КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шурыгин В.В.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ I.

Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть I.
Аналитическая геометрия плоскости.

Казань — 2006

Печатается по решению учебно-методической комиссии механико-математического факультета КГУ.

Шурыгин В.В. Аналитическая геометрия I. Казань, 2006. 98 с.

Учебное пособие предназначено для студентов I курса механико-математического факультета КГУ.

1 Векторы на плоскости и в пространстве

1.1 Свободные векторы

Векторная алгебра, лежащая в основе многих методов аналитической геометрии, представляет собой эффективный инструмент для решения различных геометрических задач. Но помимо применения при решении задач она может быть использована для построения геометрии на относительно простой аксиоматической базе, основанной на теории абстрактных векторных пространств.

В соответствии с этим в настоящем курсе с самого начала развивается теоретико-множественный подход к определению геометрических объектов, а само геометрическое пространство рассматривается как множество, наделенное некоторой структурой, которая и определяет его геометрические свойства.

Вектором геометрического пространства (геометрической плоскости) называется упорядоченная пара точек (A, B) этого пространства или направленный отрезок. Точка A называется началом вектора, а точка B концом. Вектор с началом в точке A и концом в точке B принято обозначать следующим образом: $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AA}$, у которого совпадают начало и конец, называется нулевым вектором. В тех случаях, когда начало и конец вектора не заданы в явном виде (или не существенны), векторы обозначают полужирными буквами: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$, или буквами со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}, \ldots$.

Длину отрезка AB называют длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$. Обозначается модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ следующим образом: $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, расположенные на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Коллинеарность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается следующим образом: $\mathbf{a}||\mathbf{b}$. Нулевой вектор считается коллинеарным всякому вектору: $\overrightarrow{AA}||\overrightarrow{CD}$.

Коллинеарные ненулевые векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ могут быть направлены в одну и ту же сторону или в противоположные стороны. Это обозначается, соответственно, следующим образом: $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными*, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, если 1) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ и 2) $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$

при $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq 0$. При этом все нулевые векторы равны между собой.

Имеет место следующее очевидное, но очень важное

Предложение. *Пусть A — произвольная точка, а $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Тогда существует единственная точка B такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$.*

Отношение равенства разбивает все векторы на классы равных между собой векторов. Каждый такой класс называется *свободным вектором.* Свободный вектор можно представлять как вектор, у которого заданы длина и направление, но не зафиксирована начальная точка (точка приложения). В дальнейшем будет предполаться, что все рассматриваемые векторы являются свободными, а в том случае, когда нужно зафиксировать начальную точку A некоторого вектора $\mathbf{a}$, будем говорить, что вектор $\mathbf{a}$ отложен от точки A. Согласно вышеприведенному утверждению всякий вектор (свободный!) можно единственным способом отложить от любой точки. Записывать это будем используя знак равенства: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ при этом будем называть представителем свободного вектора $\mathbf{a}$. Свободный вектор $\mathbf{a}$ однозначно определяется любым своим представителем $\overrightarrow{AB}$ как класс векторов, равных вектору $\overrightarrow{AB}$. Множества свободных векторов геометрического пространства и геометрической плоскости будем обозначать, соответственно, символами $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_2$.

1.2 Некоторые понятия теории множеств.

Понятие множества является одним из исходных понятий математики. Множество представляет собой совокупность (набор) объектов той или иной природы, которые называются элементами этого множества. Например, множество образуют все точки плоскости или вещественные числа, удовлетворяющие неравенству $-1 < x < 1$.

Для некоторых часто встречающихся множеств принято использовать стандартные обозначения. Так, $\mathbf{N}$ означает множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbf{Z}$ означает множество всех целых чисел $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, $\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел, $\mathbf{C}$ — множество всех комплексных чисел, а $C[a; b]$ — множество непрерывных функций, определенных на отрезке $[a; b]$.

Тот факт, что x является элементом множества M (говорят также, что x принадлежит M) обозначается следующим образом: $x \in M$ или $M \ni x$.

Множество называется *конечным*, если число элементов в этом множестве конечно. Множество называется *бесконечным*, если число элементов в этом множестве бесконечно. Формально определяется множество, у которого нет ни одного элемента. Такое множество называется *пустым множеством*. Для обозначения пустого множества используется символ $\varnothing$.

Если каждый элемент множества M является одновременно и элементом множества N, то множество M называется *подмножеством* множества N. Это обозначается следующим образом: $M \subset N$ или $N \supset M$. Два множества M и N считаются одинаковыми или совпадающими, если они состоят из одних и тех же элементов. Это обозначается следующим образом: $M = N$. Очевидно, $M = N$ тогда и только тогда, когда $M \subset N$ и $N \subset M$.

Из имеющихся множеств можно конструировать новые множества.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству M и множеству N (общая часть этих двух множеств), называется *пересечением* M и N. Пересечение множеств M и N обозначается следующим образом: $M \cap N$. Если множества M и N не имеют общих элементов, их пересечение является пустым множеством: $M \cap N = \varnothing$.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих либо множеству M либо множеству N (хотя бы одному из этих двух множеств), называется *объединением* M и N. Объединение множеств M и N обозначается следующим образом: $M \cup N$.

Множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары (x, y), в которых первый элемент x принадлежит множеству M, а второй элемент y принадлежит множеству N, называется *произведением* M и N. Произведение множеств M и N обозначается следующим образом: $M \times N$. В этом определении пары (x, y) предполагаются упорядоченными. Это означает, что $(x, y) \neq (y, x)$, если $x \neq y$. Кратко определение произведения множеств M и N записывается следующим образом:

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M,\ y \in N\}. \tag{1}$$

Аналогично произведению (1) двух множеств определяется произведение любого конечного числа множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$, $n \in \mathbf{N}$:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in M_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}. \qquad (2)$$

В частности, если все множества M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в произведении (2) совпадают, то есть, $M_i = M$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то их произведение обозначается как степень M^n. Например, $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$ — числовая плоскость.

Пусть M и N — некоторые множества. *Отображением из M в N* называется соответствие f, относящее каждому элементу $x \in M$ некоторый элемент $y \in N$, называемый *образом* элемента x при отображении f. То, что y является образом элемента x при отображении f, обозначается следующим образом: $y = f(x)$ или $x \mapsto y$. Для самого отображения f при этом используются следующие обозначения: $f : M \to N$ или $f : M \ni x \mapsto y \in N$.

Отображение $f : M \to N$ называется *сюръективным* или *отображением M на N*, если для каждого $y \in N$ найдется хотя бы один *прообраз*, то есть такой $y \in N$, что $y = f(x)$. Например, отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto 2^x \in \mathbf{R}$ не являются сюръективными, поскольку у отрицательных чисел нет прообразов, а отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbf{R}$ являются сюръективными, поскольку уравнения $x^3 = a$ и $x^3 - x = a$ имеют решения при любом a.

Отображение $f : M \to N$ называется *инъективным* или *взаимнооднозначным отображением M в N*, если из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Вместо слова «следует» будем использовать также символ $\Rightarrow$. Условие инъективности, таким образом, можно записать в виде $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$. Из рассмотренных выше отображений, $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbf{R}$ не являются инъективными, поскольку в первом случае $f(-a) = f(a)$ для любого $a \in \mathbf{R}$, а во втором случае $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto 2^x \in \mathbf{R}$ являются инъективными.

Отображение $f : M \to N$ называется *биективным* или *взаимнооднозначным отображением M на N*, если оно является и сюръективным и инъективным, то есть устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств M и N. В этом случае каждому элементу $y \in N$ соответствует один и только один элемент $x \in M$ такой, что $y = f(x)$. При этои отображение $f^{-1} : M \to N$, относящее каждому элементу $y \in N$ его единственный прообраз $x \in M$, называется *обратным отображением* к отображению $f : M \to N$. Из рассмотренных выше примеров, биективным является только отображение $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbf{R}$. Биективным является также отображение $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto 2^x \in \mathbf{R}^+$, где $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ — множество положительных вещественных чисел.

Полным прообразом элемента $a \in M$ при отображении $f : M \to N$ называется множество $f^{-1}(a) = \{x \in M : f(x) = a\} \subset M$. *Полным прообразом подмножества* $A \subset M$ при отображении $f : M \to N$ называется множество $f^{-1}(A) = \{x \in M : f(x) \in A\} \subset M$. Например, для отображения $f : \mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbf{R}$ полный прообраз $f^{-1}(0)$ состоит из трех элементов: $f^{-1}(0) = \{-1; 0; 1\}$, а $f^{-1}(\mathbf{R}^+) = (-1; 0) \cup (1; \infty)$ — объединение двух интервалов.

Отношением на множестве M называется подмножество $\mathcal{R} \subset M \times M$. Если $(x, y) \in \mathcal{R}$, то говорят, что элемент x находится в отношении $\mathcal{R}$ к y. Вместо $(x, y) \in \mathcal{R}$ пишут также $x\mathcal{R}y$. Отношение $\mathcal{R}$ на множестве M называется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\mathcal{R}$ — рефлексивно, то есть $x\mathcal{R}x$ для любого $x \in M$;

2) $\mathcal{R}$ — симметрично, то есть $x\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; y\mathcal{R}x$;

3) $\mathcal{R}$ — транзитивно, то есть $x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \;\Rightarrow\; x\mathcal{R}z$.

Отношение эквивалентности часто обозначается символом $\sim$. При этом то, что элементы x и y находятся в отношении эквивалентности $\sim$, обозначается следующим образом: $x \sim y$. Множество $[x] = \{y \in M : y \sim x\}$ всех элементов из M, эквивалентных элементу $x \in M$, называется *классом эквивалентности элемента* $x \in M$. Очевидно, два класса $[x]$ и $[z]$ либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если $w \in [x] \cap [z]$ и $y \in [z]$, то $x \sim w$, $w \sim z$ и $z \sim y$. Следовательно, $x \sim y$, и поэтому $y \in [x]$. Поскольку y — произвольный элемент из $[z]$, то $[z] \subset [x]$. Рассуждая аналогичным образом, приходим к тому, что $[x] \subset [z]$. Отсюда следует, что отношение эквивалентности $\sim$ на множестве M разбивает это множество на классы. Множество этих классов обозначается символом $M/\sim$ и называется *фактор-множеством* множества M по отношению эквивалентности $\sim$. Каждый элемент фактор-множества (класс эквивалентности) $[x] \in M/\sim$ однозначно определяется любым своим *представителем* $y \in [x]$. Поэтому для задания элемента $[x]$ достаточно указать некоторый представитель этого класса — элемент множества M.

Следующие два примера показывают, как фактор-множества естественным образом появляются в геометрии.

1. Если два вещественных числа α и β отличаются на число, кратное 2π, то значения тригонометрических функций на этих числах совпадают: $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = \cos\beta$. Поэтому естественно рассматривать аргументы тригонометрических функций с точностью до слагаемого $2\pi k$. Если ввести на множестве вещественных чисел $\mathbf{R}$ следующее отношение эквивалентности: $\alpha \sim \beta \;\; \Leftrightarrow \;\; \beta - \alpha = 2\pi k$, то фактор-множество $\mathbf{R}/\sim$ можно биективно отобразить на окружность единичного радиуса $\mathbf{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$, полагая $f : \mathbf{R}/\sim \ni [\alpha] \mapsto (\cos\alpha; \sin\alpha) \in \mathbf{S}^1$.

2. Обозначим множество точек геометрического пространства символом $\mathcal{E}_3$. Тогда множество геометрических векторов (упорядоченных пар точек) представляет собой произведение $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$. Отношение равенства геометрических векторов является отношением эквивалентности $\sim$ на $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$. Поэтому множество свободных векторов представляет собой фактор-множество $\mathbf{V}_3 = (\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3)/\sim$.

1.3 Линейные операции над векторами

Определение. *Пусть даны два свободных вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*. Отложим вектор* $\mathbf{a}$ *от некоторой точки* A*, то есть возьмем вектор* $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$*, а затем отложим вектор* $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ *от конца вектора* $\overrightarrow{AB}$*. Назовем суммой векторов* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *свободный вектор* $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$*.*

Легко проверить, что вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ не зависит от выбора начальной точки A.

Сформулированное правило сложения свободных векторов называется *правилом треугольника.* Оно выражается следующей формулой:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Отображение $+ : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$, относящее паре свободных векторов их сумму, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{b}$, называется *операцией сложения векторов.* Эта операция обладает следующими свойствами:

1° $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (коммутативность);

2° $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (ассоциативность);

3° существует вектор $\mathbf{0}$, называемый *нулевым вектором*, такой, что для любого вектора $\mathbf{a}$ выполняется $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;

4° для любого вектора $\mathbf{a}$ существует вектор $\mathbf{b}$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, этот вектор обозначается $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ и называется *противоположным к* $\mathbf{a}$ *вектором.*

Доказательства свойств 1° и 2° очевидны из следующих рисунков 1 и 2:

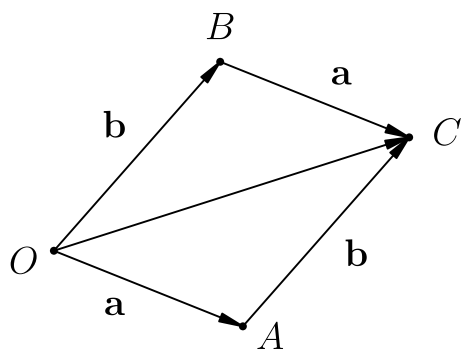

Рис. 1.

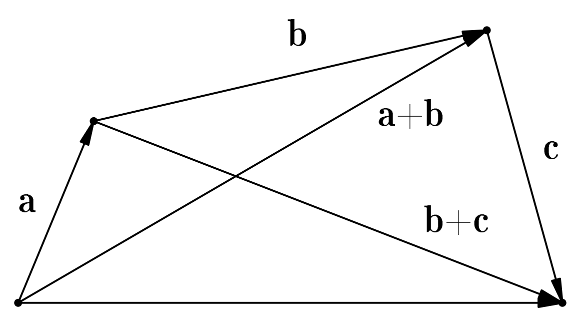

Рис. 2.

Из рисунка 1 легко усматривается *правило параллелограмма* для сложения векторов: сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$ — диагональ параллелограмма $OACB$ со сторонами $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

Вектор $\mathbf{0}$ — это класс нулевых векторов, а вектор $-\mathbf{a}$ имеет ту же длину, что и вектор $\mathbf{a}$, и противоположное направление, то есть, если $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, то $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$.

Из свойства 2° следует, что результат вычисления суммы n векторов $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$ не зависит от расстановки скобок (по определению мы можем складывать только два вектора!), и для нахождения суммы $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$ можно воспользоваться следующим *правилом замыкания ломаной*:

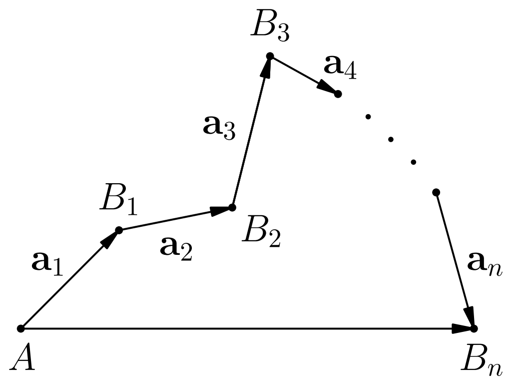

Рис. 3.

отложить вектор $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AB_1}$ от некоторой точки A, затем от конца вектора $\mathbf{a}_1$ отложить вектор $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{B_1B_2}$, затем от конца вектора $\mathbf{a}_2$ отложить вектор $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{B_2B_3}$ и так далее..., от конца вектора $\mathbf{a}_k$ отложить вектор $\mathbf{a}_{k+1} = \overrightarrow{B_kB_{k+1}}$ $(k = 3, 4, \ldots, n-1)$, тогда $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \overrightarrow{AB_n}$. См. рисунок 3.

Из свойства 4° следует, что для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ уравнение $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$, этот вектор называется *разностью* векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ и обозначается $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Из правила сложения векторов вытекает следующее правило для нахождения разности $\mathbf{b} - \mathbf{a}$: если отложить векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от одной точки: $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, то $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. См. рисунок 4.

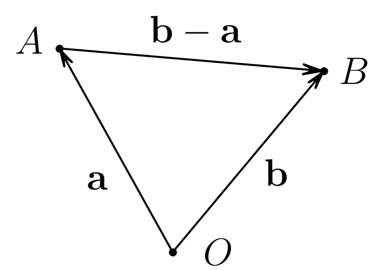

Рис. 4.

Определение. *Произведением вещественного числа* λ *и вектора* $\mathbf{a}$ *называется вектор* $\lambda\mathbf{a}$*, однозначно определяемый следующими условиями:* 1) $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$, 2) $\lambda\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$*, если* $\lambda > 0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$*, и* $\lambda\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$*, если* $\lambda < 0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Отображение $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$, относящее паре, состоящей из вещественного числа и вектора, их произведение, $\{\lambda, \mathbf{a}\} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$, называется *операцией умножения вектора на число.* Не трудно проверить, что эта операция обладает свойствами

5° $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

6° $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

7° $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$

8° $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$,

которые мы выделим особо, а также следующими свойствами:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}, \tag{3}$$

которые можно вывести формально из свойств 5°—8°.

Из определения операции умножения числа на вектор вытекает, кроме того, следующее свойство коллинеарных векторов:

Предложение. *Если* $\mathbf{b}||\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$*, то существует единственное число* $\lambda \in \mathbf{R}$ *такое, что* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Действительно, $\mathbf{b} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ при $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ при $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

Определение. *Если* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *и* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$*, то число* λ *называется отношением коллинеарных векторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{a}$*. Это отношение обозначается следующим образом:* $\lambda = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$.

Рекомендуемая литература: [7], лекции 1, 2; [1], глава I, §1.

2 Координаты векторов.

2.1 Векторное пространство.

Понятие вектора оказывается очень удобным для аксиоматизации геометрии. Рассмотренные выше свойства 1°—8° операций сложения векторов и умножения вектора на число приводят к следующему определению:

Определение. *Векторным пространством (над полем вещественных чисел) называется тройка* $(\mathbf{V}, +, \cdot)$*, состоящая из некоторого множества* $\mathbf{V}$ *и двух отображений:* $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$*, относящего паре элементов* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *из* $\mathbf{V}$ *некоторый третий элемент этого множества,* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{b}$*, называемый суммой* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*, и* $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$*, относящего паре, состоящей из вещественного числа* λ *и элемента* $\mathbf{a}$ *множества* $\mathbf{V}$*, некоторый элемент этого множества,* $\{\lambda, \mathbf{a}\} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$*, называемый произведением* λ *и* $\mathbf{a}$*, которые обладают вышеуказанными свойствами* 1°—8°.

Элементы множества $\mathbf{V}$ при этом называют *векторами* (в абстрактном смысле слова). Для простоты векторное пространство $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ обозначают одним символом $\mathbf{V}$.

Таким образом, свойства 1°—8° являются аксиомами в абстрактном векторном пространстве $\mathbf{V}$.

Помимо свойств 1°—8°, которыми операции сложения векторов и умножения вектора на число в абстрактном векторном пространстве $\mathbf{V}$ обладают по определению, эти операции обладают и другими свойствами операций сложения векторов и умножения вектора на число в геометрическом пространстве. Но эти (другие) свойства в абстрактном векторном пространстве вытекают из свойств 1°—8°, то есть являются формальными следствиями свойств 1°—8°.

Предложение. *В векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *имеется только один нулевой вектор* $\mathbf{0}$, *то есть если два вектора* $\mathbf{0}_1$ *и* $\mathbf{0}_2$ *удовлетворяют аксиоме* 3°, *то* $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

Доказательство. Так как каждый из векторов $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ удовлетворяет аксиоме 3°, а сложение векторов коммутативно (аксиома 1°), то

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2.$$

Предложение. *В векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *имеется только один вектор* $-\mathbf{a}$ *противоположный вектору* $\mathbf{a}$, *то есть если два вектора* $(-\mathbf{a})_1$ *и* $(-\mathbf{a})_2$ *удовлетворяют аксиоме* 4°, *то* $(-\mathbf{a})_1 = (-\mathbf{a})_2$.

Доказательство. Так как каждый из векторов $(-\mathbf{a})_1$ и $(-\mathbf{a})_2$ удовлетворяет аксиоме 4°, а сложение векторов ассоциативно (аксиома 2°), то

$$(-\mathbf{a})_1 = (-\mathbf{a})_1 + \mathbf{0} = (-\mathbf{a})_1 + (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})_2) =$$
$$= ((-\mathbf{a})_1 + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a})_2 = \mathbf{0} + (-\mathbf{a})_2 = (-\mathbf{a})_2.$$

Из аксиомы 4° следует, что (как и в случае геометрического пространства) для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ уравнение $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$.

Предложение. *Операция умножения вектора на число в векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *обладает свойствами (3), то есть для любого* $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ *и любого* $\lambda \in \mathbf{R}$ *имеют место следующие равенства:*

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}. \tag{4}$$

Доказательство. Первое равенство (4) следует из аксиом 8°, 6° и единственности решения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ уравнения $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} = (1 + 0)\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a}.$$

Второе равенство (4) следует из аксиомы 7° и первого равенства (4):

$$\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda(0 \cdot \mathbf{a}) = (\lambda \cdot 0)\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Третье равенство (4) доказывается следующим образом:

$$(-1) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{a} = ((-1) + 1) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} \;\; \Rightarrow \;\; (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

Задача 1. Докажите, используя метод математической индукции, что результат вычисления суммы n векторов

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n \tag{5}$$

в векторном пространстве $\mathbf{V}$ не зависит от расстановки скобок.

Указание. Основанием индукции (при $n = 3$) является аксиома 2° ассоциативности сложения векторов. Переход от суммы k векторов к сумме $k + 1$ вектора осуществляется следующим образом. В зависимости от порядка осуществления действий (сложения двух векторов), всего имеется $k!$ способов вычисления суммы (5) при $n = k + 1$. По тому, какое действие осуществляется первым, все эти способы разбиваются на k классов $C_1, \ldots, C_k$ (в классе C_i первое действие — сложение $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}$). По предположению индукции все способы вычисления суммы, принадлежащие одному классу, дают один и тот же результат. Но по предположению индукции один и тот же результат дают также любые два способа, начинающиеся с $(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}) + \mathbf{a}_{i+2}$ и с $\mathbf{a}_i + (\mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{a}_{i+2})$, то есть любые два способа из классов C_i и C_{i+1} приводят к одному результату.

2.2 Линейная зависимость векторов.

Продолжаем рассматривать произвольное векторное пространство $\mathbf{V}$.

Определения. *Линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *с коэффициентами* $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k$ *называется вектор*

$$\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k.$$

Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны нулю: $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^k = 0$, *называется тривиальной. Очевидно, тривиальная линейная комбинация любых векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *является нулевым вектором* $\mathbf{0}$.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулевому вектору:*

$$\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Если же нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, *то эти векторы называются линейно независимыми.*

Свойства линейно зависимых систем векторов.

1) *Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других.*

Действительно, если $\mathbf{a}_1 = \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k$, то $(-1)\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$.

Обратно, если $\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ и, например, $\lambda^1 \neq 0$, то $\mathbf{a}_1 = -(\lambda^2/\lambda^1)\mathbf{a}_2 - \ldots - (\lambda^k/\lambda^1)\mathbf{a}_k$.

2) *Если среди векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *имеется нулевой, то эти векторы являются линейно зависимыми.*

Доказательство этого свойства очевидно: если, например, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, то $1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная комбинация.

3) *Если к линейно зависимым векторам* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *добавить любые векторы* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$, *то система векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ *будет линейно зависимой.*

Действительно, если $\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная комбинация, то и $\lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k + 0 \cdot \mathbf{b}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная комбинация.

4) *Один вектор* $\mathbf{a}$ *линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой:* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Доказательство этого свойства очевидно.

В пространстве $\mathbf{V}_3$ свободных векторов геометрического пространства, кроме того, выполняются следующие свойства:

5) *Два вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны:* $\mathbf{a}_1 || \mathbf{a}_2$.

6) *Три вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они параллельны одной плоскости.*

Такие векторы называются *компланарными.* Нулевой вектор считается параллельным всякой плоскости.

7) *Любые четыре вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ *линейно зависимы.* При доказательстве этого свойства можно считать, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — линейно независимы (в случае, когда они линейно зависимы, утверждение очевидно). Отложим все четыре вектора от одной точки O. Пусть $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Спроектируем затем точку A_4 на каждую из прямых OA_1, OA_2 и OA_3 параллельно двум другим. Пусть проекциями являются, соответственно, точки B_1, B_2 и B_3. Так как векторы $\overrightarrow{OB_i}$ и $\overrightarrow{OA_i}$ коллинеарны, то найдутся такие числа λ_i, $i = 1, 2, 3$, что $\overrightarrow{OB_i} = \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. Тогда $\mathbf{a}_4 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

Предложение (Основная лемма о линейной зависимости векторов). *Пусть в векторном пространстве* $\mathbf{V}$ *заданы два набора векторов* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *и* $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$, *и пусть при этом каждый вектор первого набора линейно выражается через векторы второго набора, то есть* $\mathbf{a}_\alpha = \lambda_\alpha^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_\alpha^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_\alpha^m \mathbf{b}_m$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *или, в подробной записи,*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \lambda_1^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_1^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_1^m \mathbf{b}_m \\ \mathbf{a}_2 = \lambda_2^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_2^m \mathbf{b}_m \\ \ldots \\ \mathbf{a}_n = \lambda_n^1 \mathbf{b}_1 + \lambda_n^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_n^m \mathbf{b}_m \,. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда при $n > m$ *векторы* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Применим метод математической индукции.

При $m = 1$ имеем $\mathbf{a}_\alpha = \lambda_\alpha^1 \mathbf{b}_1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Если $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, то векторы $\mathbf{a}_\alpha$ линейно зависимы по свойству 2). Если $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, то $\lambda_1^1 \mathbf{a}_2 - \lambda_2^1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$.

Предположим теперь, что утверждение справедливо при всех $m \leqslant k$, и докажем, что оно справедливо и при $m = k + 1$. Пусть имеет место набор линейных комбинаций (6), где $m = k + 1$ и $n > m$. Если все коэффициенты при векторе $\mathbf{b}_1$ в линейных комбинациях (6) равны нулю:

$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \ldots = \lambda_{k+1}^1 = 0$, то векторы $\mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, являются линейными комбинациями k векторов $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k+1}$ и, следовательно, линейно зависимы по предположению индукции. Пусть теперь среди коэффициентов λ_α^1 в комбинациях (6) имеется ненулевой. Можно считать, что $\lambda_1^1 \neq 0$ (в противном случае перенумеруем векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}$ таким образом, чтобы выполнялось $\lambda_1^1 \neq 0$). Рассмотрим набор векторов

$$\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha - \frac{\lambda_\alpha^1}{\lambda_1^1}\mathbf{a}_1, \quad \alpha = 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Подставляя в формулы (7) линейные комбинации (6), получим представления векторов $\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ в виде линейных комбинаций векторов $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k+1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_2 = \mu_2^2\mathbf{b}_2 + \ldots + \mu_2^{k+1}\mathbf{b}_{k+1} \\ \ldots \\ \mathbf{c}_n = \mu_n^2\mathbf{b}_2 + \ldots + \mu_n^{k+1}\mathbf{b}_{k+1}\,. \end{cases} \tag{8}$$

Поскольку набор $\{\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ состоит из $(n-1)$-го вектора, а набор $\{\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k+1}\}$ состоит из k векторов, и $n-1 > k$, то по предположению индукции векторы $\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ являются линейно зависимыми, то есть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов этого набора, равная нулю:

$$\nu^2\mathbf{c}_2 + \ldots + \nu^n\mathbf{c}_n = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Подставляя в (9) выражения (7) для векторов $\mathbf{c}_\alpha$, получим равенство

$$\nu^2(\mathbf{a}_2 - \frac{\lambda_2^1}{\lambda_1^1}\mathbf{a}_1) + \ldots + \nu^n(\mathbf{a}_n - \frac{\lambda_n^1}{\lambda_1^1}\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Раскрывая скобки в левой части равенства (10), получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Подробное рассмотрение свойств систем векторов можно найти в рекомендумой ниже литературе.

