Φ имеет производную по третьему аргументу в точке $x^*(\cdot) \in X$, а F – производную по второму и третьему аргументам в указанной точке. Тогда оператор A в точке $x^*(\cdot)$, очевидно, имеет производную Фреше $A'(x^*)$, определяемую по формуле

$$\begin{aligned} A'(x^*)x &\equiv F_2' \left(t, (I_+^\alpha x^*)(t), \int_0^1 \Phi(t, s, (I_+^\beta x^*)(s)) ds \right) \cdot (I_+^\alpha x)(t) + \\ &+ F_3' \left(t, (I_+^\alpha x^*)(t), \int_0^1 \Phi(t, s, (I_+^\beta x^*)(s)) ds \right) \int_0^1 \Phi_3' \left(t, s, (I_+^\beta x^*)(s) \right) \cdot (I_+^\beta x)(s) ds \\ &\equiv a(t)(I_+^\beta x)(s) + b(t) \int_0^1 h(t, s)(I_+^\beta x)(s) ds, \end{aligned}$$

где

$$a(t) = F_2' \left(t, (I_+^\alpha x^*)(t), \int_0^1 \Phi(t, s, (I_+^\beta x^*)(s)) ds \right),$$

$$b(t) = F_3' \left(t, (I_+^\alpha x^*)(t), \int_0^1 \Phi(t, s, (I_+^\beta x^*)(s)) ds \right),$$

$$h(t, s) = \Phi_3' \left(t, s, (I_+^\beta x^*)(s) \right).$$

В пространствах X и Y выберем подпространства X_n и Y_n соответственно:

$$X_n = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k t^{k-\alpha}, c_k \in R \right\}, Y_n = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k t^k, c_k \in R \right\}.$$

Пусть $P_n : Y \rightarrow Y_n$ – произвольно фиксированный оператор проектирования.

В предположении $a(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, приближенное решение уравнения (1) будем строить как точное решение уравнения

$$A_n(x_n) \equiv P_n[A(x_n)/a(t)] = P_n[y(t)/a(t)], x_n \in X_n, n \in N. \quad (2)$$

Для метода (1), (2) имеет место следующий результат.

Теорема. Пусть выполнены предположения:

- 1) правая часть $y \in H_\gamma \cap Y \equiv Y', \alpha + \beta < \gamma \leq 1$;
- 2) $a(t) \neq 0, t \in [0, 1], a \in H_\gamma$;
- 3) $b(t) \cdot h(t, \cdot) \in Y', h(\cdot, s) \in L_1$;
- 4) оператор $P_n : Y \rightarrow Y_n$ является проекционным;
- 5) уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t)$ в некотором шаре пространства X ;
- 6) оператор $A'(x^*) : X \rightarrow Y$ имеет ограниченный обратный.

Тогда уравнение (2) также имеет единственное решение $x_n^*(t)$, хотя бы при всех достаточно больших натуральных n . При этом приближения $x_n^*(t)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к решению $x^*(t)$ уравнения (1) по норме пространства X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(\frac{\ln n}{n^{\gamma-\alpha-\beta}}\right).$$

Отметим, что достаточные условия разрешимости и сходимости при $n \rightarrow \infty$ решений x_n^* уравнения (2) к точному решению x^* уравнения (1) дает лемма 19.1 из монографии [2, с. 277]. Условия этой леммы обеспечиваются при указанных выше предположениях относительно оператора A , при этом $A'(x^*) : X \rightarrow Y$ имеет в главной части дробно-интегральный оператор $I_{a+}^\alpha : X \rightarrow Y$, обладающий свойством непрерывной обратимости. Последнее обстоятельство позволяет нам применять результаты по обоснованию общего проекционного метода для линейных дробно-интегральных уравнений и его конкретных реализаций (см., например, работу [3])

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я. *Приближенное решение операторных уравнений*. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
3. Agachev J. R, Galimyanov A. F. *o the justification of the general projection method for solving linear integral equations with a fractional Riemann-Liouville integral in the principal part* // Journal of Physics: Conference Series – 2019. – Т. 1158. – № 2. – Art. № 022002(DOI 10.1088/1742-6596/1158/2/022002).

CONVERGENCE OF THE GENERAL "POLYNOMIAL" PROJECTION METHOD FOR SOLVING ONE CLASS OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

J.R. Agachev, R.K. Gubajdullina, A.V. Guskova

The work is devoted to the construction "polynomial" approximations to the solution one class of nonlinear integral equations with a fractional Riemann-Liouville derivative, considered in a pair of Holder spaces. Using the method of smooth operators a theoretical justification of the general projection method is given. In particular, the convergence corresponding "polynomial" approximations to the exact solution of the original equation is proven.

Keywords: Holder space, nonlinear equation, integral equation, fractional integral, "polynomial" approximation, projection method, convergence of the method

УДК 531/534

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ
МЕТОДОМ ИНВЕРСНОГО АНАЛИЗА**

И.Р. Альбеков¹, Л.У. Султанов²

¹ ireckalbekov@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² lenar.sultanov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе рассматривается процесс определения констант закона деформационного упрочения титанового сплава ОТ4-1 по данным испытаний цилиндрических пропорциональных образцов на растяжение. Начальные приближения констант получены посредством регрессионного анализа, уточнение их значений производятся инверсным методом на основе сравнения экспериментальных и расчетных нагрузочных кривых. Адекватность математической модели оценивается по критерию Фишера. Приведен качественный анализ поведения выбранного алгоритма при решении рассматриваемой задачи, предложена интегральная формулировка целевой функции, значение которой не зависит от плотности локального распределения экспериментальных точек на нагрузочной кривой.

Ключевые слова: деформационное упрочнение, метод конечных элементов, оптимизация, инверсный анализ, дисперсия, критерий Фишера, целевая функция

Решение физически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела требует использования достоверных данных о реологических свойствах материала, которые в ряде случаев задаются аналитически в виде функциональной зависимости сопротивления деформации от таких параметров, как накопленная деформация, скорость деформации, температура и т.д. Вид и коэффициенты функции сопротивления определяются на основе обработки данных экспериментов, которые для получения корректных результатов необходимо проводить при постоянных значениях параметров, что на практике труднодостижимо из-за неизбежных отклонений реальных условий деформирования от принятых гипотетически. Высокая точность определения напряженно-деформированного состояния (НДС) методом конечных элементов (МКЭ) позволяет использовать результаты расчетов для уточнения констант реологической модели [1].

Целью данной работы является построение методики определения статистически достоверной реологической модели материала на основе решения задачи поиска минимума функции отклонения расчетных значений параметров процесса деформирования от экспериментальных методом инверсного анализа.

При инверсном анализе в качестве факторов процесса деформирования принимаются константы функции сопротивления, а откликом служит значение целевой функции, формулируемой, как правило, в виде суммы квадратов разностей относительных отклонений результатов моделирования испытаний МКЭ от точечных значений результатов эксперимента [1, 2]. Остановка алгоритма производится при достижении целевой функции некоторого заранее заданного критического значения. Проблема подобной формулировки заключается в отсутствии четких критериев определения условий остановки алгоритма.

Применение критерия Фишера равенства остаточной и выборочной дисперсий точечных значений реакции позволяет задать целевую функцию в виде дисперсии адекватности нагрузочных кривых [3]:

$$D_{aF} = \frac{1}{k - n - 1} \cdot \sum_k (F_k - \bar{F}_k)^2,$$

где k – число расчетных точек; n – число констант функции сопротивления; F_k – расчетное значение силы в k -ой точке; \bar{F}_k – среднее экспериментальное значение силы в k -ой точке.

Условие остановки алгоритма оптимизации в таком случае принимает следующий вид:

$$F_o < F_c,$$

где $F_o = D_{aF}/D_{yF}$ – наблюдаемое значение критерия Фишера, D_{yF} – дисперсия воспроизводимости; F_c – критическое значение критерия Фишера.

Рассматривалась следующая формулировка закона деформационного упрочнения:

$$\sigma_F = \begin{cases} \sigma_F(\varepsilon_{Pmin}), \varepsilon_p < \varepsilon_{Pmin}; \\ A + C \cdot \varepsilon_p^N, \varepsilon_p \geq \varepsilon_{Pmin} \end{cases};$$

где σ_F – напряжение текучести; ε_p – пластическая деформация; ε_{Pmin} – минимальная пластическая деформация; A, C и N – параметры закона упрочнения.

Данная формулировка позволяет учитывать площадку текучести, что существенно повышает точность определения НДС и накопленной пластической деформации. Начальные приближения параметров A, C и N были определены посредством регрессионного анализа при помощи алгоритма Левенберга-Макквардта [4]. Значение минимальной пластической деформации принималось равным среднему значению предела пропорциональности.

Значения констант закона упрочнения уточнялись в итерационном процессе поиска минимума целевой функции методом покоординатного спуска, определение точки следующего начального приближения по параметру производилось методом квадратичной параболы. Приближения констант закона деформационного

упрочнения для первой итерации представлены в таблице 1. На рисунке 1 представлены нагрузочные кривые, соответствующие приведенным начальным приближениям.

№ итерации	№ шага	Константа				Целевая функция
		A	C	N	ϵ_{Pmin}	
-	-	666,05	532,51	0,336843	0,006231	$3,143 \cdot 10^6$
1	1	668,55	648,27	0,41031	0,001493	$3,14 \cdot 10^6$
	2					$5,417 \cdot 10^5$
	3		$4,366 \cdot 10^4$			
	4		$1,716 \cdot 10^4$			

Таблица 1. Значения констант функции сопротивления на первой итерации

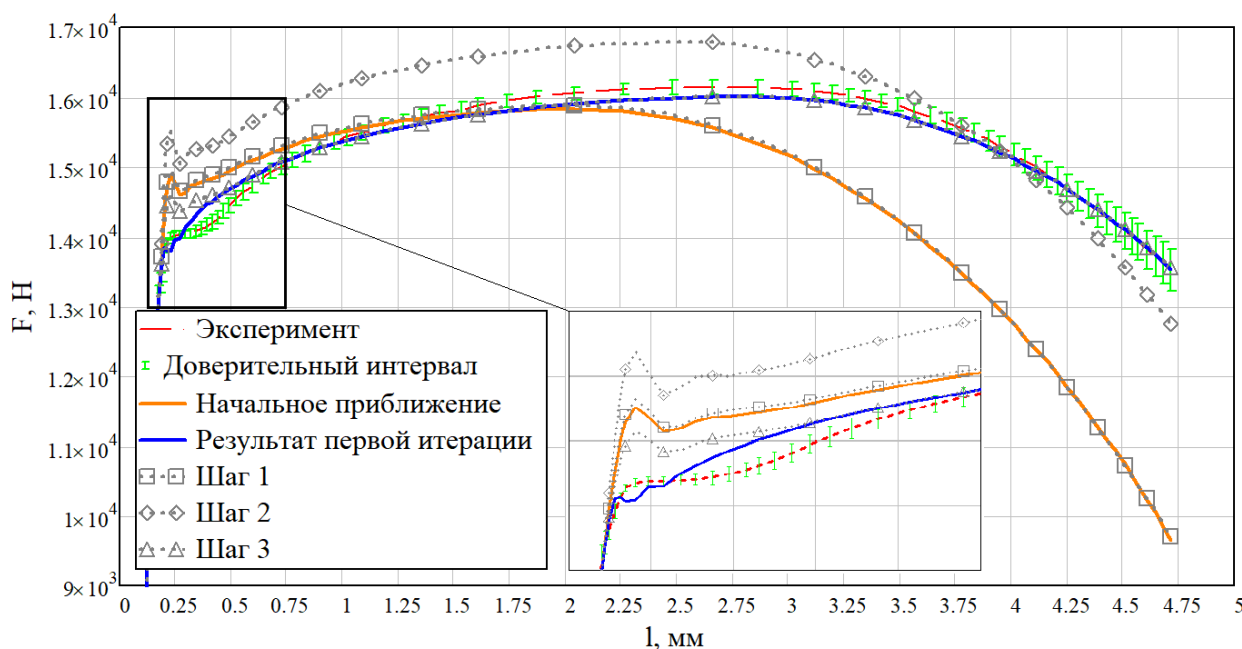


Рис. 1. Нагрузочные кривые первой итерации

По сравнению нагрузочных графиков, полученных в ходе приближения параметров процесса на первой полной итерации алгоритма можно отметить, что в силу специфики формулировки целевой функции выбранная методика становится чувствительной к локальной плотности распределения точек эксперимента на рассматриваемом участке силовой кривой. Это выражается в последовательном смещении графиков области пластического деформирования в сторону границы упругой области при наблюдаемой низкой чувствительности к довольно существенной ошибке, обнаруживающей себя в окрестностях точки достижения временного сопротивления. С целью исключения обнаруженной зависимости рациональным решением представляется принять формулировку целевой функции в одном из двух следующих видов, не зависящих от числа опорных точек нагрузочного графика.

Формулировка I: сумма площадей фигур, ограниченных нагрузочными кривыми натурального и численного эксперимента должна быть таковой, чтобы обеспечивалось статистическое равенство остаточной и выборочной дисперсии:

$$Q_{ij} = \sum_{q=1} \int_{l_q}^{l_{q+1}} (f(l) - \varphi_{ij}(l)) dl,$$

где q – количество точек пересечения нагрузочных кривых $f(l) = \varphi_{ij}(l)$; l_q – значение перемещения в q -ой точке пересечения; $f(l)$ – экспериментальная нагрузочная кривая; $\varphi_{ij}(l)$ – нагрузочная кривая, полученная на i -ой итерации по j -ой константе.

Формулировка II: значение определенного интеграла распределения дисперсии адекватности по области исследуемых перемещений должно быть таковым, чтобы обеспечивалось статистическое равенство остаточной и выборочной дисперсии:

$$Q_{ij} = \int_0^{l_{max}} D_{aFij}(l) dl,$$

где $D_{aFij}(l)$ – распределение дисперсии адекватности на i -ой итерации по j -ой константе.

Первая формулировка представляется более наглядной и менее чувствительной к отклонениям, вызванным погрешностью интерполяции между опорными точками, хотя и требует дополнительной процедуры нахождения пределов интегрирования в алгоритме оптимизации.

Литература

1. Власов А.В., *Конечно-элементное моделирование технологических процессовковки и объемной штамповки* // Учебное пособие под ред. А. В. Власова. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2019. – 383 с., ил.
2. Szeliga D., Matuszyk P., Kuziak R., Pietrzyk M. *Identification of rheological parameters on the basis of various types of plastomeric tests* // Journal Of Materials Processing Technology 125-126, 2002, 150-154.
3. Ящерицын П.И., Махаринский Е. И. *Планирование эксперимента в машиностроении* // Справочное пособие – Мн.: Выш. шк., 1985. – 286 с., ил.
4. Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O., *Methods for Non-Linear Least Squares Problems* // Technical University of Denmark, 2004.

DETERMINATION OF STRAIN-HARDENING LAW PARAMETERS USING INVERSE ANALYSIS

I.R. Albekov, L.U. Sultanov

The paper considers the process of determining the strain-hardening law constants of titanium alloy OT4-1 according to the test data of cylindrical proportional tensile samples. The initial approximations of the constants are obtained by regression analysis, and their values are refined using the inverse method based on a comparison of experimental and calculated load curves. The adequacy of the mathematical model is evaluated according to the Fisher criterion. A qualitative analysis of the behavior of the chosen algorithm in solving the problem under consideration is given, an integral formulation of the objective function is proposed, the value of which does not depend on the density of

the local distribution of experimental points on the load curve.

Keywords: strain-hardening, finite element method, optimization, inverse analysis, variance, Fisher criterion, objective function

УДК 514.763: 514.8. PACS: 11.10.Kk

НЕГОМОТЕТИЧЕСКИЕ ПРОЕКТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ В h -ПРОСТРАНСТВЕ $H_{32,2}$

А.В. Аминова¹, Д.Р. Хакимов²

¹ *asya.aminova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² *dzhamoliddink@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуются пятимерные псевдоримановы многообразия в форме h -пространств H_{32} типа {32}. Дана классификация h -пространств $H_{32,2}$ по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований, найдены все проективно-подвижные метрики и указаны размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных негомотетических проективных алгебр Ли.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h -пространство H_{32} типа {32}, негомотетическое проективное движение, уравнения Киллинга, проективная алгебра Ли, проективно-геометрическая теория систем ОДУ.

Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n с проективной структурой Π сохраняет проективную структуру Π и переводит геодезические линии снова в геодезические.

В развитой А. В. Аминовой и Н. А.-М. Аминовым проективно-геометрической теории систем дифференциальных уравнений [1–9] отмечается, что проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий дифференциальных уравнений математической физики. В частности, алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как "своеобразную реализацию" группы проективных преобразований на прямой [10].

Доклад посвящен исследованию симметрий систем дифференциальных уравнений геодезических в форме алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований (проективных движений) 5-мерных псевдоримановых многообразий (M^5, g) — h -пространств $H_{32,2}$ типа {32} [11], [12], [13]. Определяются необходимые и достаточные условия, при которых $H_{32,2}$ является пространством постоянной (нулевой) кривизны. Находятся негомотетические проективные движения в $H_{32,2}$ непостоянной кривизны, исследуются гомотетии и изометрии указанных пространств, определяются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли. В итоге получена классификация h -пространств $H_{32,2}$ типа {32} по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований.

Литература

1. Аминова А. В. “Автоморфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений”, Изв. вузов. Матем., 1994, №2, 3–10.
2. Аминова А. В. “Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий”, УМН, 50:1 (1995), 69–142.
3. Аминова А. В. “Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений”, Матем. сб., 186:12 (1995), 21–36.
4. A. V. Aminova, N. A.-M. Aminov, “Projective geometry of systems of differential equations: general conceptions”, Tensor (N.S.), 62:1 (2000), 65–86.
5. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий, Янус-К, М., 2003.
6. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, “Дифференциальные системы 4-го порядка с 4-мерной разрешимой группой симметрий, не содержащей абелевой подгруппы G_3 ”, Изв. вузов. Матем., 2005, №6, 12–27.
7. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, “Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка”, Матем. сб., 197:7 (2006), 3–28.
8. A. V. Aminova, N. A.-M. Aminov, “Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type V II”, J. Math. Sci., 158:2 (2009), 163–183.
9. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, “Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка”, Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 123, ВИНТИ, М., 2009, 58–80.
10. Н. Х. Ибрагимов, “Азбука группового анализа М.: Знание, 1989.
11. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. I. h -пространства типа {32} // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. № 4. С. 21–31 (2018).
12. Aminova A. V., Khakimov D. R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h -spaces H_{32} of the type {32}, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, **162**, no. 2, Kazan University, Kazan, 2020, 111–119.
13. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. Алгебры Ли проективных движений жестких h -пространств $H_{32,3}$ типа {32} // Изв. вузов. Матем., 2024, № 7, 37–46.

NON-HOMOTHETIC PROJECTIVE LIE ALGEBRAS IN THE h -SPACE $H_{32,2}$

A.V. Aminova, D.R. Khakimov

Five-dimensional pseudo-Riemannian manifolds are investigated in the form of h -spaces H_{32} of type {32}. We classify h -spaces $H_{32,2}$ by (non-homothetic) Lie algebras of infinitesimal projective and affine transformations, find all projectively movable metrics, and indicate the dimensions, basis elements, and structure equations of the maximal non-homothetic projective Lie algebras acting in them.

Keywords: systems of partial differential equations, differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h -space H_{32} of type {32}, non-homothetical projective motion, equations projective Lie algebra, projective-geometric theory of ODE.

УДК 004.42

**РЕКОМЕНДАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ФОРМИРОВАНИЯ НАБОРА СХОЖИХ
ДОКУМЕНТОВ ЦИФРОВОЙ БИБЛИОТЕКИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА
ФОРМУЛЬНОГО СОДЕРЖАНИЯ**

И.М. Асадуллин¹, К. И. Гареев², Д. В. Беденьгов³

¹ asadullin.iskander@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² kamilgareev39@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

³ dima.bedengov@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Данная работа посвящена рекомендательной системе формирования набора схожих документов цифровой библиотеки на основе формульного содержания с использованием дистанционных метрик, таких как, косинусное расстояние и расстояние изменения деревьев для вычисления схожести между двумя объектами; использование алгоритмов для создания векторных представлений документов.

В процессе исследования будут рассмотрены методы анализа и сравнения формульного содержания, подходы к интеграции этих методов в рекомендательные алгоритмы, а также оценка эффективности предложенной системы. Ожидается, что результаты данной работы будут способствовать улучшению качества рекомендаций в цифровых библиотеках и предоставят пользователям более точные и релевантные материалы для их исследований и работы.

Целью данной работы является разработка и исследование рекомендательной системы в виде программного средства автоматизации, способной формировать набор схожих документов цифровой библиотеки на основе их формульного содержания. Подобная система позволит пользователям упростить процесс проверки на наличие плагиата, более эффективно находить релевантные материалы, учитывая не только текстовые, но и формульные данные, что особенно важно для специалистов, работающих с технической и научной литературой, и, следовательно, сэкономят затрачиваемое время редакторами библиотек при валидации и энтузиастами при поиске по требуемым темам.

Результатом работы является рекомендательная система формирования набора схожих документов цифровой библиотеки с возможностью дальнейшего его совершенствования в рамках расширения и развития.

Ключевые слова: метаданные, анализ текста, электронные библиотеки, тематическая кластеризация текстов, тематическое моделирование, парсинг, структурное дерево, векторное представление документов, нейросетевые модели, метрики расстояния.

Введение. *В условиях стремительного роста объемов цифровой информации и широкого распространения электронных библиотек, проблема эффективного поиска и организации данных становится одной из наиболее актуальных. Современные цифровые библиотеки содержат огромное количество документов, среди которых научные статьи, патенты, книги и другие виды публикаций. В связи с этим возрастает необходимость создания систем, которые могут не только искать, но и рекомендовать документы, схожие по содержанию.*

Рекомендательные системы в последние годы приобрели значительную популярность

и нашли широкое применение в различных областях, таких как электронная коммерция, социальные сети и мультимедийные платформы. Однако использование подобных систем в контексте цифровых библиотек требует учета специфических аспектов научной и технической информации. Одним из таких аспектов является формульное содержание документов, особенно актуальное для технических и естественнонаучных публикаций, где значительную роль в документах играют математические выражения, формулы и уравнения.

Тема разработки сервиса формирования набора схожих документов на основе формульного содержания для цифровых библиотек бесспорно актуальна, поскольку проблема плагиата становится всё более популярна. Так, по данным из доклада комиссии РАН по противодействию фальсификации научных исследований о хищных журналах и переводном плагиате [1] были проанализированы 94 журнала, входящих в базы данных *Web of Science Core Collection* или *Scopus*. В плагиате участвовало более 1100 авторов. Всего в изученных журналах было опубликовано около 23700 “мусорных” публикаций.

В большинстве альтернативных решений для поиска похожих документов присутствует возможность загружать файлы со статьями, но не поддерживается предпочтительный формат современных математических статей, а именно *Tex*.

Поэтому было решено добавить в разрабатываемую систему возможность загрузки набора документов или его выбора из предыдущих загрузок для сверки с новой небольшой партией статей, например для уменьшения времени работы алгоритма. Также было решено на данный момент не ограничивать объем анализируемого материала и сохранять в базе данных только результаты предварительной векторной кластеризации по меткам *MSC* (*Mathematics Subject Classification*).

Также для предварительной обработки документов и извлечения из них формул, обнаружения или постановки тегов *MSC*, а также сохранения и дальнейшего поиска похожих статей были созданы соответствующие алгоритмы.

Было решено перейти к клиент-серверной архитектуре. В ходе предварительного анализа нами была разработана архитектура программного решения (рис. 2), которая основывается на *REST* подходе, реализованная на языке программирования *Java* и его библиотеке *Spring Boot*, а также базе данных *PostgreSQL*. Как можно увидеть на рисунке, предполагается что пользователь через *web*-интерфейс сможет загружать набор документов с исходным текстом (предпочтительно в формате *.tex*), передаваемый на бэкенд часть приложения, где реализованы алгоритмы по формированию набора схожих документов: из статей будут доставаться необходимые для нас данные (метаданные, формулы, текст) и анализироваться (векторизация, построение структурных деревьев формул, сравнение деревьев), также в базе данных будет сохраняться информация (векторная модель, метаданные) о документах. Возвращаться пользователю будут списки идентификаторов предположительно схожих статей с рекомендацией по их удалению или дальнейшей ручной проверке.

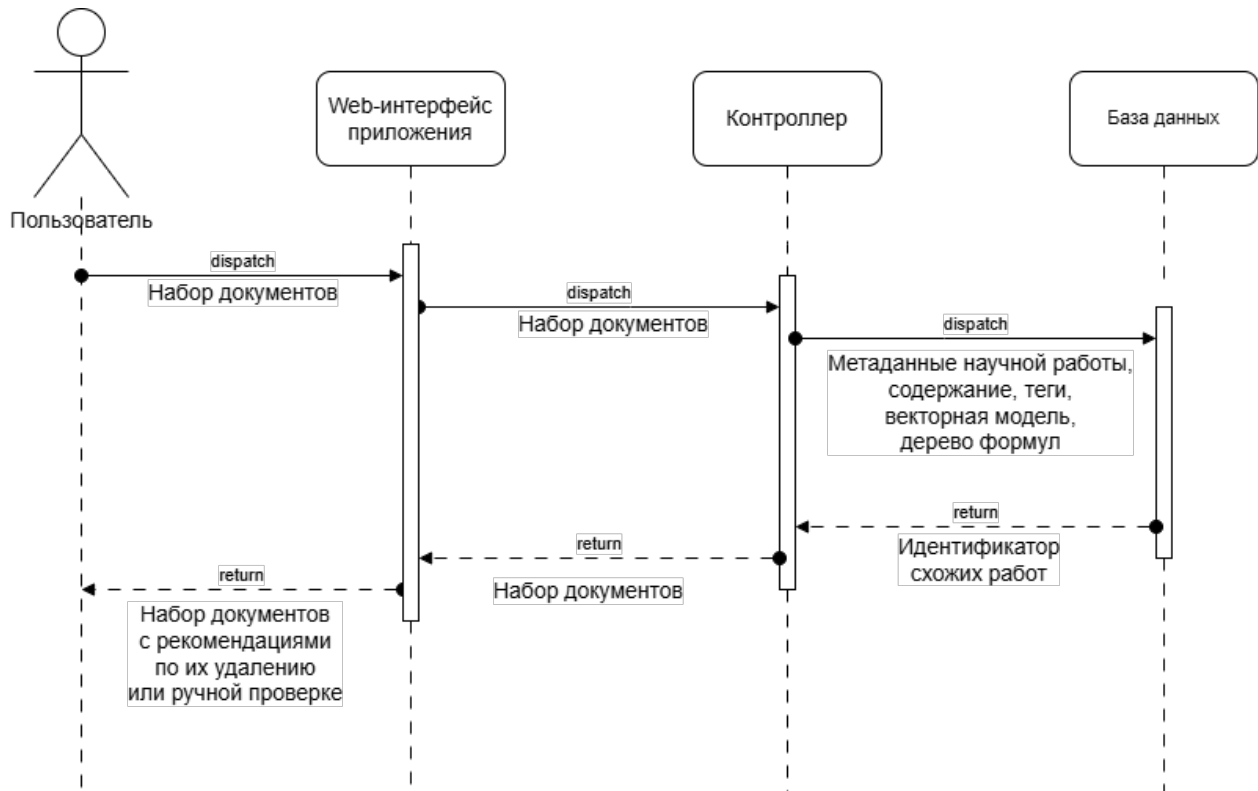


Рис. 1. Архитектура программного решения

Главной проблемой при решении задачи была разработка эффективного метода поиска схожих документов. Для её решения нами был разработан следующий алгоритм поиска (рис. 2), состоящий из нескольких основных этапов, а именно: из начального набора документов мы извлекаем главные метаданные и их содержание, а именно формулы; далее для каждого документа подбираем теги Mathematical Subject Classification, кратко и далее MSC, с помощью инструмента AutoMSC [5]; затем мы создаём векторную характеристику документа на основе содержащихся в нём тегов MSC; приступаем к первому этапу сближения документов с помощью векторного поиска на основе косинусной близости [3]; далее для каждого набора предварительно схожих документов мы строим деревья математических формул в них и вычисляем итоговую близость документов на основе алгоритма поиска расстояния изменения деревьев и итогового отношения этого расстояния к объёму деревьев в документе, устанавливая при этом требуемый порог близости; таким образом формируется конечный набор схожих документов, который мы и будем возвращать пользователю.

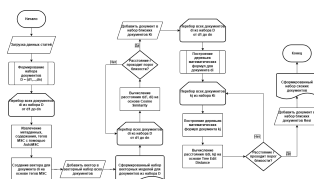


Рис. 2. Алгоритм поиска

Литература

1. Комиссия РАН. *Иностранные хищные журналы в Scopus и WoS: переводной плагиат и российские недобросовестные авторы*. 2020. с.4.
2. Девяткин Д.А. *Метод тематической кластеризации масштабных коллекций научно-технических документов*. / Д. А. Девяткин, Р. Е. Суворов, И. В. Соченков // ИТиВС, 2013, выпуск 1, 33–42
3. MacQueen J. *Some methods for classification and analysis of multivariate observations* // Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., 1967. 281-297
4. Lüthe M. *Calculate Similarity – the most relevant Metrics in a Nutshell* // towards data science. 2019 - URL: <https://towardsdatascience.com/calculate-similarity-the-most-relevant-metrics-in-a-nutshell> (дата обращения 05.05.2024).
5. Moritz Schubotz. *AutoMSC: Automatic Assignment of Mathematics Subject Classification Labels* / Moritz Schubotz, Philipp Scharpf, Olaf Teschke, Andreas Kuehnemund, Corinna Breitingner, Bela Gipp // 2020 - URL: <https://arxiv.org/abs/2005.12099/> (дата обращения 20.05.2024)

RECOMMENDATION SYSTEM FOR GENERATING A SET OF SIMILAR DIGITAL LIBRARY DOCUMENTS BASED ON FORMULAIC CONTENT

I.M.Asadullin, K.I.Gareev , D.V.Bedengov

This work is devoted to a recommendation system for generating a set of similar digital library documents based on formulaic content using distance metrics such as cosine distance and tree change distance to calculate the similarity between two objects; using algorithms to create vector representations of documents.

The study will examine methods for analyzing and comparing formulaic content, approaches to integrating these methods into recommendation algorithms, and assessing the effectiveness of the proposed system. It is expected that the results of this work will contribute to improving the quality of recommendations in digital libraries and provide users with more accurate and relevant materials for their research and work.

The aim of this work is to develop and study a recommendation system in the form of a software automation tool capable of forming a set of similar digital library documents based on their formula content. Such a system will allow users to simplify the process of checking for plagiarism, more effectively find relevant materials, taking into account not only textual but also formula data, which is especially important for specialists working with technical and scientific literature, and, therefore, save time spent by library editors during validation and by enthusiasts when searching for the required topics.

The result of the work is a recommendation system for the formation of a set of similar documents of a digital library with the possibility of its further improvement within the framework of expansion and development.

Keywords: metadata, text analysis, electronic libraries, thematic clustering of texts, topic modeling, parsing, structural tree, vector representation of documents, neural network models, distance metrics.