Рекомендуемая литература: [7], лекция 2; [1], глава XI, §1; [5], глава II, §1; [3], глава I.

Определение. *Векторное пространство* $\mathbf{V}$ *называется n-мерным (пространством размерности n), если в этом пространстве выполняются две следующие аксиомы:*

9° *Существуют n линейно независимых векторов.*

10° *Любой набор из $n+1$ вектора является линейно зависимым.*

Число n называется *размерностью* пространства $\mathbf{V}$ и обозначается следующим образом: $n = \dim \mathbf{V}$.

Если для любого n в векторном пространстве $\mathbf{V}$ существуют n линейно независимых векторов, это пространство называется *бесконечномерным.* Векторное пространство, имеющее конечную размерность, называют также *конечномерным.* Для обозначения векторного пространства размерности n принято использовать символ $\mathbf{V}_n$.

Таким образом, свободные векторы геометрического пространства образуют 3-мерное векторное пространство, свободные векторы геометрической плоскости — 2-мерное векторное пространство, а свободные векторы прямой — 1-мерное векторное пространство.

Примером бесконечномерного векторного пространства может служить множество $C[a;b]$ непрерывных функций, определенных на отрезке $[a;b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. При любом $n \in \mathbf{N}$ многочлены $x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему.

Определение. *Пусть $\mathbf{V}$ — векторное пространство. Подмножество $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ называется подпространством в $\mathbf{V}$, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{W}$ и для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ выполняется:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{W}, \quad \lambda \mathbf{a} \in \mathbf{W}.$$

Из этого определения следует, что операции

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V} \ \text{ и } \ \cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

индуцируют отображения

$$+ : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W} \ \text{ и } \ \cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W}$$

(точнее было бы обозначить эти отображения $+_{\mathbf{W}}$ и $\cdot_{\mathbf{W}}$), и тройка $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ является векторным пространством. Если $\dim \mathbf{V} = n$, то, как это следует из свойств линейно зависимых систем, $\dim \mathbf{W} \leqslant \dim \mathbf{V}$.

Пусть π — некоторая плоскость, а ℓ — некоторая прямая в геометрическом пространстве, тогда векторы пространства, параллельные плоскости π, образуют двумерное подпространство $\mathbf{V}_2(\pi) \subset \mathbf{V}_3$, а векторы параллельные ℓ, — одномерное подпространство $\mathbf{V}_1(\ell) \subset \mathbf{V}_3$. Эти подпространства называются *направляющими подпространствами* плоскости π и прямой ℓ соответственно.

2.3 Базис в векторном пространстве.

Определение. *Базисом в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}_n$ называется упорядоченный набор $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, из n линейно независимых векторов.*

Любой вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$ образует с векторами базиса систему, состоящую из $n+1$ вектора, которая является линейно зависимой по аксиоме $10°$. Отсюда следует, что существует нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda^1 \mathbf{e}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda^n \mathbf{e}_n + \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

В этой линейной комбинации λ не может равняться нулю (почему?). Поделив ее на λ, представим вектор $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \ldots + a^n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i. \tag{11}$$

Из основной леммы о линейной зависимости следует, что в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}_n$ не может существовать набора из $m < n$ векторов, через которые линейно выражается любой вектор из $\mathbf{V}_n$.

Замечание (Правило суммирования Эйнштейна). В геометрии и линейной алгебре принято суммы вида (11) записывать, опуская знак суммирования: $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$. В дальнейшем всюду в выражениях вида

$$a^i \mathbf{e}_i, \quad a^i b_i, \quad g_{ij} a^i b^j$$

по каждой паре одинаковых индексов, из которых один стоит внизу, а другой наверху, предполагается суммирование по всей их области изменения.

Коэффициенты $\{a^1, a^2, \ldots, a^n\} = \{a^i\}$ разложения (11) вектора $\mathbf{a}$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$ называются *координатами вектора* $\mathbf{a}$ в базисе (или относительно базиса) $\{\mathbf{e}_i\}$.

Предложение. *Координаты вектора относительно данного базиса определяются однозначно.*

Дествительно, предположив, что $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i = b^i\mathbf{e}_i$, получим $a^i\mathbf{e}_i - b^i\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, откуда $(a^i - b^i)\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ и, следовательно, так как векторы базиса не могут быть линейно зависимыми, $a^i - b^i = 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

Следующее утверждение немедленно следует из однозначной определенности координат векторов:

Предложение. *Имеют место следующие соотношения*:
1) $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \iff c^i = a^i + b^i, \quad i = 1, \ldots, n;$
2) $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} \iff a^i = \lambda b^i, \quad i = 1, \ldots, n;$
3) $\mathbf{b} = \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k \iff b^i = \lambda^1 a_1^i + \lambda^2 a_2^i + \ldots + \lambda^k a_k^i, i = 1, \ldots, n.$

Для каждого натурального числа n имеется «стандартное» векторное пространство размерности n. Это пространство $\mathbf{R}^n$, элементами которого являются n-строки $\{a^i\} = \{a^1, \ldots, a^n\}$, состоящие из вещественных чисел, со следующими операциями сложения и умножения на число:

$$\{a^i\} + \{b^i\} = \{a^i + b^i\}, \quad \lambda\{a^i\} = \{\lambda a^i\}.$$

Стандартный базис в этом пространстве образуют следующие строки: $\{\mathbf{e}_i = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}\}$, где в строке $\mathbf{e}_i$ единица стоит на i-том месте, а остальные элементы этой строки нулевые. При этом $\{a^i\} = a^i\mathbf{e}_i$.

Определение. *Пусть* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$ *— векторные пространства. Отображение* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *называется линейным, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

$$1)\ \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}); \quad 2)\ \varphi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\varphi(\mathbf{a}).$$

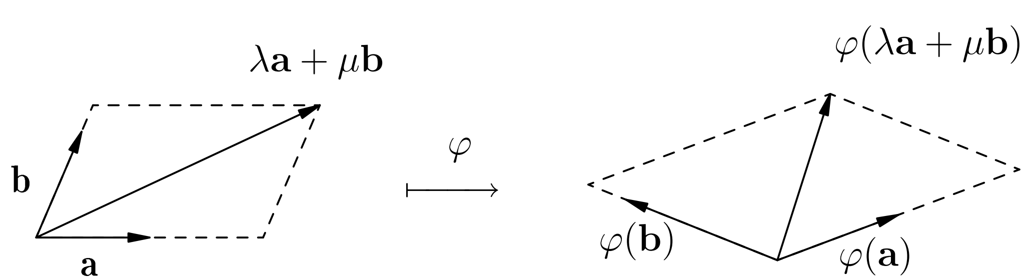

Рис. 5.

Замечание. Очевидно, отображение $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ является линейным тогда и только тогда, когда для любой линейной комбинации $\mathbf{b} = \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda^k\mathbf{a}_k$ выполняется $\varphi(\mathbf{b}) = \lambda^1\varphi(\mathbf{a}_1) + \lambda^2\varphi(\mathbf{a}_2) + \ldots + \lambda^k\varphi(\mathbf{a}_k)$.

Поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ с операциями сложения и умножения чисел является 1-мерным векторным пространством. Как следствие из доказанных выше предложений, получаем

Предложение. *Пусть* $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, *— базис в векторном пространстве* $\mathbf{V}_n$. *Тогда отображение* $\mathbf{e}^i : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto a^i \in \mathbf{R}$, *относящее вектору* $\mathbf{a}$ *его* i*-тую координату* a^i *относительно этого базиса, является линейным отображением.*

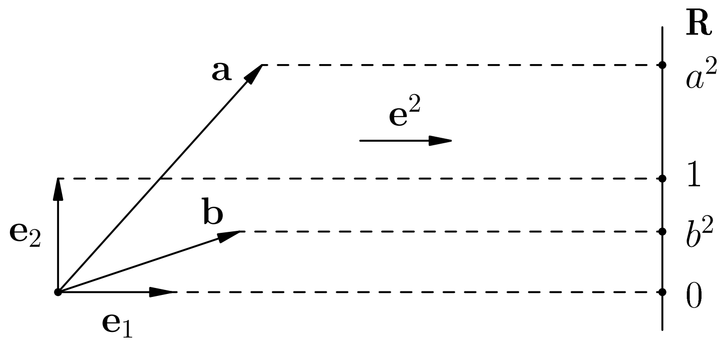

Рис. 6.

Предложение. *Пусть* $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ *и* $\mathbf{V}''$ *— векторные пространства, а* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *и* $\psi : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}''$ *— линейные отображения. Тогда композиция* $\psi \circ \varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}''$ *также является линейным отображением.*

Действительно, первое условие линейности, например, проверяется следующим образом: $(\psi \circ \varphi)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \psi(\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = \psi(\varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})) = \psi(\varphi(\mathbf{a})) + \psi(\varphi(\mathbf{b})) = (\psi \circ \varphi)(\mathbf{a}) + (\psi \circ \varphi)(\mathbf{b})$.

Определение. *Взаимнооднозначное линейное отображение* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *называется изоморфизмом. Если существует изоморфизм* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, *то векторные пространства* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$ *называются изоморфными.*

Имеет место следующее очевидное

Предложение.

1) *Пусть* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *и* $\psi : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}''$ *— изоморфизмы векторных пространств. Тогда обратное отображение* $\varphi^{-1} : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}$ *и композиция* $\psi \circ \varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}''$ *— изоморфизмы векторных пространств.*

2) *Отображение* $\{\mathbf{e}^i\} : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \{a^i\} = \{a^1, \ldots, a^n\} \in \mathbf{R}^n$, *относящее вектору* $\mathbf{a}$ *набор его координат* $\{a^i\}$ *относительно некоторого базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$, *— изоморфизм.*

Следствие. *Любые два векторных пространства одной размерности* $\mathbf{V}_n$ *и* $\mathbf{W}_n$ *изоморфны.*

Действительно, каждое из них изоморфно пространству $\mathbf{R}^n$.

Таким образом, с точностью до изоморфизма, существует только одно векторное пространство размерности n. В частности, все векторные пространства размерности 3 изоморфны пространству свободных векторов геометрического пространства и векторному пространству $\mathbf{R}^3$.

В геометрическом пространстве базис образуют любые три некомпланарных вектора $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, а на плоскости — любые два неколлинеарных вектора $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Произвольный вектор $\mathbf{a}$ при этом имеет, соответственно, вид $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2$.

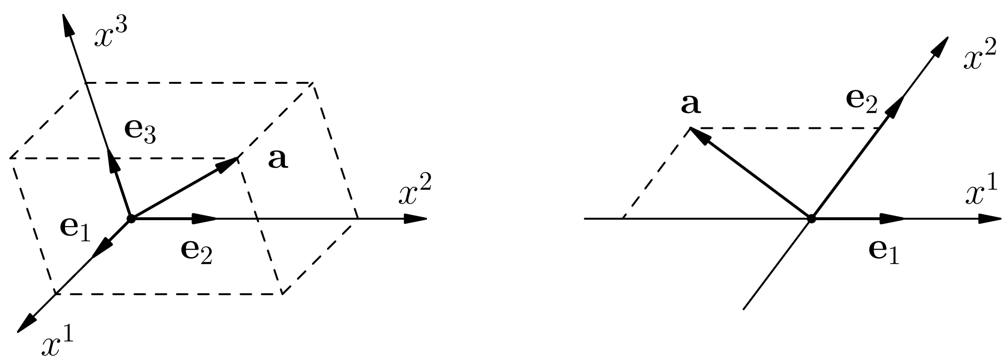

Рис. 7.

2.4 Примеры.

Основной идеей при отыскании неизвестного вектора $\overrightarrow{AB}$ является, в соответствии с правилом замыкания ломаной, нахождение цепочки $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{M_kB}$, состоящей из известных векторов. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_kB}$.

Задача 2. В треугольнике ABC: AF — медиана, а E — центр тяжести (точка пересечения медиан). Выразить векторы $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AE}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. См. рисунок 8.

Имеем $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Отсюда находим $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

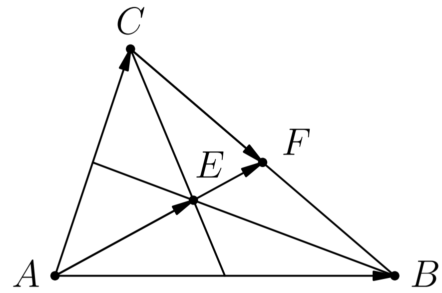

Рис. 8.

Задача 3. Дан треугольник ABC. Найти точку O такую, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

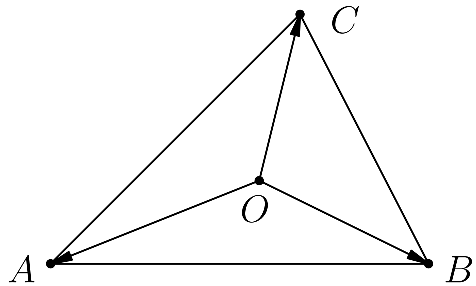

Рис. 9.

Решение. См. рисунок 9. Имеем: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$. Поэтому $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ и, следовательно, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяет одна точка — центр тяжести треугольника ABC.

Задача 4. На векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ построен параллелепипед. Доказать, что диагональ OD этого параллелепипеда проходит через центр тяжести E треугольника ABC.

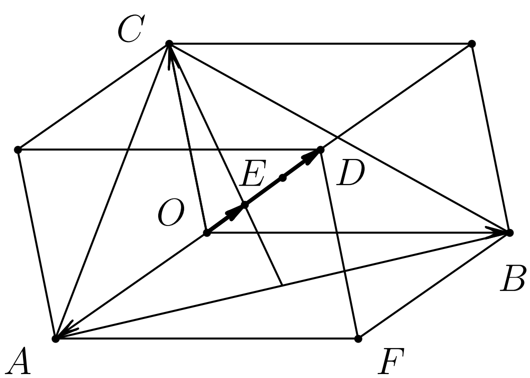

Рис. 10.

Решение. См. рисунок 10. Пусть F — четвертая вершина параллелепипеда, лежащая в плоскости OAB. Имеем: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Таким образом, $\overrightarrow{OE}||\overrightarrow{OD}$.

Задача 5. Доказать, что стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ параллельны тогда и только тогда, когда отрезок MN, соединяющий середины их сторон, проходит через точку O пересечения диагоналей.

Решение. См. рисунок 11. Рассмотрим базис на плоскости, состоящий

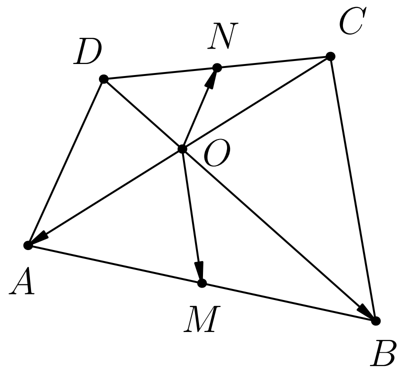

Рис. 11.

из векторов $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$. Пусть $\overrightarrow{OC} = \lambda \mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{OD} = \mu \mathbf{e}_2$. По отношению к введенному базису векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ имеют следующие координаты:

$$\overrightarrow{OM} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}, \ \overrightarrow{ON} = \left\{\frac{1}{2}\lambda; \frac{1}{2}\mu\right\},$$

$$\overrightarrow{AB} = \{-1; 1\}, \ \overrightarrow{DC} = \{\lambda; -\mu\}.$$

Отсюда: $\overrightarrow{OM} || \overrightarrow{ON} \ \Leftrightarrow \lambda = \mu \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} || \overrightarrow{DC}$.

Рекомендуемая литература: [7], лекции 3, 4, 5; [1], глава I, §4; глава XI, §§2, 3, 4.

Задачи и упражнения: [2], 1159, 1160, 1162, 1164, 1171, 1172, 1184, 1186, 1191, 1192, 1193; [4], тема 1.

3 Аффинные системы координат на плоскости и в пространстве.

3.1 Аффинный репер.

Определения. *Репером (более точно, аффинным репером) в геометрическом пространстве называется набор* $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$*, состоящий из точки* O *и базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$ *векторного пространства* $\mathbf{V}_3$ *свободных векторов геометрического пространства.*

Радиус-вектором точки A *относительно репера* $\{O; \mathbf{e}_i\}$ *(или относительно точки* O*) называется вектор* $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$.

Координатами точки A *относительно репера* $\{O; \mathbf{e}_i\}$ *называются координаты* $\{x^i_A\} = \{x^1_A; x^2_A; x^3_A\}$ *ее радиус-вектора* $\mathbf{r}_A$ *относительно базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$ *векторного пространства* $\mathbf{V}_3$.

Таким образом,

$$\mathbf{r}_A = x^i_A \mathbf{e}_i = x^1_A \mathbf{e}_1 + x^2_A \mathbf{e}_2 + x^3_A \mathbf{e}_3.$$

Чтобы отличать в координатной записи точки от векторов, координаты точек будем заключать в круглые скобки: $A(x^1_A; x^2_A; x^3_A)$.

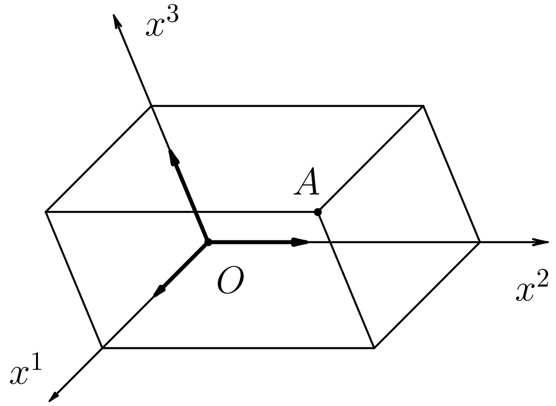

Рис. 12.

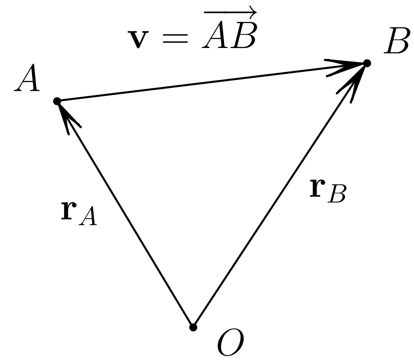

Рис. 13.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$, тогда имеют место следующие формулы, связывающие координаты точек и векторов:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \quad x^i_B = x^i_A + v^i, \quad v^i = x^i_B - x^i_A. \qquad (12)$$

Замечание. Все вышеуказанные формулы справедливы и на плоскости, только в случае плоскости индекс i принимает два значения, а не три: $\mathbf{r}_A = x^i_A \mathbf{e}_i = x^1_A \mathbf{e}_1 + x^2_A \mathbf{e}_2$. Эти же формулы справедливы и для прямой, рассматриваемой как самостоятельный геометрический объект размерности 1, при этом индекс i будет принимать всего одно значение $i = 1$.

3.2 Простое отношение трех точек прямой.

Определение. *Простым отношением трех точек A, B и C, принадлежащих прямой (прямая может быть расположена в пространстве, на плоскости или рассматриваться сама по себе) и таких, что $B \neq C$, называется следующее число:*

$$(ABC) = (AB, C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}. \qquad (13)$$

Это число (ABC) называют также отношением, в котором точка C делит (направленный) отрезок AB.

Пусть точки A и B даны и требуется найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $(ABC) = \lambda$. Из (2) получаем $\lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) = (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)$, откуда

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda} \quad \Longrightarrow \quad x^i_C = \frac{x^i_A + \lambda x^i_B}{1 + \lambda}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (3)$$

Если точка E является серединой отрезка AB, то $(ABE) = 1$ и

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2}, \quad x^i_E = \frac{x^i_A + x^i_B}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

3.3 Аффинное пространство

Сформулированное выше понятие векторного пространства позволяет с помощью простого списка аксиом полностью описать свойства свободных векторов геометрического пространства. Следующее ниже определение аффинного пространства позволяет аксиоматически задать само геометрическое пространство как множество точек.

Определение. *Аффинным пространством называется тройка* $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \psi)$, *состоящая из некоторого множества* $\mathcal{A}$, *элементы которого называются точками, векторного пространства* $\mathbf{V}$ *и отображения* $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$, *относящего упорядоченной паре точек* $\{A, B\}$ *множества* $\mathcal{A}$ *некоторый вектор из* $\mathbf{V}$, *обозначаемый* $\overrightarrow{AB}$, *такого, что выполняются следующие две аксиомы*:

1° *Для любых* $A \in \mathcal{A}$ *и* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *существует единственная точка* B *такая, что* $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

2° $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *для любых* $A, B, C \in \mathcal{A}$ (*равенство треугольника*).

Аффинное пространство обычно обозначается одним символом $\mathcal{A}$. Векторное пространство $\mathbf{V}$ называется *ассоциированным* с аффинным пространством $\mathcal{A}$. *Размерностью* $\dim \mathcal{A}$ аффинного пространства $\mathcal{A}$ называется размерность ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}$. Аффинное пространство размерности n будем обозначать следующим образом: $\mathcal{A}_n$.

Из определения аффинного пространства легко выводятся следующие два соотношения:

1) $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$; 2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Для их доказательства достаточно записать равенство треугольника 2° сначала при $B = C = A$, а затем при $C = A$.

С каждым векторным пространством можно ассоциировать аффинное пространство $(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \psi)$, полагая $\psi : \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Полагая затем $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$, получим «стандартное» аффинное пространство $\mathbf{R}^n$ размерности n для каждого n.

Репером в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$ (как и в геометрическом пространстве) называется набор $\{O, \mathbf{e}_i\}$, состоящий из точки $O \in \mathcal{A}_n$ и базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_n$. *Радиус-вектором* точки A относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$ называется вектор $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$. Так же, как и в случае геометрического пространства, имеют место формулы (12).

Определение. *Пусть* $(\mathcal{A}, \mathbf{V}, \psi)$ *и* $(\mathcal{A}', \mathbf{V}', \psi')$ *— два аффинных пространства. Взаимнооднозначное отображение* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *называется изоморфизмом аффинных пространств, если* Φ *индуцирует изоморфизм ассоциированных векторных пространств, то есть если существует изоморфизм* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *такой, что*

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \qquad A' = \Phi(A), B' = \Phi(B). \tag{14}$$

Если существует изоморфизм $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$*, то аффинные пространства* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{A}'$ *называются изоморфными.*

Если $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — изоморфизм аффинных пространств, то изоморфизм векторных пространств $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, определяемый соотношением (14), называется изоморфизмом, *ассоциированным* с изоморфизмом Φ.

Следует отметить, что из условия (14) прежде всего следует, что если $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$, $D' = \Phi(D)$, то

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}. \tag{15}$$

Только при выполнении условия (15) отображение $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ индуцирует некоторое отображение $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$.

Предложение. *Любые два аффинные пространства одной размерности* $\mathcal{A}_n$ *и* $\mathcal{A}'_n$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\{O, \mathbf{e}_i\}$ — произвольный репер в $\mathcal{A}_n$, а $\{O', \mathbf{e}'_i\}$ — произвольный репер в $\mathcal{A}'_n$, тогда отображение Φ, относящее точке $M \in \mathcal{A}_n$, имеющей координаты (x^i_M) относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$, точку $M' \in \mathcal{A}'_n$, имеющую те же самые координаты (x^i_M) относительно репера $\{O', \mathbf{e}'_i\}$, является изоморфизмом $\Phi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_n$. $\square$

Из этого предложения следует, что, с точностью до изоморфизма, существует только одно аффинное пространство данной размерности n. В частности, все аффинные пространства размерности 3 изоморфны геометрическому пространству и аффинному пространству $\mathbf{R}^3$.

Замечание. Посредством введения аффинных пространств мы получаем возможность не только строго описать геометрическое трехмерное пространство и геометрическую плоскость, но и рассматривать их многомерные аналоги. Отметим, что остается еще определить такие геометрические понятия как расстояние между точками и угол между прямыми. Это будет осуществлено ниже с помощью операции скалярного произведения векторов.

Определение. *Пусть $\mathbf{W}_m \subset \mathbf{V}_n$ — подпространство в векторном пространстве $\mathbf{V}_n$, ассоциированном с n-мерным аффинным пространством $\mathcal{A}_n$. Плоскостью размерности m (m-плоскостью) в $\mathcal{A}_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$, проходящей через точку A и имеющей направляющее векторное подпространство $\mathbf{W}_m$, называется следующее подмножество в $\mathcal{A}_n$:*

$$\pi_m = \{M \in \mathcal{A}_n \,|\, \overrightarrow{AM} \in \mathbf{W}_m\}.$$

В геометрическом пространстве 1-плоскости — это прямые, а 2-плоскости — это обычные плоскости.

Из этого определения следует, что тройка $(\pi_m, \mathbf{W}_m, \psi|_\pi)$, где $\psi|_\pi$ — ограничение отображения ψ на $\pi_m \times \pi_m$, — m-мерное аффинное пространство. Такое пространство называется *подпространством* в $\mathcal{A}_n$.

3.4 Примеры.

Следующие примеры показывают, как аффинные координаты и простое отношение трех точек могут использоваться при решении геометрических задач.

Задача 6. (Теорема Менелая). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC даны точки C_0, A_0 и B_0 такие, что $(BCA_0) = \lambda_1$, $(CAB_0) = \lambda_2$ и $(ABC_0) = \lambda_3$. Доказать, что точки A_0, B_0 и C_0 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

Решение. См. рисунок 14. Рассмотрим аффинный репер $\{O, \mathbf{e}_i\}$, где $O = A$, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. В этом репере вершины треугольника и рас-

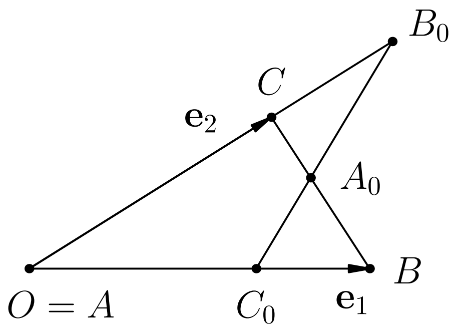

Рис. 14.

сматриваемые на его сторонах точки имеют следующие координаты: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$,

$A_0\left(\frac{1}{1+\lambda_1};\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)$, $B_0\left(0;\frac{1}{1+\lambda_2}\right)$, $C_0\left(\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3};0\right)$.

Простые вычисления показывают, что

$$\overrightarrow{C_0A_0} || \overrightarrow{C_0B_0} \iff \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1.$$

Задача 7. В пространстве заданы четыре точки A, B, C, D. Точка E — середина AB, а точка F — середина CD. Доказать, что

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

Решение. См. рисунок 15.

$$\overrightarrow{EF} = \mathbf{r}_F - \mathbf{r}_E = \frac{(\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D) - (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)}{2} =$$
$$= \frac{(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) + (\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B)}{2} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}.$$

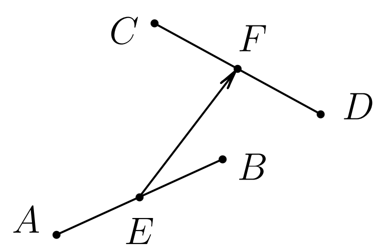

Рис. 15.