УДК 531.01

САМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗАРЯДА В КРОТОВОЙ НОРЕ С БЕСКОНЕЧНО КОРОТКОЙ ГОРЛОВИНОЙ

О. Асман¹, А.А. Попов²

¹ alsucuk@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² arorov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Вычислена сила самодействия электромагнитного заряда в пространстве-времени кротовой норе с бесконечно короткой горловиной. Предполагается, что заряд является источником электромагнитного поля, неминимально связанного с кривизной пространства-времени.

Ключевые слова: эффект самодействия; кротовая нора

Покоящаяся заряженная частица в искривленном пространстве-времени порождает поле, которое из-за кривизны пространства-времени и нелокальной структуры безмассового поля воздействует на саму частицу. Такая сила называется силой самодействия [1]. Электромагнитные и гравитационные силы самодействия важны при описании движения двух тел с экстремальным соотношением масс этих тел и при исследовании излучаемых ими гравитационных волн. В искривленных пространствах интенсивные исследования эффекта самодействия покоящегося заряда проводились на фоне черных дыр, пространств топологических дефектов и кротовых нор.

Целью настоящей работы является анализ эффекта самодействия для заряда в пространстве-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (|r| + a)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где $-\infty < r < \infty$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $a > 0$. Такая модель представляет собой два пространства-времени Минковского в каждом из которых вырезан шар радиуса a и склеенных по поверхности этих шаров. Как известно, такая модель хорошо работает при описании эффектов на больших (по сравнению с длиной горловины) расстояниях от горловины кротовой норы.

Предполагается также, что заряд является источником электромагнитного поля, неминимально связанного с кривизной пространства-времени [7]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - F_{mn} F^{mn} + \chi^{ikmn} F_{ik} F_{mn} \right), \quad (2)$$

где g - детерминант метрического тензора g_{ik} , R -скалярная кривизна пространства-времени, величина

$$\chi^{ikmn} \equiv \frac{q_1 R}{2} (g^{im} g^{kn} - g^{in} g^{km}) + \frac{q_2}{2} (R^{im} g^{kn} - R^{in} g^{km} + R^{kn} g^{im} - R^{km} g^{in}) + q_3 R^{ikmn} \quad (3)$$

называется тензором восприимчивости,

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (4)$$

есть тензор электромагнитного поля, R^{in} - тензор Риччи, R^{ikmn} - тензор кривизны и q_1, q_2, q_3 произвольные параметры.

Вариация по потенциалу A_k действия (2) дает уравнения электромагнитного поля

$$\nabla_k H^{ik} = 0, \quad (5)$$

где H^{ik} - тензор индукции, определяемый выражением

$$H^{ik} \equiv F^{ik} - \chi^{ikmn} F_{mn}. \quad (6)$$

Если поле $A_i(x^k)$ создаётся зарядом e , то уравнения (5) преобразуются к виду

$$\nabla^k H_{ik} = -4\pi j_i = -4\pi e \int u_i(\tau) \delta^{(4)}(x^k, \tilde{x}^k(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g}}, \quad (7)$$

где u^i - 4-скорость заряда и τ - его собственное время. Мировая линия заряда задается функциями $\tilde{x}^k(\tau)$. Для заряда в состоянии покоя $u^i(1, 0, 0, 0)$ и векторный потенциал A_i не зависит от времени, что позволяет использовать следующий анзац: $A_i = (A_t, 0, 0, 0)$.

Результат вычислений имеет вид

$$A_t^{ren}(r) = \frac{e}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1} (a^2 - 2l(l+1)(4q_1 + q_2))}{(l+1)(a^2 - l(4q_1 + q_2))} (a+r)^{-2l-2}. \quad (8)$$

Потенциал самодействия и тетрадная составляющая (компонента) силы самодействия имеют вид

$$U^{self} = -\frac{e}{2} A_t^{ren}, \quad (9)$$

$$F^{(r)} = -\frac{\partial U^{self}}{\partial r} = -\frac{e^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1} (a^2 - 2l(l+1)(4q_1 + q_2))}{(a^2 - l(4q_1 + q_2))} (a+r)^{-2l-3} \quad (10)$$

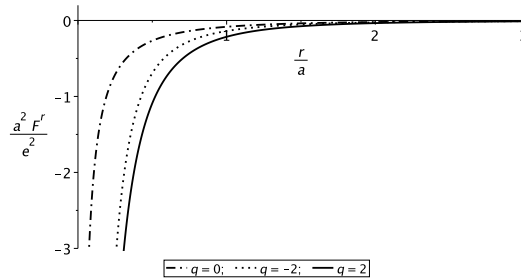


Рис. 1. График функции $F^{(r)}$ для различных значений $q = \frac{4q_1 + q_2}{a^2}$.

В частном случае $4q_1 + q_2 = 0$ результат (10) совпадает с рассмотренным ранее в работе [8]

$$F^{(r)} = -\frac{q^2 a^3}{2r_*^3 (r^2 - a^2)}. \quad (11)$$

Литература

1. Poisson E., Pound A., and Vega I. *Living Rev. Rel.*, 2011, Vol. 14, pp. 1-190.
2. Oltean M., Epp R., Sopena C.F., Spallicci A., and Mann R. 2019, arXiv:1907.03012.
3. Zimmerman P. and Poisson E. *Phys.Rev. D*, 2014, Vol. 90, 084030.

4. Bini D. and Geralico A. *Phys. Rev. D*, 2019, Vol. 100, 104003.
5. Barack L. *Class. Quant. Grav.*, 2009, Vol. 26, 213001, arXiv:0908.1664.
6. Barack L. and Pound A. *Reports on Progress in Physics*, 2018, Vol. 82, 016904.
7. A.B. Balakin, J.P.S. *Class. Quant. Grav.*, 2005, Vol. 22, pp. 1867–11880.
8. Krasnikov S. *Class. Quant. Grav.*, 2008, Vol. 25, 245018.

SELF-ACTION OF ELECTROMAGNETIC CHARGE IN A WORMHOLE WITH AN INFINITELY SHORT THROAT

O. Asman, A.A. Popov

The self-force of the electromagnetic charge in the space-time of a wormhole with an infinitely short throat is calculated. It is assumed that the charge is a source of an electromagnetic field that is in non-minimal connection with the curvature of space-time.

Keywords: self-force; wormhole

УДК 336/338

ПРИЛОЖЕНИЕ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ

Р.Р. Байгильдина¹

¹ rbbaygildina@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе проведено исследование зависимости доходов населения от индекса потребительских цен (ИПЦ), валового внутреннего продукта (ВВП), уровня безработицы и оборота розничной торговли. Также исследуется вопрос о распределении доходов по различным категориям - доходы от предпринимательской деятельности, заработная плата, социальные выплаты, доходы от собственности и другие.

В рамках этой работы:

- изучен теоретический материал, связанный с исследуемой областью,
- исследованы методы построения моделей для временных рядов и их проверки на адекватность,
- выполнен сбор и обработка статистических данных,
- выбраны подходящие математические модели для построения зависимости.

Ключевые слова: эконометрические модели, анализ временных рядов, VAR-модель, доход населения, индекс потребительских цен, оборот розничной торговли.

Эконометрические модели играют ключевую роль в анализе взаимодействия различных экономических показателей. Исследование зависимости доходов населения от индекса потребительских цен, валового внутреннего продукта, уровня безработицы и оборота розничной торговли позволяет выявить значимые взаимосвязи, которые помогают в разработке эффективных экономических стратегий.

Такое исследование помогает понять, как изменения в этих ключевых экономических индикаторах влияют на доходы населения. Например, ИПЦ отражает уровень инфляции и может показывать, как рост цен влияет на покупательскую способность граждан. ВВП помогает оценить, как рост экономики способствует увеличению заработков. Низкий уровень безработицы, в свою очередь, обычно ассоциируется с высоким уровнем доходов, так как больше людей имеют рабочие места.

Построение эконометрической модели позволяет не только количественно оценить зависимости, но и прогнозировать будущие изменения, что является полезным для политиков и экономистов.

Анализ временных рядов является важным инструментом в эконометрическом исследовании, позволяющим выявлять временные зависимости между переменными. Одними из популярных моделей для анализа временных рядов являются модели VAR (вектор авторегрессии), ARDL (авторегрессионная распределенная лаговая модель) и ECM (модель коррекции ошибок).

Модель VAR дает возможность одновременно исследовать систему взаимосвязанных временных рядов, учитывая взаимодействие между ними. Это особенно полезно для понимания динамики экономических переменных, таких как ВВП и инфляция.

Модель VAR описывается следующим образом:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t$$

где y_t — вектор переменных на момент времени t , A_i — матрицы коэффициентов, u_t — вектор случайных ошибок.

Модель ARDL, в свою очередь, позволяет анализировать как краткосрочные, так и долгосрочные отношения между переменными, даже если они имеют различные порядки интеграции.

Модель ARDL может быть представлена как:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \dots + \beta_p x_{t-p} + u_t$$

где y_t — зависимая переменная, x_t — независимая переменная, β_i — коэффициенты модели.

ECM помогает корректировать отклонения путем моделирования зависимости переменных, учитывая их адаптацию к состоянию равновесия. Модель коррекции ошибок записывается следующим образом:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta \Delta x_t + \theta (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + u_t$$

где Δ обозначает разность, $y_{t-1} - \gamma x_{t-1}$ — коррекция ошибки, α , β , θ — коэффициенты модели.

Анализ временных рядов с использованием этих моделей представляет ценную информацию для прогнозирования и оценки влияния экономических

шоков. Подход дает возможность не только лучше понять сложные экономические отношения, но и более эффективно разрабатывать политику на основе детального анализа. Используя модели VAR, ARDL и ЕСМ, исследователи могут значительно повысить точность своих прогнозов и оценок.

Литература

1. N. V. Artamonov, E. A. Ivin, A. N. Kurbatsky, D. Fantazzini *Introduction to time series analysis: a textbook for universities; Lomonosov Moscow State University, Moscow School of Economics, Department of Econometrics and Mathematical Methods of Economics. Vologda : VolSC RAS, 2021. 134 p.*
2. Haralick R.M. *Econometrics. The initial course: Studies. — 6th ed. - M.: Delo, 2004. - 576 p.*
3. William H. *Econometric Analysis. - Pearson Education, 2003. - 983 c.*
4. Pindyck R.S. and Rubinfeld D.M. *Econometric Models and Economic Forecasts. - New York: McGraw-Hill Book Co., 1997. - 634 c.*
5. Liu, H., Wong, W. K., Cong, P. T., Nassani, A. A., Haffar, M., Abu-Rumman, A. *Linkage among Urbanization, energy Consumption, economic growth and carbon Emissions. Panel data analysis for China using ARDL model. - 2023. - №332 - с. 3-16*

APPLICATION OF TIME SERIES ANALYSIS TO ASSESS THE DYNAMICS OF INCOME OF THE POPULATION

R.R. Baygildina

In this paper, a study was conducted on the dependence of household incomes on the consumer price index (CPI), gross domestic product (GDP), unemployment rate and retail trade turnover. The issue of income distribution by various categories is also being investigated - income from entrepreneurial activity, wages, social benefits, income from property and others.

As part of this work:

- *the theoretical material related to the research area has been studied,*
- *the methods of constructing models for time series and their adequacy testing are investigated,*
- *collection and processing of statistical data has been performed,*
- *suitable mathematical models have been selected to build the dependence*

Keywords: econometric models, time series analysis, VAR model, household income, consumer price index, retail trade turnover.

УДК 004.42

АГРЕГАТОР ДЛЯ СИСТЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОЧЕРЕДИ НА АВТОМОЙКЕ

Д. В. Беденьгов¹, К. И. Гареев², И.М. Асадуллин³

¹ dima.bedengov@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² kamilgareev39@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

³ asadullin.iskander@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной статье рассматривается подход к созданию агрегатора для системы формирования очереди на автомойке. В современном мире автомойки играют важную роль

в поддержании чистоты и убранства автомобилей. Однако, с ростом числа автовладельцев, возникают проблемы с длительными очередями и неэффективным управлением очередью.

Целью исследования является разработка современной инфраструктуры, основанной на микросервисной архитектуре, для оптимизации процесса формирования очереди. Для достижения этой цели проведен анализ требований к системе, изучены существующие подходы и применяемые технологии.

В ходе работы создан набор микросервисов, каждый из которых будет отвечать за определенный функционал системы. Разработаны модули для управления временными интервалами, регистрации и обслуживания клиентов, а также для контроля заполненности очередей на автомойках.

Полученная инфраструктура позволит автомойкам эффективно управлять процессом формирования очереди, сократить время ожидания клиентов и повысить их удовлетворенность обслуживанием. Результаты работы могут быть полезны как для существующих автомоек, так и для новых проектов, стремящихся к оптимизации бизнес-процессов и повышению конкурентоспособности.

Ключевые слова: микросервисы, система формирования очереди, бронирование, gRPC

Введение. *В современном мире, где цифровизация проникает во все сферы жизни, особое внимание уделяется повышению эффективности и оптимизации бизнес-процессов. Автомойки не являются исключением, и автоматизация формирования очереди на автомойке является актуальной задачей.*

С увеличением количества автомобилей растет и потребность в сервисах по их обслуживанию, включая автомойки. Однако, управление и организация очередей на автомойках зачастую остается неточным и неэффективным, что приводит к неудовлетворенности клиентов и потере времени.

В Республике Татарстан автомойки зачастую используют систему бронирования по сотовой связи или в порядке живой очереди. Некоторые люди успели привыкнуть к онлайн-сервисам и активно ими пользуются, поэтому данная работа решает эту задачу в области услуг, связанных с автомойками.

Автоматизация процесса бронирования на автомойке заменит рутинную работу сотрудников автомойки.

На сегодняшний день можно выделить три основных способа записи на услуги автомоек и один менее распространенный, но также используемый. Каждый из них мы рассмотрим подробнее ниже.

Первым методом является традиционная запись по телефону. Клиент звонит на автомойку, оставляет свои данные и договаривается о дате и времени визита. Этот метод имеет свои преимущества, такие как простота и доступность. Однако он также имеет недостатки, включая возможность пропуска звонков в периоды высокой загрузки, ограниченное рабочее время мойки и нежелание некоторых

владельцев автомобилей лишний раз разговаривать по мобильному телефону.

Вторым методом является онлайн-бронирование. Клиент посещает веб-сайт автомойки или использует специализированные мобильные приложения, чтобы выбрать удобное время и услуги, заполнить данные о своем автомобиле и оставить контактную информацию. Этот метод предоставляет удобство для клиента, так как он может выполнить запись в любое время суток и из любого места. Он также помогает сократить время ожидания и упростить процесс обслуживания для автомойки. Однако он может требовать наличия у клиента доступа к интернету и бесперебойной работы сайта или мобильного приложения автомойки.

Третьим методом является так называемая "живая очередь". Это когда автомобилист имеет свободное время и сразу едет на автомойку, надеясь на отсутствие других клиентов или хотя бы их небольшое количество, чтобы успеть помыть свой автомобиль.

Четвертым методом является запись на автомойку через социальные сети. Некоторые автомойки предлагают клиентам возможность записаться на услуги через популярные социальные сети и мессенджеры, такие как ВКонтакте, WhatsApp или Telegram. Этот метод имеет свои преимущества благодаря широкой доступности и удобству использования для клиента. Вместе с тем, он может быть ограничен функциональностью социальных сетей и мессенджеров и не всегда обеспечивать полный спектр услуг и дополнительных опций, доступных на веб-сайте или мобильном приложении автомойки.

При проектировании схемы базы данных создались основные сущности, отображенные на рисунке 1:

- пользователи;
- автомойки;
- автомобили пользователей;
- услуги автомоек;
- бронирование автомоек;
- боксы на автомойке;
- токены пользователей для отправки уведомлений.

Для обмена данными был выбран gRPC. Он использует HTTP/2, превосходящую HTTP/1.1, используемый в REST. Для описания интерфейса используется Protobuf, который помогает определять структуру передаваемых данных и интерфейса сервиса. Для отправки пуш-уведомлений о бронировании используется Firebase Cloud Messaging.

При разработке архитектуры использовался Swagger для документирования API, что упрощает понимание и использование API. Для этого был настроен плагин grpc-gateway, чтобы Swagger мог работать с REST API, работающими поверх HTTP/1.1.

Микросервисная архитектура приложения для системы формирования очереди на автомойке представлена на рисунке 2.

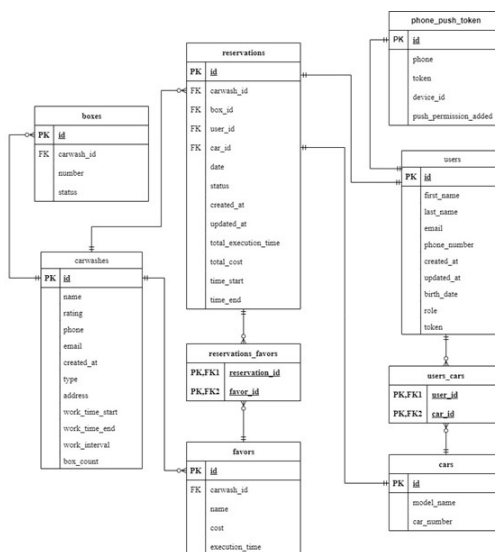


Рис. 1. Схема базы данных

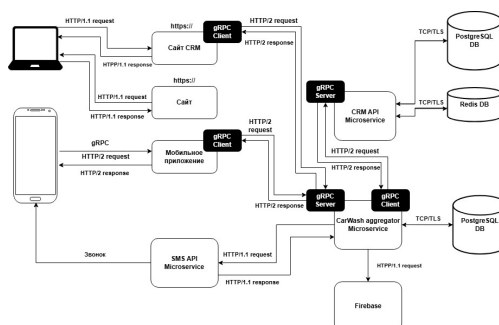


Рис. 2. Архитектура системы

Литература

1. Аделекан И. *Котлин. Программирование на примерах.* – 2020. – 33 с.
2. Бейликова А. *Оптимизация запросов PostgreSQL.* // А. Бейликова, Г. Домбровская, Б. Новиков. – 2022. – 46 с.
3. Документация командного интерфейса Firebase. – URL: <https://firebase.google.com/docs/cli> (дата обращения: 19.04.2024).
4. Индрасири К. *gRPC. Запуск и эксплуатация облачных приложений. Go и Java для Docker и Kubernetes.* // К. Индрасири, Д. Курпу. – 2021. – 14 с.

AGGREGATOR FOR QUEUE FORMATION SYSTEM AT CAR WASH

D.V.Bedengov, K.I.Gareev , I.M.Asadullin

This article discusses an approach to creating an aggregator for a queue formation system at a car wash. In the modern world, car washes play an important role in maintaining the cleanliness and decoration of cars. However, with the growing number of car owners, there are problems with long queues and inefficient queue management.

The aim of the research is to develop a modern infrastructure based on microservice architecture to optimize the queue formation process. To achieve this goal, an analysis of the system requirements

was carried out, existing approaches and applied technologies were studied.

During the work, a set of microservices was created, each of which will be responsible for a certain functionality of the system. Modules developed to manage time intervals, check-in and customer service, as well as to control queue occupancy at car washes.

The resulting infrastructure will allow car washes to effectively manage the queue formation process, reduce customer waiting times and increase their satisfaction with service. The results of the work can be useful both for existing car washes and for new projects seeking to optimize business processes and increase competitiveness.

Keywords: microservices, car wash queue system, booking, gRPC

УДК 515.1

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ПОИСКА УСТОЙЧИВЫХ ГОМОЛОГИЙ В АНАЛИЗЕ ДАННЫХ

Т.А. Беликова¹

¹ tabelikova@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе рассмотрено применение топологического анализа данных, а именно элементов теории устойчивых гомологий. Исследование проводилось на модельном облаке точек, на котором было отслежено формирование 0 – мерных и 1 – мерных дыр.

Ключевые слова: топологический анализ данных, устойчивые гомологии, симплекс, диаграмма устойчивости

Извлечение полезной информации из многомерных и, зачастую, зашумленных наборов данных, является сложной задачей, которая усугубляется не только большим объемом данных, но и требованиями к вычислительной мощности техники, устойчивости получаемых результатов. Поэтому, не смотря на наличие различных методов обработки, появляется необходимость в новых, в том числе оптимальных подходах к анализу данных.

Одним из таких подходов является топологический анализ данных, который использует теорию топологии для изучения формы и свойств данных и позволяет получать дополнительную информацию о внутренней структуре исследуемых показателей. С применением этого направления связано много возможностей в области анализа данных сложной структуры и решений различных практических задач. В работе рассмотрены основы топологического анализа данных, а именно элементы теории устойчивых гомологий. Гомология – это инвариант алгебраической топологии, который отображает информацию о k -мерных дырах. Выявление устойчивых гомологий способствует отслеживанию изменений в топологическом пространстве[2]. Перед началом работы входные данные необходимо представить в виде симплициального комплекса. Пусть симплициальный комплекс не является статическим объектом, а имеет способность изменяться с течением времени. Множество вершин симплициального комплекса будет считаться фиксированным, а сами симплексы могут «рождаться» и «умирать». Чем дольше живёт симплекс, тем более

он устойчив. Наличие и количество устойчивых симплексов, история их «жизни» и «смерти» описывают структуру данных с точки зрения топологического подхода[1].

Расчетной областью является множество точек в метрическом пространстве (множество вершин симплекса), заданных по координатам. На расчетной области была посчитана динамика изменения 0-мерных и 1-мерных дыр. Для достижения поставленной задачи множество точек было представлено в виде симплицеального комплекса, на котором в последствии и были выявлены дыры с помощью комбинаторных и алгоритмических методов. Полученный результат был интерпретирован в виде баркода. С целью автоматизации работы алгоритм был реализован в виде программного кода, проведены численные исследования на модельных облаках точек. В работе рассмотрен алгоритм построения диаграммы устойчивых гомологий для отслеживания «смерти» точек, в результате программной реализации отслежено формирование 0-мерных и 1-мерных дыр.

Литература

1. Akcora C., Kantarcioglu M., Gel Y., Coskunuzer B. *Reduction Algorithms for Persistence Diagrams of Networks: CoralTDA and PrunIT*. — 2022. — pp. 1 - 6.
2. Rote G., Vegter G. *Computational Topology: An Introduction*. — 2006. — pp. 277 - 312.

APPLICATION OF THE ALGORITHM FOR FINDING STABLE HOMOLOGY IN DATA ANALYSIS

T.A. Belikova

This paper considers the application of topological data analysis, namely the elements of the theory of stable homologies. The study was carried out on a model point cloud on which the formation of 0-dimensional and 1-dimensional holes was traced.

Keywords: topological data analysis, stable homologies, simplex, stability diagram

УДК 531

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУР

И.А. Беспалов¹

¹ iabespalov@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Аддитивные технологии широко используются в структурном проектировании решетчатых имплантатов. При правильном проектировании, такой подход позволяет создавать высококачественные прототипы со сложной геометрией. В данном исследовании были определены физико-механические свойства различных неоднородных решетчатых структур. Для этого были проведены натурные испытания образцов, изготовленных с помощью аддитивных технологий.

Ключевые слова: аддитивные технологии, имплантаты, решетчатые структуры

В настоящее время широко распространены методы, посвященные структурному проектированию и топологической оптимизации решетчатых имплантатов

[1]. Основная задача данных методов заключается в проектировании такой неоднородной структуры, которая обладает не только необходимой прочностью, но и способна стимулировать рост костной ткани [2]. Стимуляцию роста костной ткани можно добиться путем введения в неоднородную структуру костного цемента [3]. Одним из способов производства таких имплантатов являются аддитивные технологии [4].

Целью исследования является определение физико-механических свойств различных типов решетчатых структур для дальнейшего изготовления имплантатов.

Для определения физико-механических свойств структур были проведены две серии испытаний на четырехточечный изгиб. В первой серии нагружались образцы исследуемых структур без использования цемента. Во второй серии в нерегулярные структуры был введен цемент. Также были проведены натурные эксперименты для сплошных образцов.

Геометрия структур была восстановлена и изготовлена с применением аддитивных технологий. Образцы были напечатаны на фотополимерном 3D-принтере Anycubic Photon Mono X. Для изготовления использовалась фотополимерная смола Anycubic Basic. Испытания проводились на разрывной машине УТС 110М-100. Для анализа полученных данных в ходе натурных испытаний использовалась диаграмма нагружения. По графикам нагружения были определены максимальные усилия образцов. Изгибные жесткости решетчатых структур определялись на линейных участках диаграмм нагружения.

При добавлении цемента в поры сетчатых структур величины изгибных жесткостей исследуемых структур не имеют существенной разницы, что означает малое влияние геометрии решетчатой структуры, на жесткостные характеристики. Малое влияние геометрии на жесткостные характеристики объясняется материалом изготовления структур.

Литература

1. Суфияров В.Ш. *Расчетное исследование прочности эндопротеза из материала с градиентной ячеистой структурой*/ В.Ш. Суфияров, А.В. Орлов, А.А. Попович, М.О. Чуковенкова, А.В. Соклаков, Д.С. Михалюк// *Российский журнал биомеханики*. — 2021. — С. 64–77.
2. Федорова Н.В. *Определение механических параметров и проницаемости пористых костных имплантатов из титанового сплава в условиях их взаимодействия с биологическими жидкостями*/ Н.В. Федорова, А.М. Косинов// *Российский журнал биомеханики*. — 2023. — С. 54–66.
3. Коллеров М.Ю. *Особенности изготовления и клинического применения пористых имплантатов из титана для лечения травм и заболеваний позвоночника*/ М.Ю. Коллеров, Е.А. Давыдов, Е.В. Завгородняя, М.Б. Афонина// *Российский журнал биомеханики*. — 2022. — С. 73–84.
4. Ахметзянова А.И. *Оценка влияния тяжести травмы спинного мозга на механические свойства костей задних конечностей опытных крыс*/ А.И. Ахметзянова, К.Р. Шарафутдинова, Д.Э. Сабирова, М.Э. Балтин, О.В. Герасимов, Т.В. Балтина, О.А. Саченков// *Российский журнал биомеханики*. — 2022. — С. 45–55.

DETERMINATION OF PHYSICAL AND MECHANICAL CHARACTERISTICS OF LATTICE STRUCTURES

I.A. Bespalov

Additive manufacturing is widely used in structural design of lattice implants. When designed correctly,

this approach allows for the creation of high-quality prototypes with complex geometries. In this study, the physical and mechanical properties of various heterogeneous lattice structures were determined. For this purpose, full-scale tests of samples manufactured using additive technologies were conducted.

Keywords: additive manufacturing, implants, lattice structures

УДК 519.226

ОЦЕНКИ МАЛЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УСПЕХА В ИСПЫТАНИЯХ БЕРНУЛЛИ И ИХ D-РИСК

Н.Ф. Биалова¹

¹ *bfnal@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуется величина d-риска оценок вероятности успеха в испытаниях Бернулли при априорном сведении о чрезвычайной малости этой вероятности. Вводятся специальная функция потерь типа 1-0, учитывающая относительную ошибку в оценке вероятностей, а также априорное бета-распределение с соответствующим подбором его параметров. Вычисляются функции d-риска байесовских оценок по данным испытаниям Бернулли при фиксированном объеме наблюдений и в случае обратного биномиального выбора. На примере оценки вероятности осечки при производстве выстрела обсуждается проблема d-гарантийности таких оценок в случае практически приемлемых объемов выборок из выпускаемой партии патронов.

Ключевые слова: оценка вероятности успеха в испытаниях Бернулли, d-апостериорный подход к проблеме гарантийности оценки, априорное бета-распределение, байесовская оценка вероятности, обратный биномиальный выбор, d-риски оценок.

Рассматривается проблема точечной оценки вероятности успеха θ в испытаниях Бернулли при априорных сведениях о чрезвычайной малости этой вероятности. Это типичная задача аттестации качества партии штучной продукции, которой присуще незначительное количество некондиционных изделий. Работа является продолжением исследований статьи [1]; решается более сложная задача на построение d-гарантийных последовательных процедур оценки реализации θ случайного параметра ϑ в рамках d-апостериорного подхода к проблеме гарантийности статистического вывода.

Рассматривается модель с априорным бета-распределением с функцией плотности

$$g(\theta) = \frac{1}{B(a, b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}, \quad 0 < \theta < 1; a > 0, b > 0.$$

Оптимальные оценки θ будут строиться при функции потерь

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{1+\Delta_1} < \frac{\theta}{d} < 1+\Delta_2, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и заданным ограничением β на d-риск. Функция d-риска $\mathfrak{R}(d)$ была введена впервые в диссертации И.Н. Володина [2], и она определялась как условное среднее значение величины потерь $L(\theta, \delta)$ относительно решающей функции $\delta(X)$ (усреднение

берется по совместному распределению случайного параметра θ и случайной выборки X).

Введенное понятие d -риска позволяет по-другому, отличному от классического способа, интерпретировать ошибку в оценке параметра θ : экспериментатора будет интересовать не удаленность оценки θ от его истинного значения, а то насколько априорное распределение может далеко отбросить истинное значение θ от принятого решения d о значении θ .

Построение оптимальных решений в рамках d -апостериорного подхода к проблеме статистического вывода основано на минимизации апостериорного риска

$$R_n(d | T_n) = \mathbf{E}\{L(\vartheta, d) | T_n\} = 1 - P\left\{\frac{d}{1 + \Delta_1} \leq \vartheta \leq d(1 + \Delta_2) \mid T_n\right\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{B(a + T_n, b + n - T_n)} \int_{d(1 + \Delta_1)^{-1}}^{\min\{d(1 + \Delta_2), 1\}} \theta^{a + T_n - 1} (1 - \theta)^{b + n - T_n - 1} d\theta$$

относительно достаточной статистики $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ по выборке объема n .

Теорема 1.

D -риск байесовской оценки θ_n^* равен

$$\mathfrak{R}(d; \theta_n^*) = 1 - \frac{1}{B(a + t, b + n - t)} \int_{d(1 + \Delta_1)^{-1}}^{\min\{d(1 + \Delta_2), 1\}} \theta^{a + t - 1} (1 - \theta)^{b + n - t - 1} d\theta, \quad \text{где}$$

$$t = \frac{a \ln[(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)] + (b + n - 1) \ln \gamma}{\ln \gamma - \ln[(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)]}, \quad \gamma = \frac{(1 + \Delta_1)(1 - d(1 + \Delta_2))}{1 + \Delta_1 - d}.$$

Теорема 2.

Значение $d = d_0$, соответствующее наименьшему значению байесовской оценки $\theta_n^*(0)$ вычисляется по формуле

$$d_0 = \frac{(1 + \Delta_1)(1 - e^w)}{(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2) - e^w}, \quad \text{где } w = \frac{-a \ln[(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)]}{(b + n - 1)}.$$

Рассмотрим теперь последовательную процедуру оценивания. Во многих биологических задачах, когда имеются априорные сведения о крайне малой вероятности успеха θ , для оценки θ используются данные не прямого, а обратного биномиального выбора: наблюдения продолжаются до появления заданного числа $m (= 1, 2, \dots)$ успехов (выборочных данных равных единице). В рамках таких биномиальных испытаний число ξ "неудач" (нулевых значений) имеет отрицательное биномиальное распределение. Достаточную статистику $v = \xi + m$ естественно трактовать, как момент остановки в наблюдении последовательности бинарных случайных величин X_1, X_2, \dots . Её среднее значение $\mathbf{E} \xi = m(1 - \theta)/\theta$ и дисперсия $\mathbf{D} \xi = m(1 - \theta)/\theta^2$ являются важнейшими характеристиками d -гарантийной оценки θ , поскольку указывают на средний объем испытаний, необходимый для достижения оценкой d -гарантийности. Будем предполагать, как и выше, что при наблюдении ξ параметр θ

является реализацией случайной величины ϑ , имеющей бета-распределение с параметрами a и b .

Апостериорный риск в схеме обратного биномиального выбора имеет вид:

$$R_m(d | \xi) = \mathbf{E} \{L(\vartheta, d) | \xi\} = 1 - P \left\{ \frac{d}{1 + \Delta_1} \leq \vartheta \leq d(1 + \Delta_2) \middle| \xi \right\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{B(a + m, b + \xi)} \int_{d(1 + \Delta_1)^{-1}}^{\min(d(1 + \Delta_2), 1)} \theta^{a+m-1} (1 - \theta)^{b+\xi-1} d\theta.$$

Теорема 3.

D -риск байесовской оценки θ_m^* в случае отрицательного биномиального распределения равен

$$\mathfrak{R}(d; \theta_m^*) = 1 - \frac{1}{B(a + m, b + x)} \int_{d(1 + \Delta_1)^{-1}}^{\min(d(1 + \Delta_2), 1)} \theta^{a+m-1} (1 - \theta)^{b+x-1} d\theta, \quad \text{где}$$

$$x = \frac{-(a + m) \ln [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)]}{\ln \gamma} - (b - 1), \quad \gamma = \frac{(1 + \Delta_1)(1 - d(1 + \Delta_2))}{1 + \Delta_1 - d}.$$

Стоит отметить, что при $m = 14$ байесовская оценка θ_m^* является d -гарантийной на уровне 0.95. Средний объем наблюдений при $\theta = 0.04$ и $m = 14$ равен $\mathbf{E}v = m(1 - \theta)/\theta = 336$.

В статье [1] рассматривалась оценка вероятности “бракованного” патрона (осечка при выстреле) в большой партии продукции, выпускаемой оружейным заводом. В ряде ГОСТов на приемку такого рода продукции для служебных и гражданских целей предлагается отобрать 100 патронов и произвести с ними выстрелы. Продукция отправляется потребителю, если при испытаниях произошло не более одной осечки. Таким образом, предлагаемый контроль продукции говорит о том, что входной уровень качества выпускаемой продукции можно положить равным 0.99. Исходя из чего параметры априорного бета-распределения можно выбрать равными $a = 0.0022$ и $b = 1$.

Естественно, в ходе испытаниях “бракованные” изделия будут встречаться крайне редко. Поэтому следует ожидать очень малые значения достаточной статистики T_n , имеющей биномиальное распределение, то есть в основном будут наблюдаться $T_n = 0$ и крайне редко $T_n = 1$. Этим значениям T_n при выбранных $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$, $a = 0.0022$, $b = 1$, $n = 100$ соответствуют значения байесовской оценки вероятности успеха $\theta_{100}^*(0) = 0.00002$ и $\theta_{100}^*(1) = 0.00925$ и значения d -риска, равные 0.997 и 0.525. Это неприемлемо высокие значения d -риска, которые указывают на большую вероятность выброса априорным распределением значения θ вне интервала $(d/2, 2d)$. Следовательно, объем выборки $n = 100$ не может, в принципе, обеспечить сколь-либо приемлимую надежность аттестации выпускаемой продукции с точки зрения риска потребителя.

Потерпев неудачу с огромным объемом наблюдений, необходимых для принятия d -гарантийного решения, рассмотрим обратную задачу: выбор Δ_1 и Δ_2 , при

котором вероятность выхода ϑ за интервал $(d/(1 + \Delta_1), d(1 + \Delta_2))$ при $n = 100$ и $d = 0.0005$ не будет превосходить 0.05. Наиболее благоприятный (короткий) интервал $(0, 5.6d)$ для функции потерь $L(\vartheta, d)$ достигается при $\Delta_1 = \infty$ и $\Delta_2 = 4.6$.

Литература

1. Билалова Н. Ф. *d-Риск байесовской оценки для вероятности успеха в испытаниях Бернулли* // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2022. – Т. 164. – Кн. 4. – С. 271–284.
2. Володин И. Н. *Гарантийные процедуры статистического вывода: определение объема выборки* // Дисс. докт. физ.-мат. наук. – Казань: Казанский гос. ун-т., 1980. – 239 с.

ESTIMATORS OF THE SMALL SUCCESS PROBABILITIES IN BERNOULLI TRIALS AND THEIR D-RISK

N.F. Bilalova

We investigate the d-risk value of an success probability estimator in Bernoulli trials with a priori information about the extreme smallness of this probability. A special type 1-0 loss function is introduced that takes into consideration the relative error in the probability estimation. Also, the prior beta distribution with the appropriate selection of its parameters is considered. The d-risk function of Bayesian estimators from Bernoulli trial observations are calculated for a fixed sample size and in the case of inverse binomial sampling. The problem of d-guarantee of the estimators is discussed for the example of estimating the probability of a misfire when firing a shot in the case of practically acceptable sample sizes from a produced batch of cartridges.

Keywords: estimator of the success probability in Bernoulli trials, d-posterior approach to the guarantee problem of an estimator, prior beta distribution, Bayesian estimator of a probability, inverse binomial sampling, d-risks of estimators.

УДК 531.01

САМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДА В ПРОСТРАНСТВЕ КОНУСА

М.Ш. Бутаев¹

¹ butaevmagomed03@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе исследуется эффект самодействия покоящегося заряда в пространстве-времени двумерного конуса. Предполагается, что заряд является источником электромагнитного поля.

Ключевые слова: самодействие, электромагнитное поле, покоящийся заряд

Покоящаяся заряженная частица в искривленном пространстве-времени порождает поле, которое из-за кривизны пространства-времени и нелокальной структуры безмассового поля воздействует на саму частицу. Такая сила называется силой самодействия [1]. Аналогичная ситуация имеет место и в случае гравитационного заряда [2, 3, 4]. Электромагнитные и гравитационные силы самодействия важны при описании движения двух тел с экстремальным соотношением масс этих тел и при исследовании излучаемых ими гравитационных волн [5, 6]. В искривленных

пространствах интенсивные исследования эффекта самодействия покоящегося заряда проводились на фоне черных дыр, пространств топологических дефектов и кротовых нор.

Целью настоящей работы является анализ эффекта самодействия покоящегося заряда в пространстве-времени двумерного конуса. Предполагается, что заряд является источником электромагнитного поля.

В этой работе мы используем следующие определения тензора кривизны $R_{ABC}^D = \partial_C \Gamma_{AB}^D - \partial_B \Gamma_{AC}^D + \Gamma_{EC}^D \Gamma_{BA}^E - \Gamma_{EB}^D \Gamma_{AC}^E$ и тензора Римана $R_{MN} = R_{MFN}^F$. Система единиц выбрана так, что $c = G = 1$.

Сила самодействия

Рассмотрим пространство-время двумерного конуса

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \mu^2 r^2 d\varphi^2, \quad (1)$$

где $0 < r < \infty$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\mu = \text{const} \leq 1$.

Электромагнитное поле описывается тензором

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (2)$$

где $A_k(t, r, \varphi)$ - потенциал электромагнитного поля.

Если поле $A_i(x^k)$ создается зарядом q , то уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla^k \nabla_k A_i = g^{lk} \nabla_l \nabla_k A_i = -4\pi j_i = -4\pi q \int u_i(\tau) \delta^{(3)}(x^k, \tilde{x}^k(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g}}, \quad (3)$$

где u^i - 4-скорость заряда и τ - его собственное время. Мировая линия заряда задается функциями $\tilde{x}^k(\tau)$. Для заряда в состоянии покоя $u^i(1, 0, 0)$ и векторный потенциал A_i не зависит от времени, что позволяет использовать следующий анзац: $A_i = (A_t, 0, 0)$. Калибровка Лоренца в этом случае тождественно выполняется и система уравнений (3) сводится к одному уравнению для A_t :

$$\frac{\partial^2 A_t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_t}{\partial r} + \frac{1}{\mu^2 r^2} \frac{\partial^2 A_t}{\partial \varphi^2} = 4\pi q \frac{\delta^{(2)}(r, \varphi; \tilde{r}, \tilde{\varphi})}{\mu r}. \quad (4)$$

Поскольку рассматриваемая задача цилиндрически симметрична, потенциал удобно разложить по собственным функциям оператора $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

$$A_t(x, \tilde{x}) = 4\pi q \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \tilde{\varphi})} g_n(r, \tilde{r}). \quad (5)$$

Так как,

$$\delta(\varphi; \tilde{\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \tilde{\varphi})}, \quad (6)$$

радиальная часть, $g_n(r; \tilde{r})$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_n}{\partial r} - \frac{n^2}{\mu^2 r^2} g_n = \frac{\delta(r; \tilde{r})}{\mu r}. \quad (7)$$

$g_{-n}(r, \tilde{r}) = g_n(r, \tilde{r})$, так как уравнение, определяющее g_n не изменяется при замене n на $-n$. Используя это преобразуем $A_t(x, \tilde{x})$.

$$\begin{aligned}
A_t(x, \tilde{x}) &= 4\pi q \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\tilde{\varphi})} g_n(r, \tilde{r}) \\
&= 4\pi q \left(g_0(r, \tilde{r}) + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{in(\varphi-\tilde{\varphi})} g_n(r, \tilde{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(\varphi-\tilde{\varphi})} g_n(r, \tilde{r}) \right) \\
&= 4\pi q \left(g_0(r, \tilde{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in(\varphi-\tilde{\varphi})} g_n(r, \tilde{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(\varphi-\tilde{\varphi})} g_n(r, \tilde{r}) \right) \\
&= 4\pi q \left(g_0(r, \tilde{r}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\varphi-\tilde{\varphi})) g_n(r, \tilde{r}) \right). \tag{8}
\end{aligned}$$

Решение уравнения (7) представим в следующем виде

$$g_l(r; \tilde{r}) = \theta(r - \tilde{r})\psi_1(r)\psi_2(\tilde{r}) + \theta(\tilde{r} - r)\psi_1(\tilde{r})\psi_2(r), \tag{9}$$

где θ - ступенчатая функция, а функции $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$ - два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (7)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial^2 r} - \frac{n^2 \psi(r)}{r^2 \mu^2} = 0. \tag{10}$$

Функция $\psi_1(r)$ падает при $r \rightarrow \infty$ и $\psi_2(r)$ регулярна в нуле

$$\psi_1(r_1) > \psi_1(r_2) \text{ при } r_1 < r_2, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \psi_2(r) = const \tag{11}$$

Интегрируя уравнение (7) по r получим условие нормализации Вронского:

$$W(\psi_1(r); \psi_2(r)) = \psi_1'(r)\psi_2(r) - \psi_2'(r)\psi_1(r) = \frac{1}{\mu r} \tag{12}$$

Независимыми решениями уравнения (10) будут при $n \neq 0$:

$$\phi_1 = r^{-n/\mu} \text{ и } \phi_2 = r^{n/\mu}, \quad n \neq 0, \tag{13}$$

а при $n=0$:

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = \ln(r). \tag{14}$$

Тогда функции ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющие граничным условиям (11) можно записать в виде при $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
\psi_1(r) &= C_1 \phi_1(r) = C_1 r^{-\frac{n}{\mu}}, \\
\psi_2(r) &= C_2 \phi_2(r) = C_2 r^{\frac{n}{\mu}}, \quad n \neq 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

и при $n = 0$

$$\begin{aligned}
\psi_1(r) &= C_3 \phi_2(r) = C_3 \ln(r), \\
\psi_2(r) &= C_4 \phi_1(r) = C_4, \quad n = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя эти выражения в (12), получим

$$-2C_1C_2 \frac{n}{\mu r} = \frac{1}{\mu r}, \Rightarrow C_1C_2 = -\frac{1}{2n}, \quad n \neq 0. \quad (17)$$

$$\frac{C_3C_4}{r} = \frac{1}{\mu r} \Rightarrow C_3C_4 = \frac{1}{\mu}, \quad n = 0. \quad (18)$$

Подставляя сначала выражения (15) и (16) в (9), учитывая соотношения (17) и (18), при $r > \tilde{r}$ получим:

$$g_0(r, \tilde{r}) = \frac{\ln(r)}{\mu}, \quad g_n(r, \tilde{r}) = \frac{r^{-\frac{n}{\mu}} \tilde{r}^{\frac{n}{\mu}}}{n} \quad (19)$$

Подставляя уравнения (19) в (8) получим:

$$\begin{aligned} A_t(x, \tilde{x}) &= 4\pi q \left(g_0(r, \tilde{r}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\varphi - \tilde{\varphi})) g_n(r, \tilde{r}) \right) \\ &= 4\pi q \left(\frac{\ln(r)}{\mu} - \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\varphi - \tilde{\varphi})) \frac{r^{-\frac{n}{\mu}} \tilde{r}^{\frac{n}{\mu}}}{n} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

После суммирования в этом выражении по n , получим

$$A_t(x, \tilde{x}) = 4\pi q \left(\frac{\ln(r)}{\mu} - \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2r^{-1/\mu} \tilde{r}^{1/\mu} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) + r^{-2/\mu} \tilde{r}^{2/\mu} \right] \right). \quad (21)$$

Это выражение расходится при $\tilde{x} \rightarrow x$, и должно быть перенормировано.

Перенормировка и результат

Процедура определения силы самодействия требует перенормировки потенциала $A_t(x; \tilde{x})$, который расходится в пределе $x \rightarrow \tilde{x}$ (см., например, работы [7, 8]).

Перенормировка достигается вычитанием из $A_t(x; \tilde{x})$ контрчлена Девитта-Швингера $A_{DS}(x; \tilde{x})$, а затем взятием предела $x \rightarrow \tilde{x}$

$$A_{ren}(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} (A_t(x; \tilde{x}) - A_{DS}(x; \tilde{x})). \quad (22)$$

Для покоящегося заряда в статическом искривленном пространстве-времени контрчлен Девитта-Швингера $A_{DS}(x; \tilde{x})$, который необходимо вычесть, имеет вид (21) при $\mu = 1$

$$A_{DS}(x, \tilde{x}) = 4\pi q \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2\frac{\tilde{r}}{r} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) + \frac{\tilde{r}^2}{r^2} \right] \right). \quad (23)$$

Таким образом, перенормированное выражение для потенциала заряда на конусе имеет вид

$$A_{ren}(r) = 4\pi q \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \ln(r). \quad (24)$$

Потенциал самодействия и сила самодействия имеют вид

$$U^{self} = -\frac{q}{2} A_t^{ren} = -2\pi q^2 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \ln(r), \quad (25)$$

$$F^{(r)} = -\frac{\partial U^{self}}{\partial r} = 2\pi q^2 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \frac{1}{r}. \quad (26)$$

Заключение

В работе найдено поле двумерного статического заряда в пространстве конуса. Также найдена сила, с которой такой заряд действует на себя.

Литература

1. Poisson E., Pound A., and Vega I. The motion of point particles in curved spacetime, *Living Rev. Rel.*, 2011, Vol. 14, pp. 1-190.
2. Oltean M., Epp R., Sopena C.F., Spallicci A., and Mann R. The motion of localized sources in general relativity: gravitational self-force from quasilocal conservation laws, 2019, arXiv:1907.03012.
3. Zimmerman P. and Poisson E. Gravitational self-force in nonvacuum spacetimes *Phys.Rev. D*, 2014, Vol. 90, 084030.
4. Bini D. and Geralico A. New gravitational self-force analytical results for eccentric equatorial orbits around a Kerr black hole: Gyroscope precession *Phys. Rev. D*, 2019, Vol. 100, 104003.
5. Barack L. Gravitational self force in extreme mass-ratio inspirals *Class. Quant. Grav.*, 2009, Vol. 26, 213001, arXiv:0908.1664.
6. Barack L. and Pound A. Self-force and radiation reaction in general relativity *Reports on Progress in Physics*, 2018, Vol. 82, 016904.
7. Rosenthal E. Massive field approach to the scalar self force in curved space-time, *Phys. Rev. D*, 2004, Vol. 69, 064035.
8. Rosenthal E. Scalar self force on a static particle in Schwarzschild using the massive field approach, *Phys. Rev. D*, 2004, Vol. 70, 124016.

SELF-ACTION OF A CHARGE IN THE SPACE OF A CONE

M.Sh. Butaev

This work investigates the effect of self-interaction of a charge at rest in the space-time of a two-dimensional cone. It is assumed that the charge is the source of the electromagnetic field.

Keywords: self-action, electromagnetic field, charge at rest

УДК 531

ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОД ВЛИЯНИЕМ БИОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

П.С. Вансков¹

¹ pasvanskov@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе рассмотрена задача стабилизации динамической системы с использованием бионической системы управления. В качестве динамической системы была взята двумерная модель с двумя парами мышц антагонистов. Для контроля активации мышцы использовалась бионическая система управления. Для обучения системы управления использовались методы машинного обучения.

Ключевые слова: динамическая система, бионическая система управления, нейронная сеть, тонус мышцы

0.1. Введение

В настоящее время для решения самых разнообразных задач широкую популярность набирают различные направления, использующие искусственный интеллект, где одним из самых перспективных направлений считаются спайковые нейронные сети [1-4].

В данной работе представлен способ реализации управления динамической системой [5, 6] с использованием модели спайковой нейронной сети. Работа выполнена в пакете прикладных программ для моделирования динамических систем MATLAB SIMULINK.

Целью данной работы является обучение системы управления для стабильного положения динамической системы путём активации соответствующих мышц.

0.2. Материалы и методы решения

Моделирование динамической системы производилось численным методом на основе библиотеки OpenSim. В библиотеке модель представляется в виде структуры, состоящей из совокупности различных множеств элементов, представляющих физическую систему.

Рассмотрим подробнее модели мышц в библиотеке OpenSim. Для того чтобы задать мышцу необходимо указать её название, указать точки крепления к телам и соответствующие модели свойства мышцы.

В работе была рассмотрена двумерная модель, состоящая из двух ног и головы. Ноги соединены с головой через одноподвижную вращательную кинематическую пару. К каждой ноге прикреплена пара мышц антагонистов - бицепс и трицепс. Активация соответствующей мышцы поворачивает ногу по или против часовой стрелки. Для моделирования мышц использовалась биомеханическая модель Милларда [7].

Динамика поведения тел была описана уравнениями Лагранжа и решалась с помощью библиотеки OpenSim.

Построение модели бионической системы управления осуществлено при помощи библиотеки Simulink. Более подробная архитектура нейронной сети, описанная в работе Рыбака [8, 9]. При таком подходе генератор с постоянной частотой отправляет возбуждающие сигналы на паттерн-генератор и ингибирует аналогичный паттерн-генератор мышцы антагониста. В свою очередь паттерн-генератор через интернейрон отправляет возбуждающий сигнал на мотонейрон, который в свою очередь активизирует мышцу. Также паттерн-генератор ингибирует мотонейрон

мышцы антагониста. Мышца при активации ингибирует собственный мотонейрон.

В роли регулирующего элемента использовался двоичный сигнал, обозначенный как паттерн, где 1 подразумевает необходимость активации мышцы, а 0 отсутствие этой необходимости.

Используя среду программирования MatLab, на времени квантования генерируются паттерны для активации соответствующих мышц. После, на основании полученных паттерн сигналов, с использованием библиотеки Simulink, описанная выше модель управления моделирует сигналы активации для мышц. Получив на вход модель и файл со значениями величин активаторов, инструмент моделирования движения на времени квантования строит симуляцию движения и записывает его в файл. Затем MatLab считывает из полученного файла движения конечное состояние системы для генерации паттернов.

0.3. Заключение

В работе была построена адекватная динамическая система, осуществлена реализация между программами, осуществляющих управление и моделирование динамической системы, Определены функциональные блоки и построена система управления для регуляции мышц на основе нейронной сети, создана бионическая система управления, а также было достигнуто стабильное положение на протяжении определённого времени.

Таким образом, была создана система управления динамической системой, на основе модели нейронной сети с обратной связью.

Литература

1. Ivanova A. *Application of spike neural network for stabilizing pendulum in the nonlinear formulation* / A. Ivanova et al. // MATEC Web of Conferences – 2022. – Vol. 362. – 01010.
2. Ivanova A. *Muscle tone control system based on LIF model neural network* / A. Ivanova et al. // 2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). – 2022. – doi: 10.1109/ITNT55410.2022.9848650.
3. Ivanova, A.D. *Stabilization of a pendulum on an elastic foundation using a multilayer perceptron* / A.D. Ivanova et al. // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2308, Is.1. – 012005.
4. Zhang X. *Spike-Based Indirect Training of a Spiking Neural Network- Controlled Virtual Insect* / X Zhang et al. // 52nd IEEE Conference on Decision and Control. – 2013. – P. 6798-6805.
5. Ляшева С.А., Медведев М.В., Шлеймович М.П. *Распознавание объектов на местности в системах управления беспилотных летательных аппаратов* // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника, 2014. – Т.57(3). – С.303-306.
6. Гизатуллин З.М., Шлеймович М.П. *Анализ помехоустойчивости бортовой системы управления беспилотных летательных аппаратов на основе физического моделирования наведенных помех* // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника, 2021. – Т.64(3). – С.554-561.
7. Millard M., Uchida T., Seth A., Delp S.L. *Flexing computational muscle: modeling and simulation of musculotendon dynamics* // ASME Journal of Biomechanical Engineering, 2013. – 135(2). – 021005.
8. Frigon A. *The neural control of interlimb coordination during mammalian locomotion* // Neurophysiol. – 2017. – Vol. 117. – P. 2224-2241.
9. McCrea D.A., Rybak I.A. *Organization of mammalian locomotor rhythm and pattern generation* / D.A. McCrea, I.A. Rybak // Brain Res Rev. – 2008. – Vol. 57, Is.1.

THE TASK OF STABILIZING A DYNAMIC SYSTEM UNDER THE INFLUENCE OF A BIONIC CONTROL SYSTEM

P.S. Vanskov P.

The paper considers the problem of stabilizing a dynamic system using a bionic control system. A two-dimensional model with two pairs of antagonist muscles was taken as a dynamic system. A bionic control system was used to control muscle activation. Machine learning methods were used to train the control system.

Keywords: dynamic system, bionical control system, neural network, muscle tone

УДК 004.42

СЕРВИС ВОССТАНОВЛЕНИЯ НАУЧНЫХ ДОКУМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ГРАФА ЗНАНИЙ

К. И. Гареев¹, Д. В. Беденьгов², И.М. Асадуллин³

¹ *kamilgareev39@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² *dima.bedengov@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

³ *asadullin.iskander@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе исследуется тема разработки сервиса и алгоритмов для восстановления документов с помощью словаря устойчивых выражений. Оцифровка текстовых документов имеет огромное значение для сохранения и использования культурного и исторического наследия. Цифровые версии текстов не только обеспечивают их сохранность, но и открывают новые возможности, такие как глобальный доступ к материалам с помощью сети интернет, безопасное хранение больших массивов документов или использование рукописных научных трудов для обучения нейросетей.

Однако многие тексты находятся в плохом состоянии. При попытке их оцифровки некоторые слова или словосочетания опознаются с ошибками. Поэтому для восстановления поврежденных документов требуется кропотливая ручная работа специалистов.

Целью исследования является разработка сервиса, в основе которого лежат алгоритмы генерации фразеологического словаря, ранжирования N-грамм, а также распознавания и восстановления поврежденного текста. Для достижения этой цели проведен анализ требований к системе, изучены существующие подходы и применяемые технологии.

В ходе работы созданы несколько алгоритмов, отвечающих за работу с поврежденным текстом и словарем устойчивых выражений. Разработан сервис, объединяющий алгоритмы в одну систему. Полученная инфраструктура предоставит специалистам инструмент, позволяющий сократить время обработки ошибок распознавания текста. Результаты работы могут быть полезны как для профильных организаций, так и для рядовых пользователей, желающих восстановить поврежденные документы.

Ключевые слова: обработка естественных языков, сервис, словарь устойчивых выражений, N-граммы

Введение. *В современном мире, несмотря на широкое распространение цифровых технологий, печатные документы продолжают играть важную роль в различных сферах жизни общества. От юридически значимых документов до исторических архивов. Таким образом, потеря или утрата таких документов может привести к необратимым последствиям, включая утрату исторической информации и важных знаний.*

С каждым годом количество оцифрованных документов увеличивается, и возникает необходимость в их обработке и восстановлении: по данным Интерфакс [1] с 2020 по 2021 год количество оцифрованных книг увеличилось на 21%. А в рамках федерального проекта «Книжные памятники» с 2019 года в России ежегодно оцифровывается по 8000 книжных памятников, а к 2024 году планируется оцифровать около 48 тысяч текстов.

Использование сервиса по восстановлению поврежденных документов предоставляет возможность не только восстановить изначальное состояние текста, но и улучшить общее качество оцифрованных документов, что позволит помочь в развитии научных исследований любых сфер.

Выбор метода для алгоритма восстановления поврежденного текста пал на метод N-грамм. Данный метод использует статистические модели, основанные на частоте встречаемости последовательностей из N элементов в тексте. Эти элементы могут быть буквами, слогами или словами. При восстановлении поврежденного текста, метод N-грамм анализирует контекст вокруг недостающей или искаженной части и предлагают наиболее вероятные варианты для замены, опираясь на данные о том, какие N-граммы обычно встречаются вместе. [2] Среди других методов обработки текста метод имеет ряд преимуществ, таких как:

- Популярность: Метод N-грамм является одним из основных методов анализа и работы с текстом в обработке естественного языка и цифровой лингвистике;
- Гибкость: Метод может быть применен к различным уровням текста, от отдельных букв до слов и устойчивых фраз;
- Статистическая надежность: Метод N-грамм опирается на точные статистические модели, которые могут постоянно улучшаться по мере обработки новых данных;
- Универсальность: Подходит для любого языка и типа текста, в том числе научного, если имеется достаточное количество данных для анализа;
- Масштабируемость: Метод подходит для обработки любых, в том числе больших объемов текста;

В качестве модели графа знаний было решено использовать словарь устойчивых выражений. Он представляет из себя массив из пар значений - устойчивая конструкция и ее количество в тексте, как отображено на рисунке 1:

```

PS C:\Users\Fotz\PycharmProjects\ukr2024_python> python3 dictWork.py generate *.input_pdf\poznayak.pdf* 3 1 "test_dict"
[nltk_data] Downloading package punkt to
[nltk_data] C:\Users\Fotz\AppData\Roaming\nltk_data...
[nltk_data] Package punkt is already up-to-date!
{('высшей', 'математики', 'и'): 2, ('лекций', 'читавшихся', 'авторами'): 2, ('читавшихся', 'авторами', 'в'): 2, ('на', 'физическом', 'факультете'): 2, ('Московского', 'государствен'): 2, ('евклидовых', 'пространств', 'и'): 2, ('пространств', 'и', 'линейных'): 2, ('линейных', 'операторов', 'в'): 2, ('билинейных', 'и', 'квадратичных'): 2, ('и', 'квадратичных', 'ственно', 'через', 'его'): 2, ('через', 'его', 'элементы'): 2, ('Теорема', 'о', 'базисном'): 2, ('о', 'базисном', 'миноре'): 3, ('Понятие', 'линейной', 'зависимости'): 2, ('линейно', 'сное', 'евклидово', 'пространство'): 2, ('для', 'отыскания', 'нормального'): 2, ('отыскания', 'нормального', 'решения'): 2, ('нормального', 'решения', 'линейной'): 3, ('решения', 'ператоров', 'линейные'): 2, ('формы', 'в', 'евклидовом'): 4, ('в', 'евклидовом', 'пространстве'): 7, ('евклидовом', 'пространстве', 'Специальное'): 2, ('пространстве', 'Специальное', 'к'): 3, ('формы', 'к', 'сумме'): 3, ('к', 'сумме', 'квадратов'): 4, ('Итерационные', 'методы', 'решения'): 2, ('методы', 'решения', 'линейных'): 3, ('решения', 'линейных', 'систем', 'проблемы', 'собственных'): 3, ('проблемы', 'собственных', 'значений'): 3, ('Билинейные', 'и', 'квадратичные'): 2, ('и', 'квадратичные', 'формы'): 3, ('Закон', 'инерции', 'квадратич', 'ных'): 2, ('Классификация', 'квадратичных', 'форм'): 2, ('сумме', 'квадратов', 'в'): 2, ('гиперповерхности', 'второго', 'порядка'): 11, ('Преобразование', 'общего', 'уравнения'): 2, ('Центр', 'гиперповерхности', 'второго'): 2, ('центральной', 'гиперповерхности', 'второго'): 2, ('второго', 'порядка', 'Классификация'): 2, ('базисов', 'и', 'координат'): 2, ('опе', 'ацении', 'для'): 2, ('вращения', 'для', 'решения'): 2, ('для', 'решения', 'полной'): 2, ('решения', 'полной', 'проблемы'): 2, ('А', 'Н', 'Тихонова'): 2, ('с', 'изучения', 'матриц'): 2, ('в', 'частности', 'с'): 2, ('вырожденная', 'кососимметричная', 'невyroжденная'): 2, ('кососимметричная', 'невyroжденная', 'симметричная'): 2, ('пространство', 'вещественное', 'элементов', 'линейного', 'простран'): 3, ('линейного', 'простран', 'ства'): 3, ('квадратных', 'матриц', 'подпространств'): 2}
PS C:\Users\Fotz\PycharmProjects\ukr2024_python>

```

Рис. 1. Фрагмент словаря устойчивых выражений

Для восстановления поврежденных частей текста был разработан алгоритм, реализованный на языке программирования Python, блок схема алгоритма показана на рисунке 2:



Рис. 2. Блок-схема алгоритма восстановления поврежденного текста

Помимо алгоритма восстановления, были также реализованы алгоритмы генерации словаря из pdf-источников и алгоритм ранжирования.

Также, с помощью фреймворка Reflex, написанного на языке Python, был создан сервис. Для создания пользовательского интерфейса в Reflex реализованы независимые и многократно используемые части - компоненты. Компоненты имеют свои состояния, которые можно обработать на серверной части приложения.

Все алгоритмы работают через реализованный сервис, позволяя пользователям указывать все необходимые параметры генерации словаря и восстановления поврежденных слов.

Также, была разработана возможность генерации словаря. В качестве источника для создания словаря будет использован загруженный PDF файл. Также необходимо выбрать длину устойчивой конструкции в словаре. Для этого необходимо вписать цифру в поле “N=”. Разработанный функционал позволяет восстановить текст любой тематики, при наличии соответствующего терминологического источника данных.

Общий вид интерфейса сервиса представлен на рисунке 3.