Задача 8. Найти радиус-вектор точки E — центра тяжести треугольника ABC, если известны радиус-векторы его вершин.

Решение. См. рисунок 16. Пусть F — середина BC, тогда $(BCF) = 1$ и $(AFE) = 2$. Отсюда

$$\mathbf{r}_F = \frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{2},$$

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_A + 2\mathbf{r}_F}{3} = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{3}.$$

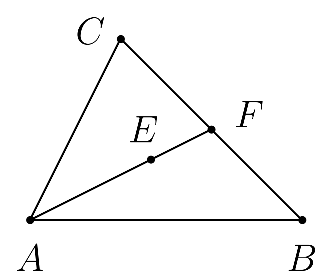

Рис. 16.

Задача 9. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Доказать, что в этой же точке пересекаются и прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней.

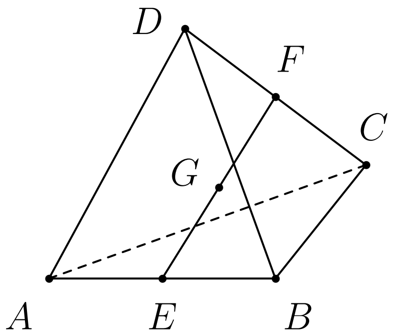

Рис. 17.

Решение. См. рисунок 17. Обозначим вершины тетраэдра буквами A, B, C, D. Пусть E — середина AB, F — середина CD, а G — середина EF. Имеем:

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2}, \quad \mathbf{r}_F = \frac{\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D}{2},$$

$$\mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{r}_E + \mathbf{r}_F}{2} = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D}{4}.$$

Точка G — центр тяжести тетраэдра. Очевидно, что это и есть указанная в задаче точка.

Рекомендуемая литература: [7], лекция 5; [1], глава I, §4; глава XII, §§1, 2, 3.

Задачи и упражнения: [2], 1175, 1176, 1180, 1181, 68, 69, 70, 73, 75, 79, 80, 52, 54, 1274, 1276; [4], темы 2–5.

4 Скалярное произведение векторов.

4.1 Проекции векторов на прямую и плоскость.

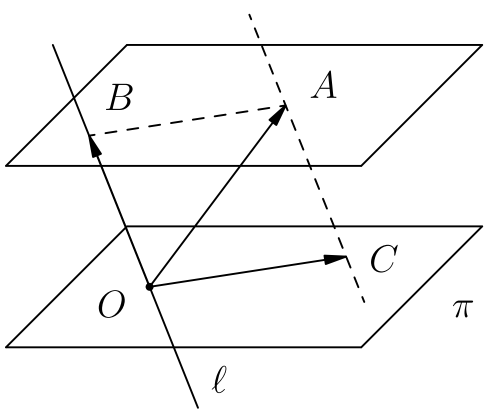

Рис. 18.

Рассмотрим в геометрическом пространстве плоскость π и прямую ℓ, пересекающую π в одной точке. Обозначим символами $\mathbf{V}_1(\ell)$ и $\mathbf{V}_2(\pi)$ подпространства в $\mathbf{V}_3$, состоящие, соответственно, из векторов параллельных прямой ℓ и плоскости π. Проектируя векторы на ℓ параллельно π и на π параллельно ℓ, получим отображения $\mathrm{pr}_\ell : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_1(\ell)$ и $\mathrm{pr}_\pi : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_2(\pi)$.

Предложение. $\mathrm{pr}_\ell : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_1(\ell)$ *и* $\mathrm{pr}_\pi : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_2(\pi)$ *— линейные отображения.*

Доказательство. Выберем в $\mathbf{V}_3$ базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ такой, что $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{V}_1(\ell)$, а $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в $\mathbf{V}_2(\pi)$. Тогда для pr_π имеем: $\mathrm{pr}_\pi(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \mathrm{pr}_\pi(\lambda v^i \mathbf{e}_i +$

$\mu w^i\mathbf{e}_i) = \mathrm{pr}_\pi(\lambda v^i + \mu w^i)\mathbf{e}_i = (\lambda v^2 + \mu w^2)\mathbf{e}_2 + (\lambda v^3 + \mu w^3)\mathbf{e}_3 = \lambda(v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3) + \mu(w^2\mathbf{e}_2 + w^3\mathbf{e}_3) = \lambda\,\mathrm{pr}_\pi(\mathbf{v}) + \mu\,\mathrm{pr}_\pi(\mathbf{w})$.

Аналогично доказывается линейность отображения pr_ℓ.

Определение. *Осью в геометрическом пространстве называют ориентированную прямую, то есть прямую, на которой зафиксировано одно из двух возможных направлений. Направляющим вектором оси называется всякий ненулевой вектор, направление которого совпадает с направлением оси.*

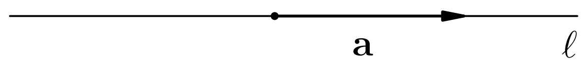

Рис. 19.

Для обозначения оси будем использовать символ $\ell\uparrow$.

Замечания. 1. Интуитивно ясное понятие направления, используемое в определении оси, можно следующим образом формализовать для случая произвольного векторного пространства $\mathbf{V}_n$ (а, значит, и для любого аффинного пространства). На множестве $\mathbf{V}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ненулевых векторов пространства $\mathbf{V}_n$ введем отношение эквивалентности, полагая $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ и $\lambda > 0$. Тогда *направление* в $\mathbf{V}_n$ — это элемент фактор-множества $\mathbf{V}_n \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$. В пространстве $\mathbf{V}_3$ свободных векторов геометрического пространства каждый такой класс эквивалентности содержит ровно один *единичный вектор* (так называют векторы длины единица). Поэтому множество направлений в геометрическом пространстве находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством единичных векторов. Если отложить все единичные векторы от одной точки, то их концы опишут сферу единичного радиуса. Поэтому множество направлений в геометрическом пространстве находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством точек сферы единичного радиуса. Аналогичным образом, множество направлений на геометрической плоскости находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством точек окружности единичного радиуса.

2. В случае неориентированной прямой ℓ (прямой линии в обычном

смысле), ее направление задается любым ненулевым вектором, параллельным этой прямой. В этом случае термин *направление* в $\mathbf{V}_n$ означает элемент фактор-множества $\mathbf{V}_n \setminus \{\mathbf{0}\}/\!\sim$ по отношению эквивалентности, определенному следующим образом: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, где $\lambda \in \mathbf{R}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Множество направлений в этом смысле в геометрическом пространстве находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством пар диаметрально противоположных точек сферы единичного радиуса. У этого множества есть свое название: проективная плоскость.

3. Как элемент фактор-множества $\mathbf{V}_n \setminus \{\mathbf{0}\}/\!\sim$, направление задается любым своим представителем — ненулевым вектором. Поэтому в дальнейшем, говоря о некотором направлении, будем обозначать его любым представляющим его вектором.

Определение. *Пусть $\ell\!\uparrow$ — ось с направляющим вектором $\mathbf{a}$, а $\mathbf{b} \in \mathbf{V}_3$ — произвольный вектор. Ортогональной проекцией вектора $\mathbf{b}$ на ось $\ell\!\uparrow$ называется число* $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\cos\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

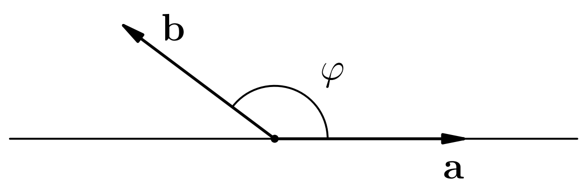

Рис. 20.

Предложение. *Отображение* $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow} : \mathbf{V}_3 \ni \mathbf{b} \mapsto \mathrm{pr}_{\ell\uparrow}(\mathbf{b}) \in \mathbf{R}$ *— линейное отображение.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbf{V}_3$ базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, а $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ — неколлинеарные векторы ортогональные вектору $\mathbf{e}_1$. Тогда $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow} : \mathbf{b} \mapsto b^1$, следовательно, $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow}$ — линейное отображение. $\square$

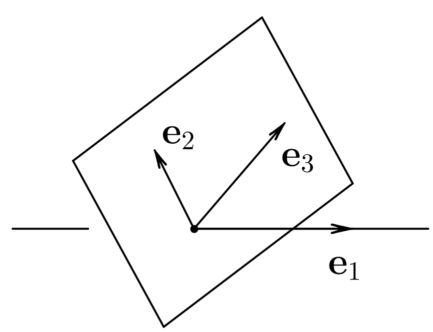

Рис. 21.

Поскольку проекции на все оси $\ell\!\uparrow$ с фиксированным направляющим вектором $\mathbf{a}$ — это одно и то же отображение, то для отображения $\mathrm{pr}_{\ell\uparrow}$

будем использовать также обозначение $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}$.

4.2 Скалярное произведение.

Определение. *Пусть* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *— векторы из* $\mathbf{V}_3$, *а* φ *— угол между ними. Скалярным произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется число*

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi.$$

Геометрические свойства скалярного произведения.

Следующие свойства скалярного произведения векторов вытекают непосредственно из определения:

1) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff (\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ (по определению считается, что $\mathbf{0} \perp \mathbf{b}$ для любого $\mathbf{b} \in \mathbf{V}_3$).

2) Предполагая, что угол φ между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ удовлетворяет соотношению $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, имеем:

$(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 0 \iff \varphi < \frac{\pi}{2}$,

$(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 0 \iff \varphi > \frac{\pi}{2}$.

3) $(\mathbf{a},\,\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$.

4) $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|}$.

Алгебраические свойства скалярного произведения.

1°. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$.

2°. $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b},\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b},\mathbf{c})$.

3°. $(\mathbf{c},\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{c},\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c},\mathbf{b})$.

4°. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \implies (\mathbf{a},\mathbf{a}) > 0$.

Доказательство. 1° и 4° вытекают непосредственно из определения. 3° следует из 1° и 2°. Докажем 2°.

Если $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, то 2° выполняется очевидным образом. Если $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, то $(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\mathbf{c}) = |\mathbf{c}|\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda|\mathbf{c}|\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}) + \mu|\mathbf{c}|\mathrm{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b},\mathbf{c})$.

Определение. *Пусть* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$ *— векторные пространства. Отображение* $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *называется билинейным, если*

$\varphi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b},\mathbf{c}) = \lambda\varphi(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \mu\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c})$,

$\varphi(\mathbf{c},\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\varphi(\mathbf{c},\mathbf{a}) + \mu\varphi(\mathbf{c},\mathbf{b})$.

Таким образом, $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — билинейно, если при произвольном фиксированном $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ каждое из отображений $\mathbf{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \in \mathbf{W}$, $\mathbf{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{a}) \in \mathbf{W}$, является линейным.

Следствие. *Свойства 2° и 3° в совокупности эквивалентны билинейности отображения $g : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R}$.*

4.3 Примеры.

Следующие примеры показывают как скалярное произведение может применяться при решении различных геометрических задач.

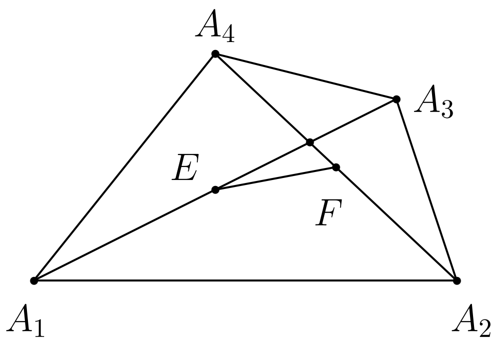

Рис. 22.

Задача 10. (Теорема Эйлера). Доказать, что сумма квадратов сторон четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ равна сумме квадратов его диагоналей и учетверенного квадрата расстояния между серединами диагоналей.

Решение. См. рисунок 22. Обозначим середины диагоналей A_1A_3 и A_2A_4, соответственно, буквами E и F, и пусть $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор вершины A_i. В задаче требуется доказать, что имеет место следующее равенство:

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 =$$

$$= (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^2 + 4\left(\frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3)}{2} - \frac{(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4)}{2}\right)^2.$$

Для доказательства этого равенства достаточно раскрыть скобки и собрать подобные члены.

Задача 11. Точка M расположена внутри выпуклого n-угольника $P = A_1A_2 \ldots A_n$. Доказать, что найдется такая сторона A_iA_{i+1} этого n-угольника, что основание перпендикуляра, опущенного из точки M на A_iA_{i+1} является внутренней точкой отрезка A_iA_{i+1}.

Решение. См. рисунок 23. Для удобства обозначений будем считать, что индекс $i = 1, 2, \ldots, n$ представляет собой остаток от деления на n, то есть, $n \sim 0$, $n + 1 \sim 1$ и так далее. Так как многоугольник P — выпуклый, то он является объединением непересекающихся треугольников MA_iA_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n$. Требуется доказать, что найдется такая сторона A_kA_{k+1}, что в треугольнике MA_kA_{k+1} углы $\angle MA_kA_{k+1}$ и $\angle MA_{k+1}A_k$ оба являются острыми. Предположим, что существует такой многоугольник, что в каждом треугольнике MA_iA_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n$ один из углов $\angle MA_iA_{i+1}$ или $\angle MA_{i+1}A_i$ больше или равен $\frac{\pi}{2}$. Пусть при этом, для определенности, $\angle MA_2A_1 \geqslant \frac{\pi}{2}$, тогда $\angle MA_2A_3 < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\angle MA_3A_2 \geqslant \frac{\pi}{2}$, откуда следует, что $\angle MA_{i+1}A_i \geqslant \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Выберем точку M за начало репера: $M = O$ и пусть $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{MA_i}$ — радиус-вектор вершины A_i. Имеем: $(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \leqslant 0$. Но тогда $2\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \leqslant 0$ $\iff$ $2\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_i) \leqslant 0$ $\iff$ $\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)^2 \leqslant 0$.

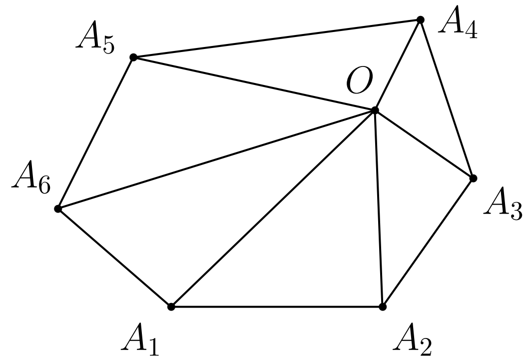

Рис. 23.

4.4 Скалярное произведение в координатах.

Пусть в пространстве $\mathbf{V}_3$ (или $\mathbf{V}_2$, если рассматриваются векторы на геометрической плоскости) выбран некоторый базис $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (в случае плоскости $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$). Вычислим скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^j\mathbf{e}_j$. Имеем:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i\mathbf{e}_i, b^j\mathbf{e}_j) = a^ib^j(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}a^ib^j, \tag{16}$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (i, j = 1, 2 \text{ в случае } \mathbf{V}_2). \tag{17}$$

Из формулы (16) следует, что для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, необходимо сначала вычислить матрицу

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

составленную из скалярных произведений (17) векторов базиса. Для пространства $\mathbf{V}_3$ в развернутом виде формула (16) выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{13}a^1b^3 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2 + \\ + g_{23}a^2b^3 + g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3b^2 + g_{33}a^3b^3. \tag{18}$$

В случае плоскости $\mathbf{V}_2$, соответственно, имеем:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2. \tag{19}$$

Определение. *Базис $\{\mathbf{e}_i\}$ называется ортонормированным, если $|\mathbf{e}_i| = 1$, $i,j = 1,2,3$, и $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$ при $i \neq j$.*

В случае ортонормированного базиса матрица (g_{ij}) — единичная, $g_{ij} = \delta_{ij}$, и скалярные произведения векторов в $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_2$ находятся, соответственно, по следующим формулам:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3,$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a^1b^1 + a^2b^2.$$

4.5 Примеры.

Приведем примеры, иллюстрирующие применение формулы (16).

Задача 12. В равнобедренном треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1, проведенные к боковым (равным) сторонам CB и CA, пересекаются под прямым углом. Найти углы этого треугольника.

Решение. См. рисунок 24. Поскольку все треугольники, удовлетворяющие условиям задачи, подобны, будем считать, что $|\overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{BB_1}| = 3$. Пусть O — точка пересечения медиан. Введем на плоскости ортонормированный репер $\{O,\mathbf{e}_i\}$, выбрав за векторы базиса $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB_1}$. Тогда $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{A_1B} = 2(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB}) = 2\{-1;-2\} = \{-2;-4\}$, $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{B_1A} = 2(\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{OA}) = 2\{-2;-1\} = \{-4;-2\}$. Отсюда находим $\cos\angle C = \frac{16}{(\sqrt{20})(\sqrt{20})} = \frac{4}{5}$.

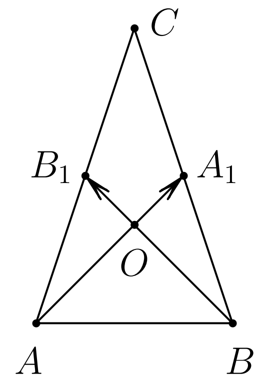

Рис. 24.

Задача 13. В треугольнике ABC длины сторон CA и CB равны, соответственно, 4 и 6, а угол при вершине C равен $\frac{\pi}{3}$. 1) Найти угол φ между медианами AA_1 и BB_1. 2) Найти длину медианы CC_1.

Решение. См. рисунок 25. Введем на плоскости репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, полагая $O = C$, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{CB}$. Вычислим элементы матрицы (g_{ij}) для выбранного базиса: $g_{11} = 16$, $g_{12} = g_{21} = 12$, $g_{22} = 36$.

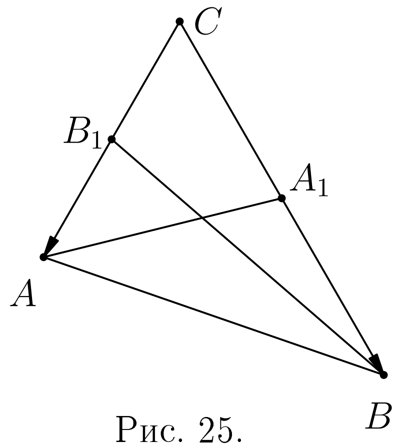

Рис. 25.

Формула (7) принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 16a^1b^1 + 12a^1b^2 + 12a^2b^1 + 36a^2b^2.$$

Векторы медиан имеют в этом базисе следующие координаты: $\mathbf{m}_a = \overrightarrow{AA_1} = \{-1; \frac{1}{2}\}$, $\mathbf{m}_b = \overrightarrow{BB_1} = \{\frac{1}{2}; -1\}$, $\mathbf{m}_c = \overrightarrow{CC_1} = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$. Имеем: $\mathbf{m}_a^2 = 16(-1)^2 + 2 \cdot 12(-1)(\frac{1}{2}) + 36(\frac{1}{2})^2 = 13$, $\mathbf{m}_b^2 = 16(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot 12(\frac{1}{2})(-1) + 36(-1)^2 = 28$, $(\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b) = 16(-1)(\frac{1}{2}) + 12(-1)(-1) + 12(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + 36(\frac{1}{2})(-1) = -11$. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{28}}$.

Аналогично, $\mathbf{m}_c^2 = 16(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot 12(\frac{1}{2})^2 + 36(\frac{1}{2})^2 = 19$, поэтому $|\mathbf{m}_c| = \sqrt{19}$.

Задача 14. В правильном тетраэдре $ABCD$ найти угол ψ между медианами BB_1 и CC_1 граней ABC и ACD.

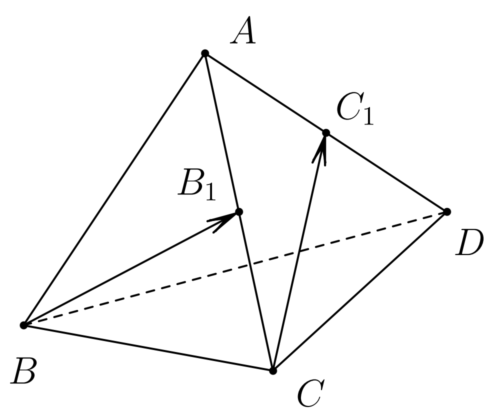

Рис. 26.

Решение. См. рисунок 26. Будем считать, что длина ребра рассматриваемого тетраэдра $ABCD$ равна 1. Введем в пространстве репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, полагая $O = A$, $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AD}$. Элементы матрицы (g_{ij}) для выбранного базиса имеют вид: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = \frac{1}{2}$. Формула (18) принимает вид $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1b^1 + \frac{1}{2}a^1b^2 + \frac{1}{2}a^1b^3 + \frac{1}{2}a^2b^1 + a^2b^2 + \frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{1}{2}a^3b^1 + \frac{1}{2}a^3b^2 + a^3b^3$. Векторы медиан имеют в этом базисе следующие координаты: $\mathbf{u} = \overrightarrow{BB_1} = \{-1; \frac{1}{2}; 0\}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{CC_1} = \{0; -1; \frac{1}{2}\}$. Тогда $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(-1)(-1) + \frac{1}{2}(-1)(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$. Так как $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\cos\psi = -\frac{1}{12}$.

4.6 Евклидовы пространства.

Определение. *Евклидовым векторным пространством размерности n называется пара $(\mathbf{E}_n, g)$, состоящая из n-мерного векторного пространства $\mathbf{E}_n$ и билинейного отображения*

$$g : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \to \mathbf{R},$$

удовлетворяющего аксиомам:

1° $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ *при любых* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{E}_n$ *(симметричность g).*

2° $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \implies g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ *(положительная определенность g).*

Евклидовым аффинным пространством размерности n называется аффинное пространство $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$, ассоциированное с n-мерным евклидовым векторным пространством $\mathbf{E}_n$.

Значение $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ отображения g на векторах $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется скалярным произведением этих векторов и обозначается* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Для обозначения евклидовых пространств $(\mathbf{E}_n, g)$ и $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$ в дальнейшем будем использовать, для краткости, только символы $\mathbf{E}_n$ и $\mathcal{E}_n$ соответственно.

Замечание. Билинейные отображения вида $\varphi : \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{R}$ называют *билинейными формами.* Со всякой симметричной билинейной формой φ ассоциируется отображение $\psi : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}$ называемое *квадратичной формой, ассоциированной с билинейной формой φ.*

Если $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — базис в евклидовом векторном пространстве $\mathbf{E}_n$, то скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^j \mathbf{e}_j$ вычисляется по формулам аналогичным (16):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j) = a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} a^i b^j, \tag{20}$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Примером n-мерного евклидова векторного пространства служит векторное пространство $\mathbf{R}^n$ со «стандартным» скалярным произведением $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n$, где $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$, $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, \ldots, b^n\}$.

Аффинное пространство $\mathbf{R}^n$, ассоциированное с евклидовым векторным пространством $\mathbf{R}^n$, является примером n-мерного евклидова аффинного пространства.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ евклидова векторного пространства $\mathbf{E}_n$ называются (взаимно) *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Ортогональность векторов обозначается следующим образом: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{E}_n$, скалярный квадрат которого равен единице, то есть такой, что $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$, называется *единичным*. Базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, в $\mathbf{E}_n$, называется *ортонормированным*, если входящие в него векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ являются единичными и взаимно ортогональными. Это эквивалентно тому, что матрица (g_{ij}), составленная из скалярных произведений векторов базиса $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ является единичной: $g_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — так называемые символы Кронекера: $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$.

Предложение. *Во всяком евклидовом векторном пространстве* $(\mathbf{E}_n, g)$ *имеется ортонормированный базис.*

Доказательство. Построить ортонормированный базис в $\mathbf{E}_n$ можно следующим образом. Пусть $\mathbf{a}_1$ — произвольный ненулевой вектор. Поделив его на $\sqrt{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}$, получим единичный вектор $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}}$. Если $n = 1$, то вектор $\mathbf{e}_1$ образует ортонормированный базис в $\mathbf{E}_1$.

Если $n > 1$, возьмем произвольный вектор $\mathbf{a}_2$ такой, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимы. Рассмотрим линейную комбинацию $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \lambda \mathbf{e}_1$. Можно найти такое число λ, что вектор $\mathbf{b}_2$ будет ортогонален вектору $\mathbf{e}_1$. Действительно, $(\mathbf{b}_2, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) + \lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) + \lambda$. Поэтому, $(\mathbf{b}_2, \mathbf{e}_1) = 0$ при $\lambda = -(\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1)$. Очевидно, вектор $\mathbf{b}_2$ ненулевой, поэтому, полагая $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\sqrt{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}}$, получим два единичных взаимно ортогональных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Если $n = 2$, то они образуют ортонормированный базис в $\mathbf{E}_2$.

Если $n > 2$, применим метод математической индукции.

Заметим сначала, что всякий набор единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ является линейно независимым. Действительно, если $\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$, то $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) = \lambda_1 = 0$, $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2) = \lambda_2 = 0$, $\ldots$, $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_k) = \lambda_k = 0$.

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$, $k < n$, — единичные и взаимно ортогональные. Поскольку $k < n$, то найдется такой вектор $\mathbf{a}_{k+1}$, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ являются линейно независимыми (иначе всякий вектор из $\mathbf{E}_n$ будет являться линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$, что противоречит основной лемме о линейной зависимости векторов). Рассмотрим линейную комбинацию

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1} + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{e}_k. \tag{21}$$

Можно найти такие числа λ_i, $i = 1, \ldots, k$, при которых вектор (21) ортогонален каждому из векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$. Имеем $(\mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{e}_i) + \lambda_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \lambda_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_i) + \ldots + \lambda_k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{e}_i) + \lambda_i$. Поэтому $(\mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = 0$ при $\lambda_i = -(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{e}_i)$. Полагая

$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{b}_{k+1}}{\sqrt{(\mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+1})}},$$

получим набор единичных взаимно ортогональных векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k+1}\}$. $\square$

Если $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ — ортонормированный базис в евклидовом векторном пространстве $\mathbf{E}_n$, то $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ и формула (20) для вычисления скалярного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n. \tag{22}$$

Определение. *Пусть* $\mathbf{E}_n$ *и* $\mathbf{E}'_n$ *— евклидовы векторные пространства. Изоморфизм* $\Phi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$ *векторных пространств называется изоморфизмом евклидовых векторных пространств, если для любых* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{E}_n$ *выполняется*

$$(\Phi(\mathbf{a}), \Phi(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Предложение. *Любые два евклидовых векторных пространства одной размерности* $(\mathbf{E}_n, g)$ *и* $\mathbf{E}'_n, g')$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ — ортонормированный базис в пространстве $(\mathbf{E}_n, g)$, а $\{\mathbf{e}'_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — ортонормированный базис в пространстве $(\mathbf{E}'_n, g')$. Изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i \quad \longmapsto \quad \Phi(\mathbf{a}) = a^i \mathbf{e}'_i \in \mathbf{E}'_n$$

является изоморфизмом евклидовых векторных пространств, поскольку (см. (22))

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n = (\Phi(\mathbf{a}), \Phi(\mathbf{b})). \qquad \square$$

В частности, отображение $\{\mathbf{e}_i\} : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \{a^i\} = \{a^1, \ldots, a^n\} \in \mathbf{R}^n$, относящее вектору $\mathbf{a}$ набор его координат $\{a^i\}$ относительно ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, — изоморфизм евклидовых векторных пространств.