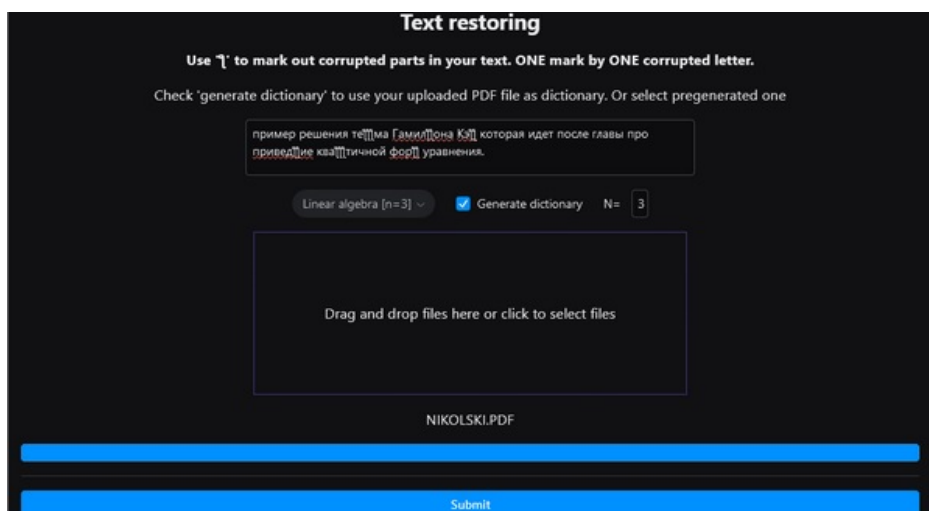


Рис. 3. Общий вид интерфейса с введенным для восстановления текстом и загруженным на сервер файлом “NIKOLSKI.pdf”

Литература

1. Число оцифрованных библиотеками Подмосковья книг увеличилось на 21% за год. - URL: <https://www.interfax-russia.ru/index.php/center/novosti-podmoskovya/chislo-ocifrovannyh-bibliotekami-podmoskovya-knig-uvelichilos-na-21-za-god> (дата обращения: 07.05.2024)
2. Бенгфорт Б. и др. *Прикладной анализ текстовых данных на Python. Машинное обучение и создание приложений обработки естественного языка.* - СПб.: Питер, 2019. — 368 с. - ISBN 978-5-4461-1153-4.
3. Терешкова О. А. *Консольные приложения: преимущества и недостатки.* / О. А. Терешкова, А. А. Дробыш // Инженерно-педагогическое образование в XXI веке : материалы XII Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов БНТУ (72-й студенческой научно-технической конференции БНТУ), Минск, 19–20 мая 2016 г.: в 2 ч. / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: С.А. Иващенко [и др.]. – Минск, 2016. – Ч. 1. - С. 91-93.
4. Индрасири К., Сиривардена П. *Microservices for the Enterprise.* //К. Индрасири, П. Сиривардена – 2018. – 63 с. – ISBN 978-1-4842-3857-8.
5. Reflex // Reflex dev - URL: <https://reflex.dev/> (дата обращения 08.05.2024)

SERVICE FOR RESTORING SCIENTIFIC DOCUMENTS BASED ON A KNOWLEDGE GRAPH

K.I.Gareev , D.V.Bedengov, I.M.Asadullin

This paper explores the development of a service and algorithms for document recovery using a dictionary of stable expressions. Digitization of text documents is of great importance for the preservation and use of cultural and historical heritage. Digital versions of texts not only ensure

their safety, but also open up new opportunities, such as global access to materials via the Internet, secure storage of large arrays of documents, or the use of handwritten scientific papers to train neural networks.

However, many texts are in poor condition. When trying to digitize them, some words or phrases are recognized with errors. Therefore, painstaking manual work of specialists is required to restore damaged documents.

The purpose of the study is to develop a service based on algorithms for generating a phraseological dictionary, ranking N-grams, and recognizing and restoring damaged text. To achieve this goal, an analysis of the system requirements was conducted, existing approaches and applied technologies were studied.

During the work, several algorithms were created that are responsible for working with damaged text and a dictionary of stable expressions. A service was developed that combines the algorithms into one system. The resulting infrastructure will provide specialists with a tool that allows them to reduce the time it takes to process text recognition errors. The results of the work can be useful for both specialized organizations and ordinary users who want to restore damaged documents.

Keywords: natural language processing, NLP, service, dictionary of stable expressions, N-grams

УДК 514.822

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОПУЛЬСИВНОГО ВОЛНООБРАЗНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Д.А. Исмагилов¹, Н.Н. Гумеров², А.Н. Нуриев³

¹ daaismagilov@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² nngumerov@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

³ artem.nuriev@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе проводится численное исследование гидродинамики рыбоподобных пловцов при scombroидном и угревидном режимах плавания. По результатам работы выполняется анализ структур течения и гидродинамических характеристик пловцов, рассчитываются крейсерские скорости таких движителей при различных параметрах колебаний, проводится сравнение гидродинамических характеристик рассматриваемых пловцов с характеристиками представителей подводного мира.

Ключевые слова: пропульсивное волнообразное движение, гидродинамика рыбоподобных пловцов, численное моделирование

Одним из наиболее перспективных направлений развития в области аэрогидродинамики беспилотных устройств, на сегодняшний день, является создание биомиметических систем. При создании искусственных подводных и летательных аппаратов нет необходимости воспроизводить все аспекты сложных биологических организмов, в этой связи возникают задачи определения наиболее важных из них, влияющих на характеристики пропульсивного движения в жидкости. Настоящая работа посвящена изучению гидродинамики рыбоподобных пловцов. Рассматривается максимально простая форма пловца, представляющего собой цилиндрическое тело с сечением в форме профиля NACA0012. Исследуются влияния

разных режимов движения, относительных размеров тела на структуры течения, крейсерскую скорость и разные показатели эффективности. Проводится сравнение гидродинамических характеристик рассматриваемого искусственного движителя с характеристиками представителей подводного мира [1, 2].

Рассмотрим гидродинамику рыбоподобного пловца, представляющего собой цилиндрическое тело с сечением в форме профиля НАСА0012 с длиной хорды L , толщиной $b = 0.12 L$ и высотой h . Пловец движется со средней скоростью в направлении оси Ox декартовой системы координат и совершает волнообразное колебательное движение, имитирующее изгибные колебания рыбы, по следующему закону:

$$y(x, t) = \alpha A(x) \sin 2\pi(x/\lambda - ft), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (1)$$

где $A(x) = 1 + (x - 1)c_1 + (x^2 - 1)c_2$ определяет профиль волны, λ - длину волны, f - частоту колебаний, α - амплитуду колебания хвоста. В данном исследовании мы будем считать $\lambda = 1$, $\alpha = 0.1L$. С помощью констант c_1 и c_2 будем определять режим плавания. Рассмотрим два наиболее известных и универсальных режима: скомброидный, задаваемый константами $c_1 = -0.825$, $c_2 = 1.625$, и угревидный - $c_1 = 0.323$, $c_2 = 0.310$.

Для описания гидродинамики будем использовать уравнение Навье-Стокса. Обезразмеривая скорость на характерную скорость колебаний хвоста U_d , пространственные координаты на L , время на L/U_d и переходя в декартовую систему координат, движущуюся поступательно вместе с пловцом со скоростью U_s , запишем определяющую систему уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{K\beta} \Delta \vec{u}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2)$$

где \vec{u} - безразмерная скорость, t - безразмерное время, p - безразмерное давление. Безразмерные комплексы $K\beta$,

$$K\beta = \frac{2\pi\alpha}{L}, \quad \beta = \frac{L^2 f}{\nu}$$

определяют соответственно безразмерную амплитуду хвоста и частоту колебаний пловца, ν - кинематическую вязкость жидкости. В соответствии с условием, безразмерная амплитуда принимается в расчетах постоянной и равной $K\beta = 0.2\pi$.

Уравнения (2) дополним граничными условиями, задающими скорость на теле пловца в соответствии с (1) и скорость на бесконечности, как $U = -U_s/U_d$.

Для решения поставленной задачи была разработана численная модель на базе библиотеки OpenFOAM с реализованными новыми модулями: Power [3] - для подсчета коэффициента мощности, myWaveDisplacement - для моделирования волнообразного движения пловца и UpdateBC - для определения его крейсерской скорости. Моделирование проводилось в двумерной и трехмерной постановках.

Дискретизация системы уравнений движения в пакете OpenFOAM проводилась по методу конечных объемов (FVM) в декартовой системе координат. Для дискретизации системы уравнений по времени используется схема Кранка-Николсона.

Для аппроксимации градиента применялась линейная интерполяция с коррекцией на скошенность сетки. Для интерполяции переменных в конвективных слагаемых использовалась схема Gauss GammaV. Для аппроксимации оператора Лапласа в диффузионных слагаемых использовалась линейная интерполяция с коррекцией на неортогональность.

Для решения задачи использовался решатель PIMPLE. Решение системы уравнений для давления осуществлялось с помощью предобусловленного стабилизированного метода бисопряженных градиентов (PbiCGStab) с использованием геометро-алгебраического многосеточного предобуславливателя (GAMG). Система для скорости решалась с помощью предобусловленного метода бисопряженных градиентов (PbiCG) на основе неполной LU факторизации.

В рамках двумерного моделирования были получены следующие результаты:

1. При сравнении гидродинамических показателей со статьей G.J. Dong (2007) [4] была проведена верификация численной схемы. Сравнение со статьей A.P. Maertens (2015) [5] показало, что в ней имеются ошибки, которые были исправлены в данной работе.
2. Были получены зависимости коэффициентов C_D и C_P , а также пропульсивной и квазипропульсивной эффективностей от частоты.
3. Были вычислены крейсерские скорости пловца при изменении частоты. Полученные результаты отлично согласуются с экспериментальными [6], полученными для представителей подводного мира. Дополнительно найдена зависимость квазипропульсивной эффективности от частоты при крейсерском режиме движения.

В рамках трехмерного моделирования были получены следующие результаты:

1. Были получены зависимости коэффициентов C_D и C_P , а также пропульсивной и квазипропульсивной эффективностей от частоты.
2. Была найдена зависимость крейсерской скорости пловца от безразмерной частоты колебаний. Показано хорошее совпадение результатов с экспериментальными [6].
3. Показано, что при увеличении высоты пловца основные гидродинамические показатели стремятся к показателям двумерной модели. Было выявлено, что в среднем сечении значение коэффициента сопротивления C_D почти совпало со значением в двумерной модели.

Литература

1. George, S., Triantafyllou, Michael, S., Triantafyllou, Mark, A., Grosenbaugh. (1993). Optimal Thrust Development in Oscillating Foils with Application to Fish Propulsion. *Journal of Fluids and Structures*, 7(2):205-224. doi: 10.1006/JFLS.1993.1012
2. Sánchez-Rodríguez, J., Raufaste, C., & Argentina, M. (2023). Scaling the tail beat frequency and swimming speed in underwater undulatory swimming. *Nature communications*, 14(1), 5569. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-41368-6>

3. module for OpenFOAM for power calculation / [Электронный ресурс] / GitHub : [сайт]. - URL: <https://github.com/Poodelay/Power> (дата обращения: 12.05.2024)
4. Gen-Jin Dong, Xi-Yun Lu; Characteristics of flow over traveling wavy foils in a side-by-side arrangement. *Physics of Fluids* 1 May 2007; 19 (5): 057107. <https://doi.org/10.1063/1.2736083>
5. Maertens, A. P., Triantafyllou, M. S., & Yue, D. K. (2015). Efficiency of fish propulsion. *Bioinspiration & biomimetics*, 10(4), 046013. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/10/4/046013>
6. Gazzola, M., Argentina, M., & Mahadevan, L. (2014). Scaling macroscopic aquatic locomotion. *Nature Physics*, 10(10), 758-761. <https://doi.org/10.1038/nphys3078>

NUMERICAL STUDY OF PROPULSIVE UNDULATORY MOTION OF A BODY IN LIQUID

D.A. Ismagilov, N.N. Gumerov, A.N. Nuriev

In this paper, a numerical study of the hydrodynamics of fish-like swimmers under carangiform and anguilliform swimming modes is carried out. Based on the results of the work, the flow structures and hydrodynamic characteristics of swimmers are analyzed, cruising speeds of such thrusters at different vibration parameters are calculated, and hydrodynamic characteristics of the considered swimmers are compared with those of representatives of the underwater world.

Keywords: propulsive undulatory motion, hydrodynamics of fish-like swimmers, numerical modeling

УДК 514.83

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

И.А. Кашапов¹

¹ kashapo15@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе получены решения, описывающий однородное и изотропное 4-х мерное пространство в рамках $f(R)$ гравитации с дополнительным пространством, представляющим собой двумерную сферу.

Ключевые слова: Вселенная, $f(R)$ гравитация, дополнительные измерения.

Введение

Компактные дополнительные пространства - это широко используемая идея. Их рассмотрение помогает продвигаться в таких сложных вопросах как объединение сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий [1, 2], масса нейтрино [3], проблема космологической постоянной [4, 5] и так далее. Любая многомерная модель при низких энергиях должна приводить к четырехмерной теории, что свидетельствует о наличии связи между ними. Теории гравитации с высшими производными часто рассматриваются в современных исследованиях, несмотря на сложности, которые порождает такой подход [6]. Много статей посвящено $f(R)$ теории гравитации - одному из самых простых обобщений теории гравитации Эйнштейна. Описание обобщений $f(R)$ гравитации до теории Гаусса-Бонне можно найти в [7, 8], а примеры исследований, где функция $f(R)$ имеет конкретный вид, - в [9, 10]. В

большинстве работ предполагается, что дополнительное пространство обладает положительной кривизной. В работе рассматривается модель $f(R)$ гравитации в шестимерном пространстве.

На протяжении всей работы будут использоваться система единиц, в которой скорость света $c = 1$.

1. Уравнения $f(R)$ гравитации

Действие $f(R)$ гравитации в шестимерном пространстве имеет следующий вид

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} f(R), \quad (1)$$

где $f(R)$ - функция кривизны.

Уравнения такой теории имеют вид

$$-\frac{1}{2}f(R)\delta_A^B + (R_A^B + \nabla_A \nabla^B - \delta_A^B \square) f_R = 0, \quad (2)$$

где $A, B, C, \dots = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ∇_A - обозначение ковариантной производной, а $\square = g^{AB} \nabla_A \nabla_B$.

Если наше четырехмерное пространство-время однородно и изотропно, а дополнительное двумерное пространство максимально симметрично и имеет положительную кривизну (это наше предположение), то первая квадратичная форма шестимерного пространства-времени может быть записана в виде

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) - L(t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3)$$

Нетривиальные уравнения (2) в метрике (3)

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow -\left(3\frac{a'}{a} + 2\frac{L'}{L}\right) R' f_{RR} + \left(3\frac{a''}{a} + 2\frac{L''}{L}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow -R'^2 f_{RRR} - \left[R'' + 2R' \left(\frac{a'}{a} + \frac{L'}{L}\right)\right] f_{RR} + \left(\frac{a''}{a} + 2\frac{a'^2}{a^2} + 2\frac{a'L'}{aL}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow -R'^2 f_{RRR} - \left[R'' + \left(3\frac{a'}{a} + \frac{L'}{L}\right) R'\right] f_{RR} + \left(\frac{L''}{L} + \frac{L'^2}{L^2} + 3\frac{L'a'}{La} + \frac{1}{L^2}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (6)$$

где

$$R(t) = 6\frac{a''}{a} + 6\frac{a'^2}{a^2} + 4\frac{L''}{L} + 2\frac{L'^2}{L^2} + 12\frac{L'a'}{La} + \frac{2}{L^2}, \quad (7)$$

являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями четвёртого порядка относительно неизвестных функций $a(t), L(t)$.

$f_R \equiv \frac{df}{dR}$, штрих означает производную по t .

2. Дополнительные измерения – двумерная сфера

Рассмотрим частный случай приведённой выше задачи при $L(t) = L_0 = \text{const}$, т.е.

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - L_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (8)$$

В этом случае нетривиальные уравнения рассматриваемой теории принимают вид

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow -3\frac{a'}{a}R'f_{RR} + 3\frac{a''}{a}f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow -R'^2 f_{RRR} - \left(R'' + 2\frac{a'R'}{a}\right) f_{RR} + \left(\frac{a''}{a} + 2\frac{a'^2}{a^2}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow -R'^2 f_{RRR} - \left(R'' + 3R'\frac{a'}{a}\right) f_{RR} + \frac{1}{L_0^2} f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (11)$$

где

$$R(t) = 6\frac{a''}{a} + 6\frac{a'^2}{a^2} + \frac{2}{L_0^2}, \quad (12)$$

Если составить комбинацию $(3 \cdot (5) - 3 \cdot (6) + (4)) / f_R$ уравнений (4)-(6), мы получим

$$6\frac{a''}{a} + 6\frac{a'^2}{a^2} - \frac{3}{L_0^2} - \frac{f}{2f_R} = 0, \quad (13)$$

Используя выражение (12), это уравнение можно переписать в виде

$$R(t) - \frac{5}{L_0^2} - \frac{f}{2f_R} = 0, \quad (14)$$

Это уравнение на функцию $R(t)$, решение которого, если оно существует, постоянно. Следовательно

$$R(t) = R_0 = \text{constant}. \quad (15)$$

Переписав уравнения (9)-(12) с учётом (15), получим

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow 3\frac{a''}{a}f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{a''}{a} + 2\frac{a'^2}{a^2}\right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{L_0^2} f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (18)$$

$$R(t) = 6\frac{a''}{a} + 6\frac{a'^2}{a^2} + \frac{2}{L_0^2} = R_0 = \text{constant}, \quad (19)$$

Из (18) следует, что

$$\frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{L_0^2}. \quad (20)$$

Таким образом, систему уравнений (16 - 19) можно переписать так

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow 3\frac{a''}{a} = \frac{f}{2f_R} = \frac{1}{L_0^2}, \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{a''}{a} + 2\frac{a'^2}{a^2} = \frac{f}{2f_R} = \frac{1}{L_0^2}, \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{L_0^2}. \quad (23)$$

$$R(t) = 6\frac{a''}{a} + 6\frac{a'^2}{a^2} + \frac{2}{L_0^2} = R_0 = \text{constant}, \quad (24)$$

Решение уравнения (21) есть

$$a(t) = C_1 e^{t/(\sqrt{3}L_0)} + C_2 e^{-t/(\sqrt{3}L_0)}. \quad (25)$$

Подставляя это выражение в (22) и (24), получим, что рассматриваемая система совместна, в двух случаях:

$$1) a(t) = C_1 e^{t/(\sqrt{3}L_0)}, \quad R_0 = \frac{6}{L_0^2}, \quad \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{L_0^2}. \quad (26)$$

$$2) a(t) = C_2 e^{-t/(\sqrt{3}L_0)}, \quad R_0 = \frac{6}{L_0^2}, \quad \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{L_0^2}. \quad (27)$$

3. Квадратичная по R теория гравитации

Рассмотрим квадратичную по R теорию гравитации

$$f(R) = aR^2 + R + c. \quad (28)$$

В этом случае подстановка (28) в (26, 27) дает для каждого из решений

$$cL_0^4 + 4L_0^2 + 12a = 0. \quad (29)$$

Это означает, что радиус дополнительного пространства определяется параметрами лагранжиана

$$L_0^2 = \begin{cases} -3a, & c = 0; \\ \frac{2(-1 \pm \sqrt{1-3ac})}{c}, & c \neq 0. \end{cases}$$

Литература

1. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter* // Phys. Lett. **B** –1998. –V. 429. –P. 263–272.
2. K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, *Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions* // Nucl. Phys. **B** –1999. –V. 537. –P. 47–108.
3. N. Arkani-Hamed et al., *Neutrino masses from large extra dimensions* // Phys. Rev. **D** –2002. –V. 65. –P. 024032.
4. G. D. Starkman, D. Stojkovic and M. Trodden, *Large extra dimensions and cosmological problems* // Phys. Rev. **D** –2001. –V. 63. –P. 103511.
5. U. Günther, P. Moniz and A. Zhuk, *Nonlinear multidimensional cosmological models with form fields: Stabilization of extra dimensions and the cosmological constant problem* // Phys. Rev. **D** –2003. –V. 68. –P. 044010.
6. R. P. Woodard, *The Theorem of Ostrogradsky* // ArXiv:1506.02210
7. A. de Felice and S. Tsujikawa, *f(R) Theories*, // Living Rev. Relat. –2010. –V. 13. –P. 3.
8. S. Capozziello and M. de Laurentis, *Extended Theories of Gravity*, // Phys. Rep. –2011. –V. 509. –P. 167–321.
9. T. Saidov and A. Zhuk, *AdS non-linear multidimensional ($D = 8$) gravitational models with stabilized extra dimensions* // Gravitation and Cosmology –2006. –V. 12. –P. 253–261.
10. T. Saidov and A. Zhuk, *A nonlinear multidimensional gravitational model $R+R-1$ with form fields and stabilized extra dimensions* // Astronomical and Astrophysical Transactions –2006. –V. 25. –P. 447–453.
11. A. A. Kirillov, A. A. Korotkevich and S. G. Rubin, *Emergence of symmetries*// Phys. Lett. **B** –2012. –V. 718. –P. 237–240.
12. K. A. Bronnikov, R. I. Budaev, A. V. Grobov, A. E. Dmitriev and S. G. Rubin, *Inhomogeneous compact extra dimensions* // jcap –2017. –V. 10. –P. 001.
13. K. A. Bronnikov and S. G. Rubin, *Self-stabilization of extra dimensions*, // Phys.Rev. **D** –2006. –V. 73. –P. 124019.
14. S. G. Rubin, *Scalar field localization on deformed extra space*, // Eur. Phys. J. **C** –2015. –V. 75. –P. 333.
15. S. G. Rubin, *Inhomogeneous extra space as a tool for the top-down approach*, // Adv.High Energy Phys. **C** –2018. –V. 1. –P. 2767410.

COSMOLOGICAL SOLUTIONS IN $f(R)$ GRAVITY WITH EXTRA DIMENSIONS

I.A. Kashapov

In this work, solutions are obtained that describe a homogeneous and isotropic 4-dimensional space in the framework of $f(R)$ gravity with an additional space representing a two-dimensional sphere.

Keywords: Universe, $f(R)$ gravity, extra dimensions.

УДК 517.95

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ

И.К. Курбанов¹, Х.П. Сайдалиев²

¹ hudson90@mail.ru; Российско-Таджикский (Славянский) университет

² homid-1978@mail.ru; Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

В статье рассматривается точное ограниченное решение задачи электромагнитоупругости для сегнетоэлектрической и ферромагнитной среды. Для получения решения используется метод разложения по эллиптическим функциям Якоби. Подобный метод был использован в работах [1,3,4].

Решение задачи получено с помощью синус амплитуды ($sn\zeta$), косинус амплитуды ($cn\zeta$) и дельта амплитуды ($dn\zeta$) функции Якоби.

Ключевые слова: эллиптические функции Якоби, периодическое решение, электромагнитоупругости, материальное уравнение.

На плоскости переменных x, t рассматривается система вида

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha H - \beta H^2 &= 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial(D(E))}{\partial t} + J(E) + J_{ct}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial(B(H))}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

с определяющими уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \tilde{E}\epsilon_x + \tilde{\epsilon}E_x, \sigma_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ D(E) &= \tilde{\epsilon}E^2, J(E) = \tilde{\sigma} \frac{\partial^3 E}{\partial x^3}, \\ B(H) &= \mu H, J_{ct} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в системе (1) получим

$$\begin{aligned} \tilde{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha H - \beta H^2 &= 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= 2\tilde{\epsilon}E \frac{\partial E}{\partial t} + \tilde{\sigma} \frac{\partial^3 E}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем искать волновые решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (3) в виде

$$E(x, t) = E(\zeta), H(x, t) = H(\zeta), u(x, t) = u(\zeta), \zeta = k(x - ct), \quad (4)$$

где k и s – волновые числа.

Подставляя (4) в (3) имеем

$$\begin{aligned} \bar{d} \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \tilde{\epsilon} k^2 \frac{d^2 E}{d\zeta^2} + \alpha H - \beta H^2 &= 0, (\bar{d} = \tilde{E} k^2 - \rho c^2 k^2) \\ \frac{dH}{d\zeta} - 2c\tilde{\epsilon}E \frac{dE}{d\zeta} + \tilde{\sigma} k^2 \frac{d^3 E}{d\zeta^3} &= 0, \\ \frac{dE}{d\zeta} &= -\mu c \frac{dH}{d\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Следуя работе [1], решение систему (5) будем искать с помощью функции Якоби $sn\xi$ в виде [1]

$$E = a_0 + a_1 sn\xi + a_2 sn^2\xi, \quad H = b_0 + b_1 sn\xi + b_2 sn^2\xi, \quad u = c_0 + c_1 sn\xi + c_2 sn^2\xi, \quad (6)$$

где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ – пока неизвестные постоянные.

Подставляя (6) в (5) для нахождения неизвестных постоянных получим систему алгебраических уравнений. Решая эту систему получим следующее утверждение

Теорема 1. Пусть все коэффициенты системы уравнений (5) отличны от нуля и выполнено условие

$$(m^2 + 1)^2 - 3m^2 = \frac{\mu^2 c^4 \tilde{\varepsilon}^2 \alpha^2}{16\beta^2 k^4 \tilde{\sigma}^2}. \quad (7)$$

Тогда задача (1)-(3) имеет ограниченное решение вида

$$E = \frac{1}{2c\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\mu} - 4\tilde{\sigma}k^2(m^2 + 1) \right) + \frac{6\tilde{\sigma}k^2m^2}{c\tilde{\varepsilon}} sn^2(k(x - ct)),$$

$$H = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{2k^2\tilde{\sigma}(m^2 + 1)}{\mu c^2\tilde{\varepsilon}} + \frac{6\tilde{\sigma}k^2m^2}{c\tilde{\varepsilon}} sn^2(k(x - ct)),$$

$$u = \frac{6\tilde{\sigma}k^2m^2(\beta\tilde{\sigma} - \mu^2c^3\tilde{\varepsilon}^2)}{\bar{d}\mu^2c^3\tilde{\varepsilon}^2} sn^2(k(x - ct)).$$

Изучению подобных нелинейных систем для уравнения электромагнитоупругости посвящены работы [1-5].

Аналогичным образом, будем искать решение задачи (1)-(3) с помощью функций Якоби $cn\xi$ в виде

$$E = a_0 + a_1 cn\xi + a_2 cn^2\xi, \quad H = b_0 + b_1 cn\xi + b_2 cn^2\xi, \quad u = c_0 + c_1 cn\xi + c_2 cn^2\xi, \quad (8)$$

где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ – пока неизвестные постоянные.

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть все коэффициенты системы уравнений (5) отличны от нуля и выполнено условие

$$(1 - m^2)^2 + 3(m^2(1 - m^2)) = \frac{\mu^2 c^4 \tilde{\varepsilon}^2 \alpha^2}{16\beta^2 k^4 \tilde{\sigma}^2}. \quad (9)$$

Тогда задача (1)-(3) имеет точное периодическое решение вида

$$E = \frac{1}{2c\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\mu} - 4\tilde{\sigma}k^2(1 - 2m^2) \right) - \frac{6\tilde{\sigma}k^2m^2}{c\tilde{\varepsilon}} cn^2(k(x - ct)),$$

$$H = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{2k^2\tilde{\sigma}(1 - 2m^2)}{\mu c^2\tilde{\varepsilon}} - \frac{6\tilde{\sigma}k^2m^2}{\mu c^2\tilde{\varepsilon}} cn^2(k(x - ct)),$$

$$u = \frac{6\tilde{\sigma}k^4m^2(\beta\tilde{\sigma} - \mu^2c^3\tilde{\varepsilon}^2)}{\bar{d}\mu^2c^4\tilde{\varepsilon}^2} cn^2(k(x - ct)).$$

Теперь, решение системы (5) будем искать с помощью функции Якоби $dn\zeta$ в виде

$$E = a_0 + a_1 dn\zeta + a_2 dn^2\zeta, \quad H = b_0 + b_1 dn\zeta + b_2 dn^2\zeta, \quad u = c_0 + c_1 dn\zeta + c_2 dn^2\zeta, \quad (10)$$

где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ – пока неизвестные постоянные.

Итак, доказана

Теорема 3. Пусть все коэффициенты системы уравнений (5) отличны от нуля и выполнено условие

$$(m^2 - 2)^2 + 3(m^2(m^2 - 1)) = \frac{\mu^2 c^4 \tilde{\varepsilon}^2 \alpha^2}{16\beta^2 k^4 \tilde{\sigma}^2}. \quad (11)$$

Тогда задача (1)-(3) имеет точное периодическое решение вида

$$E = \frac{1}{2c\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\mu} - 4\tilde{\sigma}k^2(m^2 - 2) \right) - \frac{6\tilde{\sigma}k^2m^2}{c\tilde{\varepsilon}} dn^2(k(x - ct)),$$

$$H = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{2k^2\tilde{\sigma}(m^2 - 2)}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} - \frac{6\tilde{\sigma}k^2m^2}{\mu c^2 \tilde{\varepsilon}} dn^2(k(x - ct)),$$

$$u = \frac{6\tilde{\sigma}k^4m^2(\mu^2 c^3 \tilde{\varepsilon}^2 - \beta\tilde{\sigma})}{\bar{d}\mu^2 c^4 \tilde{\varepsilon}^2} dn^2(k(x - ct)).$$

Литература

1. Liu S.K., Fu Z.T., Liu S.D., Q.Zhao. *Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations* // *J. Physics Letters A.* – Moscow, 2001. – Vol. 289. – P. 69-74.
2. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений* // - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.
3. Курбанов И. *Краевые задачи электродинамики* //Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989, с. 3-23.
4. Сафаров Д.С. *Об одном обобщении КдФ-уравнения* // Сб. научных трудов «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения». – Киев, 1996. – С. 240.
5. Сикорский Ю.С. *Элементы теории эллиптических Функций* // с приложениями к механике. – М.: КомКнига, 2006. – 368 с.

EXACT SOLUTIONS FOR SOME NONLINEAR PROBLEMS OF THE ELECTROMAGNETOELASTICITY EQUATION

I.K. Kurbanov, Kh.P. Saidaliev

The paper considers the exact bounded solution of the problem electromagnetoelasticity for the segmentoelectric and ferromagnetic medium. To obtain the solution, the method of elliptic Jacobi function decomposition. A similar method was used in [1,3,4].

The solution of the problem is obtained using the sine of the amplitude ($sn\zeta$), cosine of the amplitude ($cn\zeta$) and delta of the amplitude ($dn\zeta$) of the Jacobi function.

Keywords: Jacobi elliptic functions, periodic solutions, electromagnetic elasticity, material equations.

УДК 532.5

**ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ ВУ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О
КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ ГИДРОПРОФИЛЯ**С.Е. Латыпова¹, Д.В. Маклаков²¹ *silmari192@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет² *dmaklak@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Решается задача о проектировании гидропрофиля в режиме суперкавитации, моделируемой с помощью схемы Ву. Распределения скоростей по омываемой части гидропрофиля и число кавитации предполагаются заданными. Выведены формулы, позволяющие выразить подъемную силу и сопротивление через интегральные функционалы от исходных данных. Таким образом, формулы являются обобщением теоремы Кутты – Жуковского о подъемной силе профиля, обтекаемого безотрывно, на случай суперкавитационного обтекания. Форма гидропрофиля восстанавливается методами обратных краевых задач. Строго доказано, что гидродинамическое качество гидропрофиля при числе кавитации $\sigma > 0$ всегда больше гидродинамического качества профиля с тем же распределением $v(s)$, но при $\sigma = 0$ (схема Кирхгофа).

Ключевые слова: суперкавитация, схема Ву, обратная задача, потенциальное течение, комплексный потенциал.

В докладе решается задача о проектировании гидропрофиля в режиме развитой кавитации по схеме Ву. Задается распределение скоростей $v(s)$ по омываемой части гидропрофиля и число кавитации σ . Выведены формулы, позволяющие выразить подъемную силу и сопротивление через интегральные функционалы от $v(s)$ и σ до решения гидродинамической задачи. Таким образом, эти формулы являются обобщением теоремы Кутты – Жуковского о подъемной силе обтекаемого безотрывно аэропрофиля на случай суперкавитационного обтекания гидропрофиля.

Форма гидропрофиля восстанавливается методами обратных краевых задач путем конформного отображения области течения на верхнюю полуплоскость и решения соответствующей задачи Шварца. Проведена серия числовых расчетов для различных распределений скорости, из которых следует, что с увеличением чисел кавитации гидродинамическое качество профиля существенно возрастает, однако существует максимальное число кавитации, при котором течение является однолистным. При числах кавитации, больших максимального, течение теряет физический смысл. Показано, что основным фактором, влияющим на однолистность течения, является вклад распределения скорости вблизи носика профиля в силу сопротивления.

На основании аналитических формул для подъемной силы и сопротивления строго доказано, что гидродинамическое качество гидропрофиля при числах кавитации $\sigma > 0$ всегда больше гидродинамического качества профиля с тем же распределением $v(s)$, но при $\sigma = 0$ (схема Кирхгофа).

APPLICATION OF THE WU MODEL FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF THE
CAVITATION FLOW PAST A HYDROFOIL

S.E. Latyypova, D.V. Maklakov

In the paper, we solve the problem of designing a hydrofoil in the supercavitation regime simulated by the Wu model. The distributions of velocities along the wetted part of the hydrofoil and the cavitation number are assumed to be given. We derive formulas that allow us to express the lift and drag forces in terms of integral functionals of the initial data. Thus, the formulas generalize the Kutta – Zhukovskii theorem on the lift force of a profile in continuous flow for the case of supercavitation flow. The shape of the hydrofoil is restored by the methods of inverse boundary value problems. It has been rigorously proven that the lift – to – drag ratio of a hydrofoil at cavitation numbers $\sigma > 0$ is always greater than the lift – to – drag ratio of a profile with the same distribution $v(s)$, but when $\sigma = 0$ (Kirchhoff model).
 Keywords: supercavitation, Wu model, inverse problem, potential flow, complex potential.

УДК 512.643

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ КИТАЙСКОЙ ТЕОРЕМЫ ОБ ОСТАТКАХ

А.Д. Маклаков¹

¹ amk789@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Используя адические топологии, получен топологический аналог китайской теоремы об остатках для бесконечного семейства попарно комаксимальных идеалов произвольного кольца. В качестве следствий получены топологические версии и обобщения некоторых известных утверждений из теории колец и коммутативной алгебры. Кроме того, показано, что пополнение кольца в любой линейной топологии с базой открытых окрестностей нуля, состоящей из двухсторонних идеалов, может быть получено как кольцо биэндоморфизмов некоторого естественно возникающего модуля, что наряду с обратными пределами дает еще один способ построения пополнений.

Ключевые слова: китайская теорема об остатках, полиадическая топология, M -адическая топология, I -адическая топология, кольцо биэндоморфизмов

Пусть \mathcal{P} – непустое множество ненулевых собственных попарно комаксимальных идеалов кольца R (то есть $P+Q = R$ для любых различных $P, Q \in \mathcal{P}$). Будем называть характеристиками семейства вида $\chi = (\chi_P)_{P \in \mathcal{P}}$, где $\chi_P \in \{1, 2, \dots, \infty\}$. При этом, для тех $P \in \mathcal{P}$, для которых существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $P^{k+1} = P^k$, и $P^{i+1} \neq P^i$ для $i = 1, \dots, k-1$, полагаем, что $\chi_P \leq k+1$. Если $\chi_P < \infty$ для всех $P \in \mathcal{P}$, то характеристику χ будем называть *ограниченной*.

Для заданных \mathcal{P} и χ можно определить линейную топологию на левом R -модуле M , в которой предбазу открытых окрестностей нуля образуют всевозможные подмодули вида

$$P^k M, \text{ где } P \in \mathcal{P}, \text{ и } 0 \leq k < \chi_P. \quad (1)$$

Данную топологию будем называть \mathcal{P}^χ -адической. Если $\mathcal{P} = \{P\}$, и $\chi_P = \infty$, \mathcal{P}^χ -адическая топология называется P -адической. Если $R = \mathbb{Z}$, \mathcal{P} – множество всех ненулевых простых идеалов кольца \mathbb{Z} , и $\chi = (\dots, \infty, \dots)$, то \mathcal{P}^χ -адическая топология на кольце \mathbb{Z} известна под названием *полиадической*.

Хаусдорфово пополнение модуля M в \mathcal{P}^χ -адической топологии будем обозначать через $\widehat{M}_{\mathcal{P}^\chi}$; через $\widehat{M}_{\mathcal{P}}$, если $\chi = (\dots, \infty, \dots)$; а также через $\widehat{M}_{P\chi_P}$, если $\mathcal{P} = \{P\}$; и через \widehat{M}_P , если при этом $\chi_P = \infty$. Например, если R – кольцо главных идеалов,

p – простой элемент R , то $\widehat{R}_{(p)}$ – пополнение кольца R относительно p -адического нормирования. Если $\mathcal{P} = \{P\}$, $\chi_P < \infty$, то $\widehat{M}_{P\chi_P} = M/(P^{\chi_P-1}M)$.

Полиадическая топология впервые появилась в работе Прюфера (1925)[1], и была систематически изучена Е. В. Новоселовым (1982)[2], в работах которого, по-видимому, впервые встречается следующий топологический изоморфизм для полиадических чисел:

$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

где $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ – пополнение кольца \mathbb{Z} относительно p -адического нормирования. Данный изоморфизм можно рассматривать как аналог арифметической версии китайской теоремы об остатках для бесконечного числа идеалов. Обобщение данного результата, полученное топологическими методами, содержится в работах Бурбаки (1961).

Теорема [3, Теорема 17]. Пусть R – коммутативное кольцо, \mathcal{P} – множество ненулевых собственных попарно комаксимальных идеалов из R . Тогда имеет место топологический изоморфизм колец:

$$\widehat{R}_{\mathcal{P}} \cong \prod_{P \in \mathcal{P}} \widehat{R}_P,$$

где топология на прямом произведении в правых частях формул является тихоновской.

Если M – левый R -модуль, на кольце R можно рассматривать M -адическую топологию, которая может быть задана с помощью базы открытых окрестностей нуля, состоящей из левых идеалов вида $\text{Ann}_R(F)$, где F – всевозможные конечные подмножества M (см. [4]).

Теорема 1. Пусть \mathcal{B} – база открытых окрестностей нуля линейной топологии на кольце R , состоящая из двухсторонних идеалов, $M = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}} R/I$ – левый R -модуль. Тогда линейная топология, порожденная \mathcal{B} , на кольце R совпадает с M -адической топологией, и имеет место топологический изоморфизм колец:

$$\widehat{R}_{\mathcal{B}} \cong \text{Viend}({}_R M),$$

где $\widehat{R}_{\mathcal{B}}$ – хаусдорфово пополнение кольца R в линейной топологии, порожденной \mathcal{B} .

Таким образом, всякую линейную топологию на кольце R с базой открытых окрестностей нуля, состоящей из двухсторонних идеалов, можно представить как M -адическую топологию для некоторого естественно возникающего R -модуля M , и пополнение кольца в этой топологии совпадает с кольцом биэндоморфизмов данного модуля, что наряду с обратными пределами дает еще один способ построения пополнений. Используя данный результат в совокупности с модульной техникой, получен следующий топологический аналог китайской теоремы об остатках, обобщающий результат Бурбаки.

Теорема 2. Пусть R – произвольное кольцо, \mathcal{P} – множество ненулевых собственных попарно комаксимальных идеалов из R , χ – некоторая характеристика, M – левый

R -модуль. Тогда имеют место топологические изоморфизмы, соответственно, топологических колец и топологических $\widehat{R}_{\mathcal{P}\chi}$ -модулей:

$$\widehat{R}_{\mathcal{P}\chi} \cong \prod_{P \in \mathcal{P}} \widehat{R}_{P\chi P}, \quad \widehat{M}_{\mathcal{P}\chi} \cong \prod_{P \in \mathcal{P}} \widehat{M}_{P\chi P},$$

где топология на прямом произведении в правых частях формул является тихоновской.

Кроме того, кольцо $\widehat{R}_{\mathcal{P}\chi}$ топологически изоморфно кольцу биэндоморфизмов левого R -модуля $N = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} \bigoplus_{t < \chi_P} R/P^t$, и $\mathcal{P}\chi$ -адическая топология на кольце R совпадает с N -адической.

Следующее утверждение является “продискретной” версией теоремы 2.

Следствие. Пусть R – произвольное кольцо, \mathcal{P} – непустое множество ненулевых собственных попарно комаксимальных идеалов из R , χ – некоторая ограниченная характеристика. Тогда имеет место топологический изоморфизм колец:

$$\widehat{R}_{\mathcal{P}\chi} \cong \prod_{P \in \mathcal{P}} R/P^{\chi_{P-1}},$$

где топология на компонентах прямого произведения в правой части является дискретной, а топология на прямом произведении является тихоновской.

Хорошо известно, что всякое полупрimitивное кольцо является подпрямым произведением примитивных колец. В качестве следующего следствия теоремы 2 получаем топологическим уточнением строения полупрimitивных квазиинвариантных колец (кольцо называется квазиинвариантным, если все его левые максимальные идеалы являются двухсторонними).

Следствие. Пусть R – полупрimitивное квазиинвариантное кольцо. Тогда R вкладывается как плотное подкольцо в тихоновское прямое произведение тел, снабженных дискретной топологией.

Следующее следствие устанавливает, когда пополнение модуля может быть получено посредством расширения скаляров до пополнения кольца, и является полиадическим аналогом известного из коммутативной алгебры утверждения для I -адической топологии (см. [5, Предложение 10.13]).

Следствие. Пусть R – коммутативное нетерово кольцо, \mathcal{P} – множество ненулевых собственных попарно комаксимальных идеалов из R , χ – некоторая характеристика, M – конечнопорожденный левый R -модуль. Тогда имеет место изоморфизм $\widehat{R}_{\mathcal{P}\chi}$ -модулей:

$$\widehat{R}_{\mathcal{P}\chi} \otimes_R M \cong \widehat{M}_{\mathcal{P}\chi}.$$

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Литература

1. Prüfer H. *Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie* // Math. Ann. – 1925. – № 94. – P. 198–243.

2. Новоселов Е. В. *Введение в полиадический анализ* – Петрозаводск: Изд. ПетрГУ, 1982. – 110 с.
3. Bourbaki N. *Commutative algebra* – New York: Springer, 1972. – 625 p.
4. Albu T., Wisbauer R. *M-density, M-adic completion and M-subgeneration* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova – 1997. – № 98. – P. 1–17.
5. Atiyah M.F., MacDonald I.G. *Introduction To Commutative Algebra* – Mass.-London-Don Mills: Addison-Wesley Publ. Comp., 1969. – 128 p.

TOPOLOGICAL ANALOGUES OF THE CHINESE REMAINDER THEOREM

A.D. Maklakov

Using adic topologies, a topological analogue of the Chinese remainder theorem for an infinite family of pairwise comaximal ideals of an arbitrary ring is obtained. As a consequences topological versions and generalizations of some well-known statements from the theory of rings and commutative algebra are obtained. In addition, it is shown that the completion of a ring in any linear topology with a base of open neighborhoods of zero consisting of two-sided ideals can be obtained as a ring of biendomorphisms of some naturally occurring module, what, along with inverse limits, gives another way to construct completions.

Keywords: Chinese remainder theorem, polyadic topology, M -adic topology, I -adic topology, biendomorphism ring

УДК 530.122

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ В ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЙ $f(R)$ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

А.В. Марьин¹, А.А. Попов²

¹ andreyumarin.mail@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² arorov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе получено решение уравнений полуклассической $f(R)$ теории гравитации, описывающее черную дыру в $(4+n)$ -мерном пространстве-времени. Предполагается, что дополнительное пространство представляет собой n -мерную сферу постоянного радиуса, много меньшего характерного масштаба кривизны четырехмерной части пространства.

Ключевые слова: $f(R)$ гравитация, дополнительные измерения, черная дыра

Теория $f(R)$ гравитации – это одно из самых простых обобщений ОТО Эйнштейна, в рамках которой часто вводятся дополнительные пространства. Рассмотрение подобных обобщений позволяет продвигаться в таких вопросах как объединение сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий [1, 2], масса нейтрино [3], проблема космологической постоянной [4, 5].

В этой работе получено решение уравнений полуклассической $f(R)$ теории гравитации ($c = \hbar = 1$)

$$-\frac{1}{2}f(R)\delta_A^B + (R_A^B + \nabla_A \nabla^B - \delta_A^B \square) \frac{df(R)}{dR} = \frac{8\pi}{m_D^2} \langle T_A^B \rangle, \quad (1)$$

описывающее черную дыру в $(4 + n)$ -мерном пространстве-времени

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - L_0^2 d\Omega_n^2, \quad (2)$$

где M – константа интегрирования, $A, B, C, \dots = 1, 2, \dots, 4 + n$, $f(R)$ произвольная функция скалярной кривизны R , m_D – $(4 + n)$ – мерная планковская масса, ∇_A – обозначение ковариантной производной, R_A^B – тензор Риччи, $\square = g^{AB} \nabla_A \nabla_B$. Предполагается, что дополнительное пространство представляет собой n – мерную сферу радиуса L_0 , много меньшего характерного масштаба кривизны l ($L_0 \ll l$) четырехмерной части пространства

Правая часть уравнений (1) описывает перенормированное среднее значение оператора тензора энергии-импульса квантованных полей. В пределе $l_{Pl} \ll L_0$ структура этого тензора имеет вид [6]

$$\langle T_A^B \rangle = \frac{l_{Pl}^2}{L_0^4} K_A^B \left(1 + O\left(L_0^2/l(r)^2\right)\right), \quad (3)$$

где в координатах (2)

$$K_A^B = \text{diag}\left(K_t^t, K_t^t, K_t^t, K_t^t, K_5^5, \dots, K_5^5\right), \quad (4)$$

а K_t^t и K_5^5 постоянные величины. Решение (2) получено в случае пренебрежения малыми членами разложения в (2) и возможно при следующих соотношениях между параметрами $R(r) = R_0, L_0, f(R_0)$ и $\left.\frac{df}{dR}\right|_{R=R_0}$

$$f(R_0) = -\frac{16\pi}{m_D^2} \frac{R_0^2 K_t^t}{n^2(n-1)^2}, \quad (5)$$

$$\left.\frac{df}{dR}\right|_{R=R_0} = \frac{8\pi}{m_D^2} \frac{R_0(K_5^5 - K_t^t)}{n(n-1)^2}, \quad (6)$$

$$L_0^2 = \frac{n(n-1)}{R_0}. \quad (7)$$

В случае квадратичной гравитации $f(R) = aR^2 + R + c$ эти выражения примут вид

$$L_0^2 = \frac{n(n-1)}{R_0} = \frac{8\pi}{m_D^2} \frac{(K_5^5 - K_t^t)}{(n-1)} - 4a, \quad (8)$$

$$c = \frac{(n-1)^2 \left(an^2(n-1)^2 + \frac{8\pi}{m_D^2} (K_t^t(n-2) - nK_5^5) \right)}{4 \left(an(n-1)^2 + \frac{4\pi}{m_D^2} (K_t^t - K_5^5) \right)^2}. \quad (9)$$

Отметим, что учет следующих членов разложения в (3) приводит к зависимости радиуса дополнительного пространства L_0 , а также четырехмерной планковской массы и четырехмерной космологической постоянной (при принятых предположениях теория может быть редуцирована к четырехмерной теории гравитации Эйнштейна) от радиальной координаты.

Литература

1. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter* // Phys. Lett. **B** – 1998 – V. 429 – p. 263–272.
2. K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, *Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions* // Nucl. Phys. **B** – 1999 – p. 47–108.
3. N. Arkani-Hamed et al., *Neutrino masses from large extra dimensions* // Phys. Rev. **D** – 2002 – V. 65 – 024032.
4. G. D. Starkman, D. Stojkovic and M. Trodden, *Large extra dimensions and cosmological problems* // Phys. Rev. **D** – 2001 – V. 63 – 103511.
5. U. Günther, P. Moniz and A. Zhuk, *Nonlinear multidimensional cosmological models with form fields: Stabilization of extra dimensions and the cosmological constant problem* // Phys. Rev. **D** – 2003 – V. 68 044010.
6. Popov A., *Stress-energy of a quantized scalar field in static wormhole spacetimes* // Phys. Rev. **D** – 2001 – V. 64, 104005.

BLACK HOLES IN SEMICLASSICAL $f(R)$ GRAVITY WITH EXTRA DIMENSIONS

A.V. Marin, A.A. Popov

In this work we obtained the solution of the equations of the semiclassical $f(R)$ theory of gravitation describing a black hole in $(4 + n)$ -dimensional spacetime. The additional space is assumed to be an n - dimensional sphere of radius, much smaller than the characteristic scale of curvature of the four-dimensional part of space.

Keywords: $f(R)$ gravity, extra dimensions, black hole

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.Н. Миронов¹, Е.Ф. Коськова²

¹ miro73@mail.ru; Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета
² evochka02202@gmail.com; Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета

Доказаны существование и единственность решения граничной задачи с условиями на двух характеристических плоскостях и на плоскости, не являющейся характеристикой, для системы гиперболических уравнений с кратными характеристиками. Разработан аналог метода Римана — Адамара для указанной задачи, дано определение матрицы Римана — Адамара. Построено решение указанной задачи в терминах введенной матрицы Римана — Адамара.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод Римана, матрица Римана, метод Римана — Адамара, матрица Римана — Адамара, характеристики.

В работе [1] предложен вариант метода Римана для систем дифференциальных уравнений как с некротными, так и с кратными характеристиками. В статьях [2], [3] этот вариант метода Римана применяется для исследования задач для системы

уравнений с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками. В работах [4]–[6] в терминах матрицы Римана — Адамара были построены решения задач Дарбу для гиперболических систем с некрратными характеристиками, а в работе [7] было рассмотрено некоторое обобщение задачи Дарбу для системы с двукратными характеристиками с двумя независимыми переменными.

Здесь рассматривается система уравнений с кратными характеристиками с тремя независимыми переменными

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1 v_x + b_1 w_x + c_1 u + d_1 v + e_1 w + f_1(x, y, z), \\ v_{yy} = a_2 u_y + b_2 w_y + c_2 u + d_2 v + e_2 w + f_2(x, y, z), \\ w_{zz} = a_3 u_z + b_3 v_z + c_3 u + d_3 v + e_3 w + f_3(x, y, z), \end{cases} \quad (1)$$

где все коэффициенты зависят от (x, y, z) и в замыкании рассматриваемой области D пространства R^3 удовлетворяют условиям $a_i, b_i \in C^2, c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1, i = \overline{1, 3}$. Решение системы (1) класса $u, v, w \in C^1(D), u_{xx}, v_{yy}, w_{zz} \in C(D)$ назовем регулярным в D .

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$ (AA_1O_1O), $y = 0$ (AOB), $y = y_0 > 0$ ($A_1O_1B_1$), $z = x$ (OBB_1O_1), $z = z_0 > 0$ (AA_1B_1B). Обозначим через X, Y, T грани D при $x = 0, y = 0, z = x$ соответственно.

Задача PD: найти в области D регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_X &= \varphi_1(y, z), & (u_x - a_1 v - b_1 w)|_X &= \varphi_2(y, z), \\ v|_Y &= \psi_1(x, z), & (v_y - a_2 u - b_2 w)|_Y &= \psi_2(x, z), \\ w|_T &= \chi_1(x, y), & (w_z - a_3 u - b_3 v)|_T &= \chi_2(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_1(y, z), \varphi_2(y, z) \in C^2(\overline{X}), \psi_1(x, z), \psi_2(x, z) \in C^2(\overline{Y}), \chi_1(x, y), \chi_2(x, y) \in C^2(\overline{T})$.

Путем сведения задачи PD к эквивалентной системе интегральных уравнений показано, что решение задачи существует и единственно.

Предложен метод построения решения задачи PD, который по аналогии с методом решения задачи Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка естественно назвать методом Римана — Адамара. Опираясь на определение матрицы Римана [1], определена матрица Римана — Адамара для системы (1). Построено решение задачи PD в терминах матрицы Римана — Адамара.

Литература

1. Миронова Л. Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 1. – С. 34–39.
2. Миронова Л. Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.–мат. науки. – 2006. – Вып. 43. – С. 31–37.
3. Жегалов В. И., Миронова Л. Б. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 3. – С. 12–21.
4. Mironova L. B. Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Т. 41. – № 3. – С. 400–406.
5. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Метод Римана — Адамара для одной системы в трехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57. – № 8. – С. 1063–1070.

6. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. *К задаче Дарбу для гиперболических систем* // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59. – № 5. – С. 642–651.

7. Миронов А. Н., Волков А. П. *О задаче типа Дарбу для гиперболической системы уравнений с кратными характеристиками* // Изв. вузов. Матем. – 2022. – № 8. – С. 39–45.

ON A PROBLEM FOR A HYPERBOLIC SYSTEM OF EQUATIONS WITH TWO-FOLD CHARACTERISTICS

A.N. Mironov, E.F. Koskova

The existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem with conditions on two characteristic planes and on a plane that is not a characteristic for a system of hyperbolic equations with multiple characteristics are proved. An analogue of the Riemann — Hadamard method is developed for this problem, the definition of the Riemann — Hadamard matrix is given. The solution of this problem is constructed in terms of the introduced Riemann — Hadamard matrix.

Keywords: hyperbolic system, Riemann method, Riemann matrix, Riemann — Hadamard method, Riemann — Hadamard matrix, characteristics.

УДК 532.542

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕМОДИНАМИКИ В СЕТИ СОСУДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОДНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Е.В. Мымрина¹

¹ mymrina2002liza@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

Была рассмотрена задача о течении крови в разветвленной сети сосудов с упругими стенками. Предложен численный алгоритм на основе упрощенной одномерной постановки задачи, использующий метод линейных разрывных конечных элементов. Решена модельная задача о течении в сети из семи сосудов, один из которых имеет повышенный модуль упругости и уменьшенный радиус. Показано, что наличие таких поврежденных в одном из сосудов ведёт к значительному перераспределению потоков на выходе из системы сосудов.

Ключевые слова: вязкая жидкость, гемодинамика, метод разрывных конечных элементов.

Несмотря на значительное увеличение доступных вычислительных мощностей и активное развитие детальных методов численного моделирования гемодинамики, до сих пор полное описание системы кровообращения подробными трёхмерными моделями остаётся невозможным. Наименее затратными для вычислительных ресурсов являются так называемые одномерные модели кровотока, в которых пространственные характеристики осредняются по поперечному сечению сосудов, а трёхмерная дифференциальная задача сводится к системе одномерных задач в отдельных сосудах с согласованными граничными условиями в точках разветвления. В некоторых случаях эти модели используют для постановки граничных условий в многомерных задачах. Но так же они могут и целиком моделировать кровеносную

систему. Такой подход почти не уступает в точности подробным моделям. Сравнение решений, полученных с использованием одномерных и многомерных моделей, приведено в [1].

Определяющая система уравнений для одномерной модели кровотока получена на основе осреднения системы уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в предположении степенного (со степенью ζ) профиля скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial ua}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - K_v \frac{u}{a}, \quad K_v = \frac{2\pi\mu(\zeta + 2)}{\rho}, \\ p(a) &= \frac{\beta}{A} (\sqrt{a} - \sqrt{A}), \quad \beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E h. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь неизвестными функциями являются зависящие от продольной координаты x и времени t радиус сосуда a , скорость кровотока u и давление p . Плотность ρ и вязкость μ крови считаются заданными. Последним из уравнений (1) является замыкающее соотношение в приближении равновесного состояния (давление мгновенно подстраивается под изменение площади сечения сосуда) при условии нулевого внешнего давления, где A – нейтральный радиус сосуда, а коэффициент β вычисляется в приближении тонкой несжимаемой однородной изотропной эластичной мембраны с толщиной h и модулем упругости E .

В качестве граничного условия рассмотрено условие заданного расхода q_{in} во входном сечении и условие свободного выхода на выходной границе.

Была использована двухслойная дискретизация по времени системы уравнений (1) с шагом Δt . Для пространственной аппроксимации выбран метод разрывных конечных элементов. Такая аппроксимация позволяет естественным образом обрабатывать разрывы в решениях, возникающие в точках соединения сосудов, имеющих разные свойства. Противопотоковые значения функций определялись согласно методике [2].

Верификация численного метода осуществлялась путём сравнения полученных решений с известными теоретическими и численными решениями модельных задач. Были рассмотрены задачи о течении в однородном сосуде, течении в сосуде с разрывными свойствами, течение в сосуде с разветвлением. По результатам верификации были выработаны следующие рекомендованные параметры расчётной схемы:

- Дискретизация по пространству линейными Лагранжевыми конечными элементами;
- Схема дискретизации по времени Кранка–Николсон;
- Выбор шага по пространству Δx в ~ 30 раз меньше, чем характерная длина волны;
- Выбор шага по времени Δt исходя из условия Куранта вида $c_0 \Delta t / \Delta x \approx 0.1$.

Для иллюстрации применения численного метода рассмотрим задачу о течении в системе из семи сосудов, представленных на рис. 1.

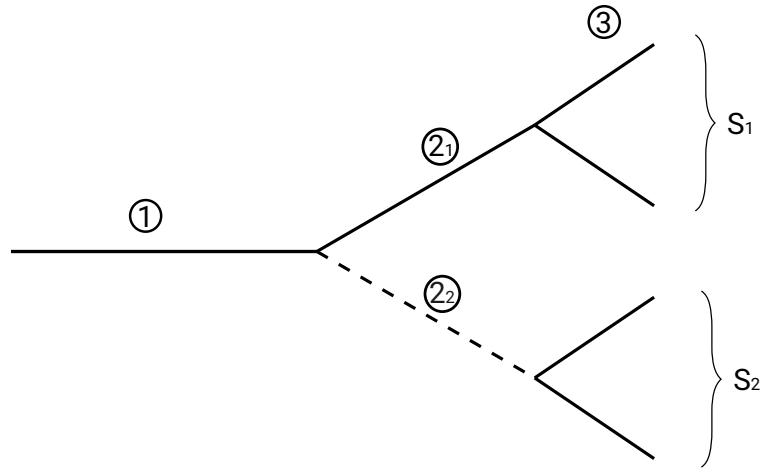


Рис. 1. Система из семи сосудов

Базовые свойства этих сосудов приведены в таблице ниже

параметр	сосуд 1	сосуды 2	сосуды 3
длина, м	1.0	0.8	0.5
R , мм	5.0	4.0	3.0
E , кПа	100		
h , мм	1.5		
ρ , кг/м ³	1050		
μ , Па с	0		

Упругие свойства нижнего из промежуточных сосудов 2.2 (на рисунке 1 обозначен пунктиром) в зависимости от варианта расчёта изменяются согласно вариантам, представленным в таблице

параметр	вариант I	вариант II	вариант III	вариант IV
R , мм	4.0	4.0	$4.0/\sqrt{2}$	$4.0/\sqrt{2}$
E , кПа	100	1000	100	1000

Такие изменения характерны для склеротических поражений сосудов, при которых увеличивается жёсткость стенки и уменьшается эффективный радиус сосуда. Вариант I будем считать базовым, в варианте II увеличен модуль упругости сосуда, в варианте III уменьшен радиус сосуда, вариант IV является суммой изменений из вариантов II и III.

На входе устанавливается периодическое значение расхода $q_{in}(t)$ с максимальным значением в 20мл/сек. Рассматривались два периода, соответствующие частоте сердцебиения bpm в 60 (спокойный пульс) и 180 (высокий пульс) ударов в минуту. Результаты для значения $bpm = 180$ приведены на рис. 2. Видно, что оба типа повреждения значительно уменьшают количество жидкости, протекающей через повреждённую сторону, при этом также происходит изменение величины расхода и для неповреждённой стороны. В частности, там наблюдаются потоки, текущие в обратном направлении ($u < 0$).

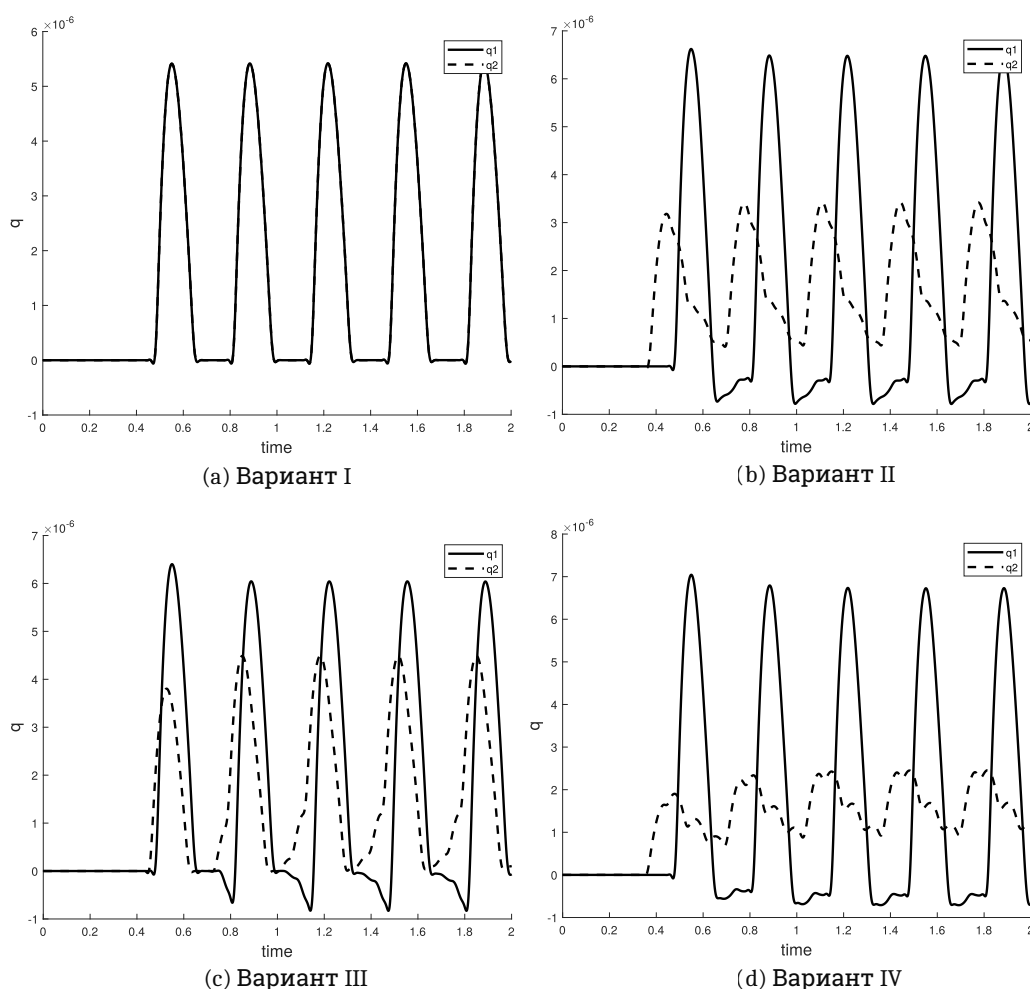


Рис. 2. Значение расходов через сечения S_1 (сплошная линия) и S_2 (пунктирная линия) для различных способов повреждения сосудов, ведущих к S_2 . Частота – $bpm = 180$

Литература

1. Formaggia L., Gerbeau J., Nobile F., Quarteroni A. *On the coupling of 3D and 1D Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2001. – Т. 191. – № 6. – С. 561–582.
2. Sherwin S., Formaggia L., Peiro J., Franke V. *Computational Modeling of 1D Blood Flow with Variable Mechanical Properties and Application to the Simulation of Wave Propagation in the Human Arterial System* // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2003. – Т. 43. – С. 673–700.