Таким образом, с точностью до изоморфизма, имеется только одно евклидово векторное пространство данной размерности n. В частности, все евклидовы векторные пространства размерности 3 изоморфны пространству свободных векторов геометрического пространства со стандартным скалярным произведением векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi$.

Всякое подпространство в евклидовом векторном пространстве само является евклидовым векторным пространством.

Предложение. *Пусть* $(\mathbf{E}_n, g)$ *— евклидово векторное пространство,* $\mathbf{E}'_m \subset \mathbf{E}_n$ *— подпространство в* $\mathbf{E}_n$ *и*

$$g' = g|_{\mathbf{E}'{}_m \times \mathbf{E}'_m} : \mathbf{E}'_m \times \mathbf{E}'_m \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \ \mapsto \ g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R}$$

— ограничение билинейного отображения g *на подпространство* $\mathbf{E}'_m$*. Тогда* $(\mathbf{E}'_m, g')$ *— евклидово векторное пространство.*

Доказательство. Пара $(\mathbf{E}'_m, g')$ очевидным образом удовлетворяет всем условиям определения евклидова векторного пространства. $\square$

Определение. *Пусть* $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$ *и* $(\mathcal{E}', \mathbf{E}', \psi')$ *— два евклидовых аффинных пространства. Изоморфизм аффинных пространств* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *называется изоморфизмом евклидовых аффинных пространств, если ассоциированный изоморфизм векторных пространств* $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'{}_n$ *является изоморфизмом евклидовых векторных пространств.*

Предложение. *Любые два евклидова аффинных пространства одной размерности* $\mathcal{E}_n$ *и* $\mathcal{E}'_n$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\{O, \mathbf{e}_i\}$ — произвольный ортонормированный репер в $\mathcal{E}_n$, а $\{O', \mathbf{e}'{}_i\}$ — произвольный ортонормированный репер в $\mathcal{E}'_n$, тогда отображение Φ, относящее точке $M \in \mathcal{E}_n$, имеющей координаты (x^i_M) относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$, точку $M' \in \mathcal{E}'_n$, имеющую те же самые координаты

(x^i_M) относительно репера $\{O', \mathbf{e}'_i\}$, является изоморфизмом евклидовых аффинных пространств $\Phi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_n$. $\square$

Из этого предложения следует, что, с точностью до изоморфизма, существует только одно евклидово аффинное пространство данной размерности n. В частности, все евклидовы аффинные пространства размерности 3 изоморфны геометрическому пространству и евклидову аффинному пространству $\mathbf{R}^3$.

Очевидно, всякая m-плоскость π_m в $\mathcal{E}_n$ является m-мерным евклидовым аффинным пространством.

Замечание. На всяком векторном пространстве $\mathbf{V}_n$, задав произвольным образом симметричную положительно определенную билинейную форму $g : \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{R}$, можно ввести структуру евклидова векторного пространства. Это можно осуществить, например, следующим образом: выбрав произвольный базис $\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{V}_n$, положить $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \delta_{ij} a^i b^j = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \ldots + a^n b^n$. Указанным способом можно ввести также новое скалярное произведение в евклидовом векторном пространстве (в котором одно скалярное произведение уже есть). Если ввести структуру евклидова пространства на векторном пространстве $\mathbf{V}_n$, ассоциированном с аффинным пространством $\mathcal{A}_n$, то тем самым на пространстве $\mathcal{A}_n$ будет введена структура евклидова аффинного пространства.

Введение структуры евклидова пространства в аффинном пространстве может быть использовано при решении конкретных задач. Примером может служить следующая задача.

Задача 15. На аффинной плоскости $\mathcal{A}_2$ дана трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами AB и CD. Доказать, что точка пересечения диагоналей AC и BD лежит на прямой, проходящей через середины оснований AB и CD.

Решение. Пусть O — середина AB, а E — середина CD (см. рис. 27). Введем на $\mathcal{A}_2$ скалярное произведение, по отношению к которому $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ — единичные взаимно ортогональные векторы. Снабженная этим скалярным произведением, $\mathcal{A}_2$ превращается в евклидову плоскость $\mathcal{E}_2$, на которой трапеция $ABCD$ является равнобочной и, следовательно, симметричной относительно прямой OE.

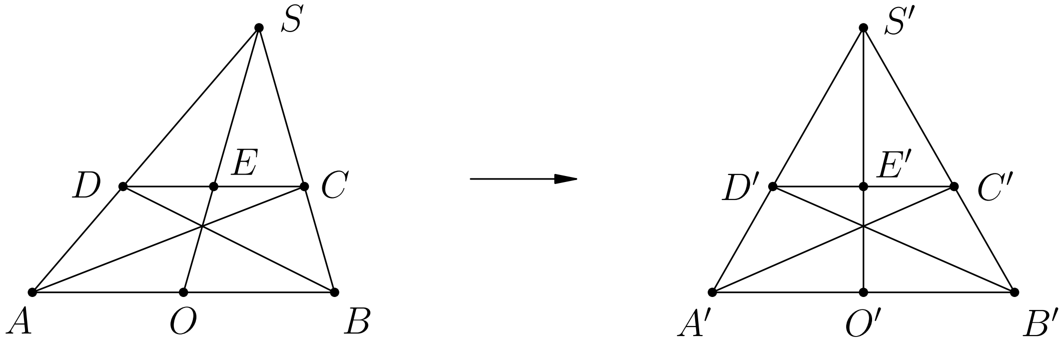

Рис. 27.

В евклидовых пространствах вводятся понятия модуля вектора, угла между векторами и расстояния между точками. *Модулем* вектора $\mathbf{a}$ в $\mathbf{E}_n$ называется число

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Углом между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в $\mathbf{E}_n$ называется число $\varphi \in [0, \pi]$, однозначно определяемое соотношением

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Расстоянием между точками A и B в $\mathcal{E}_n$ называется число

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|.$$

Сформулированные в настоящем параграфе определения позволяют аксиоматизировать геометрическое пространство и геометрическую плоскость, определяя их, соответственно, как трехмерное и двумерное евклидовы аффинные пространства. В дальнейшем для геометрических пространства и плоскости будем использовать, соответственно, обозначения $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{E}_2$. Ассоциированные пространства векторов будем обозначать следующим образом: $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{E}_2$.

Рекомендуемая литература: [7], лекции 13, 14; [1], глава I, §4, глава XVI, §2; [5], глава 2, §§1, 2.

Задачи и упражнения: [2], 1198, 1199, 1201, 1202, 11203, 1204, 1208, 1210, 1211, 1215, 1216, 1219, 55, 63, 65, 154, 155, 156, 159, 160; [4], темы 6–8.

5 Операция поворота вектора на угол α на плоскости.

5.1 Поворот вектора на угол α на ориентированной плоскости.

Геометрическая (евклидова) плоскость $\mathcal{E}_2$ называется *ориентированной*, если на ней зафиксировано положительное направление отсчета углов. Базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ называется *правым*, если направление кратчайшего поворота от вектора $\mathbf{e}_1$ к вектору $\mathbf{e}_2$ является положительным. Репер $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ называется *правым*, если правым является базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Базисы и реперы, не являющиеся правыми, называются *левыми*. На чертежах принято считать положительным направление отсчета углов против часовой стрелки.

Правый ортонормированный репер на плоскости принято обозначать следующим образом $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Координаты вектора $\mathbf{a}$ и точки A в этом случае обозначают, соответственно, следующим образом: $\{x_\mathbf{a}; y_\mathbf{a}\}$ и $(x_A; y_A)$.

Формула для скалярного произведения принимает вид $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_\mathbf{a} x_\mathbf{b} + y_\mathbf{a} y_\mathbf{b}$.

Вектор $\mathbf{e}(\varphi)$, получающийся поворотом вектора $\mathbf{i}$ на (ориентированный) угол φ, имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi.$$

Используя этот вектор, произвольный вектор $\mathbf{a}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi_\mathbf{a}),$$

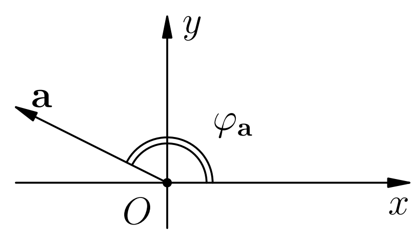

Рис. 28.

где $\varphi_\mathbf{a}$ — угол, на который нужно повернуть вектор $\mathbf{i}$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\mathbf{a}$. При этом

$$x_\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi_\mathbf{a}, \quad y_\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\sin\varphi_\mathbf{a}.$$

Рассмотрим отображение

$$\Phi_\alpha : \ \mathbf{E}_2 \ni \mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi_\mathbf{a}) \quad \longmapsto \quad \Phi_\alpha(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\mathbf{e}(\varphi_\mathbf{a} + \alpha) \in \mathbf{E}_2,$$

поворачивающее векторы плоскости на угол α.

Имеем:

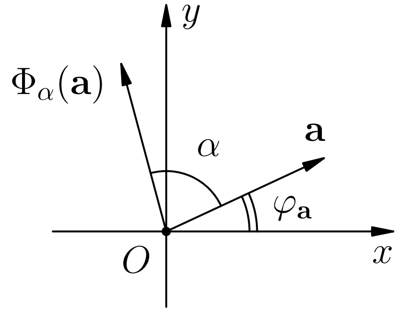

Рис. 29.

$$\Phi_\alpha(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\Big(\mathbf{i}\cos(\varphi_{\mathbf{a}} + \alpha) + \mathbf{j}\sin(\varphi_{\mathbf{a}} + \alpha)\Big) =$$

$$= \mathbf{i}(x_{\mathbf{a}}\cos\alpha - y_{\mathbf{a}}\sin\alpha) + \mathbf{j}(y_{\mathbf{a}}\cos\alpha + x_{\mathbf{a}}\sin\alpha).$$

Таким образом, в координатах отображение Φ_α имеет вид:

$$\Phi_\alpha : \{x_{\mathbf{a}}; y_{\mathbf{a}}\} \mapsto \{x_{\mathbf{a}}\cos\alpha - y_{\mathbf{a}}\sin\alpha;\ x_{\mathbf{a}}\sin\alpha + y_{\mathbf{a}}\cos\alpha\}. \tag{23}$$

Предложение. $\Phi_\alpha : \mathbf{E}_2 \to \mathbf{E}_2$ — *изоморфизм евклидовых векторных пространств.*

Это утверждение очевидно из геометрических соображений, для его доказательства можно также воспользоваться формулой (23).

Формулу (23) удобно записывать в следующем матричном виде:

$$\Phi_\alpha : \begin{pmatrix} x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \tag{24}$$

В линейной алгебре матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного оператора Φ_α в данном базисе (см. [1], глава XIII, §2). Ее столбцы состоят из координат векторов $\Phi_\alpha(\mathbf{i})$ и $\Phi_\alpha(\mathbf{j})$.

Замечание. Пусть $\Phi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ — произвольное линейное отображение и $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторый базис в $\mathbf{V}_n$. Тогда

$$\Phi(\mathbf{a}) = \Phi(a^i\mathbf{e}_i) = a^i\Phi(\mathbf{e}_i) = \Phi_i^k a^i \mathbf{e}_k, \qquad \Phi(\mathbf{e}_i) = \Phi_i^k \mathbf{e}_k.$$

Таким образом, если $\mathbf{b} = \Phi(\mathbf{a})$, то

$$b^k = \Phi_i^k a^i. \tag{25}$$

Записывая координаты $\{a^i\}$ и $\{b^i\}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ столбцами и рассматривая матрицу

$$(\Phi_i^k) = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \ldots & \Phi_n^1 \\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & \ldots & \Phi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^n & \Phi_2^n & \ldots & \Phi_n^n \end{pmatrix}, \tag{26}$$

столбцы которой состоят из координат образов $\Phi(\mathbf{e}_i)$ векторов базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ относительно этого же базиса, соотношение (25) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \dots & \Phi_n^1 \\ \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & \dots & \Phi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^n & \Phi_2^n & \dots & \Phi_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Матрица (26) называется *матрицей линейного отображения (оператора)* Φ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$.

Задача 16. Вывести формулу (24) как частный случай общей формулы (27).

Для операции поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$ принято использовать следующее обозначение:

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{a}) = [\mathbf{a}].$$

Формула (23) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ принимает вид

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}} : \{x_{\mathbf{a}}; y_{\mathbf{a}}\} \mapsto \{-y_{\mathbf{a}}; x_{\mathbf{a}}\}. \qquad (28)$$

Ее можно также представить в следующем виде:

$$[\mathbf{a}] = \begin{vmatrix} x_{\mathbf{a}} & \mathbf{i} \\ y_{\mathbf{a}} & \mathbf{j} \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Задача 17. Вычислить матрицу линейного оператора $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и записать соответствующую формулу (24).

Ответ.

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}} : \begin{pmatrix} x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{a}} \end{pmatrix}$$

5.2 Применение операции поворота вектора при решении задач.

Задача 18. Даны две вершины $A(2;1)$ и $B(6;3)$ равностороннего треугольника ABC. Найти третью его вершину, если известно, что обход вершин треугольника в порядке $A \to B \to C \to A$ является движением по часовой стрелке. Система координат прямоугольная.

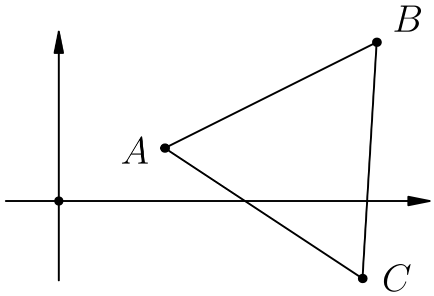

Рис. 30.

Решение. См. рисунок 30. Поскольку на геометрической плоскости положительным считается вращение против часовой стрелки, то $\overrightarrow{AC} = \Phi_{-\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{AB})$. Имеем: $\overrightarrow{AB} = \{4; 2\}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = \{(4\cos(-\frac{\pi}{3}) - 2\sin(-\frac{\pi}{3}); 2\cos(-\frac{\pi}{3}) + 4\sin(-\frac{\pi}{3})\} = \{2+\sqrt{3}; 1-2\sqrt{3}\}$. Пользуясь формулой $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AC}$, находим $\mathbf{r}_C = \{4+\sqrt{3}; 2-2\sqrt{3}\}$.

Задача 19. Составить уравнения траектории, описываемой точкой M, лежащей на окружности ω радиуса R, катящейся без скольжения по данной прямой ℓ (циклоида).

Решение. См. рисунок 31.

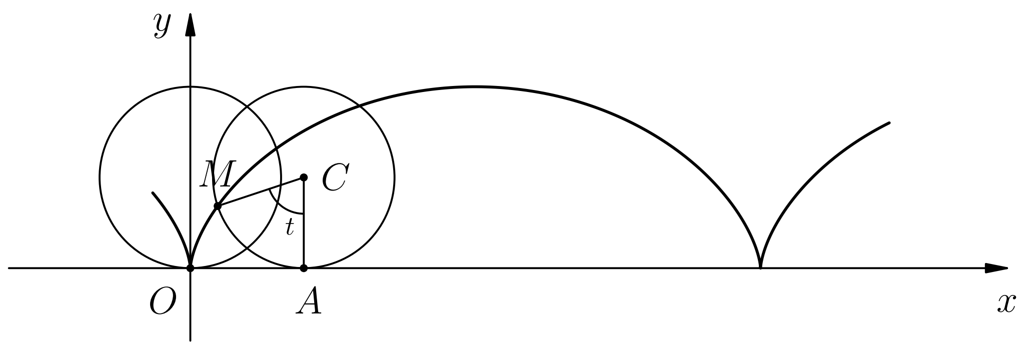

Рис. 31.

Выберем ортонормированный репер $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ на плоскости следующим образом: за начало репера возьмем одно из положений точки M, когда она оказывается на прямой ℓ, в качестве вектора $\mathbf{i}$ возьмем единичный направляющий вектор прямой ℓ, и будем предполагать, что вектор $\mathbf{j}$ направлен от прямой ℓ в ту сторону, где расположена окружность. Пусть C — центр окружности в фиксированный момент времени, A — точка касания ω и ℓ, а $t = \angle ACM$. Имеем: $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ (руководствуемся правилом замыкания ломаной!), $|\overrightarrow{OA}| = |\smile AM| = Rt$, следовательно, $\overrightarrow{OA} = Rt\,\mathbf{i}$. Далее, $\overrightarrow{AC} = R\,\mathbf{j}$, $\overrightarrow{CM} = R\,\mathbf{e}(\frac{3\pi}{2} - t)$. Поэтому $\mathbf{r}_M = Rt\,\mathbf{i} + R\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{e}(\frac{3\pi}{2} - t) = \{Rt - R\sin t; R - R\cos t\}$.

Задача 20. По окружности ω, заданной уравнением $x^2+y^2 = R^2$, катится без скольжения прямая ℓ, начальное положение которой $x = R$. Составить уравнения траектории, описываемой точкой M, лежащей на ℓ, принимая за начальное ее положение точку $M_0(R;0)$ (эвольвента окружности).

Решение. См. рисунок 32. Пусть A — точка касания ω и ℓ, а $t = \angle M_0OA$. Имеем: $\overrightarrow{OA} = R\,\mathbf{e}(t)$, $|\overrightarrow{AM}| = |\smile AM_0| = Rt$, следовательно, $\overrightarrow{AM} = Rt\,\mathbf{e}(t-\frac{\pi}{2})$. Поэтому $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = R\,\mathbf{e}(t) + Rt\,\mathbf{e}(t-\frac{\pi}{2}) = \{R\cos t + Rt\sin t; R\sin t - Rt\cos t\}$.

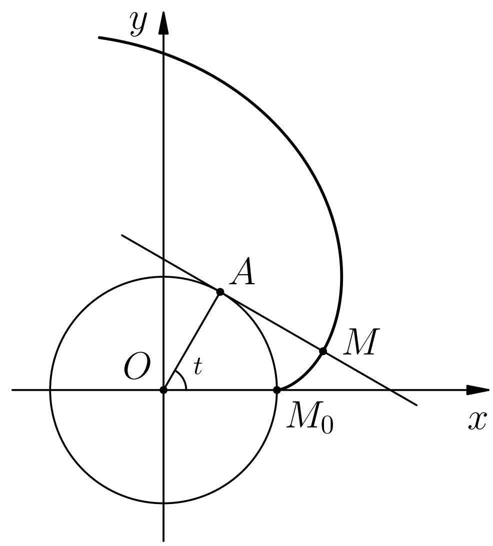

Рис. 32.

Задачи и упражнения: [2], 146, 147, 149, 151, 152, 153, 372, 374, 382, 380, 383, 384; [4], тема 9.

6 Косое произведение векторов на плоскости.

Определение. *Косым произведением векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *на ориентированной плоскости называется следующее число*:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = ([\mathbf{a}], \mathbf{b}).$$

В системе координат, определяемой правым ортонормированным репером $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, учитывая (9), получаем

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -y_{\mathbf{a}}x_{\mathbf{b}} + x_{\mathbf{a}}y_{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} x_{\mathbf{a}} & y_{\mathbf{a}} \\ x_{\mathbf{b}} & y_{\mathbf{b}} \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Алгебраические свойства косого произведения.

1° $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ (кососимметричность).

2° $\varepsilon : \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_2 \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbf{R}$ — билинейное отображение.

Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться или координатной формулой (30) или свойствами скалярного произведения и операции поворота на угол $\frac{\pi}{2}$.

Из 1°, в частности, следует, что $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$.

Пользуясь свойствами 1° и 2°, легко получить формулу для вычисления косого произведения в произвольном аффинном репере $\{O; \mathbf{e}_i\}$ на $\mathcal{E}_2$: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j \rangle = a^i b^j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \varepsilon_{ij} a^i b^j = \varepsilon_{12} a^1 b^2 + \varepsilon_{21} a^2 b^1$, где $\varepsilon_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. Таким образом,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \varepsilon_{12} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Геометрические свойства косого произведения.

Для косого произведения имеется следующая формула, аналогичная формуле, по которой определяется скалярное произведение векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi, \tag{31}$$

где $\varphi = \varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}$ — угол *от вектора* $\mathbf{a}$ *до вектора* $\mathbf{b}$.

Действительно,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = ([\mathbf{a}], \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\varphi_{\mathbf{a}} + \frac{\pi}{2} - \varphi_{\mathbf{b}}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}).$$

Из формулы (31) вытекают следующие свойства косого произведения:

1) $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

2) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0 \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ — правый базис.
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0 \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ — левый базис.
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \iff \mathbf{a} || \mathbf{b}$.

3) Имеет место следующая формула для площади треугольника ABC на плоскости:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}.$$

4) Для треугольника ABC на плоскости: $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle > 0$, если обход вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ представляет собой движение вокруг треугольника в положительном направлении (против часовой стрелки), и $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle < 0$, если обход вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ является движением по часовой стрелке.

Замечания.

1. На ориентированной евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ параллелограмм $ABCD = \mathrm{P}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ с заданным направлением обхода вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$ называется *ориентированным* параллелограммом. Число

$$\widetilde{S}_{ABCD} = \langle\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\, \rangle \tag{32}$$

при этом называют *ориентированной* или *относительной* площадью ориентированного параллелограмма $ABCD$.

2. Аналогично, для *ориентированного* треугольника ABC, то есть треугольника с заданным направлением обхода вершин, на ориентированной плоскости $\mathcal{E}_2$ определено число

$$\widetilde{S}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\langle\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\, \rangle, \tag{33}$$

называмое *ориентированной* или *относительной* площадью этого ориентированного треугольника.

Задача 21. Проверить, что значения ориентированных площадей (32) и (33) не меняются при циклической перестановке вершин $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$ и $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ соответственно.

Задача 22. Найти высоту h_c треугольника ABC с вершинами $A(1;-2)$, $B(4;2)$, $C(2;4)$.

Решение. $h_c = 2S_{\triangle ABC}/|\overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} / \, 5 = \frac{14}{5}$.

Задачи и упражнения: [2], 98, 99, 101, 102, 103; [4], тема 10.

7 Прямая линия на аффинной плоскости.

7.1 Различные виды уравнений прямой на аффинной плоскости.

Прямая ℓ на аффинной плоскости $\mathcal{A}_2$ однозначно определяется произвольной своей точкой $M_0 \in \ell$ и одномерным направляющим подпространством $\mathbf{V}_1(\ell)$, состоящим из векторов параллельных ℓ. Всякий ненулевой вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_1(\ell)$ называется *направляющим вектором* прямой ℓ. При этом пара $\{M_0; \mathbf{a}\}$ является аффинным репером на прямой ℓ, рассматриваемой как одномерное аффинное пространство.

Пусть $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathcal{A}_2$ по отношению к реперу $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{O; \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2$.

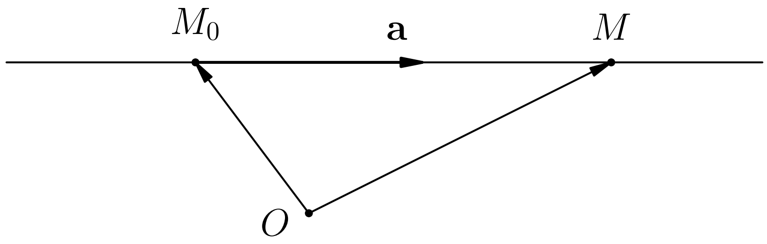

Рис. 33.

Имеем: $M \in \ell \iff \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{V}_1(\ell) \iff \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}$ для некоторого $t \in \mathbf{R} \iff \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}$. Отсюда получаем уравнения прямой, называемые *параметрическими*:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \iff x^i = x_0^i + ta^i, \ i = 1, 2. \tag{34}$$

Отметим, что в уравнениях (34) параметр t представляет собой координату точки M в репере $\{M_0; \mathbf{a}\}$ на прямой ℓ.

Исключая параметр t из уравнений (34), получаем так называемое *каноническое* уравнение прямой

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2}.$$

Уравнение прямой ℓ можно получить также, записывая условия линейной зависимости векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $t\mathbf{a}$:

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Раскрывая определитель в уравнении (35), получаем $a^2(x^1 - x_0^1) - a^1(x^2 - x_0^2) = 0$, что позволяет задать прямую ℓ уравнением первой степени

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0, \tag{36}$$

где $A_1 = a^2$, $A_2 = -a^1$. Уравнение (36) называют *общим уравнением прямой* ℓ.

Предложение. *Уравнение первой степени* (36) $(A_1^2 + A_2^2 \neq 0)$ *задает прямую на* $\mathcal{A}_2$ *с направляющим вектором* $\mathbf{a} = \{-A_2; A_1\}$.

Доказательство. Пусть $(x_0^1; x_0^2)$ — произвольное решение уравнения (36), то есть, $A_1 x_0^1 + A_2 x_0^2 + A_3 = 0$. Вычитая это соотношение из (36), получим $A^1(x^1 - x_0^1) + A^2(x^2 - x_0^2) = 0$, что является уравнением прямой ℓ, имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = \{-A_2; A_1\}$ и проходящей через точку M_0 с координатами $(x_0^1; x_0^2)$.

Следствия. *Вектор* $\mathbf{a}$ *параллелен прямой* ℓ*, заданной уравнением* (36)*, тогда и только тогда, когда*

$$A_1 a^1 + A_2 a^2 = 0.$$

Прямая ℓ*, заданная уравнением* (36)*, параллельна координатной оси* Ox^1 *тогда и только тогда, когда* $A_1 = 0$.

Прямая ℓ*, заданная уравнением* (36)*, параллельна координатной оси* Ox^2 *тогда и только тогда, когда* $A_2 = 0$.

Пусть две прямые ℓ и ℓ' заданы, соответственно, уравнениями $A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 = 0$ и $A_1' x^1 + A_2' x^2 + A_3' = 0$. Тогда:

Прямые ℓ и ℓ' параллельны в строгом смысле слова тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2} \neq \frac{A_3'}{A_3}.$$

Прямые ℓ и ℓ' совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2} = \frac{A_3'}{A_3}.$$

Прямые ℓ и ℓ' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1'}{A_1} \neq \frac{A_2'}{A_2}.$$

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Для составления *уравнения прямой* ℓ*, проходящей через две точки* $A(x_A^1; x_A^2)$ и $B(x_B^1; x_B^2)$, достаточно взять точку A за M_0, а вектор $\overrightarrow{AB}$ за направляющий вектор $\mathbf{a}$. В результате получим следующие уравнения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + t(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \quad \Longleftrightarrow \quad x^i = x_A^i + t(x_B^i - x_A^i), \quad i = 1, 2, \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{x^1 - x_A^1}{x_B^1 - x_A^1} = \frac{x^2 - x_A^2}{x_B^2 - x_A^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x^1 - x_A^1 & x^2 - x_A^2 \\ x_B^1 - x_A^1 & x_B^2 - x_A^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение прямой в отрезках. Если известны точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$ пересечения прямой ℓ с осями координат Ox^1 и Ox^2 (a и b — отрезки, отсекаемые прямой ℓ на осях координат), то уравнение прямой ℓ можно записать в виде

$$\frac{x^1}{a} + \frac{x^2}{b} = 1. \tag{37}$$

Уравнение (37) называется *уравнением прямой в отрезках.*

7.2 Взаимное расположение двух точек относительно прямой.

Пусть задана прямая ℓ с уравнением $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$ и пара точек $P(x^i_P)$ и $Q(x^i_Q)$, не лежащих на прямой ℓ. Введем функцию $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, полагая $\alpha(x^1, x^2) = A_1x^1 + A_2x^2 + A_3$.