MODELING OF HEMODYNAMICS IN A VASCULAR NETWORK USING THE 1D APPROACH

E.V. Mymrina

The problem of blood flow in an extensive network of vessels with elastic walls was considered. A numerical algorithm based on a simplified one-dimensional formulation of the problem using the discontinuous Galerkin formulation is proposed. The problem of flow in a network of seven vessels, one of which has an increased elasticity and a reduced radius, has been solved. It was shown that the presence of such damage in one of the vessels leads to a significant redistribution of flows at the outlet

of the vascular system.

Keywords: viscous fluid, hemodynamics, discontinuous Galerkin method.

УДК 543.42

ИССЛЕДОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Р.М. Османова¹

¹ rmosmanova@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе рассмотрено три алгоритма для спектрального разложения сигнала: быстрое преобразование Фурье, разложение на эмпирические модовые декомпозиции и его расширение: комплементарная множественная декомпозиция на эмпирические моды. Для всех трёх методов разработана программная реализация и проведены численные исследования, в которых рассматривалось два вида сигналов: стационарный и нестационарный. Проведен анализ полученных результатов и сравнение с известными амплитудно-частотными характеристиками входных данных.

Ключевые слова: преобразование Фурье, Эмпирическая модовая декомпозиция, спектр Гильберта-Хуанга, преобразование Гильберта, SEEMDAN.

Обработка временных рядов — это сложная и многогранная задача, которая требует применения различных методов и подходов. С развитием технологий и увеличением объема данных, требования к точности и надежности прогнозов становятся все более высокими, поэтому анализ временных рядов - актуальная задача.

Одним из классических подходов является спектральный анализ. В этом случае временной ряд сворачивается до спектра, то есть набора пар частота-амплитуда. Математически такой подход основан на преобразовании Фурье. Однако, озвученный подход подразумевает стационарность исследуемого сигнала, это ограничение может привести к искажению результатов анализа, особенно если в данных присутствуют тренды или сезонные колебания.

Рассмотрим второй метод исследования - спектр Гильберта-Хуанга[3]. Реализация преобразования Гильберта-Хуанга состоит из двух этапов: эмпирическая модовая декомпозиция и применение к полученному разложению преобразование Гильберта. Спектр Гильберта-Хуанга отражает зависимость амплитуды и частоты от времени.

И третий метод исследования - спектр, полученный с помощью алгоритма SEEMDAN. Его отличие от EMD в добавлении шумов с нормальным распределением на каждом этапе получения модовых декомпозиций для избежания проблемы смешения мод

В работе были исследованы спектры стационарных и нестационарных сигналов описанными методами, построены соответствующие спектры, был проведен

анализ и сделан вывод: для стационарных сигналов более точным является исследование с помощью спектра Фурье (в случае спектра Гильберта-Хуанга медиана значений [6] менее близка к истине), а при исследовании нестационарных сигналов достоверную информацию дает только спектр Гильберта-Хуанга. Во избежании смешивания мод же успешно можно использовать CEEMDAN

Литература

1. Сафронова, Ю. Ф. Спектральные характеристики аналоговых и дискретных периодических электрических сигналов: Учебно-методическое пособие / Сафронова, Ю. Ф. — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2018 — Текст : электронный.
2. Бойко Б.П., Тюрин В.А. Спектр сигнала: учебно-методическое пособие / Б.П. Бойко, В.А. Тюрин. — Казань: Казанский федеральный университет, 2014.-38 с
3. Кан, Ш.Ч. Анализ нестационарных сигналов на основе преобразования Гильберта-Хуанга / Ш.Ч. Кан, А.В. Микулович, В.И. Микулович // Информатика. — 2010. — № 2. — С. 36–47.
4. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 1992. — 291 с.
5. Кан, Ш. Ч. Применение методов EMD для удаления шумов в вибрационных сигналах / Ш. Ч. Кан, В. И. Микулович. — Минск: А. Н. Вараксин, 2009. — 364 с.
6. Трофимова, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Е. А. Трофимова, Н. В. Кисляк, Д. В. Гилёв ; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018 — 160 с. ISBN 978-5-7996-2317-3

SIGNAL RESEARCH METHODS

R.M. Osmanova

In this paper, two approaches to the spectral decomposition of a signal are considered: Fourier spectrum and Hilbert-Huang spectrum. For both methods, a software implementation was developed and numerical studies were carried out, in which two types of signals were considered: stationary and non-stationary. The obtained results were analyzed and compared with the known amplitude-frequency characteristics of the input data.

Keywords: Fourier transform, Fourier spectrum, Empirical mode decomposition, Hilbert-Huang spectrum.

УДК 519.86

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ НА ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ В СТРАНАХ БРИКС

К.Р. Рашидова¹

¹ karinarashidova13@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе исследуется влияние инвестиций в основной капитал на экономический рост в странах БРИКС с использованием динамических моделей. Анализ включает сбор и оценку данных по валовому внутреннему продукту (ВВП) и инвестициям, а также построение моделей для выявления краткосрочных и долгосрочных эффектов.

Сравнительный анализ результатов для каждой страны позволяет определить наиболее эффективные инвестиционные подходы, способствующие устойчивому экономическому росту.

Ключевые слова: экономический рост, инвестиции, динамические модели, страны БРИКС, ВВП

Целью данной работы является исследование и оценка влияния инвестиций в основной капитал на экономический рост в странах БРИКС с использованием динамических моделей. Для измерения экономического роста используются показатели валового внутреннего продукта (ВВП).

Для достижения поставленной цели необходимо определить ключевые показатели экономического роста и инвестиционной активности в странах БРИКС. Это включает в себя сбор и анализ временных рядов данных по ВВП и инвестициям в основной капитал. На основе этих данных строятся и оцениваются динамические модели, которые позволяют проанализировать влияние инвестиций на экономический рост. В завершение проводится сравнительный анализ результатов для каждой страны, что способствует выявлению наиболее эффективных инвестиционных стратегий.

Обработка данных осуществляется с помощью различных моделей, включая модели авторегрессии с распределенными лагами (ADL(p,q)), которые позволяют оценить краткосрочные и долгосрочные эффекты инвестиций на ВВП.

Формула модели ADL(p,q) может быть представлена следующим образом:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^q b_j x_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где y_t — зависимая переменная, временной ряд (ВВП) в момент времени t ,

x_t — независимая переменная, временной ряд (инвестиции в основной капитал) в момент времени t ,

a_0 — константа, которая представляет собой средний уровень зависимой переменной (ВВП) при отсутствии влияния независимых переменных (инвестиции в основной капитал),

a_i и b_j — коэффициенты при лаговых значениях зависимой и независимой переменных соответственно,

ε_t — ошибка модели. Это случайная величина, которая представляет собой разницу между фактическим значением зависимой переменной и её предсказанным значением моделью. Ошибка модели учитывает все факторы, которые не были включены в модель, но могут влиять на зависимую переменную.

Если временные ряды коинтегрированы, то модель ADL(p,q) может быть преобразована в модель коррекции ошибок (ECM). ECM модель включает в себя как

краткосрочные динамические эффекты (отклонения), так и долгосрочные равновесные отношения.

Коинтеграция — это свойство нескольких нестационарных временных рядов, заключающееся в существовании стационарной линейной комбинации этих рядов. Это означает, что несмотря на то, что отдельные временные ряды могут быть нестационарными, их линейная комбинация будет стационарной.

Формула модели ЕСМ:

$$\Delta Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta Y_{t-1} + \sum_{j=0}^q \gamma_j \Delta X_{t-j} + \varphi(Y_{t-1} - \theta X_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где ΔY_t и ΔX_t — краткосрочные эффекты, то есть переменные, представляющие собой приросты или изменения зависимой переменной Y и независимой переменной X соответственно, между двумя последовательными моментами времени,

$\varphi(Y_{t-1} - \theta X_{t-1})$ — компонента, через которую отражаются долгосрочные эффекты:

θ — коэффициент долгосрочного равновесия,

φ — коэффициент скорости корректировки, показывающий, как быстро зависимая переменная возвращается к равновесию после отклонения,

β_i — коэффициенты, показывающие влияние прошлых изменений зависимой переменной Y на её текущее изменение,

γ_j — коэффициенты, показывающие влияние прошлых изменений независимой переменной X на текущее изменение зависимой переменной Y .

Применяются также модели с распределенными лагами, в том числе модель геометрических лагов (модель Койка) и модель полиномиальных лагов (модель Алмона). Модель Койка основывается на том, что коэффициенты при лаговых значениях объясняющей переменной задаются убывающей геометрической прогрессией:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t, \quad (3)$$

где β_j — коэффициент, который характеризует в краткосрочном периоде влияние x на y .

В модели полиномиальных лагов (модели Алмона) коэффициенты зависят от номера лага по полиномиальной функции:

$$y_t = \alpha + \sum_{j=0}^q \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

где β_j выражаются через полиномы.

Оценка параметров моделей проводится с использованием метода наименьших квадратов (МНК). МНК минимизирует сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от предсказанных моделью. Формула МНК для линейной регрессии:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y, \quad (5)$$

где X — матрица регрессоров,

y — вектор наблюдаемых значений,

$\hat{\beta}$ — вектор оценок параметров.

Настоящая работа представляет собой тезисное исследование возможностей использования динамических моделей для оценки влияния инвестиций на экономический рост в странах БРИКС. В дальнейшем планируется проведение анализа, который поможет уточнить и конкретизировать результаты исследования.

Литература

1. Pesaran, M. H., Shin, Y. (1999). An autoregressive distributed lag modelling approach to cointegration analysis, 371-413.
2. Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. , 1551-1580.
3. Engle, R. F., Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 251-276.
4. Википедия. Статья: "Модель авторегрессии и распределённого лага".
5. А.И. Новиков (1996). Учебное пособие "Эконометрика".

DYNAMIC MODELS FOR ASSESSING THE IMPACT OF INVESTMENT ON ECONOMIC GROWTH IN BRICS

K.R. Rashidova

This paper examines the impact of fixed capital investment on economic growth in the BRICS countries using dynamic models. The analysis involves collecting and estimating GDP and investment data, and constructing models to identify short-term and long-term effects. A comparative analysis of the results for each country allows us to identify the most effective investment approaches that promote sustainable economic growth.

Keywords: economic growth, investment, dynamic models, BRICS countries, GDP.

УДК 66.011

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА ВЫТЕСНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ ФЛЮИДНОЙ ЭКСТРАКЦИИА.А. Саламатин¹, А.С. Халиуллина²¹ aasalamatin@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет² anela_90@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе исследуется вопрос вязкостного пальцеобразования в условиях сверхкритической флюидной экстракции масла из молотого высокомасличного сырья. Концентрационный профиль фильтрующегося раствора является решением уравнения реакции-диффузии и представляет собой бегущую волну. Ширина зоны, на которой происходит основной перепад концентрации, много меньше высоты аппарата. С использованием малого параметра строится разложение пограничного слоя в окрестности фронта концентрации и исследуется гидродинамическая устойчивость поверхности, разделяющей зону истощения и насыщенную зону. В рамках метода нормальных мод получено дисперсионное соотношение. Определены ограничения на гидродинамические параметры, при которых фронт остается устойчивым к малым возмущениям.

Ключевые слова: сверхкритическая флюидная экстракция; модель сжимающегося ядра; пограничный слой; гидродинамическая устойчивость; пальцеобразование; закон Дарси; метод нормальных мод.

Процесс сверхкритической флюидной экстракции (СФЭ) применяется для извлечения ценных натуральных соединений – масла – из высокомасличного растительного сырья, а именно семян подсолнечника, рапса, тыквы и др. [1]. Экстракция осуществляется из молотого сырья, помещенного в цилиндрический аппарат кругового сечения, где формируется стационарный зернистый слой. Процесс характеризуется неравномерной выработкой масла по объему аппарата. Это объясняется эффектом «пальцеобразования», который возникает при замещении смешивающихся жидкостей, отличающихся вязкостью. В условиях СФЭ первоочередную роль в развитии подобных явлений будет играть межфазный массообмен, в результате которого в аппарате-экстракторе образуется узкий фронт между двумя зонами экстракции. На нем локальная концентрация растворенных соединений падает вверх по течению от максимального значения, отвечающего насыщенному раствору, до нулевого, соответствующего чистому растворителю. Соответственно уменьшаются плотность и вязкость раствора. Это приводит к неустойчивости плоского фронта, к прорывам отдельных струй фильтрующегося растворителя и образованию «пальцев» [2].

При пересечении пальцами выходного сечения аппарата наблюдаемая динамика накопления масла сильно замедляется, так как (1) расход растворителя через пальцы выше и (2) по ним фильтруется растворитель, близкий к чистому. В данной работе исследуется влияние пространственной неоднородности свойств фильтрующегося раствора на процессы экстракции. Изначально задача формулируется в двумерной осесимметричной постановке. При этом последовательный учет специфики условий СФЭ позволяет добиться существенного упрощения общей модели. Она

переписывается в системе координат, связанной с поверхностью фронта вытеснения насыщенного раствора. В результате снижается размерность задачи, упрощается ее анализ при сохранении достаточной общности описания процесса. Новая формулировка позволяет учесть нелинейность поля давления, вызванную перепадом вязкости раствора в зернистом слое. На основе полученных уравнений исследуется влияние параметров процесса, а именно дисперсии, вязкости, объемного расхода и размеров аппарата, на динамику развития фронта вытеснения насыщенного раствора.

Математическая модель СФЭ состоит из двух дифференциальных уравнений. Одно описывает процессы конвективно-диффузионного переноса масла в масштабах аппарата

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}c) - D\Delta c = \frac{1 - \varphi}{\Theta} \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь φ – пористость зернистого слоя, t – время, c – концентрация фильтрующегося раствора, \mathbf{v} – вектор скорости фильтрации, D – коэффициент дисперсии (конвективной диффузии), $\Theta \ll 1$ – безразмерное число, равное отношению концентрации насыщения раствора к плотности текущих запасов масла в сырье, s – объемная доля внешней транспортной зоны частицы, свободной от масла. Поле скорости фильтрации определяется из закона Дарси

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (2)$$

где k – проницаемость зернистого слоя, μ – вязкость раствора, p – давление.

Слагаемое-источник в правой части уравнения (1) выражает интенсивность межфазного массообмена, которая определяется внутренней подмоделью массопереноса на уровне отдельной частицы. Эта подмодель дается вторым уравнением задачи

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \Theta \frac{6D_{eff}}{a^2} \Lambda(s)(1 - c), \quad (3)$$

$$0 \leq s \leq 1: \quad \Lambda = \frac{0.5(1 - s)^{1/3}}{1 - (1 - s)^{1/3}}. \quad (4)$$

Здесь D_{eff} – эффективный коэффициент диффузии масла по транспортным каналам сырья, a – характерный размер частицы.

В результате безразмерного анализа системы уравнений (1)–(4) показано, что, используя малый параметр Θ , задачу в исходной трехмерной постановке относительно поля концентрации c можно свести к двумерной задаче относительно формы концентрационного фронта – тонкой поверхности, на которой концентрация изменяется скачком

$$\beta \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} g_r \\ 1 \end{pmatrix} - 2D(1 + g_r^2)^{1/2} K[g], \quad \beta = \varphi + \frac{1 - \varphi}{\Theta}$$

$$2K[g] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r g_r}{(1 + g_r^2)^{1/2}} \right), \quad g_r \equiv \frac{\partial g}{\partial r}.$$

Здесь r – радиальная координата полярной системы координат в сечении аппарата, g – высота поверхности раздела над входным сечением аппарата. Изначально $g(r) \equiv const$, что отвечает равномерному вытеснению. Однако по мере продвижения фронта он деформируется в силу наличия незатухающих возмущений.

В результате применения метода нормальных мод получается следующее дисперсионное соотношение

$$\beta\zeta = u\eta - D\eta^2. \quad (5)$$

Здесь ζ – показатель экспоненты, характеризующей рост амплитуды возмущений со временем, η – соответствующая частота моды. Знак $\zeta > 0$ отвечает неустойчивой моде. Из уравнения (5) следует, что причиной неустойчивости является конвективный перенос, которую гасит дисперсия. Эффекты уравнивают друг друга при $\zeta = 0$, что отвечает частоте $\eta_{max} = u/D$.

Лишь определенный дискретный спектр мод возмущения удовлетворяет граничным условиям на стенке аппарата $r = R$, где R – радиус аппарата. Частоты первых трех таких мод представляются следующим образом

$$\eta_1 \approx 3.83R^{-1}, \quad \eta_2 \approx 7.02R^{-1}, \quad \eta \approx 10.17R^{-1}.$$

Таким образом, если удастся подобрать значения параметров экстракции так, что максимальная возможная частота η_{max} множества неустойчивых мод окажется меньше первой частоты η_1 , $\eta_{max} < \eta_1$, то экстракция окажется устойчивой. Условие устойчивости движения поверхности раздела $g(r, t)$ записывается следующим образом

$$\frac{uR}{D} < 3.83. \quad (6)$$

В работе показано, что описанное явление действительно имеет место для исследуемого процесса. При этом учитываются особенности СФЭ из высокомасличного сырья, позволяющие существенно упростить описание экстракции. Важно также, что предложенный подход и полученные выводы не зависят от модели процессов массопереноса в масштабах индивидуальной частицы. Таким образом, полученные результаты являются достаточно общими и не ограничиваются микроструктурой растительного сырья. Полученный критерий (6) определяет условия, при которых процесс будет устойчивым, и локальные возмущения скорости фильтрующегося потока не будут развиваться. Таким образом, фронт будет оставаться плоским. Для повышения устойчивости фильтрующегося потока необходимо разрабатывать методики усиления эффекта конвективной дисперсии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 24-71-00047).

Литература

1. Гумеров Ф. М., Хайрутдинов В. Ф., Зарипов З. И. *Дополнительное условие эффективности сверхкритического флюидного экстракционного процесса* // Теорет. основы хим. технологии. – 2021. – Т. 55. – № 3. – С. 273.
2. Саламатин А. А., Халиуллина А. А., Калинина М. В. *Вязкостное пальцеобразование в условиях сверхкритической флюидной экстракции* // Теорет. основы хим. технологии. – 2024. – Т. 59. – № 2. – С. 243–255.

HYDRODYNAMIC INSTABILITY AT SUPERCRITICAL FLUID EXTRACTION CONDITIONS.

A.A. Salamatin, A.S. HaliullinaK

Viscous fingering instability at supercritical fluid extraction of oil from ground oil seeds is studied. The concentration profile of solution is a traveling wave and a solution of the reaction-diffusion equation. The width of the zone where the main concentration drop occurs is much smaller than the height of the packed bed. Using a small parameter, the boundary layer expansion in the vicinity of the concentration front is constructed and the hydrodynamic stability of the surface separating the depletion zone and the saturated zone is investigated. The dispersion relation is obtained within the framework of the normal mode approach. The constraints on hydrodynamic parameters at which the front remains stable to small disturbances are determined.

Keywords: supercritical fluid extraction; shrinking core model; boundary layer; hydrodynamic instability; fingering; Darcy law; method of normal modes.

УДК 517.95

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ**

Д.С. Сафаров¹, С.К. Миратов², Ганиев М.Ш.³

¹ safarov-5252@mail.ru; Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

² safarkhonop@mail.ru; Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

³ бохтарский государственный университет им. носира хусрава;

В работе найдено точные решения для одного класса нелинейных эллиптических систем уравнений второго порядка на плоскости с помощью эллиптической функции Якоби - snи.

Ключевые слова: Эллиптическая функция, двоякопериодическая функция, точное решение.

На комплексной плоскости S рассмотрим эллиптическую систему в комплексной форме

$$w w_{\bar{z}z} - \alpha w_{\bar{z}} w_z + a w^2 + b w^3 = 0, \quad (1)$$

где α, a, b – комплексные постоянные, $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ – искомая функция.

Главная часть этого уравнения при $\alpha = 1$ является комплексной записью уравнений вида

$$\Delta w - \frac{1}{w} (w_x^2 + w_y^2) = 0, \quad (2)$$

для некоторого изучены задача Дирихле и Неймана. Также получены 2π – периодические решения этого уравнения. Уравнение (2) встречается в монографии [1] при изучении структурные свойства решений для некоторых классов многомерных эллиптических систем уравнений второго порядка.

Задача отыскания точных решений для нелинейных уравнений математической физики является весьма актуальной и посвящены много работ [1,3,8].

В монографиях [3,8] даны применения эллиптических функций к решению некоторых классов нелинейных уравнений, математической физики. В данной работе мы находим двоякопериодическое с периодом $h_1, h_2, Im(h_2/h_1) \neq 0$, решение уравнения (1) на плоскости квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами [2]

$$f_{\bar{z}} - qf_z = 0, \quad |q| \neq 1, \quad (3)$$

удовлетворяющее условию $f(0) = 0, f(z + h_j) = f(z) + a_j$, причем $Im(\alpha_2/\alpha_1) \neq 0$.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(z) = \varphi(z + q\bar{z}, k^2) = \varphi(u(z)), \quad u(z) = z + q\bar{z}, \quad (4)$$

где q – постоянное и $|q| \neq 1$, $\varphi(u(z))$ – искомая, причём $\varphi_{\bar{u}} = 0$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$ подставляя (4) в (1) и учитывая, что $\varphi(u(z))$ решение уравнения (3), для $\varphi(u(z))$ получим нелинейное уравнение второго порядка на плоскости C_u , где $u = z + q\bar{z}, |q| \neq 1$,

$$2\varphi\varphi''(u) - \varphi'^2(u) + a_1\varphi^2(u) + b_1\varphi^3(u) = 0, \quad (5)$$

где $a_1 = \frac{2a}{q}, b_1 = \frac{2q}{b}$.

Это уравнение является обобщенным уравнением Пенлеве [9]. Отыскивая решение этого уравнения в виде $\varphi(u) = \psi^2(u)$ и подставляя в (5), получим уравнение Дуффинга вида

$$\psi''(u) + \frac{a_1}{4}\psi(u) + \frac{b_1}{4}\psi^3(u) = 0. \quad (6)$$

Периодическое решение уравнения (6) находится с помощью функции Якоби $snu = sn(u, k)$ – эллиптический синус, $cnu = cn(u, k)$ – эллиптический косинус, $dnu = dn(u, k)$ – дельта амплитуды. Здесь k – модуль функции, является элементом построения функций Якоби. В теории модулярных функций доказывается, что если комплексное постоянное число k^2 такое, что $k^2 \neq 0; 1$, то существует эллиптическая функция snu , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dsnu}{du}\right)^2 = (1 - sn^2 u)(1 - k^2 sn^2 u),$$

где k^2 – функции аргумента $\tau, Im\tau > 0$ [4,5,6].

Дифференцируя это уравнение получим, что функция snu удовлетворяет также дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2snu}{du^2} + (1 + k^2)snu - 2k^2 sn^3 u = 0.$$

Функция snu имеет основные периоды - $4K, 2iK'$, где $K = (\frac{\pi}{2}k)$ и $K' = (\frac{\pi}{2}k')$ – полные эллиптические интегралы, соответствующие модулю k и дополнительному модулю $k' = \sqrt{1 - k^2}$ [6].

Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$\psi(u) = Asn(t, k^2) = Asnu, \quad (7)$$

с неизвестными постоянными параметрами: $A, k^2, k'^2 \neq 0; 1$.

Функция $\psi(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi''(u) + (1 + k^2)\psi(u) - \frac{2k^2}{A^2}\psi^3(u) = 0. \quad (8)$$

Сопоставляя уравнение (8) с уравнением (6), заключаем, что функция вида (7) удовлетворяет уравнению (6), если их коэффициенты связаны условиями

$$1 + k^2 = \frac{a}{2q}, \quad 2k'^2 = -\frac{b}{2q}A^2.$$

Из этой системы находим k^2, A^2 :

$$k^2 = \frac{a}{2q} - 1, \quad k'^2 = 2 - \frac{a}{2q}, \quad a \neq 2q, a \neq 4q, q \neq 0, \quad A^2 = \frac{2}{b}(2q - a), \quad b \neq 0. \quad (9)$$

Тогда решение уравнения (6) имеет вид

$$\psi(u) = \sqrt{\frac{2}{b}(2q - a)} \operatorname{sn}\left(t, \frac{a}{2q} - 1\right).$$

Итак, доказана

Теорема. Пусть в уравнении (1) все коэффициенты отличны от нуля, $\alpha = \frac{1}{2}$, $a \neq 2q, a \neq 4q, q \neq 0, b \neq 0$, модуль функции k^2 и дополнительный модуль k'^2 , для функции sn и вычислены формулами (9), тогда уравнение (1) допускает дwoякопериодическое решение

$$w(z) = \frac{2}{b}(2q - a) \operatorname{sn}^2\left(z + q\bar{z}, \frac{a}{2q} - 1\right),$$

с периодами

$$h_1 = 4 \frac{K - q\bar{K}}{1 - |q|^2}, \quad h_2 = 2i \frac{K' - q\bar{K}'}{1 - |q|^2}.$$

Литература

1. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. - М.: Наука, 1981. - 448 с.
2. Векуа И.Н. *Обобщённые аналитические функции*. - М.: Науки, 1959. - 629 с.
3. Сафаров Д.С. *Дwoякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения*. - Душанбе, Дониш, 2012. - 190 с.
4. Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций*. - М.: Наука, 1968 - 664 с.
5. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. *Курс современного анализа*. - Государственное технико-теоритическое издательство. - Ленинград - 1934 - Москва, 468 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функции комплексного переменного*. - М.: Науки, 1973. - 736 с.
7. Сафаров Д.С. *Точное решение обобщенного уравнения Дуффинга* - Материалы международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и ее приложения". - - Худжанд - 2003. - С. 139-140.

8. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*. - Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 360с. - Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 360с.

9. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. - М.: Наука, 1976 г. - 589 с.

EXACT SOLUTIONS FOR SOME CLASSES OF NONLINEAR ELLIPTIC SYSTEMS OF SECOND ORDER EQUATIONS IN THE PLANE

D.S. Safarov, S.K. Miratov, M.SH. Ganiev

In the work, exact solutions were found for one class of nonlinear elliptic systems of second-order equations on the plane with using the Jacobi elliptic function -snu.

Keywords: Elliptic function, doubly periodic function, exact solution.

УДК 519.6:539.3

РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ С ПОМОЩЬЮ АЖУРНОЙ И МОМЕНТНОЙ СХЕМ МКЭ.

Д. В. Седова¹, В.В.Трофимов²

¹ ipad.0303@yandex.ru; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

² ipad.0303@yandex.ru; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

Рассматривается решение ряда статических задач электромагнитной теории [1] с помощью двух численных схем метода конечных элементов [2,3]. Ажурная схема [2] продемонстрировала своё высокое качество и эффективность при решении большого количества нестационарных динамических задач теории упругости и пластичности, а также реализована для решения статических задач теории упругости. Моментная схема [3] является новой. Её реализация и решенные статические и динамические тестовые задачи теории упругости показали её перспективность.

Ключевые слова: Электростатика, метод конечных элементов, ажурная схема, моментная схема.

Рассматривается ряд решения статических задач электромагнитной теории методом конечных элементов с помощью ажурной и моментной схемы. Ранее с помощью ажурной схемы решалась задача Пуассона для статического поля, которая показала хорошие результаты: высокую устойчивость и быстроту решения при вычислениях большого объема [2]. Полученные результаты показали, что данный метод применим в электромагнитной теории, именно поэтому в данной работе рассматривается решение с помощью моментной схемы, которая является модификацией ажурной схемы.

Данные методы были предложены, чтобы ускорить получение решения и уменьшить объём вычислений. Целью работы является тестирование данных схем при решении нового класса задач математической физики.

Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 24-29-00422.

Литература

1. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Пространства вектор-функций и стационарные задачи электромагнитной теории: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 112 с.
2. Жидков А.В., Зефиоров С.В., Кастальская К.А., Спиринов С.В., Чекмарев Д.Т. Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестник ННГУ. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2011. – № 4, – Ч. 4. – С. 1480-1482.
3. Абу Даввас Я., Модин И.А., Чекмарев Д.Т. Моментный конечный элемент для решения трехмерных задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. Т. 85. № 2. 2023. С. 164-177.

SOLVING STATIC PROBLEMS OF ELECTROMAGNETIC THEORY USING RARE MESH AND MOMENT SCHEMES OF FEM.

D. V. Sedova, V. V. Trophimov

The solution of a number of static problems of electromagnetic theory [1] is considered using two numerical schemes of the finite element method [2,3]. The rare mesh [2] has demonstrated its high quality and efficiency in solving a large number of non-stationary dynamic problems of the theory of elasticity and plasticity, and has also been implemented to solve static problems of the theory of elasticity. The moment scheme [3] is new. Its implementation and solved static and dynamic test problems of elasticity theory have shown its promise.

Keywords: Electrostatics, finite element method, rare mesh, moment mesh.

УДК 608.2

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВИНТОВОГО ПРЕССА ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ СОВМЕЩЕННЫХ С ОПТИЧЕСКИМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

К.О. Спиридонова¹

¹ ksospiridonova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе приводится описание разработки устройства автоматического одноосного сжатия для исследования изменений нерегулярной внутренней структуры образцов под действием внешней нагрузки при проведении компьютерной томографии. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи: автоматизация процесса нагружения, разработка системы управления, создание графического интерфейса пользователя, проведение экспериментов.

Ключевые слова: компьютерная томография, аддитивное производство, автоматизированная оснастка

Современное развитие технологий в области аддитивного производства позволяет создавать конструкции с нерегулярной внутренней структурой. Однако в процессе производства таких изделий возможно появление внутренних дефектов. На сегодняшний день наиболее распространенным методом изучения внутренней структуры является компьютерная томография, которая позволяет получить необходимую информацию, не прибегая к разрушению образца [1]. Существующие аналоги имеют ограниченную область съемки, а максимальная нагрузка достигает до

2кН. В связи с этим целью данной работы является создание автоматизированной оснастки для проведения испытаний на сжатие внутри компьютерного томографа [2].

Преимуществами использования автоматического нагружения являются: обеспечение равномерного давления на исследуемый образец, возможность отслеживать разрушение образца в реальном времени, исключение возможности ошибки оператора.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи: автоматизация процесса нагружения [3], разработка системы управления [4], создание графического интерфейса для пользователя.

В качестве проверки работы устройства были проведены тестовые испытания, в рамках которых нагружали образец в виде распечатанного на 3D-принтере кубика с размерами 20x20x20. Данные, записанные во время нагружения в текстовом файле, были сверены с показаниями стационарного испытательного устройства УТС 110М-100. Коэффициент детерминации 0.997.

Таким образом, в результате выполненной работы было усовершенствовано устройство одноосного нагружения путем замены механической части уже существующей оснастки на автоматическую.

Литература

1. Надеждин К.Д., Шарнин Л.М., Кирпичников А.П. *Визуальные методы определения деформаций и напряжений на поверхности испытываемых конструкций* // Вестник Казанского технологического университета —2016. —Т. 12.—С. 143-146.
2. Саченков О.А., Большаков П.В., Харин Н.В., Акифьев К.Н., Спиридонова К.О., Смирнова В.В. *Устройство для определения структуры образцов при автоматизированном одноосном сжатии и способ его использования*. Патент N 2813454 Российская Федерация, МПК G01N23/046 (2018.01). Заявка N 2023126459 от 16 октября 2023 г.; опубл. 12 февраля 2024.
3. Большунов А.В., Кузькин А.Ю. *Прикладная механика. Винтовое устройство. Расчет и проектирование: Методические указания к самостоятельной работе*. СПб. : Санкт-Петербургский горный университет, 2019. 44 с.
4. Валединский В. Д., Корнев А. А. *Методы программирования в задачах и примерах на C/C++: учебное пособие*. Москва: Издательство Московского университета, 2023. - 413 с.

DESIGN SCREW PRESS FOR EXPERIMENTS IN CONJUNCTION WITH OPTICAL MEASUREMENTS

К.О. Spiridonova

This paper describes the development of an automatic uniaxial compression device to investigate changes in the irregular internal structure of samples under the influence of external load during computed tomography scans. For this purpose, the following tasks were solved: automation of the loading process, development of the control system, creation of a graphical user interface, and conducting experiments.

Keywords: computed tomography, additive manufacturing, automated tooling

УДК 517.518

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕКОТОРЫХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ф.М. Талбакзода¹

¹ talbakov_90@mail.ru; Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни

В работе исследуются критерии абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодически в смысле Безиковича функций, в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности. В качестве аппарата приближения, т.е. структурной характеристики рассматриваемой функции, используется модуль непрерывности высшего порядка.

Ключевые слова: функции двух переменных, почти-периодические функции Безиковича, двойные ряды Фурье, абсолютная сходимость, спектр функции, коэффициенты Фурье, модуль непрерывности.

Пусть B_p ($1 \leq p \leq \infty$) - линейное пространство, которое состоит из измеримых функций $f(x, y)$, и для которых $|f(x, y)|^p$ ($1 \leq p \leq \infty$) интегрируема в смысле Лебега в пространстве R^2 , с конечной нормой

$$\|f\|_{B_p} = D_{B_p}\{f(x, y)\} = \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T |f(x, y)|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

($1 \leq p \leq \infty$), а при $p = \infty$

$$\|f\|_{B_p} = \text{vrai sup}_{x, y} |f(x, y)| < \infty.$$

Следуя А. Безиковича [1], вводим в рассмотрение понятие B_p - почти-периодических функций.

Функция f называется B_p - почти-периодической, или почти-периодической в смысле Безиковича, если существует последовательность конечных тригонометрических сумм вида

$$P_{n,n}(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{k,l} e^{i(\Lambda_k x + \lambda_l y)},$$

для которых выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{B_p}\{f(x, y) - P_{n,n}(x, y)\} = 0.$$

Для каждой $f \in B_p$ определена функция

$$c(\Lambda, \lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T f(x, y) e^{-i(\Lambda x + \lambda y)} dx dy = M_{xy}\{f(x, y) e^{-i(\Lambda x + \lambda y)}\}.$$

Она может отличаться от нуля не более, чем на счетном множестве значений Λ, λ : $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k, \dots$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ называются показателями (спектром) Фурье, а числа $c_{k,l} = c(\Lambda_k, \lambda_l)$ - коэффициентами Фурье функции $f(x, y)$.

Предположим, что функция $f \in B_p$ имеет формальное разложение в двойной ряд Фурье следующего вида

$$f(x, y) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} e^{i(\Lambda_k x + \lambda_l y)},$$

где $c_{k,l} = M_{xy}\{f(x, y) e^{-i(\Lambda_k x + \lambda_l y)}\}$ - коэффициенты Фурье, а $\{\Lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ - показатели Фурье (спектр функции), которые имеют единственную предельную точку в бесконечности, то есть

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_{-k} = -\Lambda_k, \quad |\Lambda_k| < |\Lambda_{k+1}|, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \infty, \\ \lambda_0 = 0, \quad \lambda_{-l} = -\lambda_l, \quad |\lambda_l| < |\lambda_{l+1}|, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_l = \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть

$$\Delta_{\delta}^1 f(x, y) = f(x + \delta, y) - f(x, y), \quad \Delta_r^2 f(x, y) = f(x, y + r) - f(x, y);$$

$$\omega_1(f, h) = \sup_{x, y} \sup_{|\delta| \leq h} |\Delta_{\delta}^1 f(x, y)|, \quad (2)$$

$$\omega_2(f, \eta) = \sup_{x, y} \sup_{|r| \leq \eta} |\Delta_r^2 f(x, y)|, \quad (3)$$

$$\omega_{11}(f, h, \eta) = \sup_{x, y} \sup_{|\delta| \leq h} \sup_{|r| \leq \eta} |\Delta_{\delta}^1 \Delta_r^2 f(x, y)|. \quad (4)$$

Величины (2) и (3) называется частными, а (4) - смешанным модулями непрерывности функции $f(x, y)$.

Введем определение класса H_{Φ} функций ограниченной Φ -вариации.

Пусть $\Phi(u)$, $u \geq 0$, - строго возрастающая непрерывная функция, причем $\Phi(0) = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty$. Положим

$$V_{\Phi}^{(1)}(f) = \sup_y \sup_a \sup_{\Pi_a} \sum_{i=1}^m \Phi(|f(x_i, y) - f(x_{i-1}, y)|),$$

$$V_{\Phi}^{(2)}(f) = \sup_x \sup_b \sup_{\Pi_b} \sum_{j=1}^n \Phi(|f(x, y_j) - f(x, y_{j-1})|),$$

где

$$\Pi_a = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = a + 2\pi\}, \quad \Pi_b = \{b = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b + 2\pi\}$$

- произвольные разбиения периода. Далее, пусть

$$V_{\Phi}^3(f) = \sup_{x, y} \sup_{a, b} \sup_{\Pi_{a,b}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Phi(|\Delta f(x_i, y_j)|),$$

где $\Pi_{a,b} = \Pi_a \times \Pi_b$, а

$$\Delta f(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j) + f(x_{i-1}, y_{j-1}).$$

В настоящей работе рассматриваются некоторые новые достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций из

пространства B_2 , когда показатели Фурье имеет единственную предельную точку в бесконечности (см., например, [2], [5-6]).

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in B_2$, имеет место разложение в двойной ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} B_{k,l} (a_{k,l} \cos \Lambda_k x \cos \lambda_l y + b_{k,l} \sin \Lambda_k x \cos \lambda_l y + c_{k,l} \cos \Lambda_k x \sin \lambda_l y + d_{k,l} \sin \Lambda_k x \sin \lambda_l y), \quad (5)$$

где

$$B_{k,l} = 1, \quad B_{k,0} = B_{0,l} = \frac{1}{2}, \quad k, l \geq 1, \quad B_{0,0} = \frac{1}{4},$$

$$a_{0,0} = M\{f(x, y)\},$$

$$a_{k,l} = M\{f(x, y) \cos \Lambda_k x \cos \lambda_l y\},$$

$$b_{k,l} = M\{f(x, y) \sin \Lambda_k x \cos \lambda_l y\},$$

$$c_{k,l} = M\{f(x, y) \cos \Lambda_k x \sin \lambda_l y\},$$

$$d_{k,l} = M\{f(x, y) \sin \Lambda_k x \sin \lambda_l y\} \quad (k = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots),$$

$$M\{g(x, y)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T g(x, y) dx dy.$$

Ниже приводятся некоторые новые результаты, относящиеся к абсолютной сходимости ряда (5) с известными коэффициентами (см., например, [2] стр. 72; [3] стр 70-73.).

Теорема 1. Пусть спектры $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_l\}_{l=1}^{\infty}$ функция $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (1) и $\Phi(u) > 0$, $u > 0$. Пусть для некоторого $\beta \in (0, 2)$ выполняется условие

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} [\chi(2^\mu \pi) - \chi(2^{\mu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} [\chi(2^\nu \pi) - \chi(2^{\nu-1} \pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega^\beta(f, 2^{-\mu}, 2^{-\nu}) \omega_{\Phi}^{\frac{\beta}{2}}(f, 2^{-\mu}, 2^{-\nu}) \Phi^{-\frac{\beta}{2}}[\omega(f, 2^{-\mu}, 2^{-\nu})] < \infty, \quad (6)$$

где

$$\omega(f, h, \eta) = \operatorname{vrai} \sup_{x, y} \sup_{|\delta| \leq h} \sup_{|r| \leq \eta} |\Delta_\delta^1 \Delta_r^2 f(x, y)|,$$

$$\omega_\Phi(f, h, \eta) = \sup_{|\delta| \leq h} \sup_{|r| \leq \eta} \overline{M}\{|\Delta_\delta^1 \Delta_r^2 f(x, y)|\},$$

$$\overline{M}\{g(x, y)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T g(x, y) dx dy.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (|a_{k,l}|^2 + |b_{k,l}|^2 + |c_{k,l}|^2 + |d_{k,l}|^2)^{\frac{\beta}{2}} \quad (7)$$

сходится.

Теорема 2. Пусть спектры $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_l\}_{l=1}^{\infty}$ функция $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (1). Пусть для некоторого $\beta \in (0, 2)$ выполняется условие

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} [\chi(2^{\mu}\pi) - \chi(2^{\mu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} [\chi(2^{\nu}\pi) - \chi(2^{\nu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}} \omega_2^{\beta}(f, 2^{-\nu}, 2^{-\nu}) < \infty,$$

где

$$\omega_2(f, h, \eta) = [\sup_{|\delta| \leq h} \sup_{|r| \leq \eta} M\{|\Delta_{\delta}^1 \Delta_r^2 f(x, y)|\}]^{\frac{1}{2}},$$

тогда ряд (7) сходится.

Далее нам понадобится

Лемма 1. Пусть $\Phi(u) \geq 0$, $u \geq 0$, $h > 0$, $\eta > 0$. Тогда

$$\overline{M}\{\Phi[f(x+h, y+\eta) - f(x+h, y-\eta) - f(x-h, y+\eta) + f(x-h, y-\eta)]\} \leq 4h\eta V_{\Phi}(f), \quad (8)$$

где

$$V_{\Phi}(f) = \overline{M}\{V_{\Phi, T}(f)\}, \quad V_{\Phi, T}(f) = \sup_{x, y} \sup_{a, b} \sup_{\Pi_{a, b}} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \Phi(|\Delta f(x_k, y_l)|).$$

Заметим, что признаки абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций $f \in B_p$, в зависимости от поведения показателей Фурье, рассмотрены в работах [2-6].

Литература

1. Besicovich A.S. Almost periodic functions. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932.
2. Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти- периодических функций Безиковича // ДАН РТ. **61**:11-12 (2018), 813-821.
3. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти- периодических функций в равномерной метрике // ДАН РТ. **63**:5-6 (2020), 289-293.
4. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти- периодических функций в равномерной метрике // Изв. вузов. Матем., :4 (2023), 65-75.
5. Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти- периодических функций // Изв. вузов. Матем., :4 (2024), 67-79.
6. Khasanov Yu. Kh. and Talbakov F.M. On Sufficient Condition for Absolute Convergence Fourier Series of Bezikovichs Almost-Periodic Functions // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 6, pp. 2743-2752

ON THE ABSOLUTE CONVERGENCE OF DOUBLE FOURIER SERIES OF SOME ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

F.M. Talbakzoda

The paper examines criteria for the absolute convergence of double Fourier series almost periodically in the sense of Besicovitch functions, in the case where the Fourier exponents have a single limit point at infinity. As an approximation device, i.e. structural characteristics of the function under consideration, a higher order modulus of continuity is used.

Keywords: functions of two variables, almost periodic Besicovich functions, double Fourier series, absolute convergence, spectrum of a function, Fourier coefficients, modulus of continuity.

УДК 519.244

МОДЕЛЬ АУГМЕНТАЦИИ ВЫБОРОЧНЫХ ДАННЫХ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЗАДАЧ ПОИСКА АНОМАЛИЙ

А.Н. Токарева¹

¹ tokareva.an@phystech.edu; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Рассматривается задача поиска аномалий в явлениях, представимых в виде случайных процессов с непрерывным временем. Случайные процессы могут быть многомерными и наблюдаться в иррегулярные моменты времени. Предлагается онлайн модель предобработки и аугментации выборочных траекторий процесса на основе моделей со скрытыми процессами. Предобработанные данные в дальнейшем используются в качестве исходных данных для моделей поиска аномалий.

Ключевые слова: поиск аномалий, случайные процессы, непрерывное время, машинное обучение, аугментация данных, онлайн модель

Обнаружение аномалий в явлениях жизни — часто возникающая задача. Например, это определение мошеннических транзакции в банковской сфере, момента поломки оборудования, контроля жизнедеятельности живых организмов и т.п. Обзор литературы [1, 2, 3] указывает, что нет общепризнанного универсального способа, одинаково эффективного для всех постановок задачи. В частности, нет распространенных непараметрических методов поиска аномалий в многомерных случайных процессах с непрерывным временем и с, возможно, иррегулярными моментами наблюдения. Предлагаемая модель позволяет предобрабатывать выборочные траектории таких процессов, порождая аугментированные выборки. Численные эксперименты с реальными данными показали, что точность широкого круга моделей поиска аномалий улучшается при использовании аугментированных данных. Предлагаемая модель работает в онлайн режиме, что представляется важным для практического применения.

Наша модель представляет собой разновидность моделей со скрытыми процессами (см., например, [4, 5]). Пусть τ_1, \dots, τ_n ($\tau_i \in \mathbb{R}^+$) — моменты времени, в которые мы пронаблюдали значения рассматриваемого p -мерного процесса. Для удобства записи полагаем, что $\tau_0 = 0$. Обозначим эти значения как $V(1), \dots, V(n)$ ($V(i) \in \mathbb{R}^p$). Введем q -мерный скрытый процесс H и обозначим через $H(1), \dots, H(n)$ ($H(i) \in \mathbb{R}^q$) его значения в моменты времени τ_1, \dots, τ_n , соответственно. Через $V_j(i)$, $H_j(i)$ будем обозначать j -ые компоненты соответствующих векторов.

Значения $H(i)$ задаются как:

$$H(i) = \arg \max_h \sum_{j=1}^p a_j(V_j(i), h) \sum_{k=1}^q b_k(h_k, H_k(i-1), \Delta\tau_i), \quad (1)$$

где

1. $a_j(v, h)$, $1 \leq j \leq p$ — набор функций, интерпретируемых как

$$\ln \mathbf{P}(V_j(i) = v | H(i) = h);$$

2. $b_k(h, h_{-1}, \Delta\tau)$, $1 \leq k \leq q$ — набор функций, интерпретируемых как

$$\ln \mathbf{P}(H_k(i) = h \mid H_k(i-1) = h_{-1}, \tau_i - \tau_{i-1} = \Delta\tau);$$

3. $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$.

Здесь максимизация осуществляется приближенными методами. Мы использовали методы типа градиентного спуска с начальным значением, равным $H(i-1)$.

Начальное значение $H(0)$ должно задаваться извне. В наших экспериментах в качестве $H(0)$ использовались значения независимых реализаций равномерного распределения $U([0; 1])$. В качестве выходного значения модели, т.е. аугментированных данных, выступают значения $H(i)$, $1 \leq i \leq n$.

Для задания конкретного вида функций $\{a_j\}$, $\{b_k\}$ предлагается схема их компоновки из фиксированного набора элементов. Функции задаются как вложенный набор элементов, каждый из которых может быть числовым параметром (множество таких параметров модели обозначим как Θ), значением скрытого процесса, либо функцией элементов. Предлагаемая схема позволяет эффективно вычислять градиент “постериорной вероятности” (1). Для краткости изложения не будем приводить более подробное описание.

Для апробации модели мы использовали данные эксперимента для определения момента падения людей по показаниям набора датчиков. В данных присутствовало 7 числовых столбцов и порядка 150 000 наблюдений. Мы рассматривали 3 метрики качества прогноза аномалий: ROC-AUC, Precision и Recall. В качестве моделей непосредственного поиска аномалий рассматривались: COPOD, Isolation Forest, Gaussian Naive Bayes, LSTM, GRU, Bidirectional-LSTM. В качестве меры ошибки при подгонке Θ используется значение метрики ROC-AUC по кросс-валидации, получаемое рассматриваемой моделью поиска аномалий исходя из аугментированных данных. Для этой задачи мы задавали модель следующим образом:

- $p = 7$, $q = 24$;
- процессу V_j , $j = 1, \dots, 7$ соответствует

$$a_j(v, h) = \ln f_{\mathcal{N}}(v; \mu = \sum_{k=1}^3 h_{jk} \cdot h_k, \sigma^2 = \theta_1);$$

- процессу H_j , $j = 1, \dots, 3$ соответствует

$$b_j(h, h_{-1}, \Delta\tau) = \ln f_{\mathcal{N}}(h; \mu = (h_{-1})_j, \sigma^2 = (1 - \theta_2^{\Delta\tau})\theta_3) - \theta_4 \cdot |h|;$$

- процессу H_{jk} , $j = 1, \dots, 7$, $k = 1, \dots, 3$ соответствует

$$b_{jk}(h, h_{-1}, \Delta\tau) = \ln f_{\mathcal{N}}(h; \mu = (h_{-1})_{jk}, \sigma^2 = (1 - \theta_5^{\Delta\tau})\theta_6) - \theta_7 \cdot |h|;$$

- набор обучаемых параметров $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_7\}$.

Здесь $f_{\mathcal{N}}$ — функция плотности нормального распределения.

Эксперименты показали, что предлагаемая нами модель улучшает метрики качества обнаружения аномалий для всех моделей. Степень улучшения показателей

ROC-AUC варьируется от 0.01 до 0.12. Наш метод позволяет эффективно улучшить результаты моделей, не предполагающих применение к случайным процессам. Отметим, что сильное улучшение возникает и для вариаций рекуррентных нейронных сетей, которые предназначены для работы со случайными процессами. В таблице 1 приведены результаты экспериментов. Для краткости мы привели значения лишь для трех моделей.

Таблица 1

	COPOD без аугментации	COPOD с аугментацией
ROC-AUC	0.57587	0.59191
precision	0.12163	0.13698
recall	0.24417	0.27472
	Gaussian NB без аугментации	Gaussian NB с аугментацией
ROC-AUC	0.53349	0.6517
precision	0.43747	0.20391
recall	0.07186	0.38165
	GRU без аугментации	GRU с аугментацией
ROC-AUC	0.90097	0.95074
precision	0.72656	0.61472
recall	0.22738	0.43888

Литература

1. Pourhabibi T., Ong K., Kama H., Booa Y. L. *Fraud detection: A systematic literature review of graph-based anomaly detection approaches* // Decision Support Systems. – 2020. – Т. 133.
2. Chen J. I. *Deep Convolution Neural Network Model for Credit-Card Fraud Detection and Alert* // Journal of Artificial Intelligence and Capsule Networks. – 2021. – Т. 3. – В. 2. – С. 101–112.
3. Al-Hashedi K. G. *Financial fraud detection applying data mining techniques: A comprehensive review from 2009 to 2019* // Computer Science Review. – 2021. – Т. 40.
4. Rabiner L., Juang Biinghwang. *An introduction to hidden Markov models* // IEEE ASSP Magazine. – 1986. – Т. 3. – В. 1. – С. 4–16.
5. Hutchinson R. A., Mitchell T. M., Rustandi I. *Hidden process models* // Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning. – 2006.

MODEL OF SAMPLE DATA AUGMENTATION FOR MULTIDIMENSIONAL RANDOM PROCESS IN ANOMALY DETECTION PROBLEMS

A.N. Tokareva

The problem of anomaly detection in phenomena represented as continuous-time random processes is considered. These random processes can be multidimensional and observed at irregular time intervals. An online model for preprocessing and augmenting sample trajectories of the process based on hidden process models is proposed. The preprocessed data is then used as input for anomaly detection models.

Keywords: anomaly detection, random processes, continuous time, machine learning, data augmentation, online model

УДК 531/534

ИССЛЕДОВАНИЯ ЖЕСТКОСТНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУР ИНТРАМЕДУЛЛЯРНОГО ЭНДОПРОТЕЗА

П.Д. Туктарова¹

¹ pd_tuktarova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе представлены эксперименты на четырёхточечный изгиб для определения жесткостных характеристик интрамедуллярного эндопротеза.

Ключевые слова: решётчатая структура, штифт, четырёхточечный изгиб

Решётчатые структуры это особый класс пористых материалов, имеющие периодически упорядоченную структуру, которые при правильном проектировании даёт возможность уменьшить вес конструкции с сохранением прочностных и жесткостных характеристик [1,2]. Благодаря данным свойствам они широко распространены в ортопедии [3,4]. В частности, при проектировании штифтов для сломанной берцовой кости, где цельный фрагмент штифта может меняться на решётчатую конструкцию с целью закладки антибиотика или костного материала, стимулирующий его заживление [5,6].

В данной работе проведены натурные испытания модифицированных интрамедуллярных штифтов для большеберцовой кости на четырёхточечный изгиб. Модификация заключалась в замене сплошной части штифта на решётчатую структуру. Штифты изготавливались с применением аддитивных технологий, а именно фотополимерной печати. Особенности данной технологии производства приводят к возможным различиям в физико-механических характеристиках образцов из разных серий. Для оптимизации результатов в каждой серии испытаний создавался сплошной образец. Все образцы дополнительно подвергались укреплению с использованием ультрафиолетового излучения.

Основываясь на данных эксперимента были получены диаграммы нагружения для всех видов образцов. Из диаграмм нагружения были определены жесткостные характеристики штифтов.

Литература

1. Bolshakov P., Kharin N., Kashapov R., Sachenkov O. *Structural design method for constructions: Simulation, manufacturing and experiment* // *Materials*. - 2021. - Vol.14, Is.20. - Art. №6064.
2. Bolshakov P., Raginov I., Kashapov R., Egorov V., Kashapova R., Baltina T., Sachenkov O. *Design and optimization lattice endoprosthesis for long bones: Manufacturing and clinical experiment* // *Materials*. - 2020. - Vol.13, Is.5. - Art. № 1185. <https://doi.org/10.3390/ma13051185>.
3. Kharin N., Bolshakov P., Kuchumov A.G., *Numerical and Experimental Study of a Lattice Structure for Orthopedic Applications* // *Materials*. - 2023. - Vol.16, Is.2. - Art. №744.
4. Bolshakov P., Kharin N., Agathonov A., Kalinin E., Sachenkov O. *Extension of the Voronoi Diagram Algorithm to Orthotropic Space for Material Structural Design* // *Biomimetics*. - 2024. - Vol.9, Is.3. - Art. №185.

5. Vallo C. I. *Flexural strength distribution of a PMMA-based bone cement* // Journal of Biomedical Materials Research, 63(2), 226–236. doi:10.1002/jbm.10129.

6. Sebastian Philipp von Hertzberg-Boelch, Martin Luedemann, Maximilian Rudert, and Andre F. Steinert, PMMA Bone Cement: Antibiotic Elution and Mechanical Properties in the Context of Clinical Use // Biomedicines Journal, 2022.

STUDIES OF THE STIFFNESS PROPERTIES OF LATTICE STRUCTURES OF AN INTRAMEDULLARY ENDOPROSTHESIS

P.D. Tuktarova

This paper presents experiments on four-point bending to determine the stiffness characteristics of an intramedullary endoprosthesis.

Keywords: lattice structure, pin, four-point bend

УДК 004.932

СЕГМЕНТАЦИЯ ОБЪЕКТА НА ТРЕХМЕРНОМ ИЗОБРАЖЕНИИ ПО ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРИЗНАКАМ

Д.М. Фархутдинов¹

¹ dmfarkhutdinov@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе представлен один из методов нахождения объекта на трехмерном изображении. Он основан на поиске реперных точек, связанных с геометрией объекта. В качестве детектора, выполняющего поиск таких точек, был выбран детектор углов Харриса. Была решена задача детектирования углов и восстановления геометрии с предварительной обработкой изображения, после чего проведена сегментация нужного объекта.

Ключевые слова: детектор углов Харриса, узловые точки, компьютерная томография

На данный момент для определения поля перемещений в экспериментах остается актуальным метод, основанный на слежении за реперными точками. Развитие оптических методов позволяют производить съемку в разных диапазонах излучений, при этом реперными точками в этом случае могут выступать точки, непосредственно связанные с геометрией объекта.

Целью настоящей работы является сегментация исследуемого образца на его трехмерном изображении. Для достижения данной цели были решены задачи: детектирования углов и восстановления геометрии объекта с предварительным применением размытия по Гауссу[1] и детектора границ Кэнни[2]. По гистограмме компьютерной томографии исследуемый образец имел практически схожую плотность с композитными проставками, в которых происходила его фиксация на время эксперимента. В виду чего образец был трудноразличим, но имел геометрические свойства характерные кубу. Исходя из этого образец сегментировался по его особым точкам, в качестве которых выступали вершины куба. Особая точка – это точка, окрестность которой отличается от окрестности любой другой точки

заданного изображения. Для определения особых точек используются различные детекторы и дескрипторы. Для решения поставленной задачи был выбран детектор углов Харриса[3], который был реализован на языке Matlab[4].

В результате применения представленного метода к компьютерной томографии[5] трехмерной модели исследуемого образца на результирующем изображении удалось сегментировать исследуемый объект. В работе были проведены вычислительные эксперименты для тестовых задач с целью отладки алгоритма. Были решены модельные задачи для данных снятых на рентгеновском компьютерном томографе.

Литература

1. Gil J. *Computing 2-d min, median, and max filters.* / J. Gil, M. Werman // IEEE Trans. on PAMI 15 - 1993 - С. 504–507.
2. Тумаков Д.Н. *Алгоритмические методы сегментации изображений.* / Д.Н. Тумаков, З.Д. Каюмов, А.А. Егорчев, И.И. Латыпов // Учебное пособие. Казань: Издательство Казанского Федерального университета - 2023
3. Клетте Р. *Компьютерное зрение. Теория и алгоритмы.* / Рейнхард Клетте, пер. с англ. А. А. Слинкин // М.: ДМК Пресс - 2019.
4. Sulaymon L. *Practical MATLAB Modeling with Simulink: Programming and Simulating Ordinary and Partial Differential Equations.* / L. Sulaymon, Eshkabilov // Ag and Biosystems Engineering Department, North Dakota State University, Fargo, USA.
5. Акифьев К.Н. *Методика исследования пористости образцов с жидкостью рентгеновским компьютерным томографом при одноосном сжатии.* / К.Н. Акифьев, Е.О. Стаценко, В.В. Смирнова, Н.В. Харин, П.В. Большаков, О.А. Саченков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2023 - №2 - С. 11–21.

SEGMENTATION OF AN OBJECT IN A THREE-DIMENSIONAL IMAGE BASED ON ITS GEOMETRIC FEATURES

D.M. Farkhutdinov

This paper presents one of the methods of finding an object in a three-dimensional image. It is based on the search for reference points related to the geometry of the object. The Harris angle detector was chosen as the detector that searches for such points. The problem of detecting angles and restoring geometry with preprocessing of the image was solved, after which the segmentation of the desired object was carried out.

Keywords: Harris corner detector, nodal points, computed tomography

УДК 517.98

ОДИН МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ИДЕМПОТЕНТОВ В УНИТАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ

Хадур Махмуд¹

¹ mahmoud.khadour.991@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Предложен один метод построения идемпотентов в унитарной алгебре, используя n произвольных идемпотентов из этой алгебры. Исследованы свойства полученных идемпотентов.

Ключевые слова: унитарная алгебра, C^* -алгебра, идемпотент, симметрия, проектор, частичная изометрия, след.

В теории операторных алгебр большую роль играют комбинации операторов специального вида, см., например, [1]–[4]. Пусть \mathcal{A} – унитарная алгебра с единицей I , $\mathcal{A}^{\text{id}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = A\}$; $\mathcal{A}^{\text{sym}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = I\}$. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то $\mathcal{A}^\perp := I - A \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Положим $S_P := 2P - I$ для $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда $S_P \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$. Здесь изучается один метод построения идемпотентов в \mathcal{A} , исходя из набора $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Известна

Лемма 1. Формула $S := 2P - I$ ($P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$) устанавливает биекцию между множеством \mathcal{A}^{id} и \mathcal{A}^{sym} .

Теорема 1. Пусть \mathcal{A} – унитарная алгебра и $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ такие, что $P_k P_j = 0$ при $k \neq j$, $k, j = 1, \dots, n$. Тогда $P := \sum_{k=1}^n P_k \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $S_P = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n S_{P_k}$; все S_{P_k} , $k = 1, \dots, n$, попарно коммутируют.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеем

$$S_{P_1} S_{P_2} \cdots S_{P_{n-1}} S_{P_n} S_{P_{n-1}} \cdots S_{P_2} S_{P_1} = S_{P_n}. \quad (1)$$

Заметим, что для произвольного набора попарно коммутирующих идемпотентов P_1, \dots, P_n равенство (1) также выполнено. Из теоремы 1 и из теоремы об определителе произведения матриц вытекает

Следствие 2. Для $\mathcal{A} := \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ в условиях теоремы 1 получаем

$$\det(S_P) = (-1)^{mn-n} \prod_{k=1}^n \det S_{P_k}.$$

Теорема 2. Пусть \mathcal{A} – унитарная алгебра с единицей I и $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$; $S = S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1 \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$. Тогда для $P_k := \frac{S_k + I}{2} \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, $k = 1, \dots, n$ имеем $A := A(P_1, \dots, P_n) = \frac{S+I}{2} \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Если φ – конечный след на C^* -алгебре \mathcal{A} , то $\varphi(S) = \varphi(S_n) \in \mathbb{R}$ и $\varphi(A) = \varphi(P_n) \in \mathbb{R}^+$.

Подробно рассмотрим случай $n = 2$ в теореме 2:

Теорема 3. Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда

- (i) $A(P_1, P_2) = P_2 - 2P_2 P_1 - 2P_1 P_2 + 4P_1 P_2 P_1 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$;
- (ii) $A(P_1^\perp, P_2) = A(P_1, P_2)$;
- (iii) $A(P_1, P_2^\perp) = A(P_1, P_2)^\perp$;
- (iv) $A(P_1^\perp, P_2^\perp) = A(P_1, P_2)^\perp = A(P_1, P_2)^\perp$;
- (v) если $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$, то $A(P_1, P_2) = P_2$;
- (vi) $A(P_1, P_1^\perp) = P_1^\perp$; $A(P_1, P_1) = P_1$;
- (vii) если $P_1 P_2 P_1 = P_1$, то $A(P_1, P_2) = (2P_1 - P_2)^2$;
- (viii) если $P_1 P_2 = P_2 P_1 \in \{P_1, P_2\}$, то $A(P_1, P_2) = P_2$;

$$(ix) A(P_1, P_2) = (P_2 - 2P_1P_2)(P_2 - 2P_2P_1);$$

(x) если φ – конечный след на C^* -алгебре \mathcal{A} , то $\varphi(A(P_1, P_2)) = \varphi(P_2)$.