Предложение. *Точки $P(x^i_P)$ и $Q(x^i_Q)$ лежат по одну сторону от прямой ℓ тогда и только тогда, когда $\operatorname{sgn}\alpha(x^i_P) = \operatorname{sgn}\alpha(x^i_Q)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что P и Q лежат по разные стороны от прямой ℓ. Пусть K — точка пересечения прямых ℓ и PQ. Тогда $\lambda = (PQK) > 0$ и $x^i_K = \frac{x^i_P + \lambda x^i_Q}{1+\lambda}$. Так как $K \in \ell$, то

$$A_1\frac{x^1_P + \lambda x^1_Q}{1+\lambda} + A_2\frac{x^2_P + \lambda x^2_Q}{1+\lambda} + A_3 = 0,$$

что эквивалентно тому, что $\alpha(x^i_P) + \lambda\alpha(x^i_Q) = 0$, откуда $-\frac{\alpha(x^i_P)}{\alpha(x^i_Q)} = \lambda > 0$, следовательно, $\operatorname{sgn}\alpha(x^i_P) = -\operatorname{sgn}\alpha(x^i_Q)$.

Пусть теперь P и Q лежат по одну сторону от ℓ, и S — некоторая точка, лежащая по другую сторону от ℓ. Тогда $\operatorname{sgn}\alpha(x^i_P) = -\operatorname{sgn}\alpha(x^i_S) = \operatorname{sgn}\alpha(x^i_Q)$. $\square$

Задача 23. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(x^1_0; x^2_0)$ параллельно данной прямой ℓ с уравнением $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$.

Решение. Очевидно, что искомое уравнение имеет вид

$$A_1(x^1 - x^1_0) + A_2(x^2 - x^2_0) = 0.$$

Задача 24. Определить положение прямой ℓ, имеющей уравнение $x^1 - 7x^2 + 5 = 0$, относительно треугольника ABC с вершинами $A(3;1)$, $B(-2;4)$, $C(1;0)$.

Решение. См. рисунок 34. Имеем: $\alpha(x^i_A) = 1 > 0$, $\alpha(x^i_B) = -25 < 0$, $\alpha(x^i_C) = 6 > 0$. Следовательно, ℓ пересекает стороны AB и BC. Пусть K — точка пересечения ℓ с прямой AC. Так как простое отношение

$$(ACK) = \frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KC}} = -\frac{\alpha(x^i_A)}{\alpha(x^i_C)} = -\frac{1}{6},$$

то $|\overrightarrow{AK}| < |\overrightarrow{KC}|$, поэтому ℓ пересекает продолжение стороны AC за точку A.

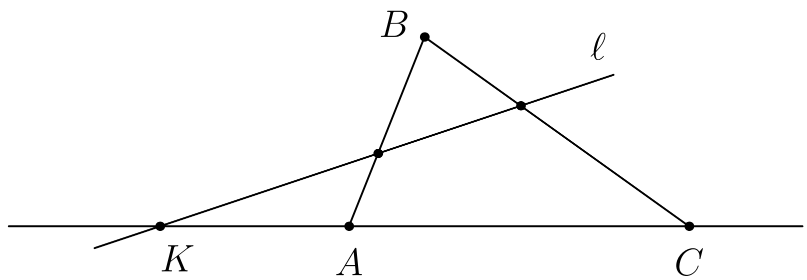

Рис. 34.

Рекомендуемая литература: [7], лекции 5, 6; [1], глава I, §5; [5], глава 5, §1.

Задачи и упражнения: [2], 173, 174, 178, 181, 187, 189, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 201, 202, 206, 207, 209, 236, 237, 238, 246, 247; [4], тема 12.

7.3 Уравнение пучка прямых и его применение.

Пусть даны две пересекающиеся (различные) прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные, соответственно, уравнениями $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$ и $B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0$. Решение $x^1 = x^1_0; x^2 = x^2_0$ системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0 \\ B_1x^1 + B_2x^2 + B_3 = 0, \end{cases}$$

которое в данном случае существует и единственно, определяет точку $M(x^1_0; x^2_0)$ пересечения ℓ_1 и ℓ_2. При любых λ и μ, не равных нулю одновременно, уравнение

$$\lambda(A_1x^1 + A_2x^2 + A_3) + \mu(B_1x^1 + B_2x^2 + B_3) = 0 \qquad (38)$$

задает некоторую прямую ℓ, проходящую через точку $M(x_0^1; x_0^2)$. Поскольку направляющий вектор прямой ℓ является линейной комбинацией $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ направляющих векторов $\mathbf{a}=\{-A_2; A_1\}$ и $\mathbf{b}=\{-B_2; B_1\}$ прямых ℓ_1 и ℓ_2, образующих базис векторного пространства $\mathbf{V}_2$, ассоциированного с $\mathcal{A}_2$, уравнение всякой прямой, проходящей через точку $M(x_0^1; x_0^2)$, можно представить в виде (38) при некоторых λ и μ.

Совокупность прямых, проходящих через одну точку $M(x_0^1; x_0^2)$, называется *пучком прямых.* Точка $M(x_0^1; x_0^2)$ при этом называется *центром пучка.* Очевидно, пучок прямых с центром $M(x_0^1; x_0^2)$ задается уравнением

$$A_1(x^1-x_0^1)+A_2(x^2-x_0^2)=0.$$

Если ℓ_1 и ℓ_2 — две различные прямые, принадлежащие некоторому пучку, то произвольная прямая пучка имеет уравнение (38) при некоторых λ и μ, поэтому уравнение (38) — это уравнение пучка прямых.

Пусть три прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, среди которых имеются две непараллельные, заданы, соответственно, уравнениями: $A_1x^1+A_2x^2+A_3=0$, $B_1x^1+B_2x^2+B_3=0$ и $C_1x^1+C_2x^2+C_3=0$. Эти три прямые принадлежат некоторому пучку, то есть, пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда совместна система уравнений

$$\begin{cases} A_1x^1+A_2x^2+A_3=0\\ B_1x^1+B_2x^2+B_3=0\\ C_1x^1+C_2x^2+C_3=0 \end{cases}. \tag{39}$$

Условием совместности системы (39) является равенство нулю определителя основной матрицы этой системы:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 с уравнениями $A_1x^1+A_2x^2+A_3=0$ и $B_1x^1+B_2x^2+B_3=0$ параллельны (но не совпадают), то всякая прямая, имеющая уравнение (38) при некоторых λ и μ, параллельна ℓ_1 и ℓ_2. Не трудно показать, что в этом случае всякая прямая, параллельная ℓ_1 и ℓ_2, может быть задана уравнением (38) при некоторых λ и μ. Всю совокупность прямых (38) при этом также называют пучком (несобственным) прямых.

Следующие примеры показывают, как пучки могут эффективно применяться при решении геометрических задач.

Задача 25. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x^1+2x^2+5=0$ и $2x^1-3x^2-2=0$ и параллельной прямой $8x^1+2x^2+7=0$.

Решение. Уравнение искомой прямой ℓ можно записать в виде:

$$\lambda(x^1+2x^2+5)+\mu(2x^1-3x^2-2)=0 \iff$$

$$(\lambda+2\mu)x^1+(2\lambda-3\mu)x^2+(5\lambda-2\mu)=0.$$

Так как ℓ параллельна прямой $8x^1+2x^2+7=0$, то $\frac{\lambda+2\mu}{8}=\frac{2\lambda-3\mu}{2}$, откуда $\lambda=2$, $\mu=1$ (λ и μ существенны с точностью до пропорциональности $\lambda:\mu$) и, следовательно, искомая прямая имеет уравнение $4x^1+x^2+8=0$.

Задача 26. (Теорема Чевы) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC даны точки C_0, A_0 и B_0 такие, что $(BCA_0)=\lambda_1$, $(CAB_0)=\lambda_2$ и $(ABC_0)=\lambda_3$. Доказать, что прямые AA_0, BB_0 и CC_0 принадлежат одному пучку (то есть, пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$.

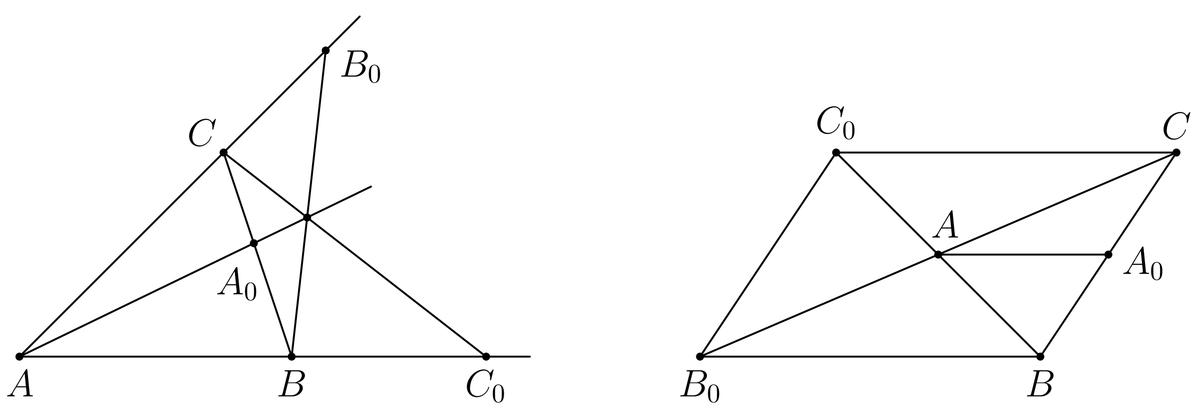

Рис. 35.

Решение. См. рисунок 35. Рассмотрим аффинный репер $\{O;\mathbf{e}_i\}$, где $O=A$, $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2=\overrightarrow{AC}$. В этом репере вершины треугольника и рассматриваемые на его сторонах точки имеют следующие координаты:

$A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $A_0\left(\frac{1}{1+\lambda_1};\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)$, $B_0\left(0;\frac{1}{1+\lambda_2}\right)$, $C_0\left(\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3};0\right)$. Пользуясь уравнением прямой в отрезках, получаем, соответственно, следующие уравнения прямых AA_0, BB_0 и CC_0:

$$\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}x^1-\frac{1}{1+\lambda_2}x^2=0,\qquad x^1+(1+\lambda_3)x^2=1,\qquad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}x^1+x^2=1.$$

Эти три прямые принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix}\lambda_2 & -1 & 0\\ 1 & 1+\lambda_3 & -1\\ 1+\lambda_1 & \lambda_1 & -\lambda_1\end{vmatrix}=0\quad\Longleftrightarrow\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=1.$$

Рекомендуемая литература: [7], лекция 24; [2], глава III.; [5], глава 5, §1.

Задачи и упражнения: [2], 251, 252, 253, 254, 255, 257; [4], тема 13.

8 Прямая линия на евклидовой плоскости.

8.1 Нормальный вектор прямой.

На евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ одномерное направляющее подпространство $\mathbf{V}_1(\ell)$ прямой ℓ однозначно определяется одномерным подпространством $\mathbf{V}_1^{\perp}(\ell)\subset\mathbf{E}_2$, состоящим из векторов, ортогональных прямой ℓ. Всякий ненулевой вектор из подпространства $\mathbf{V}_1^{\perp}(\ell)$ называется *нормальным вектором* прямой ℓ.

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей нормальный вектор $\mathbf{N}$. Пусть $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M\in\mathcal{E}_2$ по отношению к (аффинному) реперу $\{O;\mathbf{e}_i\}$, $i=1,2$. Тогда $M\in\ell\iff\overrightarrow{M_0M}\perp\mathbf{N}\iff(\overrightarrow{M_0M},\mathbf{N})=0\iff$

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{N})=0.\tag{40}$$

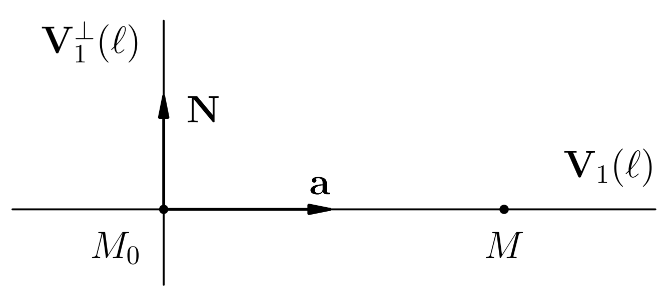

Рис. 36.

В координатах уравнение (40) принимает вид

$$g_{ij}(x^i - x^i_0)N^j = 0. \tag{41}$$

Если $\{O; \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}\}$ — ортонормированный репер, то $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), и в координатах $\mathbf{N}\{A; B\}$, $M(x; y)$, $M_0(x_0; y_0)$ уравнение (41) принимает вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{42}$$

Раскрывая скобки в (42), приходим к общему уравнению

$$Ax + By + C = 0 \tag{43}$$

прямой ℓ в прямоугольной системе координат.

Как следствие, получаем следующее

Предложение. *Для прямой ℓ, имеющей уравнение* (43) *в ортонормированном репере, вектор $\mathbf{N}\{A; B\}$ является нормальным вектором, а вектор $\mathbf{a}\{-B; A\}$ направляющим вектором.*

Замечание. Пара чисел $\{A_1; A_2\}$ имеет геометрический смысл и для прямой в аффинном пространстве, а именно, она является парой координат линейной функции $\xi : \mathbf{V}_2 \to \mathbf{R}$ на векторном пространстве $\mathbf{V}_2$. В случае евклидовой плоскости эта функция ξ имеет вид $\xi(\mathbf{v}) = (\mathbf{N}, \mathbf{v})$. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться при рассмотрении прямых и плоскостей в трехмерном пространстве.

8.2 Расстояние от точки до прямой.

В зависимости от того, как задана прямая ℓ на евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$, расстояние $\operatorname{dist}(M_1, \ell)$ от точки $M_1 \in \mathcal{E}_2$ до ℓ может быть найдено следующими способами:

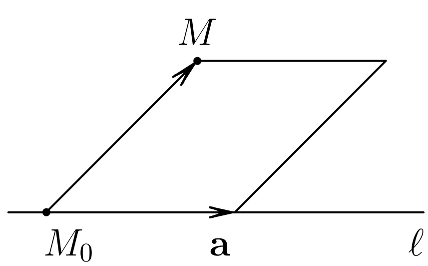

Рис. 37.

1. Предположим, что прямая ℓ задана точкой $M_0 \in \ell$ и направляющим вектором $\mathbf{a}\{x_{\mathbf{a}}; y_{\mathbf{a}}\}$. Тогда расстояние $\operatorname{dist}(M_1, \ell)$ находится как высота параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ (см. рис. 37):

$$\operatorname{dist}(M_1,\ell)=\frac{|\langle\, \overrightarrow{M_0M_1},\mathbf{a}\,\rangle|}{|\mathbf{a}|}=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0\\ x_{\mathbf{a}} & y_{\mathbf{a}}\end{vmatrix}}{\sqrt{x_{\mathbf{a}}^2+y_{\mathbf{a}}^2}}. \qquad (44)$$

2. Предположим, что прямая ℓ задана точкой $M_0\in\ell$ и нормальным вектором $\mathbf{N}$ с координатами $\{A;B\}$. Тогда расстояние $\operatorname{dist}(M_1,\ell)$ находится как абсолютная величина проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на ось с направляющим вектором $\mathbf{N}$ (см. рис. 38):

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(M_1,\ell)&=|\operatorname{pr}_{\mathbf{N}}(\overrightarrow{M_0M_1})|=\\ &=\frac{|(\overrightarrow{M_0M_1},\mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|}=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\end{aligned} \qquad (45)$$

Если прямая задана уравнением (43), то формулу (45) можно переписать, раскрывая скобки, в виде

$$\operatorname{dist}(M_1,\ell)=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

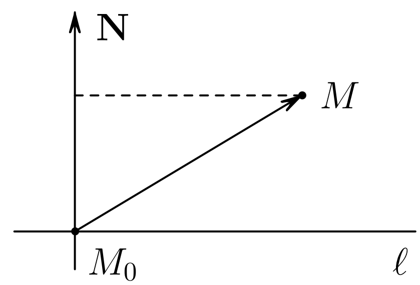

Рис. 38.

В аффинной системе координат, определяемой аффинным репером на $\mathcal{E}_2$, формулы (44) и (45) принимают, соответственно, вид

$$\operatorname{dist}(M_1,\ell)=\frac{|\varepsilon_{ij}(x_1^i-x_0^i)a^j|}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}}=\frac{|\varepsilon_{12}|\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1^1-x_0^1 & x_1^2-x_0^2\\ a^1 & a^2\end{vmatrix}}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}} \qquad (46)$$

и

$$\operatorname{dist}(M_1,\ell)=\frac{|g_{ij}(x_1^i-x_0^i)N^j|}{\sqrt{g_{km}N^kN^m}}. \qquad (47)$$

8.3 Угол между двумя прямыми линиями.

Углом между ориентированными прямыми $\ell_1\!\uparrow$ и $\ell_2\!\uparrow$ называется угол $\varphi\in[0,\pi]$ между их направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Этот угол находится

по формуле
$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}\,.$$

Пусть теперь ℓ_1 и ℓ_2 — неориентированные прямые с направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ соответственно. Пусть φ_1 — угол между $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а φ_2 — угол между $-\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Один из этих углов принадлежит интервалу $[0, \frac{\pi}{2}]$, он и является (по определению) углом между прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Угол φ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 находится по формуле
$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}.$$
Если известны нормальные векторы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ этих прямых, то угол φ можно находить также по формуле
$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)|}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|}\,.$$
В случае, если ℓ_1 и ℓ_2 заданы, соответственно, уравнениями $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то
$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,.$$

8.4 Примеры.

Задача 27. Составить уравнение перпендикуляра к прямой $5x - 2y + 3 = 0$, проходящего через точку $M(2; 3)$.

Решение. Направляющим вектором искомого перпендикуляра является вектор с координатами $\{5; -2\}$. Поэтому перпендикуляр имеет следующие параметрические уравнения: $x = 2 + 5t$; $y = 3 - 2t$.

Другой вариант рассуждений: нормальным вектором искомого перпендикуляра является вектор с координатами $\{2; 5\}$, поэтому перпендикуляр имеет уравнение $2(x - 2) + 5(y - 3) = 0$.

Задача 28. Составить уравнение биссектрисы угла $\angle A$ треугольника ABC с вершинами $A(3; 1)$, $B(-2; 4)$ и $C(1; 0)$.

Решение. Из известного свойства диагоналей ромба следует, что для того, чтобы получить вектор, делящий пополам угол между векторами $\mathbf{a}$

и $\mathbf{b}$, достаточно взять сумму векторов, коллинеарных векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и имеющих одинаковую длину, например, $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ или $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$. Таким образом, биссектриса угла $\angle A$ имеет следующее уравнение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + (|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC})\, t\,.$$

Задача 29. Найти расстояние от точки $M(2;1)$ до прямой ℓ, заданной уравнением $2x^1 - 3x^2 - 5 = 0$ в некоторой аффинной системе координат, если известны $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

Решение. Пусть ω — угол между $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Тогда

$$\cos\omega = \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \sin\omega = \frac{3}{5}\,.$$

Отсюда получаем $|\varepsilon_{12}| = |\langle\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle| = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|\sin\omega = 6$.

Далее, $M_0(1;-1) \in \ell$, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\{1;2\}$, направляющим вектором прямой ℓ является вектор $\mathbf{a}\{3;2\}$, откуда по формуле (46) находим

$$\operatorname{dist}(M, \ell) = \frac{6\cdot\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4\cdot 9 + 2\cdot 8\cdot 6 + 25\cdot 4}} = \frac{12}{\sqrt{58}}\,.$$

Чтобы воспользоваться формулой (47), сначала нужно найти нормальный вектор $\mathbf{N}\{N^1;N^2\}$ прямой ℓ из уравнения $g_{ij}a^iN^j = 0 \iff 4\cdot 3\cdot N^1 + 8\cdot 3\cdot N^2 + 8\cdot 2\cdot N^1 + 25\cdot 2\cdot N^2 = 0$.

Задача 30. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (принадлежат одному пучку прямых).

Решение. Высоты AA', BB' и CC' треугольника ABC имеют, соответственно, уравнения

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A, \overrightarrow{BC}) = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_B, \overrightarrow{CA}) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C, \overrightarrow{AB}) = 0. \tag{48}$$

Система трех уравнений (48) совместна, поскольку, как легко проверить, их сумма есть тождество $0 = 0$.

Рекомендуемая литература: [7], лекция 15; [1], глава I, §5; [5], глава 5, §§1, 2.

Задачи и упражнения: [2], 210, 211, 212, 213, 214, 217, 224, 258, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 275, 283, 291, 293, 300, 301; [4], тема 14.

9 Конические сечения.

Рассмотрим в $\mathcal{E}_3$ две прямые ℓ_1 и ℓ_2, пересекающиеся в точке S под углом $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Прямую ℓ_1 зафиксируем, а прямую ℓ_2 будем вращать вокруг ℓ_1. При этом прямая ℓ_2 опишет поверхность $\widetilde{\Phi}$ в $\mathcal{E}_3$, называемую *конусом.* Прямая ℓ_1 является осью симметрии конуса $\widetilde{\Phi}$ и называется *осью* этого конуса. Точка S называется вершиной конуса. Конус $\widetilde{\Phi}$ представляет собой объединение прямых, проходящих через вершину S, получающихся поворотом начальной прямой ℓ_2. Каждая прямая этого семейства называется (прямолинейной) *образующей* конуса $\widetilde{\Phi}$.

Множество $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$, по которому конус $\widetilde{\Phi}$ пересекается плоскостью π, не проходящей через его вершину S, называется *коническим сечением.* Коническое сечение Φ является подмножеством плоскости π. Выясним, что представляет собой это подмножество $\Phi \subset \pi$.

Обозначим через $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ угол между плоскостью π и осью конуса. Рассмотрим по отдельности следующие три возможных случая: 1) $\beta > \alpha$, 2) $\beta = \alpha$, 3) $\beta < \alpha$.

Случай 1) $\beta > \alpha$.

При $\beta = \frac{\pi}{2}$ коническое сечение $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$ представляет собой окружность. Далее будем предполагать, что $\beta < \frac{\pi}{2}$. Осуществим следующие построения (см. рис. 39). Впишем в конус $\widetilde{\Phi}$ две сферы Σ_1 и Σ_2, касающиеся плоскости π. Точки касания сфер Σ_1 и Σ_2 с плоскостью π обозначим, соответственно, через F_1 и F_2. Каждая из сфер Σ_1 и Σ_2 касается конуса $\widetilde{\Phi}$ по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси конуса. Обозначим указанные окружности через ω_1 и ω_2, а плоскости через ρ_1 и ρ_2 соответственно. Обозначим также через D_1 и D_2 прямые, по которым плоскость π пересекает, соответственно, плоскости ρ_1 и ρ_2.

Пусть M — произвольная точка конического сечения Φ. Обозначим через A_1 и A_2 точки пересечения образующей SM с окружностями ω_1 и ω_2 соответственно. Обозначим затем через C_1 и C_2 основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые D_1 и D_2, а через P_1 и P_2 основания перпендикуляров, опущенных из точки M на плоскости ρ_1 и ρ_2.

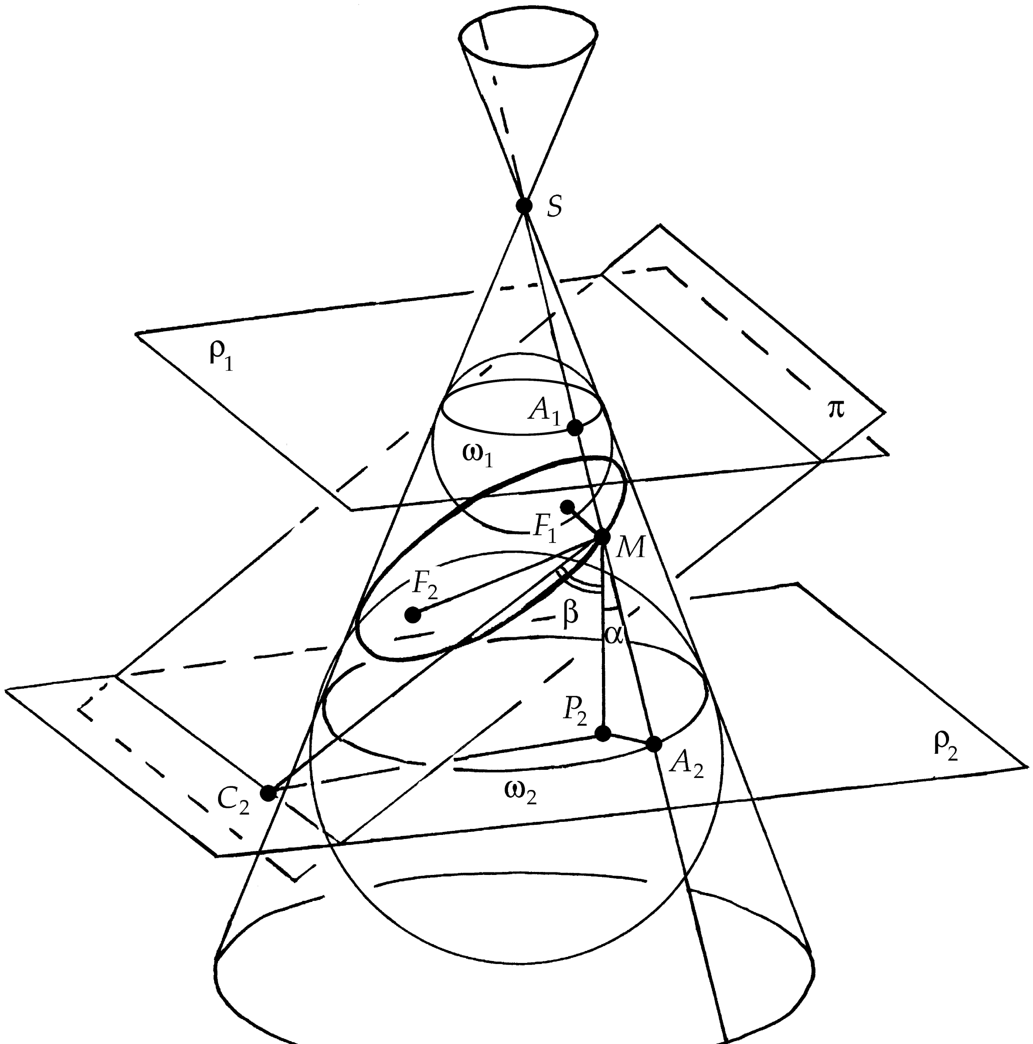

Рис. 39.

Поскольку всякие две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки, равны, то $|\overrightarrow{MF_1}| = |\overrightarrow{MA_1}|$, а $|\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_2}|$. Отсюда следует, что

$$|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_1}| + |\overrightarrow{MA_2}| = |\overrightarrow{A_1A_2}|.$$

Но величина $|\overrightarrow{A_1A_2}|$, представляющая собой длину отрезка образующей SM конуса, лежащего между окружностями ω_1 и ω_2, не зависит от выбора точки $M \in \Phi$. Таким образом, каждая точка M конического сечения Φ в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему условию:

$$|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = \text{const}. \tag{49}$$

Множество точек евклидовой плоскости, удовлетворяющих условию (49), называется *эллипсом*. Точнее, сформулируем следующее определение.

Определение. *Пусть на плоскости $\mathcal{E}_2$ даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$. Эллипсом с фокусами F_1 и F_2 называется множество Φ всех точек M плоскости, сумма расстояний от которых до F_1 и F_2 равна некоторому постоянному числу $2a > 2c$, то есть,*

$$\Phi = \{M \in \mathcal{E}_2 : |\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = 2a\}. \tag{50}$$

С точностью до положения на плоскости эллипс определяется двумя параметрами $2a$ и $2c$. Отношение этих параметров

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

называется *эксцентриситетом* эллипса.

Для эллипса, являющегося коническим сечением, параметр $2a$ равен длине отрезка A_1A_2 внешней общей касательной прямой к сферам Σ_1 и Σ_2, а параметр $2c$ равен длине отрезка F_1F_2 внутренней общей касательной прямой к этим сферам. Поскольку $|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}| \cos\alpha$, а $|\overrightarrow{F_1F_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}| \cos\beta$, то (см. рис. 40)

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{51}$$

В случае, когда фокусы эллипса (50) совпадают: $F_1 = F_2 = O$, эллипс представляет собой множество всех точек, находящихся на расстоянии a от точки O, то есть *окружность* радиуса a с центром в точке O. Эксцентриситет окружности равен нулю.

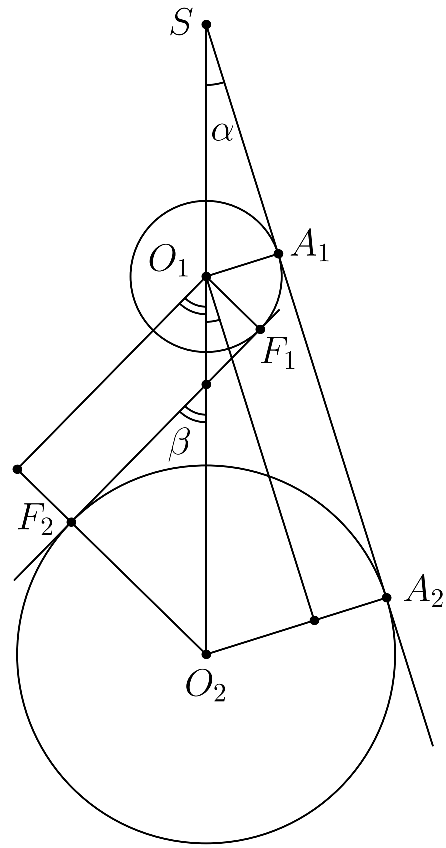

Рис. 40.

Пусть эллипс Φ не является окружностью и $M \in \Phi$. Числа $r_1 = |\overrightarrow{MF_1}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{MF_2}|$ называются *фокальными радиусами* точки M.

Из рассмотрения прямоугольных треугольников MP_2A_2 и MP_2C_2 для эллипса Φ, являющегося коническим сечением (рис. 39), получаем, что $|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MC_2}|\cos\beta$, $|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MA_2}|\cos\alpha$. Отсюда следует, что

$$\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e. \tag{52}$$

Рассматривая прямоугольные треугольники MP_1A_1 и MP_1C_1, придем к аналогичному соотношению

$$\frac{|\overrightarrow{MF_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = e. \tag{53}$$

Прямые D_2 и D_1 называются *директрисами* эллипса Φ. Расстояния от точки M эллипса до его директрис обозначают следующим образом: $d_1 = |\overrightarrow{MC_1}|$, $d_2 = |\overrightarrow{MC_2}|$.

Из полученных соотношений (52) и (53) вытекает следующее свойство эллипса.

Отношение фокального радиуса точки M эллипса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы не зависит от выбора точки M и равно эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{54}$$

Замечание. Вышеприведенные рассуждения относятся к эллипсу, являющемуся коническим сечением. Ниже будет указано, как находятся директрисы произвольного эллипса, определенного условием (50).

Каноническое уравнение эллипса.

Рассмотрим эллипс Φ, определенный как множество точек (50). Из этого определения следует, что прямая F_1F_2 и перпендикуляр к F_1F_2, делящий отрезок F_1F_2 пополам, являются осями симметрии эллипса. Выберем прямоугольную систему координат на плоскости $\mathcal{E}_2$, в которой эти прямые являются, соответственно, осями абсцисс и ординат (см. рис. 41). В этой системе координат фокусы эллипса и произвольная точка плоскости имеют, соответственно, координаты $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$, $M(x;y)$, а соотношение (50) принимает вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{55}$$

Переносяодин из радикалов в правую часть равенства, и затем возводя два раза в квадрат, освободимся от иррациональности. После несложных преобразований получим следующее уравнение, являющееся следствием уравнения (55):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{56}$$

где $b^2=a^2-c^2$.

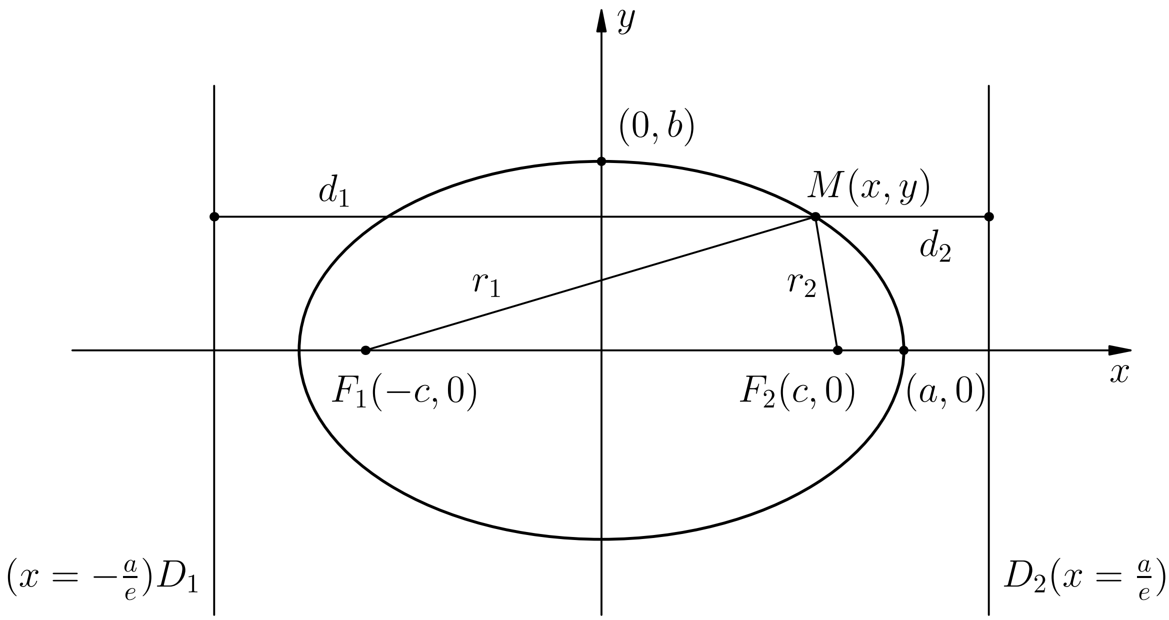

Рис. 41.

Нетрудно убедиться, что всякая точка $M(x;y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (56), принадлежит рассматриваемому эллипсу (50). Действительно, уравнение (56) эквивалентно следующему: $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$. Подставляя это выражение для y^2 в формулы для расстояния от M до фокусов $|\overrightarrow{MF_1}|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ и $|\overrightarrow{MF_2}|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, после приведения подобных членов получим

$$|\overrightarrow{MF_1}|=a+\frac{c}{a}x, \quad |\overrightarrow{MF_2}|=a-\frac{c}{a}x, \tag{57}$$

откуда следует, что $|\overrightarrow{MF_1}|+|\overrightarrow{MF_2}|=2a$, то есть $M\in\Phi$.

Таким образом, всякий эллипс может быть задан в некоторой прямоугольной системе координат уравнением (56). Это уравнение называется *каноническим.* Система координат, в которой эллипс имеет уравнение (56), называется *канонической* для этого эллипса.

Замечания.

1. Из уравнения (56) следует, что *два эллипса* Φ_1 *и* Φ_2*, имеющие одинаковый эксцентриситет* $e_1 = e_2 = e$*, подобны.* Действительно, в этом случае параметры a и b из канонических уравнений этих эллипсов оказываются пропорциональными: если $a_2 = \lambda a_1$, то $c_2 = a_2 e = \lambda a_1 e = \lambda c_1$, а, следовательно, и $b_2 = \lambda b_1$. Если расположить теперь эллипсы Φ_1 и Φ_2 на плоскости так, чтобы канонические системы координат у них совпали, то они, очевидно, окажутся гомотетичными с коэффициентом гомотетии λ.

2. Очевидно, для каждого числа $e < 1$ можно подобрать два таких угла $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, что будет выполняться соотношение (51), поэтому всякий эллипс, определяемый произвольными значениями параметров a и c, можно реализовать как пересечение конуса с плоскостью.

3. В частности, отсюда следует, что всякий эллипс, отличный от окружности, имеет директрисы.

Поскольку точка M, удовлетворяющая соотношениям (57), принадлежит эллипсу (56), то формулы (57) представляют собой выражения для фокальных радиусов точки M. Таким образом, мы получили следующие выражения для фокальных радиусов точки $M(x; y)$, принадлежащей эллипсу Φ, заданному уравнением (56):

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex. \tag{58}$$

Теперь нетрудно убедиться, что прямые D_1 и D_2, имеющие, соответственно, уравнения $x = -\frac{a}{e}$ и $x = \frac{a}{e}$, являются директрисами эллипса. Действительно, расстояния от точки $M(x; y)$ до прямых D_1 и D_2 равны $\operatorname{dist}(M, D_1) = \frac{a}{e} + x$ и $\operatorname{dist}(M, D_2) = \frac{a}{e} - x$, откуда следует

$$\frac{r_1}{\operatorname{dist}(M, D_1)} = \frac{r_2}{\operatorname{dist}(M, D_2)} = \frac{a \pm ex}{\frac{a}{e} \pm x} = e. \tag{59}$$

Свойство эллипса, выражаемое соотношениями (54) или (59), является свойством, определяющим эллипс. Точнее, имеет место следующее предложение.

Предложение. *Пусть на евклидовой плоскости заданы прямая* D *и точка* F*, не принадлежащая прямой* D*, и пусть задано положительное* *число $e < 1$. Тогда множество точек плоскости, для которых отношение расстояния до точки F к расстоянию до прямой D равно числу e, является эллипсом с эксцентриситетом e. При этом F — это один из фокусов этого эллипса, а D — директриса, соответствующая фокусу F.*

Задача 31. Доказать это предложение.

Указание. Пусть расстоние от точки F до прямой D равно h. Из системы уравнений

$$\frac{a}{e} - c = h, \quad \frac{c}{a} = e$$

однозначно находятся числа a и c. Теперь на плоскости можно выбрать систему координат, в которой прямая D имеет уравнение $x = -\frac{a}{e}$, а точка F имеет координаты $(-c\,;0)$. Остается записать уравнение $|\overrightarrow{MF}| = e \cdot \mathrm{dist}(M, D)$ и показать, что оно совпадает с уравнением (56).

Отметим некоторые термины, используемые при рассмотрении эллипса:

число a называется *большой полуосью* эллипса;

число b называется *малой полуосью* эллипса;

число $2c$ называется *фокусным расстоянием*;

начало канонической системы координат, являющееся центром симметрии эллипса, называется *центром* эллипса;

оси канонической системы координат, являющиеся осями симметрии эллипса, называются *осями* эллипса;

ось абсцисс канонической системы координат называются *большой* или *фокальной осью* эллипса;

ось ординат канонической системы координат называются *малой осью* эллипса;

точки пересечения эллипса с его осями, имеющие координаты $(\pm a; 0)$ и $(0; \pm b)$, называются *вершинами* эллипса.

Рекомендуемая литература: [7], лекция 17; [1], глава II, §2; [5], глава 6, §§1, 2, 3.

Задачи и упражнения: [2], 392, 397, 401, 403, 410, 411, 413, 437, 438, 452, 453, 464,465, 468, 471, 472, 473, 476, 477; [4], темы 15, 16.

Случай 2) $\beta = \alpha$.

В этом случае плоскость π параллельна одной из образующих конуса и поэтому пересекает все образующие кроме одной. Осуществим следующие построения (см. рис. 42). Впишем в конус $\widetilde{\Phi}$ сферу Σ, касающуюся плоскости π. Пусть F — точка касания сферы Σ с плоскостью π. Сфера Σ касается конуса $\widetilde{\Phi}$ по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси конуса. Обозначим указанные окружность и плоскость через ω и ρ соответственно. Обозначим также через D прямую, по которой плоскость π пересека

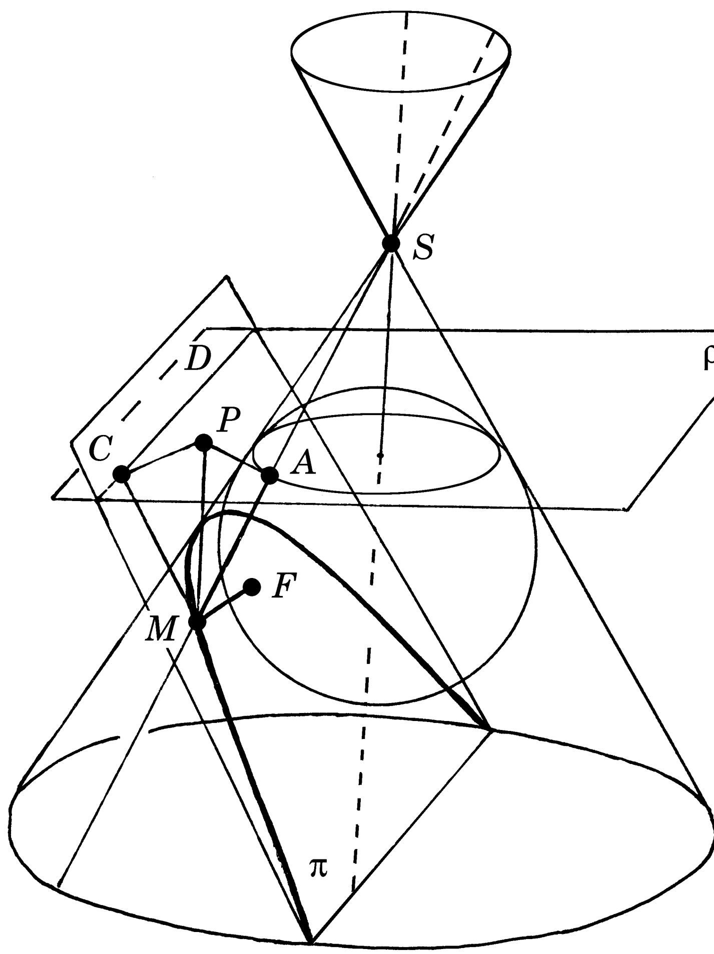

Рис. 42.

Пусть M — произвольная точка конического сечения Φ, A — точка пересечения образующей SM с окружностью ω, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую D, а P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ρ.

Поскольку всякие две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки, равны, то $|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{MA}|$, а поскольку $\alpha = \beta$, то прямоугольные треугольники MPA и MPC равны, откуда следует, что $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$. Таким образом, каждая точка M конического сечения Φ в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему условию:

$$|\overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{MC}|. \tag{60}$$

Множество точек евклидовой плоскости, удовлетворяющих условию (60), называется *параболой*. Точнее, сформулируем следующее определение.

Определение. *Пусть на плоскости $\mathcal{E}_2$ даны прямая D и точка F, не принадлежащая прямой D. Параболой с фокусом F и директрисой D называется множество Φ всех точек M плоскости, для которых расстояние до точки F равно расстоянию до прямой D, то есть,*

$$\Phi = \{M \in \mathcal{E}_2 : |\overrightarrow{MF}| = \operatorname{dist}(M, D)\}. \tag{61}$$

Пусть точка M лежит на параболе Φ. Число $r = |\overrightarrow{MF}|$ называется *фокальным радиусом* точки M.

Пусть d означает расстояние от точки $M \in \Phi$ до директрисы. Поскольку для всякой параболы отношение фокального радиуса ее точки M к расстоянию от этой точки до директрисы не зависит от выбора точки M и равно 1, то по определению считаем, что всякая парабола имеет *эксцентриситет* $e = 1$. Это определение согласуется и с формулой (51), поскольку в рассматриваемом случае $\cos\beta = \cos\alpha$.

Каноническое уравнение параболы.

Рассмотрим параболу Φ, определенную как множество точек (61). Пусть расстояние от фокуса F параболы Φ до ее директрисы D равно p, то есть $\operatorname{dist}(F, D) = p$. Прямая, проходящая через фокус F и перпендикулярная директрисе, является осью симметрии параболы. Выберем прямоугольную систему координат на плоскости $\mathcal{E}_2$, в которой эта прямая является осью абсцисс, начало координат равноудалено от фокуса и директрисы, а направление оси абсцисс совпадает с направлением от директрисы к фокусу (см. рис. 43). В этой системе координат фокус параболы имеет координаты $F_1(\frac{p}{2};0)$, а директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$. Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка параболы. Соотношение (61) принимает вид

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{62}$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и приводя подобные члены, получим следующее уравнение, эквивалентное уравнению (62):

$$y^2 = 2px. \tag{63}$$

Это уравнение называется *каноническим* уравнением параболы. Система координат, в которой парабола имеет уравнение (63), называется *канонической* для этой параболы.

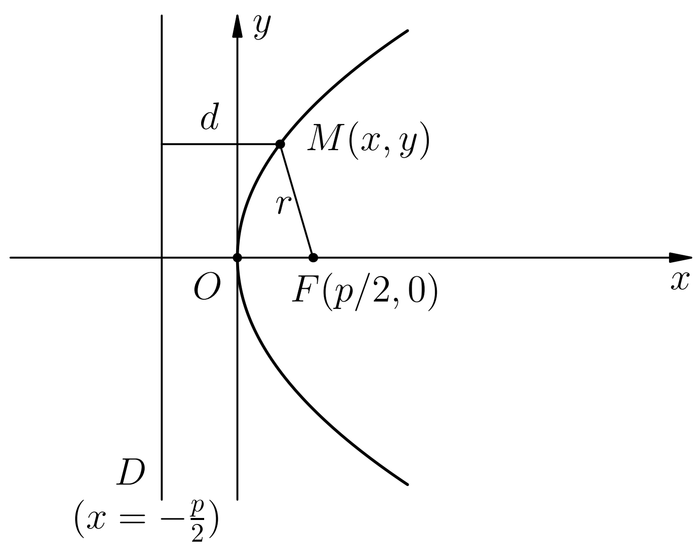

Рис. 43.

Замечания.

1. Из уравнения (63) следует, что любые две параболы Φ_1 и Φ_2 подобны. Действительно, если расположить параболы Φ_1 и Φ_2 на плоскости так, чтобы канонические системы координат у них совпали, то они окажутся гомотетичными с коэффициентом гомотетии $\lambda = \frac{p_2}{p_1}$. Для проверки этого факта достаточно установить, что прямая $x = \ell t$, $y = mt$ пересекает параболы, заданные уравнениями $y^2 = 2p_1 x$ и $y^2 = 2p_2 x$, соответственно, в точках с координатами $(\frac{2p_1\ell^2}{m}; 2p_1\ell)$ и $(\frac{2p_2\ell^2}{m}; 2p_2\ell)$.

2. Если плоскость π, пересекающую конус $\widetilde{\Phi}$ по параболе Φ перемещать параллельно себе, то при этом, очевидно, можно найти такое ее положение, при котором параметр $\operatorname{dist}(F, D) = p$ примет любое наперед заданное значение. Поэтому любую параболу, определяемую произвольным значением параметра p, можно реализовать как пересечение конуса с плоскостью. Поскольку параллельные плоскости, очевидно, гомотетичны с центром гомотетии в любой, не принадлежащей им точке, и, в частности, с центром гомотетии в точке S, то и параболы, высекаемые конусом $\widetilde{\Phi}$ на этих плоскостях гомотетичны, а следовательно и подобны.

Отметим некоторые термины, используемые при рассмотрении параболы:

число p называется *фокальным параметром* параболы;

ось ординат канонической системы координат, являющаяся осью симметрии параболы, называются *осью* параболы;

начало канонической системы координат $(0;0)$, являющееся точкой пересечения параболы с ее осью, называется *вершиной* параболы.

Рекомендуемая литература: [7], лекция 17; [1], глава II, §1; [5], глава 6, §§1, 2, 3.

Задачи и упражнения: [2], 627, 628, 629, 630, 631, 635, 636, 637; [4], тема 18.

Случай 3) $\beta < \alpha$**.**

В этом случае плоскость π пересекает конус $\widetilde{\Phi}$ по обе стороны от его вершины. Как и в первом случае, впишем в конус две сферы Σ_1 и Σ_2, касающиеся плоскости π (см. рис. 44), и введем обозначения: F_1 и F_2 для точек касания сфер Σ_1 и Σ_2 с плоскостью π, ω_1 и ω_2 для окружностей, по которым сферы Σ_1 и Σ_2 касаются конуса $\widetilde{\Phi}$, ρ_1 и ρ_2 для плоскостей, в которых расположены окружности ω_1 и ω_2, D_1 и D_2 для прямых, по которым плоскость π пересекает плоскости ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Рассмотрим произвольную точку M конического сечения Φ, расположенную в той же части конуса $\widetilde{\Phi}$, что и окружность ω_2. Обозначим через A_1 и A_2 точки пересечения образующей SM с окружностями ω_1 и ω_2, через C_1 и C_2 основания перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые D_1 и D_2, а через P_1 и P_2 основания перпендикуляров, опущенных из точки

M на плоскости ρ_1 и ρ_2.

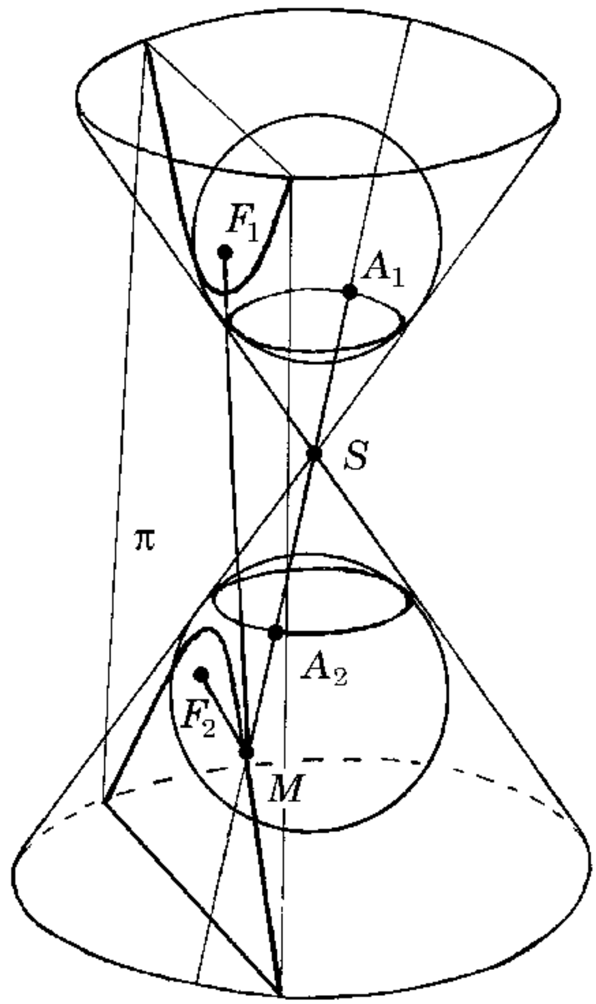

Рис. 44.

Поскольку всякие две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки, равны, то $|\overrightarrow{MF_1}| = |\overrightarrow{MA_1}|$, а $|\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_2}|$. Отсюда следует, что

$$|\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MA_1}| - |\overrightarrow{MA_2}| = |\overrightarrow{A_1A_2}|.$$

Для произвольной точки $M \in \Phi$, расположенной в той же части конуса $\widetilde{\Phi}$, что и окружность ω_2, аналогично получим

$$|\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{A_1A_2}|.$$

Так как величина $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ представляет собой длину отрезка образующей SM конуса, лежащего между окружностями ω_1 и ω_2, и не зависит от выбора точки $M \in \Phi$, то каждая точка M конического сечения Φ в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему условию:

$$\left| |\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| \right| = \text{const}. \tag{64}$$

Множество точек евклидовой плоскости, удовлетворяющих условию (64), называется *гиперболой.* Точнее, сформулируем следующее определение.

Определение. *Пусть на плоскости $\mathcal{E}_2$ даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$. Гиперболой с фокусами F_1 и F_2 называется множество Φ всех точек M плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до F_1 и F_2 равна некоторому постоянному числу $2a < 2c$, то есть,*

$$\Phi = \{M \in \mathcal{E}_2 : \left| |\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| \right| = 2a\}. \tag{65}$$

С точностью до положения на плоскости гипербола определяется параметрами $2a$ и $2c$. Отношение этих параметров

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Для гиперболы, являющейся коническим сечением, параметр $2a$ равен длине отрезка A_1A_2 внутренней общей касательной прямой к сферам Σ_1 и Σ_2, а параметр $2c$ равен длине отрезка F_1F_2 внешней общей касательной прямой к этим сферам. Поскольку (см. рис. 45) $|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}| \cos\alpha$, а $|\overrightarrow{F_1F_2}| = |\overrightarrow{O_1O_2}| \cos\beta$, то

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{66}$$

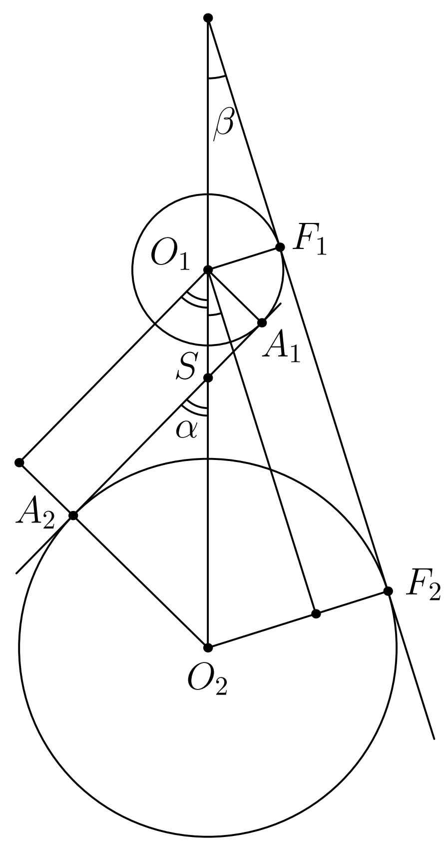

Рис. 45.

Числа $r_1 = |\overrightarrow{MF_1}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{MF_2}|$ называются *фокальными радиусами* точки M.