Следствие 3. Если \mathcal{A} – унитарная алгебра и $P_1 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то отображение $P_2 \mapsto A(P_1, P_2)$, $f(P_2) = A(P_1, P_2)$, удовлетворяет для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ с $PQ \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ соотношению $f(P)f(Q) = f(PQ)$, т.е. f является мультипликативным отображением на таких идемпотентах.

Следствие 4. Отображение $P_2 \mapsto A(P_1, P_2)$, $f(P_2) = A(P_1, P_2)$, сохраняет дополнения $^\perp$. Если \mathcal{A} – унитарная C^* -алгебра, то f сохраняет следы.

Литература

1. Pearcy C., Topping D.M. Sums of small numbers of idempotents // Mich. Math. J., 14:4 (1967), 453-465.
2. Бикчентаев А.М. О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов // Докл. РАН, 393:4 (2003), 444-447.
3. Бикчентаев А.М. О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов // Сиб. мат. журн., 46:1(2005), 32-45.
4. Бикчентаев А.М. О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^* -алгебра // Матем. сб., 199:4(2008), 3-20.

ONE METHOD FOR CONSTRUCTING IDEMPOTENTS IN UNITAL ALGEBRA

Khadour Mahmoud

A method for constructing idempotents in a unital algebra is proposed using n arbitrary idempotents from this algebra. The properties of the obtained idempotents are investigated.

Keywords: unital algebra, idempotent, C^* -algebra, trace.

УДК 531

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Д.Э. Хамзин¹

¹ dekhamzin@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе представлено использование генетического алгоритма для создания пор и нахождения оптимального варианта для случая трехточечного изгиба. Решение задачи сводится к случайному созданию балки, нахождения значения целевой функции и скрещиванию особей между собой. В результате работы программы найдены оптимальные варианты распределения пор.

Ключевые слова: генетический алгоритм, компьютерная томография, трехточечный изгиб, оптимизация структуры гравитация, дополнительные измерения, черная дыра

Оптимизация конструкций является актуальной проблемой механики твердых деформируемых тел [1]. Целью оптимизации является сохранение жесткости и

прочностных характеристик при минимизации веса. В контексте данной работы рассматривается применение генетического алгоритма для оптимизации поперечного сечения балки при трехточечном изгибе на основе данных цифрового двойника. Генетические алгоритмы предназначены для решения задач оптимизации и моделирования путем последовательного подбора, комбинирования и варьирования нужных параметров, используя механизмы, напоминающие биологическую эволюцию.

Расчетная область определяется геометрией объекта, накладываются кинематические и статические условия.

Кинематические граничные условия:

$$S_{\text{kin}} \subset \partial D, \quad S_{\text{kin}} = \{x, y, z \mid x \in \partial D, y = 0, y = 140\}, \quad \vec{u}(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in S_{\text{kin}},$$

Статические граничные условия:

$$S_{\text{stat}} \subset \partial D, \quad S_{\text{stat}} = \{x, y, z \mid x \in \partial D, z = 24, y = [60, 80]\}, \quad \vec{n} \cdot \vec{\sigma}(\vec{x}) = \vec{p}, \quad \forall \vec{x} \in S_{\text{stat}}, \quad \vec{p} = (0, 0, -144F)$$

В расчетах использовался однородный изотропный материал. Балка жестко закреплена с обоих концов. К верхней поверхности посередине приложена распределенная нагрузка. Рассматривалась задача минимизации целевых функций:

1) Сумма эквивалентных напряжений по Мизесу:

$$J(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i,$$

2) Сумма перемещений узлов вдоль направления прикладывания нагрузки:

$$J(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \Delta_i.$$

В генетическом алгоритме существует понятие особи. Особью будем называть балку, представленную в виде вектор-столбца. Для оценки их между собой используют термин — приспособленность особи:

$$F_{it}(\vec{x}) = \frac{1}{1 + J(\vec{x})}$$

Будем говорить, что особь x' является лучше особи x'' , если $F_{it}(x') > F_{it}(x'')$. Чем ближе значение приспособленности особи к 1, тем она лучше.

Порождение случайной особи $c \in D$. Случайная особь генерируется по следующей формуле

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Здесь c_i — это это случайные распределенные единицы или нули.

Пусть мы имеем две особи $c, h \in D$. Вычислим вероятность скрещивания генов.

$$p = \frac{F_{it}(c)}{F_{it}(c) + F_{it}(h)}$$

В результате скрещивания получим:

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_n).$$

где

$$g_i = \begin{cases} c_i, & \xi < p \\ h_i, & \xi > p \end{cases}$$

где $\xi \sim R(0, 1)$ – равномерно распределенная случайная величина.

Рассмотрим первую итерацию генетического алгоритма:

1) Создаём массив из $M - 1$ случайных особей, и одной особи, все значения которой равняются единице, это будет сплошная балка.

2) Для каждой особи подсчитаем её функцию приспособленности.

3) После подсчёта отсортируем массив хромосом, так, чтобы

$$F_{it}(x^1) \geq F_{it}(x^2) \geq F_{it}(x^3) \geq \dots \geq F_{it}(x^m)$$

4) Особей с номерами (M_c – число худших удаленных особей)

$$2 \leq m \leq (M - M_c)$$

Заменяем на результаты скрещивания особи x^m и случайной особью в массиве.

5) Особей с номерами

$$M - M_c < m < M$$

Заменяем на новые случайные особи.

Так как мы не изменяем первую особь, то мы гарантируем, что наше решение не будет ухудшаться.

Необходимые параметры целевой функции рассчитывались на основе данных компьютерной томографии с использованием метода конечных элементов [2, 3]. Использовался трехмерный 8-узловой изопараметрический конечный элемент с трилинейной аппроксимацией.

Построение конечного элемента:

$$N_n(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi \cdot \xi_n)(1 + \eta \cdot \eta_n)(1 + \zeta \cdot \zeta_n)$$

$$[K^E] = \int_{-1}^1 [B(\{\theta\})]^T [D] [B(\{\theta\})] |J(\{\theta\})| \omega(r(\{\theta\})) d\theta$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{V_E} \int_{V_E} \{N\}^T \{\sigma_0^E\} dV, \quad \text{где } \bar{Y} \in (\sigma, \varepsilon)$$

Расширенное описание метода и оценка сходимости численного алгоритма в зависимости от плотности данных компьютерной томографии приведены в работах [1–5].

Литература

1. Bolshakov P., Kuchumov A., Kharin N., Akifyev K., Statsenko E., Silberschmidt V. Method of computational design for additive manufacturing of hip endoprosthesis based on basic-cell concept // Int. J. Numer. Method Biomed. Eng., 2024. Vol. 40.
2. Marcián P., Florian Z., Horáčková L., Kaiser J., Borak L. Microstructural finite-element analysis of influence of bone density and histomorphometric parameters on mechanical behavior of mandibular cancellous bone structure // Solid State Phenom., 2016. Vol. 258. – Pp. 362-365.
3. Gerasimov O.V., Rakhmatulin R.R., Baltina T.V., Sachenkov O.A. Determination of the bone tissue mechanical properties by a numerical digital method using CT data // Russian Journal of Biomechanics, 2023. Vol. 27, No. 3. – Pp. 41-52.
4. Gerasimov O., Kharin N., Statsenko E. et al. Patient-specific bone organ modeling using CT based FEM. In: Mesh methods for boundary-value problems and applications. Springer, 2022, Pp. 125–139.
5. Gerasimov O., Sharafutdinova K., Rakhmatullin R. et al. Application of a digital prototype for CT-based bone strength analysis.

COMPUTED TOMOGRAPHY-BASED STRUCTURAL OPTIMIZATION

D.E. Khamzin

This work presents the use of a genetic algorithm to create pores and find the optimal solution for a three-point bending case. The solution approach involves the random generation of a beam, calculating the objective function value, and performing crossover between individuals. As a result, the program identifies optimal pore distribution configurations.

Keywords: genetic algorithm, computed tomography, three-point bending, structure optimization

УДК 004.852

ОЦЕНКА КРЕДИТОСПОСОБНОСТИ ЗАЕМЩИКА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО ЛЕСА

Д.Ю. Хубиева¹

¹ dkhubieva@stud.kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе рассматривается применение метода случайного леса для оценки кредитоспособности заемщика. Случайный лес, как ансамблевый метод машинного обучения, позволяет эффективно обрабатывать большие объемы данных и выявлять сложные зависимости между признаками, что особенно актуально в финансовом секторе.

Ключевые слова: Машинное обучение, дефолт заемщика, метод случайного леса, анализ данных, матрица ошибок

Финансовые технологии с каждым днем становятся все более актуальными, тем самым привлекая применение искусственного интеллекта. Методы машинного обучения и анализа данных находят риски и закономерности между данными, повышают точность оценки кредитоспособности, вследствие чего повышается качество кредитов, снижается количество и объем просрочек, что в конечном счете

помогает предотвратить дефолты.

Целью данной работы является создание модели машинного обучения, с помощью которой будет определяться статус кредита: одобрен или отказан. Так как это задача классификации, для ее решения был использован метод случайных деревьев.

В набор независимых переменных входили: годовой доход, месячная зарплата, количество банковских счетов, количество кредитных карт, количество кредитов, процентная ставка по кредитной карте человека, количество просроченных кредитов. Статус кредита - зависимая переменная.

Метод случайного леса (Random Forest) — это мощный инструмент машинного обучения, который используется для задач классификации и регрессии. Он основан на объединении множества деревьев решений для улучшения точности и устойчивости модели. Метод случайного леса строится на основе ансамбля деревьев решений. Основная идея заключается в том, чтобы создать множество деревьев решений и объединить их результаты для получения более точного прогноза. Матрица ошибок - это один из самых полезных инструментов для оценки качества моделей машинного обучения в задачах классификации. Она позволяет наглядно увидеть, насколько хорошо модель предсказывает целевую переменную и какие ошибки допускает. Матрица ошибок - очень полезный инструмент для оценки качества моделей классификации. Она дает четкое представление о том, какие ошибки допускает модель и позволяет рассчитать важные метрики. Визуализация матрицы ошибок помогает лучше понять ее структуру.

В заключение, в результате обучения модели точность оценки кредитоспособности заемщика была достигнута 81% и с помощью матрицы ошибок итоги были представлены в графическом формате.

Литература

1. Breiman L. *Random Forests. Machine Learning.* -2001. -5-32.
2. Han J., Kamber M., & Pei J. *Data Mining: Concepts and Techniques. Morgan Kaufmann.* -2011.
3. Chen J., & Wei Y. *Credit risk assessment using random forest. International Journal of Information Technology & Decision Making* -2016.

EVALUATION OF BORROWER'S CREDITWORTHINESS USING RANDOM FOREST METHOD

D.Y. Khubieva

This paper considers the application of the random forest method to assess the creditworthiness of a borrower. Random forest, as an ensemble method of machine learning, allows to efficiently process large amounts of data and identify complex dependencies between attributes, which is especially relevant in the financial sector.

Keywords: Machine learning, borrower default, random forest method, data analysis, error matrix

УДК 531/534

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВЛИЯНИЯ МИГРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ НА УРОВЕНЬ ЗАНЯТОСТИ

Е.А. Частоедова¹

¹ *eachastoeдова@stud.kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе представлен анализ оценки влияния миграционных потоков на уровень занятости по различным отраслям, а также анализ оценки влияния миграционных потоков на уровень занятости в разрезе округов. Для оценки влияния миграционных потоков на уровень занятости используется модель панельной векторной авторегрессии (PVAR). Такой метод позволяет рационально определить структурные изменения и выявить влияние различных факторов на уровень занятости.

Ключевые слова: Модель панельной векторной авторегрессии (PVAR), миграционные потоки.

Целью данной работы является анализ факторов, которые определяют уровень занятости в разных округах, в том числе показатель миграционного потока, как один из факторов. Данный анализ осуществляется при помощи эконометрических методов.

Миграция населения — это любое территориальное перемещение населения, связанное с пересечением как внешних, так и внутренних границ административно-территориальных образований с целью перемены постоянного места жительства или временного пребывания на территории для осуществления учёбы или трудовой деятельности независимо от того, под преобладающим воздействием каких факторов оно происходит — притягивающих или выталкивающих.[1]

Панельная векторная авторегрессия (PVAR) — это методология, которая позволяет контролировать межрегиональную ненаблюдаемую неоднородность, учитывать фиксированные эффекты, динамические взаимосвязи между различными переменными и решать проблему эндогенности. Также существуют преимущества методологии PVAR: 1) Панельные модели данных позволяют контролировать ненаблюдаемые временные инвариантные характеристики регионов;

2) Фиксированные во времени эффекты могут быть добавлены для учёта экзогенных шоков;

3) Включение лагов переменных помогает анализировать динамическую связь между различными переменными;

4) функции импульсной характеристики, основанные на PVAR, могут учитывать любые запаздывающие эффекты на рассматриваемые переменные.[2]

В данной работе будут рассматриваться следующие факторы, влияющие на уровень занятости населения:

1) Доля работающего населения;

2) Темп роста ВРП на душу населения;

3) Доля иностранных граждан, въехавших/выехавших из страны.

Таким образом, можно построить модель панельной векторной авторегрессии, для p лагов, m эндогенных переменных, k predetermined переменных и n

экзогенных переменных, с помощью формулы:

$$y_{i,t} = \mu_i + \sum_{l=1}^p A_l y_{i,t-l} + B x_{i,t} + C s_{i,t} + e_{i,t},$$

Пусть где $y_{i,t} \in \mathbb{R}^m$ – вектор эндогенных переменных для i ого элемента в момент времени t ; $y_{i,t-l} \in \mathbb{R}^m$ – вектор эндогенных переменных с запаздыванием; $x_{i,t} \in \mathbb{R}^k$ – вектор predetermined переменных, которые потенциально коррелируют с прошлыми ошибками; $s_{i,t} \in \mathbb{R}^n$ – вектор экзогенных переменных.

Литература

1. Воробьёва О. Д. Миграционные процессы населения: вопросы теории и государственной миграционной политики // Проблемы правового регулирования миграционных процессов на территории Российской Федерации / Аналитический сборник Совета Федерации ФС России – 2003. – № 9 (202). – С. 35.
2. Захорова Е.А., Абилова Е.В., Безносков Г.А., Давыдов Д.В., Трегубова А.В. Методология исследования влияния институтов на экономический рост регионов -2021. -Том 6 – № 4 (7). – С. 2.

ECONOMETRIC METHODS FOR ANALYZING MIGRATION FLOWS ON THE LEVEL OF EMPLOYMENT

E.A. Chastoedova

This paper presents an analysis of the assessment of the impact of migration flows on the level of employment in various industries, as well as an analysis of the assessment of the impact of migration flows on the level of employment in the context of districts. The panel vector autoregression (PVAR) model is used to assess the impact of migration flows on employment levels. This method makes it possible to rationally identify structural changes and identify the impact of various factors on the level of employment.

Keywords: Panel vector autoregression (PVAR) model, migration flows.

УДК 517.958

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИСТИННЫХ И ФИКТИВНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЮЛЛЕРА

Е.Е. Шабардин¹

¹ *eg.shabardin@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

Работа посвящена вычислению истинных и фиктивных собственных значений граничных интегральных уравнений Мюллера в задаче о собственных волнах слабонаправляющих волноводов. Доказана теорема о том, что для волновода круглого поперечного сечения множество всех собственных значений системы граничных интегральных уравнений Мюллера является объединением подмножества истинных собственных значений исходной задачи и подмножества фиктивных собственных значений так называемой задачи, «вывернутой наизнанку». На примере показано, что решения обычной задачи на собственные значения существуют лишь при вещественных значениях продольного волнового числа, а решения вывернутой наизнанку задачи на собственные значения существуют только при мнимых значениях этого параметра. Это объясняет, что множество всех собственных значений обычной задачи не пересекается с

множеством всех собственных значений задачи, вывернутой наизнанку.

Ключевые слова: задача на собственные значения, система граничных интегральных уравнений Мюллера, слабонаправляющий волновод

Цель данной работы заключается в вычислении истинных и фиктивных собственных значений граничных интегральных уравнений Мюллера. В работе [1] доказано, что для микрорезонаторных лазеров множество собственных значений системы граничных интегральных уравнений Мюллера является объединением подмножества истинных собственных значений исходной задачи и подмножества фиктивных собственных значений так называемой «вывернутой наизнанку» задачи. В данной работе доказывается аналогичная теорема, но для задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов. На примере волновода круглого поперечного сечения показываем, что решения обычной задачи на собственные значения существуют лишь при вещественных значениях продольного волнового числа, а решения вывернутой наизнанку задачи на собственные значения существуют только при мнимых значениях этого параметра. Это объясняет, что множество всех собственных значений обычной задачи не пересекается с множеством всех собственных значений задачи, вывернутой наизнанку. Доказательству этого результата для волноводов произвольного сечения будет посвящена специальная работа.

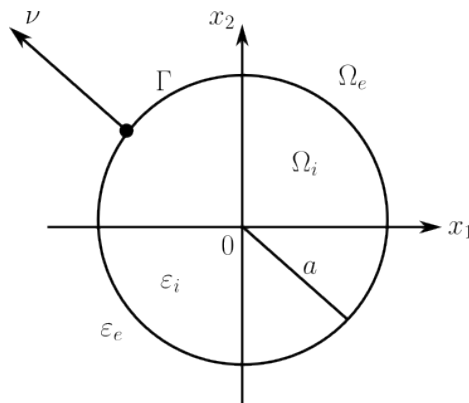


Рис. 1. Геометрия круглого слабонаправляющего диэлектрического волновода для обычной задачи.

Сформулируем задачу [2] о собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода круглого поперечного сечения. Геометрия задачи изображена на рисунке 1. Обозначим через Ω_i открытый круг на плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченный окружностью Γ радиуса a с центром в начале координат. $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$ – неограниченная область оболочки волновода. Пусть ε_i и ε_e – диэлектрические проницаемости в Ω_i и Ω_e соответственно, ν – единичный вектор внешней нормали.

Обозначим через U пространство всех непрерывных и непрерывно дифференцируемых в областях $\overline{\Omega}_i$ и $\overline{\Omega}_e$, дважды непрерывно дифференцируемых в областях Ω_i и Ω_e комплекснозначных функций. Ненулевую функцию $u \in U$ назовем собственной функцией, отвечающей паре комплексных собственных значений k, β , если выполняются следующие соотношения:

уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \chi_i^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (\text{sha1})$$

$$\Delta u + \chi_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (2)$$

условия сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

условие излучения Рейхардта

$$u(r, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_e r) e^{il\phi}, \quad r \geq a, \quad (4)$$

где $\chi_j = \sqrt{k^2 \varepsilon_j - \beta^2}$ – поперечное волновое число слоя Ω_j , $j = i, e$; k – продольное волновое число; β – постоянная распространения; $u^- (u^+)$ – предельное значение функции u изнутри (снаружи) границы Γ .

В условии излучения Рейхардта r и ϕ – полярные координаты точки x ; $H_l^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля первого рода порядка l . Для любого решения u уравнения (2) в области Ω_e , ряд (4) сходится равномерно и абсолютно в любой замкнутой области $\alpha \leq r \leq \beta$. Здесь α и β – произвольные числа, такие, что $a < \alpha < \beta < \infty$, и этот ряд бесконечно почленно дифференцируем.

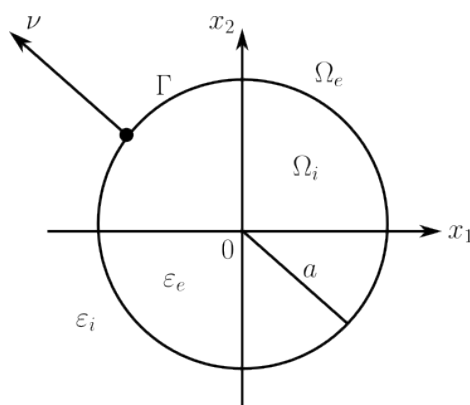


Рис. 2. Геометрия круглого слабонаправляющего диэлектрического волновода для вывернутой наизнанку задачи.

Сформулируем задачу, вывернутую наизнанку. Геометрия задачи изображена на рисунке 2. Как и в задаче (1) – (4), мы рассматриваем те же две области Ω_i и Ω_e , но во внутренней области диэлектрическая проницаемость равна ε_e , а во внешней области – ε_i . Граница Γ та же самая, а ν – тот же самый вектор внешней единичной нормали.

Назовем ненулевую функцию $v \in U$ собственной функцией задачи, вывернутой наизнанку, отвечающей паре комплексных собственных значений k и β , если выполняются следующие соотношения:

уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + \chi_e^2 v = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (5)$$

$$\Delta v + \chi_i^2 v = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (6)$$

условия сопряжения

$$v^+ = v^-, \quad \frac{\partial v^+}{\partial \nu} = \frac{\partial v^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (7)$$

условие излучения Рейхардта

$$v(r, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l H_l^{(1)}(\chi_i r) e^{il\phi}, \quad r \geq a. \quad (8)$$

Определим векторное пространство $\mathbb{C}_N \subset \mathbb{C}(\Gamma)$ натянутое на $e^{im\phi}$, $m = \overline{-N, N}$. Через U_N обозначим множество всех элементов пространства U , предельные значения которых на границе Γ принадлежат \mathbb{C}_N , $N \geq 1$.

Теорема. Пусть $N \geq 1$ – заданное целое число. Тогда множество всех собственных значений системы граничных интегральных уравнений Мюллера, отвечающих собственным функциям из пространства \mathbb{C}_N , состоит из двух подмножеств: 1) истинные собственные значения исходной задачи (1) – (4), отвечающие собственным функциям $u \in U_N$; 2) фиктивные собственные значения задачи, вывернутой наизнанку, (5) – (8), отвечающие собственным функциям $v \in U_N$.

Вычислим постоянные распространения β для обычной задачи (1) – (4) и задачи, вывернутой наизнанку (5) – (8). Мы предполагаем, что радиус волновода a равен 1, а диэлектрические проницаемости ε_i и ε_e равны 2.3839, 2.2124, соответственно. Построим графики зависимости β от параметра k .

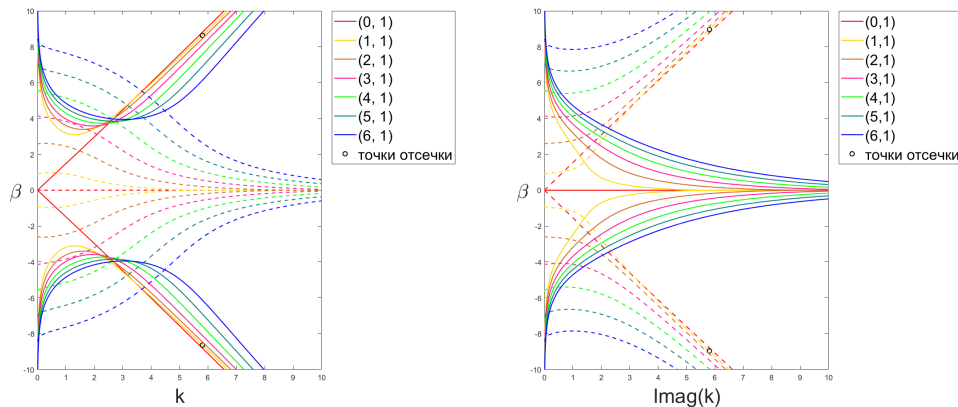


Рис. 3. Графики $\beta = \beta(k)$ для обычной задачи (левая панель) и графики $\beta = \beta(k)$ для задачи, вывернутой наизнанку (правая панель). Непрерывными линиями показана вещественная часть числа β , а пунктирными – мнимая.

Как мы можем видеть (см. левую панель рисунка 3), нетривиальные решения характеристического уравнения обычной задачи существуют только при вещественных значениях параметра k . Рассмотрев правую панель рисунка 3, можно сделать вывод, что нетривиальные решения характеристического уравнения задачи, вывернутой наизнанку, существуют только при чисто мнимых значениях параметра k .

Следовательно, решения задачи (1) – (4) никогда не пересекутся с решениями задачи (5) – (8), так как они существуют при разных значениях параметра k , а это значит, что, решая задачу о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов методом граничных интегральных уравнений Мюллера для вещественных значений параметра k , мы будем получать только истинные собственные значения.

Литература

1. Ketov I. V., Karchevskii E. M. *Characteristic Equations for True and Fictitious Eigenvalues of Muller Boundary Integral Equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44. – № 9. – P. 4016–4027.
2. Снайдер А., Лав Д. *Теория оптических волноводов*. – М.: Радио и связь, 1987. – 656 с.

CALCULATION OF TRUE AND FICTITIOUS EIGENVALUES OF MULLER BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS

E.E. Shabardin

The paper is devoted to the calculation of true and fictitious eigenvalues of the Muller boundary integral equations. We prove that for a waveguide of circular cross-section, the set of all eigenvalues of the system of Muller boundary integral equations is the union of a subset of true eigenvalues of the original problem and a subset of fictitious eigenvalues of the so-called "turned inside-out" problem. It is shown by an example that solutions of the original eigenvalue problem exist only for real values of the longitudinal wave number, while solutions of the turned inside-out eigenvalue problem exist only for imaginary values of this parameter. This explains that the set of all eigenvalues of the usual problem does not intersect the set of all eigenvalues of the turned inside-out problem.

Keywords: eigenvalue problem, Muller boundary integral equation system, weakly guiding waveguide

УДК 517.95

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СУПЕРСИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Ф.М. Шамсудинов¹, Р.С. Валиев²

¹ faizullo100@yahoo.com; Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава
² ruziboivaliev@gmail.com; Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава

В работе для одного класса переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними суперсингулярными линиями получено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого и второго уравнения системы связаны между собой определённым образом. Изучены свойства полученных решений, а также исследована задача с начальными данными A_1 .

Ключевые слова: переопределённая система, многообразия решений, прямоугольник, внутренние суперсингулярные линии, свойства решений, задача с начальными данными.

В дальнейшем, через D обозначим прямоугольник

$$D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < a\}, \Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\},$$

$$\Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma_1^0 = \{y = x, 0 \leq x \leq a\}, \Gamma_2^0 = \{y = -x, -a \leq x \leq 0\}.$$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1(x, y)(x^2 - y^2)^{-m}u_x + b_1(x, y)(x^2 - y^2)^{-n}u_y + \\ + c_1(x, y)(x^2 - y^2)^{-(m+n)}u = f_1(x, y)(x^2 - y^2)^{-(m+n)}, \\ u_x + a_2(x, y)(x^2 - y^2)^{-p}u = f_2(x, y)(x^2 - y^2)^{-p}, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_i(x, y), b_1(x, y), c_1(x, y), f_i(x, y), i = 1, 2$ – заданные функции в области D $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, u(x, y)$ – искомая функция.

Проблеме исследованию дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]– [4].

Используя методику разработанного в [1] для системы уравнений (1), получено представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

Пусть второе уравнение системы (1) является исходным, тогда получено следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$, коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_1(x, y),$$

$$c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$3) a_2(y, y) > 0, B_1(y, y) < 0;$$

$$4) a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|B_1(0, y) - B_1(y, y)| \leq H_1 y^{\beta_1}, H_1 = \text{const}, \beta_1 > 2(m + n + p) - 1;$$

$$5) \text{ а) } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) \text{ в } D,$$

$$\text{ б) } (x^2 - y^2)^p f_1(x, y) = (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \text{ в } D,$$

$$6) f_2(x, y) = o((x - y)^{\mu_1}), \mu_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\mu_2}), \mu_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$F_1(y) = o(y^{\vartheta_1}), \vartheta_1 > 2(m + n + p) - 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ представимо в виде

$$u(x, y) = \exp \left[-w_{a_2}^p(x, y) + a_2(y, y) J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right] \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{(t^2 - y^2)^p} \exp \left[w_{a_2}^p(t, y) - a_2(y, y) J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right] dt \right) \equiv \\ \equiv T_1(\psi_1(y), f_2(t, y)) \quad (2)$$

$$\psi_2(1) = \exp \left[w_{B_1}^{2(m+n+p)}(0, y) - B_1(y, y) \Omega_{2(m+n+p)-1}(y) \right] \times \\ \times \left(c_1 - \int_0^y \frac{F_1(s)}{s^{2(m+n+p)}} \exp \left[-w_{B_1}^{2(m+n+p)}(0, s) + B_1(s, s) \Omega_{2(m+n+p)-1}(s) \right] ds \right) \equiv \\ \equiv N_1(c_1, F_1(y)), \quad (3)$$

где

$$w_{a_2}^p(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{(t^2 - y^2)^p} dt, \quad w_{B_1}^{2(m+n+p)}(0, y) = \int_0^y \frac{B_1(0, s) - B_1(s, s)}{s^{2(m+n+p)}} ds,$$

$$J_{p-1}^{(3)}(x, y) = \frac{x}{2(p-1)y^2(x^2 - y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{p-1}} ds,$$

$$\Omega_{2(m+n+p)-1}(y) = \frac{1}{(2(m+n+p)-1)y^{2(m+n+p)-1}},$$

$F_1(y)$ – выражается при помощи коэффициентов системы (1),
 c_1 – произвольная постоянная.

Полученное решение обладает свойствами:

1°. Если $x \rightarrow 0$, то $u(0, y) = \psi_2(y)$.

2°. Если $x \rightarrow 0$, и $y \rightarrow 0$, то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \} = O \left(\exp[-B_1(y, y) \Omega_{2(m+n+p)-1}(y)] \right).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \{ \exp[B_1(y, y) \Omega_{2(m+n+p)-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \} = c_1.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$ и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp[a_2(y, y) J_{p-1}^{(3)}(x, y)] \right).$$

Задача A_1 . Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ по начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \{ \exp[B_1(y, y) \Omega_{2(m+n+p)-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \} = q_1,$$

где q_1 – заданная известная постоянная.

Решение задачи A_1 . Для решения этой задачи используем интегральное представление (2), (3), начальное условие задачи A_1 и получим, что $c_1 = q_1$.

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть в системе уравнений (1) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$ коэффициенты и правые части удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда единственное решение задачи A_1 дается формулами (2), (3), где $c_1 = q_1$.

Литература

1. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе .изд. ТГУ, 1992. – 236с.
2. Тасмамбетов Ж. Н. Построение нормальных и нормально - регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // - Актобе: 2015. - 463 с.
3. Хасанов А.Х. Краевые задачи для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца //Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии: инновации в науке и образовании"(21-22 февраля 2015г.) Актобе, университет им. К. Жубанова, 2015. - С. 242-247.
4. Шамсуддинов Ф. М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.– 2014.–Т.16, N 1. – С. 40-46.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR ONE SYSTEM OF SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INTERNAL SUPERSINGULAR LINES

F.M. Shamsudinov, R.S. Valiev

In this paper, for one class of overdetermined system of second-order differential equations with two internal supersingular lines, the representation of the manifold of solutions in explicit form is obtained when the coefficients of the first and second equations of the system are related to each other in a certain way. The properties of the obtained solutions are studied and the problem with initial data A_1 is investigated.

Keywords: overdetermined system, solution manifolds, rectangle, interior supersingular lines, properties of solutions, initial data problem.

**ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО.**

Т.68

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
”Лобачевские чтения 2024”**

**Материалы школы-конференции
(Казань, 27 ноября – 2 декабря 2024 г.)**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - *А.А. Агафонов*
Техническая редакция, набор и верстка: *А.В. Марьин, А.А. Попов,*
Д.Р. Хакимов