Из рассмотрения прямоугольных треугольников MP_2A_2 и MP_2C_2 для гиперболы Φ, являющейся коническим сечением (рис. 46), получаем, как и в случае эллипса, что $|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MC_2}|\cos\beta$, $|\overrightarrow{MP_2}| = |\overrightarrow{MA_2}|\cos\alpha$. Отсюда следует, что

$$\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_2}|}{|\overrightarrow{MC_2}|} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e. \tag{67}$$

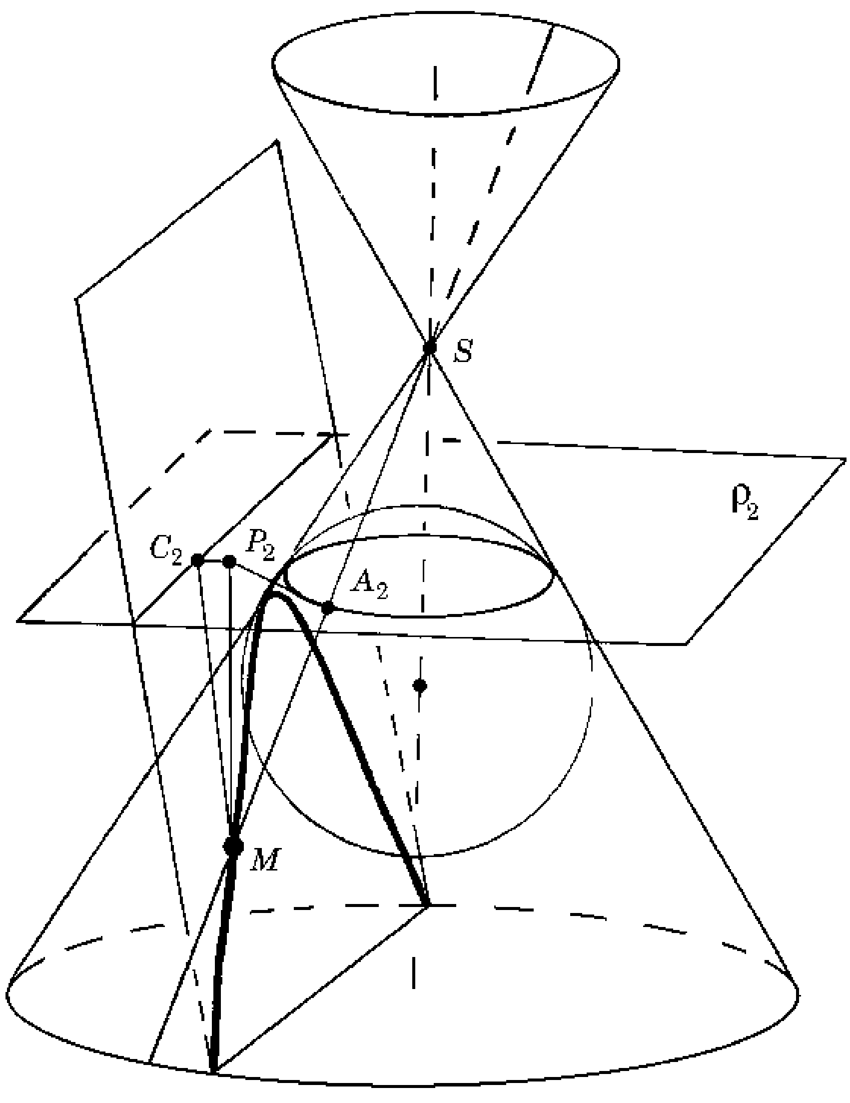

Рис. 46.

Рассматривая прямоугольные треугольники MP_1A_1 и MP_1C_1, придем к аналогичному соотношению

$$\frac{|\overrightarrow{MF_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = \frac{|\overrightarrow{MA_1}|}{|\overrightarrow{MC_1}|} = e. \tag{68}$$

Прямые D_2 и D_1 называются *директрисами* гиперболы Ф. Обозначим расстояния от точки M гиперболы до директрис через $d_1 = |\overrightarrow{MC_1}|$, $d_2 = |\overrightarrow{MC_2}|$. Из соотношений (67) и (68) вытекает следующее свойство гиперболы.

Отношение фокального радиуса точки M гиперболы к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы не зависит от выбора точки M и равно эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{69}$$

Замечание. Вышеприведенные рассуждения относятся к гиперболе, являющейся коническим сечением. Ниже будет указано, как находятся директрисы произвольной гиперболы, определенной условием (65).

Каноническое уравнение гиперболы.

Рассмотрим гиперболу Ф, определенную как множество точек (65). Из этого определения следует, что прямая F_1F_2 и перпендикуляр к F_1F_2, делящий отрезок F_1F_2 пополам, являются осями симметрии гиперболы. Выберем прямоугольную систему координат на плоскости $\mathcal{E}_2$, в которой эти прямые являются, соответственно, осями абсцисс и ординат (см. рис. 45). В этой системе координат фокусы эллипса и произвольная точка плоскости имеют, соответственно, координаты $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$, $M(x;y)$, а соотношение (65) принимает вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{70}$$

Перенося второй радикал в правую часть равенства, и затем возводя два раза в квадрат, освобождаемся от иррациональности. После несложных преобразований получим следующее уравнение, являющееся следствием уравнения (70):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{71}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

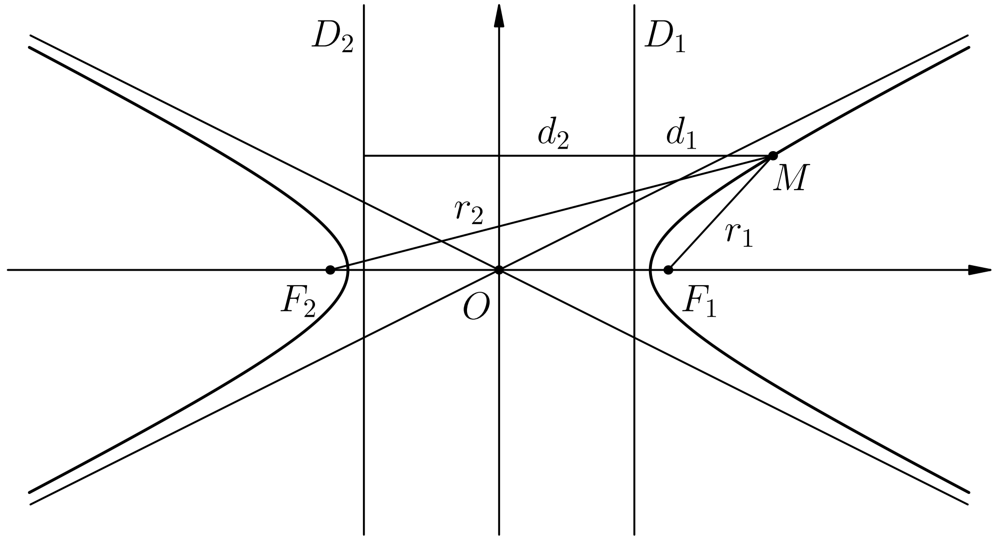

Рис. 47.

Нетрудно убедиться, что всякая точка $M(x;y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (71), принадлежит рассматриваемой гиперболе (65). Действительно, уравнение (71) эквивалентно следующему: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$. Подставляя это выражение для y^2 в формулы для расстояния от M до фокусов $|\overrightarrow{MF_1}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ и $|\overrightarrow{MF_2}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, после приведения подобных членов получим, что для точек гиперболы с абсциссой $x \leqslant -a$

$$|\overrightarrow{MF_1}| = -a - \frac{c}{a}x, \quad |\overrightarrow{MF_2}| = a - \frac{c}{a}x, \tag{72}$$

а для точек гиперболы с абсциссой $x \geqslant a$

$$|\overrightarrow{MF_1}| = a + \frac{c}{a}x, \quad |\overrightarrow{MF_2}| = -a + \frac{c}{a}x, \tag{73}$$

откуда следует, что $|\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| = \pm 2a$, то есть $M \in \Phi$.

Таким образом, всякая гипербола может быть задана в некоторой прямоугольной системе координат уравнением (71). Это уравнение называется *каноническим.* Система координат, в которой эллипс имеет уравнение (71), называется *канонической* для этой гиперболы.

Замечания.

1. Из уравнения (71) следует, что *две гиперболы Φ_1 и Φ_2, имеющие одинаковый эксцентриситет $e_1 = e_2 = e$, подобны.* Действительно, в этом случае параметры a и b из канонических уравнений этих эллипсов оказываются пропорциональными: если $a_2 = \lambda a_1$, то $c_2 = a_2 e = \lambda a_1 e = \lambda c_1$, а,

следовательно, и $b_2 = \lambda b_1$. Если расположить теперь гиперболы Φ_1 и Φ_2 на плоскости так, чтобы канонические системы координат у них совпали, то они, очевидно, окажутся гомотетичными с коэффициентом гомотетии λ.

2. Очевидно, для каждого числа $e > 1$ можно подобрать два таких угла $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, что будет выполняться соотношение (66), поэтому всякая гипербола, определяемая произвольными значениями параметров a и c, может быть реализована как пересечение некоторого конуса с плоскостью.

3. В частности, отсюда следует, что всякая гипербола имеет директрисы.

4. Гипербола состоит из двух *ветвей*, определяемых в канонической системе координат соотношениями $x \leqslant -a$ и $x \geqslant a$ соответственно. По отношению к канонической системе координат первая из них называется *левой ветвью*, а вторая *правой ветвью*.

Поскольку точка M, удовлетворяющая соотношениям (72) или (73), принадлежит гиперболе (71), то формулы (72) представляют собой выражения для фокальных радиусов точки $M(x; y)$, принадлежащей левой ветви гиперболы Φ, заданной уравнением (71):

$$r_1 = -a - ex, \quad r_2 = a - ex, \tag{74}$$

а формулы (73) представляют собой выражения для фокальных радиусов точки $M(x; y)$, принадлежащей правой ветви этой гиперболы:

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = -a + ex. \tag{75}$$

Теперь нетрудно убедиться (аналогично случаю эллипса, но в данном случае необходимо для каждой директрисы отдельно рассматривать точки, принадлежащие левой и правой ветвям гиперболы), что прямые D_1 и D_2, имеющие, соответственно, уравнения $x = -\frac{a}{e}$ и $x = \frac{a}{e}$, являются директрисами гиперболы, то есть что для любой точки гиперболы выполняются соотношения (69).

Свойство гиперболы, выражаемое соотношениями (69), является свойством, определяющим гиперболу. Точнее, имеет место следующее предложение.

Предложение. *Пусть на евклидовой плоскости заданы прямая D и точка F, не принадлежащая прямой D, и пусть задано положительное* *число $e > 1$. Тогда множество точек плоскости, для которых отношение расстояния до точки F к расстоянию до прямой D равно числу e, является гиперболой с эксцентриситетом e. При этом F — это один из фокусов этой гиперболы, а D — директриса, соответствующая фокусу F.*

Задача 32. Доказать это предложение, воспользовавшись указанием к задаче 31 (см. с. 67).

Отметим некоторые термины, используемые при рассмотрении гиперболы:

число a называется *действительной полуосью* гиперболы;

число b называется *мнимой полуосью* гиперболы;

число $2c$ называется *фокусным расстоянием*;

начало канонической системы координат, являющееся центром симметрии гиперболы, называется *центром* гиперболы;

оси канонической системы координат, являющиеся осями симметрии гиперболы, называются *осями* гиперболы;

ось абсцисс канонической системы координат называются *действительной* или *фокальной осью* гиперболы;

ось ординат канонической системы координат называются *мнимой осью* гиперболы;

точки пересечения гиперболы с ее действительной осью, имеющие координаты $(\pm a; 0)$, называются *вершинами* гиперболы.

Асимптоты гиперболы.

Рассмотрим плоскость π', проходящую через вершину S конуса $\widetilde{\Phi}$ и параллельную плоскости π, в которой лежит гипербола $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$. Эта плоскость π' пересекает конус $\widetilde{\Phi}$ по двум его образующим ℓ_1 и ℓ_2, которые, очевидно, не пересекают гиперболу. Проведем теперь через образующие ℓ_1 и ℓ_2 касательные плоскости к конусу $\widetilde{\Phi}$. Обозначим их, соответственно, через γ_1 и γ_2. Прямые $\ell_1' = \gamma_1 \cap \pi$ и $\ell_2' = \gamma_2 \cap \pi$, по которым эти плоскости пересекают плоскость π, очевидно, лежат в плоскости π и не имеют общих точек с конусом (поскольку конус пересекается с γ_1 и γ_2 по прямым $\ell_1 \| \ell_1'$ и $\ell_2 \| \ell_2'$). Следовательно, прямые ℓ_1' и ℓ_2' не имеют общих точек с гиперболой $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi$. Эти две прямые называются *асимптотами* гиперболы.

В канонической для гиперболы системе координат асимптоты гиперболы имеют уравнения

$$bx - ay = 0 \qquad \text{и} \qquad bx + ay = 0.$$

Нетрудно убедиться, что при удалении точки гиперболы от ее вершины расстояние от этой точки до одной из асимптот неограниченно убывает. С алгебраической точки зрения асимптоты гиперболы будут рассмотрены в следующем параграфе.

Замечание. Рассмотрим некоторую образующую ℓ конуса $\widetilde{\Phi}$, пересекающую коническое сечение Φ (которое может быть как гиперболой так и эллипсом или параболой) и проведем через нее касательную плоскость γ к конусу $\widetilde{\Phi}$. Эта касательная плоскость пересечет плоскость π по прямой $\ell' = \gamma \cap \pi$, касательной к коническому сечению Φ. В этом смысле, асимптоты гиперболы представляют собой касательные к гиперболе в ее «бесконечноудаленных» точках. Точный смысл этим понятиям можно придать в рамках так называемой проективной геометрии.

Асимптоты гиперболы можно также рассматривать как предельные положения касательных прямых к гиперболе при неограниченном удалении точки касания от вершины гиперболы.

Рекомендуемая литература: [7], лекция 17; [1], глава II, §3; [5], глава 6, §§1, 2, 3.

Задачи и упражнения: [2], 531, 532, 533, 534, 535, 536, 538, 539, 540, 541, 542; [4], тема 17.

10 Диаметры эллипса и гиперболы.

Пусть Φ — эллипс или гипербола, заданные, соответственно, каноническими уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{76}$$

а ℓ — прямая с направляющим вектором $\mathbf{u} = \{l; m\}$, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt. \tag{77}$$

Предположим, что прямая ℓ пересекает кривую Φ. Для нахождения точек пересечения ℓ с Φ подставим уравнения (77) в (76). Будем рассматривать сразу обе кривые — и эллипс, и гиперболу. При этом во всех выражениях, где стоят двойные знаки $\pm$ или $\mp$, верхний знак будет относиться к тому случаю, когда рассматривается эллипс, а нижний к тому случаю, когда рассматривается гипербола. гиперболы. Итак, точки прямой ℓ, принадлежащие кривой Φ, определяются значениями параметра t, удовлетворяющими уравнению

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2} \pm \frac{(y_0+mt)^2}{b^2} = 1. \tag{78}$$

Раскрывая в уравнении (78) скобки и собирая подобные члены, получим уравнение

$$t^2\left(\frac{l^2}{a^2} \pm \frac{m^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{lx_0}{a^2} \pm \frac{my_0}{b^2}\right) + \frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{79}$$

Уравнение (79) — это квадратное уравнение относительно t, за исключением того случая, когда Φ — гипербола и

$$\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0. \tag{80}$$

Определение. *Всякий ненулевой вектор* $\mathbf{u} = \{l, m\}$*, удовлетворяющий соотношению* (80)*, называется вектором асимптотического направления для гиперболы* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$*, а прямая* ℓ *с направляющим вектором, удовлетворяющим соотношению* (80)*, называется прямой асимптотического направления для этой гиперболы.*

Из (80) следует, что гипербола имеет два асимптотических направления, и эти направления задаются векторами $\{a; b\}$ и $\{a; -b\}$. Такие направления имеют асимптоты гиперболы $bx \pm ay = 0$ — прямые не имеющие с гиперболой общих точек (уравнение (79) в этом случае превращается в противоречие). Прямая асимптотического направления, не являющаяся асимптотой, пересекает гиперболу в одной точке (в этом случае (79) — уравнение первой степени).

В дальнейшем предполагаем, что направление рассматриваемой прямой ℓ не является асимптотическим и что ℓ пересекает Φ. Поскольку (79) —

квадратное уравнение относительно t, то это уравнение имеет два вещественных решения t_1 и t_2. Подставляя эти решения в (77), найдем две общие точки $M_1(x_1 = x_0 + lt_1; y_1 = y_0 + mt_1)$ и $M_2(x_2 = x_0 + lt_2; y_2 = y_0 + mt_2)$ кривой Φ и прямой ℓ.

Определение. *Отрезок M_1M_2 прямой ℓ называется хордой кривой Φ. Хордой называют также и всю прямую ℓ.*

Точка A, являющаяся серединой хорды M_1M_2, соответствует значению параметра t, равному $t_A = (t_1 + t_2)/2$.

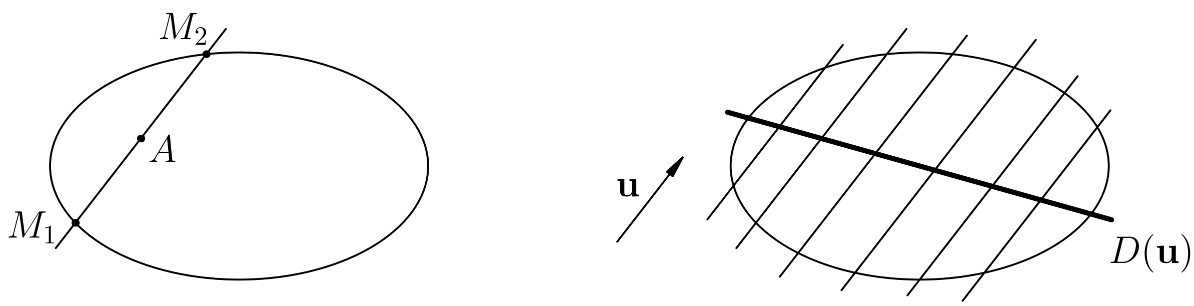

Рис. 48.

$M_0(x_0; y_0)$ — это произвольная точка прямой ℓ. В частности, мы можем положить $M_0 = A$. Тогда $t_A = 0$ и, следовательно, $t_1 + t_2 = 0$. По теореме Виета в этом случае коэффициент при t в квадратном уравнении (79) равен нулю:

$$\frac{lx_A}{a^2} \pm \frac{my_A}{b^2} = 0. \tag{81}$$

Итак, координаты середины хорды M_1M_2 удовлетворяют уравнению (81). Поскольку M_1M_2 — это произвольная хорда, имеющая данное неасимптотическое направление $\mathbf{u} = \{l; m\}$ (мы обозначаем направления представляющими их векторами), то множество середин всех хорд, имеющих направление $\mathbf{u} = \{l; m\}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{lx}{a^2} \pm \frac{my}{b^2} = 0. \tag{82}$$

Уравнением (82) задается некоторая прямая, проходящая через центр кривой Φ.

Определение. *Прямая $D(\mathbf{u})$, имеющая уравнение* (82)*, называется диаметром кривой Φ, сопряженным хордам данного неасимптотического на-*

правления $\mathbf{u} = \{l; m\}$, *или, просто, диаметром, сопряженным неасимптотическому направлению* $\mathbf{u} = \{l; m\}$.

Из уравнения (82) следует, что диаметр $D(\mathbf{u})$ имеет направляющий вектор

$$\mathbf{v} = \{l'; m'\} = \left\{ \mp\frac{m}{b^2}; \frac{l}{a^2} \right\}. \tag{83}$$

Легко проверить, что направление, задаваемое вектором $\mathbf{v}$, не является асимптотическим. Найдем диаметр $D(\mathbf{v})$, сопряженный направлению $\mathbf{v}$. Подставляя в уравнение (82) l' и m' вместо l и m, получаем

$$\frac{l'x}{a^2} \pm \frac{m'y}{b^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mp\frac{mx}{a^2b^2} \pm \frac{ly}{a^2b^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -mx + ly = 0.$$

Таким образом, направляющим вектором диаметра $D(\mathbf{v})$ является первоначально заданный направляющий вектор хорд $\mathbf{u} = \{l; m\}$.

Определение. *Диаметры* $D(\mathbf{u})$ *и* $D(\mathbf{v})$ *называются сопряженными диаметрами кривой* Φ, *их направления (и направляющие векторы)* $\mathbf{u} = \{l; m\}$ *и* $\mathbf{v} = \{l'; m'\}$ *называются сопряженными относительно кривой* Φ.

Из соотношений (83) следует, что направления $\mathbf{u} = \{l; m\}$ и $\mathbf{v} = \{l'; m'\}$ сопряжены относительно кривой Φ тогда и только тогда, когда

$$\frac{l'}{m'} = \mp\frac{ma^2}{lb^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{ll'}{a^2} \pm \frac{mm'}{b^2} = 0. \tag{84}$$

Всякая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр кривой Φ, является диаметром, сопряженным некоторому направлению (это направление можно найти из уравнения (84)).

Определение. *Главными направлениями кривой* Φ *называется пара направлений* $\mathbf{u} = \{l; m\}$ *и* $\mathbf{v} = \{l'; m'\}$, *которые одновременно сопряжены относительно* Φ *и ортогональны одно другому.*

Для нахождения главных направлений кривой Φ надо найти пару направлений $\mathbf{u} = \{l; m\}$ и $\mathbf{v} = \{l'; m'\}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$ll' + mm' = 0, \qquad \frac{ll'}{a^2} \pm \frac{mm'}{b^2} = 0. \tag{85}$$

Из первого уравнения (85) получаем $ll' = -mm'$. Подставляя это соотношение во второе уравнение (85), получаем

$$\frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{a^2} = 0. \tag{86}$$

Из уравнения (86) следует, что, за исключением случая, когда Φ — окружность и $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0$, во всех остальных случаях либо $m' = 0$ и $l = 0$, либо $m = 0$ и $l' = 0$. Таким образом, единственной парой главных направлений эллипсов (не вырождающихся в окружность) и гипербол являются направления координатных осей канонической системы координат (осей симметрии). Что касается окружности, то любая пара взаимно ортогональных направлений является парой главных направлений.

Касательные к эллипсу и гиперболе.

Пусть $M_0(x_0; y_0) \in \Phi$. Диаметр D кривой Φ, проходящий через $M_0(x_0; y_0)$, имеет уравнения $x = x_0 t$, $y = y_0 t$ (напомним, что диаметр проходит через центр $O(0; 0)$). Прямая $\ell_{M_0}\Phi$, проходящая через M_0 и имеющая направление, сопряженное направлению диаметра D, пересекает кривую Φ в двух точках M_1 и M_2, и точка M_0 являющаяся серединой отрезка M_1M_2, также принадлежит кривой Φ. При этом t_1, t_2 и $t_0 = (t_1 + t_2)/2$ — решения квадратного уравнения (79). Это возможно только в том случае, когда $t_1 = t_2$.

Определение. *Если уравнение* (79) *имеет два совпадающих решения* $t_1 = t_2$, *то говорят, что прямая* ℓ *пересекает кривую* Φ *в двух совпадающих точках. Точку* $M_1(t_1) = M_2(t_2)$ *называют при этом двойной точкой пересечения* ℓ *и* Φ.

Определение. *Прямая* $\ell_{M_0}\Phi$, *проходящая через точку* $M_0 \in \Phi$ *и имеющая направление, сопряженное направлению диаметра* D, *проходящего через эту точку, называется касательной к* Φ *в точке* M_0.

Прямая ℓ является касательной к Φ в точке M_0 тогда и только тогда, когда точка M_0 является двойной точкой пересечения ℓ и Φ.

Направляющим вектором диаметра D, проходящего через точку M_0, является вектор $\mathbf{u}\{x_0; y_0\}$. Направляющий вектор $\mathbf{v}\{l; m\}$ касательной $\ell_{M_0}\Phi$ сопряжен вектору $\mathbf{u}\{x_0; y_0\}$. Из условия сопряженности (84) имеем

$$\frac{lx_0}{a^2} \pm \frac{my_0}{b^2} = 0,$$

откуда следует, что направляющий вектор $\mathbf{v}\{l; m\}$ и нормальный вектор $\mathbf{N}_{M_0}\Phi\{A; B\}$ касательной $\ell_{M_0}\Phi$ имеют, соответственно, координаты

$$\{l; m\} = \left\{\frac{y_0}{b^2}; \mp\frac{x_0}{a^2}\right\} \qquad \{A; B\} = \left\{\pm\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2}\right\}.$$

Отсюда находим уравнение касательной $\ell_{M_0}\Phi$:

$$\pm\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x_0}{a^2}(x-x_0)\pm\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0. \qquad (87)$$

Раскрывая в уравнениях (87) скобки и учитывая, что координаты $(x_0;y_0)$ точки M_0 удовлетворяют уравнению (76), получаем, что уравнение касательной к эллипсу, заданному каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

а уравнение касательной к гиперболе, заданной каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

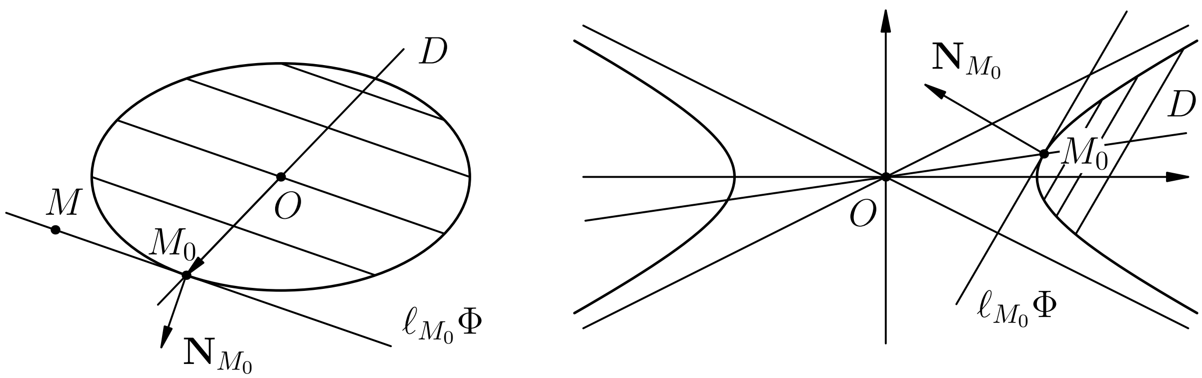

Рис. 49.

Замечания.

1) Вектор $\mathbf{N}_{M_0}\Phi\left\{\pm\frac{x_0}{a^2};\frac{y_0}{b^2}\right\}$ называют также *нормальным вектором кривой* Φ.

2) уравнение (87) касательной $\ell_{M_0}\Phi$ можно получить, записывая условие сопряженности векторов $\overrightarrow{OM_0}\{x_0;y_0\}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0;y-y_0\}$.

Оптические свойства эллипса и гиперболы.

Следующее свойство эллипсов и гипербол используется в оптике при изготовлении отражателей.

Задача 33. Доказать, что касательные $\ell_{M_0}\Phi$ к эллипсам и гиперболам образуют равные углы с фокальными радиусами F_1M_0 и F_2M_0, проведенными в точку касания.

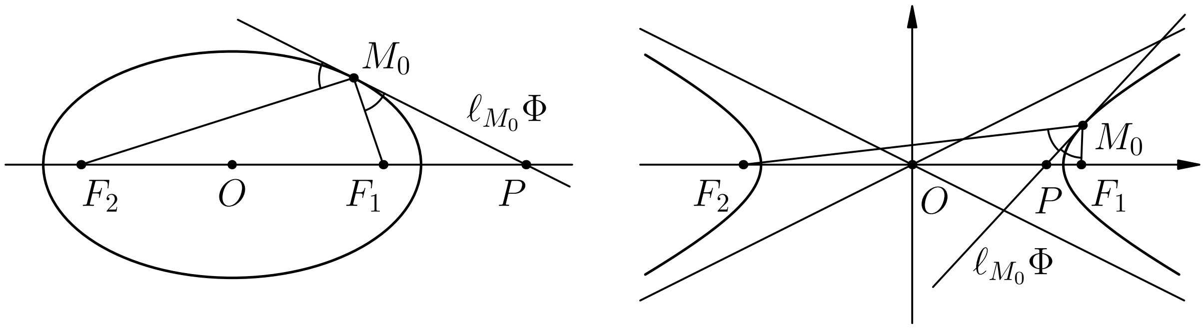

Рис. 50.

Указание. Для решения этой задачи следует либо вычислить косинусы углов между направляющими векторами касательной и фокальных радиусов (термин «фокальный радиус» означает одновременно и прямую FM_0 и длину отрезка FM_0), либо найти координаты точки P пересечения касательной с осью абсцисс канонической системы координат и затем воспользоваться свойствами биссектрис внешнего и внутреннего углов треугольника.

Задача 34. Доказать, что софокусные (имеющие те же самые фокусы) эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.

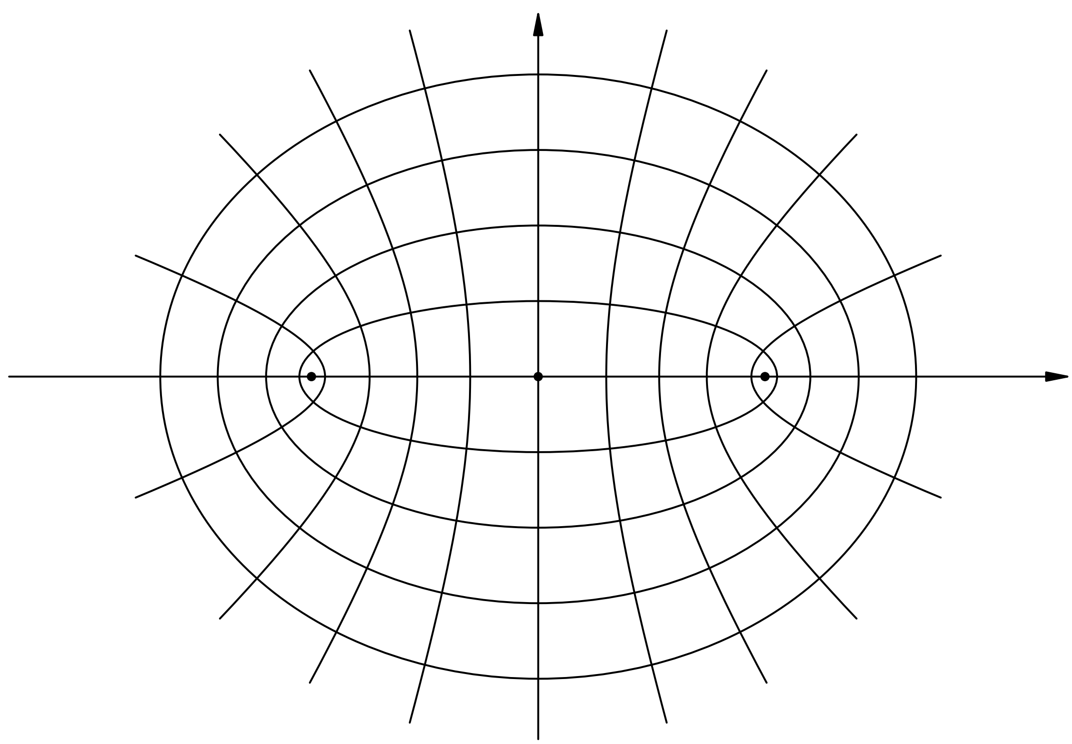

Рис. 51.

Указание. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

Рекомендуемая литература: [1], глава II, §§2, 3; [5], глава 6, §4.

Задачи и упражнения: [2], 479, 480, 481, 482, 483, 485, 487, 489, 490, 491, 492, 493, 504, 510, 549, 551, 551, 555, 556, 557, 558, 570, 576; [4], темы 16, 17.

11 Диаметры параболы.

Пусть Φ — парабола, заданная каноническим уравнением

$$y^2 = 2px, \tag{88}$$

а ℓ — прямая с направляющим вектором $\mathbf{u}\{l; m\}$, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt. \tag{89}$$

Предположим, что прямая ℓ пересекает параболу Φ. Для нахождения точек пересечения ℓ с Φ подставляем уравнения (89) в (88). В результате получаем

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt) \iff m^2t^2 + 2t(my_0 - pl) + y_0^2 - 2px_0 = 0. \tag{90}$$

При $m \neq 0$ уравнение (90) — квадратное уравнение относительно t, поэтому в этом случае прямая ℓ пересекает параболу Φ в двух точках (возможно совпадающих). При $m = 0$ прямая ℓ параллельна оси параболы. В этом случае (90) — уравнение первой степени и, следовательно, имеет единственное решение относительно t, поэтому прямая ℓ пересекает параболу Φ в одной точке.

Определение. *Всякий ненулевой вектор* $\mathbf{u}\{l; 0\}$ *называется вектором асимптотического направления для параболы* $y^2 = 2px$, *а прямая* ℓ, *параллельная оси параболы, называется прямой асимптотического направления для параболы.*

Пусть направление рассматриваемой прямой ℓ не является асимптотическим. Тогда уравнение (90) имеет два вещественных решения (мы предположили, что ℓ и Φ пересекаются) t_1 и t_2, которым соответствуют две общие точки M_1 и M_2 кривой Φ и прямой ℓ. Точка A, являющаяся серединой хорды M_1M_2, соответствует значению параметра t, равному $t_A = (t_1 + t_2)/2$.

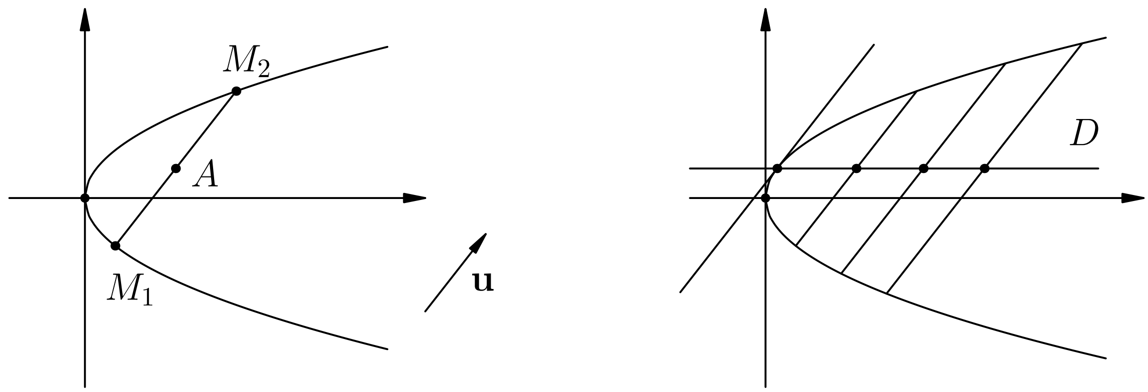

Рис. 52.

Положим $M_0(x_0; y_0) = A$. Тогда $t_A = 0$ и, следовательно, $t_1 + t_2 = 0$. По теореме Виета в этом случае коэффициент при t в квадратном уравнении (90) равен нулю:

$$my_A - pl = 0. \tag{91}$$

Итак, координаты середины хорды M_1M_2 удовлетворяют уравнению (91). Поскольку M_1M_2 — это произвольная хорда, имеющая данное неасимптотическое направление $\mathbf{u}\{l; m\}$, то множество середин всех хорд, имеющих направление $\mathbf{u} = \{l; m\}$, удовлетворяет уравнению

$$my - pl = 0. \tag{92}$$

Уравнением (92) задается некоторая прямая, параллельная оси параболы Φ.

Определение. *Прямая $D(\mathbf{u})$, имеющая уравнение* (92)*, называется диаметром параболы Φ, сопряженным хордам данного неасимптотического направления $\mathbf{u}\{l; m\}$, или, просто, диаметром, сопряженным неасимптотическому направлению $\mathbf{u}\{l; m\}$.*

Все диаметры параболы параллельны ее оси. Из уравнения (92) следует также, что всякая прямая $y = y_0$, параллельная оси параболы, является диаметром, сопряженным некоторому направлению, а именно, направлению $\mathbf{u}\{y_0, p\}$.

Касательные к параболе.

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит параболе Φ. Диаметр D параболы Φ, проходящий через $M_0(x_0; y_0)$, имеет уравнение $y = y_0$. Как и в случае эллипса и гиперболы (см. с. 83), прямая $\ell_{M_0}\Phi$, проходящая через M_0 и имеющая направление, сопряженное диаметру D, пересекает параболу Φ в двух совпадающих точках.

Замечание. В случае параболы сохраняем терминологию, использованную ранее для эллипса и гиперболы.

Определение. *Прямая $\ell_{M_0}\Phi$, проходящая через точку M_0 параболы Φ и имеющая направление, сопряженное диаметру D, проходящему через эту точку, называется касательной к Φ в точке M_0.*

Прямая ℓ является касательной к параболе Φ в точке M_0 тогда и только тогда, когда точка M_0 является двойной точкой пересечения ℓ и Φ.

Направляющим вектором касательной $\ell_{M_0}\Phi$ к параболе Φ в точке $M_0(x_0; y_0)$ является вектор $\mathbf{u}\{y_0, p\}$. Поэтому касательная $\ell_{M_0}\Phi$ имеет следующее уравнение:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0. \tag{93}$$

Раскрывая в уравнении (93) скобки и учитывая, что координаты $(x_0; y_0)$ точки M_0 удовлетворяют уравнению (88), получаем, что уравнение касательной к параболе, заданной каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

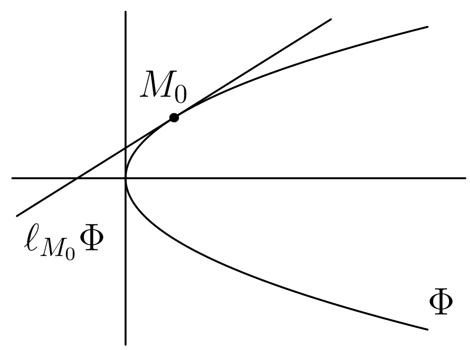

Рис. 53.

Оптическое свойство параболы.

Следующее свойство параболы используется в оптике при изготовлении отражателей.

Задача 35. Доказать, что касательная $\ell_{M_0}\Phi$ к параболе Φ в точке M_0 образует равные углы с фокальным радиусом FM_0 и осью параболы.

Указание. Пусть P — точка пересечения касательной с осью абсцисс канонической системы координат, тогда треугольник PFM_0 — равнобедренный.

Задача 36. Доказать, что софокусные (имеющие те же самые фокусы) параболы, направления осей которых противоположны (то есть противоположны направления осей абсцисс канонических систем координат), пересекаются под прямым углом.

Указание. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

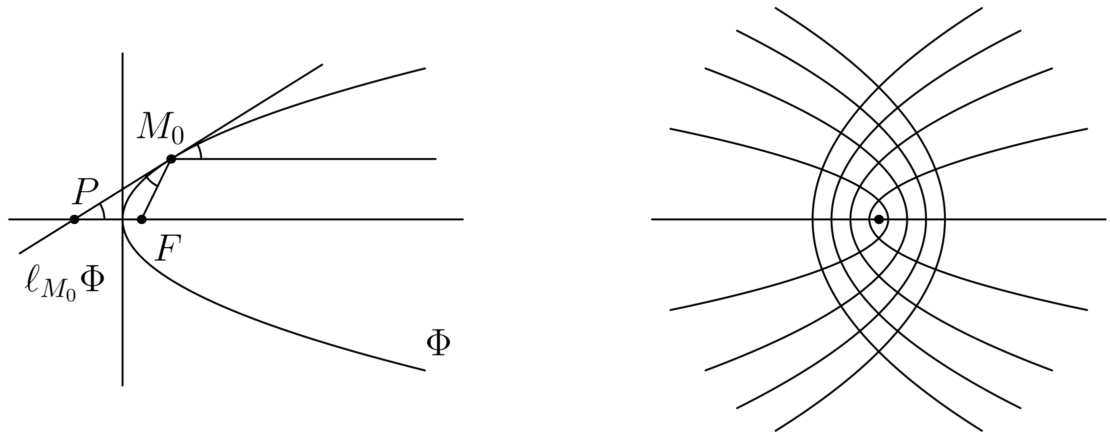

Рис. 54.

Рекомендуемая литература: [1], глава II, §1; [5], глава 6, §4.

Задачи и упражнения: [2], 639, 640, 641, 649, 650, 655, 659, 660, 668; [4], тема 18.

12 Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

Полярная система координат на ориентированной евклидовой плоскости $\mathcal{E}_2$ задается точкой $O \in \mathcal{E}_2$, называемой *полюсом*, и ориентированной прямой (осью) $\ell\!\uparrow$, проходящей через точку O, называемую *полярной осью*. Положение точки $M \in \mathcal{E}_2$ определяется двумя числами $(\rho;\varphi)$, определяемыми следующим образом: $\rho = |\overrightarrow{OM}|$, а φ — угол, на который нужно повернуть направляющий вектор $\mathbf{a}$ оси $\ell\!\uparrow$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$.

С полярной системой координат естественно ассоциируется правый ортонормированный репер $\{O;\mathbf{i},\mathbf{j}\}$, где $\mathbf{i} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ — единичный направляющий вектор полярной оси. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M следующим образом выражается через ее полярные координаты $(\rho;\varphi)$: $\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}(\varphi)$, где

$\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi$. Поэтому прямоугольные координаты точки M относительно репера $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ связаны с ее полярными координатами следующими соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{94}$$

Из уравнений (94) видно, что прямоугольные координаты точки M однозначно определяются по ее полярным координатам. Однако обратное не имеет места. Если $M \neq O$, то φ определяется с точностью до слагаемого, кратного $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а если $M = O$, то φ может быть любым вещественным числом. Кроме того, иногда удобно считать, что ρ может принимать и отрицательные значения. При этом считается, что координаты $(\rho; \varphi)$ и $(-\rho; \varphi + \pi)$ задают одну и ту же точку (это можно пояснить следующим образом: чтобы найти на плоскости точку M с полярными координатами $(\rho; \varphi)$, нужно повернуть полярную ось вокруг полюса на угол φ и затем отложить на ней точку с координатой ρ).

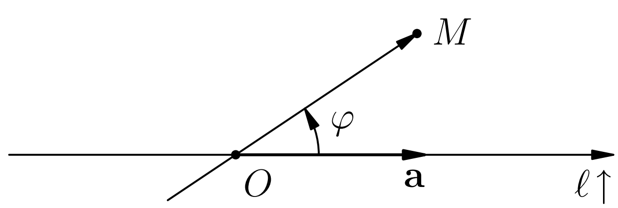

Рис. 55.

При выборе полярной системы координат для изучения эллипса, гиперболы или параболы естественно располагать полюс или в начале канонической системы координат, или в фокусе рассматриваемой кривой, а в качестве полярной оси естественно брать ось абсцисс канонической системы координат.

В этом параграфе мы рассмотрим следующую полярную систему координат, удобную для одновременного изучения и эллипса, и гиперболы, и параболы: полюс O помещаем в фокус F параболы, левый фокус эллипса и в правый фокус гиперболы (относительно канонической системы координат), а в качестве полярной оси берем ось абсцисс канонической системы координат (см. рис. 56). Такие полярные системы координат находят применение в астрономии, поскольку траекториями небесных тел, приближающихся к солнечной системе, являются эллипсы, гиперболы и параболы, в одном из фокусов которых находится солнце (небесные тела рассматриваются как материальные точки).

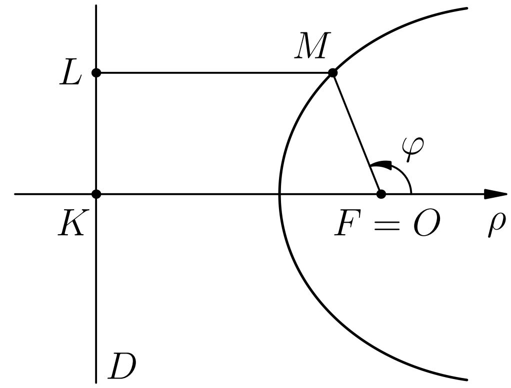

Рис. 56.

Пусть D — директриса, соответствующая фокусу, расположенному в полюсе. Фокальным параметром кривой Φ называется половина фокальной хорды, перпендикулярной оси кривой. Обозначается этот параметр буквой p. Очевидно, фокальный параметр совпадает с фокальным радиусом точки $A \in \Phi$ для которой вектор $\overrightarrow{FA}$ перпендикулярен оси абсцисс канонической системы координат. Обозначим символом $\delta = \operatorname{dist}(F, D)$ расстояние от фокуса до директрисы, тогда $p = \delta e$, где e — эксцентриситет. В случае параболы фокальный параметр совпадает с параметром p в ее каноническом уравнении, а для эллипса и гиперболы $p = b^2/a$.

Пусть, далее, K — точка пересечения полярной оси и директрисы D, M — произвольная точка кривой Φ, L — проекция точки M на директрису, r — фокальный радиус точки M, d — расстояние от M до директрисы. Имеем:

$$\begin{aligned} d = |\overrightarrow{LM}| = (\overrightarrow{LM}, \mathbf{i}) = (\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{FM}, \mathbf{i}) \ = \\ = \ 0 + \delta + (r\mathbf{e}(\varphi), \mathbf{i}) = \delta + r\cos\varphi. \end{aligned} \tag{95}$$

Подставляя выражение (95) для d в уравнение $r = de$, однозначно (с точностью до расположения на плоскости) определяющее кривую Φ, получаем $r = \delta e + re\cos\varphi$, откуда $r(1 - e\cos\varphi) = \delta e = p$. Отсюда получаем уравнение, задающее при соответствующих значениях эксцентриситета эллипс, параболу или правую ветвь гиперболы:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{96}$$

Задача 37. Вывести следующее уравнение левой ветви гиперболы в этой же полярной системе координат (полюс находится в правом фокусе, а полярная ось совпадает с осью абсцисс канонической системы координат):

$$\rho = \frac{-p}{1 + e\cos\varphi}.$$

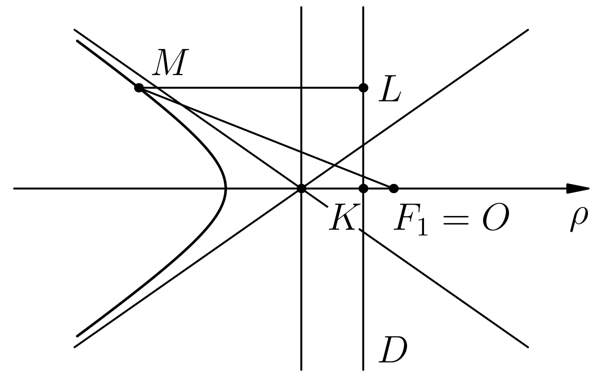

Рис. 57.

Рекомендуемая литература: [1], глава II, §5; [5], глава 6, §3.

Задачи и упражнения: [2], 106, 107, 109, 111, 112, 114, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 380, 382, 383, 384, 385, 388; [4], тема 11.

13 Параметрические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

Параметрическим уравнением линии $\Gamma \subset \mathcal{A}_n$ в аффинном пространстве называют уравнение вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t — вещественный параметр, принимающий значения из некоторого интервала $(\alpha; \beta) \subset \mathbf{R}$, а $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор некоторой точки линии Γ при любом значении $t \in (\alpha; \beta)$. Область значений функции $\mathbf{r}(t)$ может не совпадать со всей линией Γ, то есть эта функция может параметризовать только часть линии. В зависимости от решаемой задачи предполагается также, что эта функция удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, например: является инъективной или биективной, непрерывной или кусочно-дифференцируемой и т. п. Очевидно, параметрическое уравнение линии определяется неоднозначно. Например, если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — параметрическое уравнение некоторой линии $\Gamma \subset \mathcal{A}_n$, а $t = t(\tau)$ — некоторая взаимно однозначная функция, $(\gamma; \delta) \ni \tau \mapsto t(\tau) \in (\alpha; \beta)$, то уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}(t(\tau))$ также является параметрическим уравнением линии Γ.

Если в пространстве $\mathcal{A}_n$ выбран репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, то, разложения $\mathbf{r}(t) = x^i(t)\mathbf{e}_i$ определяют координатные параметрические уравнения $x^i = x^i(t)$,

$i = 1, \ldots, n$, линии Г. Они также определены неоднозначно, зависят от выбора уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и от выбора репера.

Эллипс, гиперболу и параболу на плоскости $\mathcal{E}_2$ также можно задавать различными параметрическими уравнениями. Например, можно получить параметрические уравнения этих линий, переходя в их полярных уравнениях (96) от полярных координат к прямоугольным по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. В качестве параметра, задающего точку параболы, очевидно, можно взять ее ординату: $x = t^2/2p$, $y = t$.

В этом параграфе рассматриваются параметрические уравнения эллипса и гиперболы, в которых параметр, задающий точку, принадлежащую линии, имеет естественный геометрический смысл.

Рассмотрим сначала окружность $x^2+y^2 = a^2$. Точка M этой окружности имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = a\mathbf{e}(t)$, где t — угол, на который надо повернуть направляющий вектор $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$ оси абсцисс, чтобы его направление совпало с направлением радиуса-вектора точки M, а $\mathbf{e}(t) = \mathbf{i}\cos t+\mathbf{j}\sin t$ — круговая векторная функция (см. рис. 58). Таким образом, окружность может быть задана параметрическими уравнениями

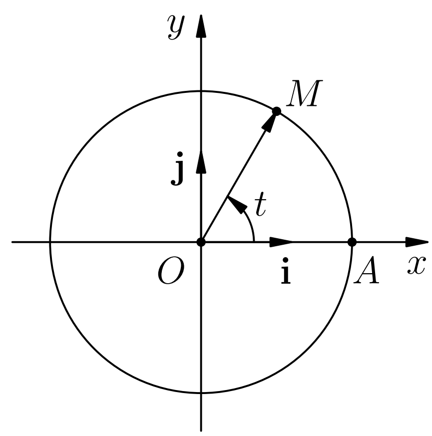

Рис. 58.

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a\cos t, \quad y = a\sin t. \tag{97}$$

Область $(\alpha;\beta)$ изменения параметра t выбирается в зависимости от условий задачи. Например, если точка $M(t)$ непрерывно вращается вокруг точки O, можно считать, что $t \in (-\infty;+\infty)$.

Параметр t в уравнениях (97) имеет также следующий геометрический смысл: число a^2t — это удвоенная ориентированная площадь сектора OAM, где $A(a;0)$ — точка пересечения окружности с положительной частью оси абсцисс.

В основе параметрических уравнений окружности (97) лежит тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Это же тождество позволяет параметризовать эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{98}$$

следующим образом:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \tag{99}$$

Геометрический смысл параметра t в уравнениях (99) ясен из рисунка 59, демонстрирующего тот факт, что эллипс (98) может быть получен из окружности радиуса a сжатием к оси абсцисс с коэффициентом b/a или растяжением окружности радиуса b от оси ординат с коэффициентом a/b.

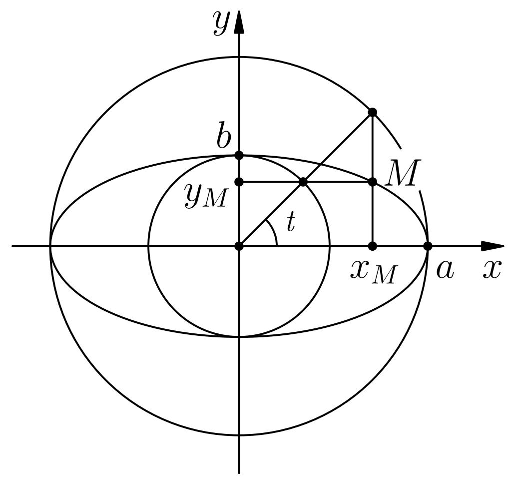

Рис. 59.

Вычислим теперь для эллипса площадь $S(t)$ сектора OAM, где $A(a;0)$ — точка пересечения эллипса с положительной частью оси абсцисс (вершина эллипса), а $M(t)$ — точка эллипса, определяемая соответствующим значением параметра t. Производная функция $S'(t)$ представляет предел отношения площади сектора OMM', где M' — точка эллипса, соответствующая значению параметра $t + \Delta t$, к Δt при $\Delta t \to 0$. Поскольку площадь сектора OMM' отличается от площади треугольника OMM' на бесконечно малую величину более высокого порядка чем Δt, то производная $S'(t)$ равна пределу отношения площади треугольника OMM' к Δt при $\Delta t \to 0$.

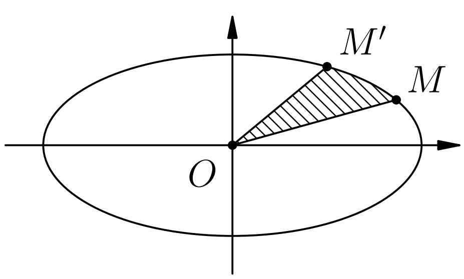

Рис. 60.

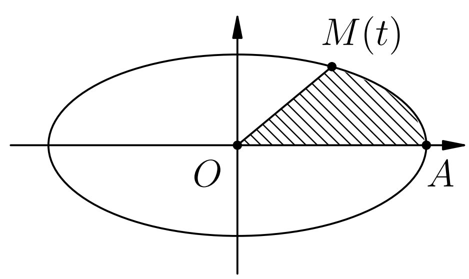

Рис. 61.

Итак,

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ a\cos(t+\Delta t) & b\sin(t+\Delta t) \end{vmatrix}}{\Delta t} = \frac{ab}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} = \frac{ab}{2}. \quad (100)$$

Отсюда

$$S(t) = \int_0^t S'(t)\,dt = \int_0^t \frac{ab}{2}\,dt = \frac{ab}{2}\,t. \quad (101)$$

Таким образом, параметр t в уравнениях (99) — это ориентированная площадь сектора OAM, взятая с коэффициентом $\dfrac{2}{ab}$.

Гиперболические функции $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ и $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ удовлетворяют тождеству $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Это тождество дает возможность параметризовать правую ветвь гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (102)$$

следующим образом:

$$x = a\operatorname{ch} t, \quad y = b\operatorname{sh} t. \quad (103)$$

Геометрический смысл параметра t в уравнениях (103) аналогичен геометрическому смыслу параметра t в уравнениях эллипса (99). Вычисляя производную $S'(t)$ от функции $S(t)$, представляющей собой площадь сектора OAM, где $A(a;0)$ — вершина гиперболы, а $M(t)$ — точка гиперболы, определяемая соответствующим значением параметра t, аналогично случаю эллипса получим

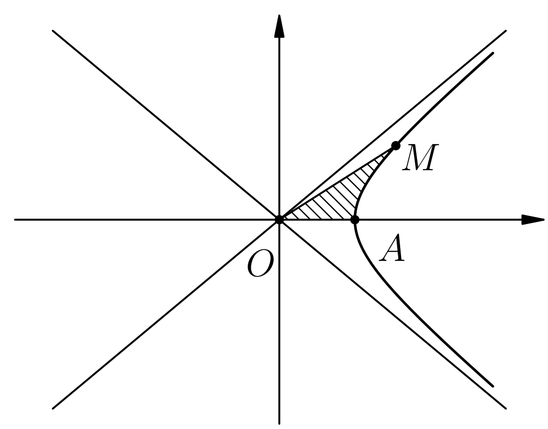

Рис. 60.

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a\operatorname{ch} t & b\operatorname{sh} t \\ a\operatorname{ch}(t+\Delta t) & b\operatorname{sh}(t+\Delta t) \end{vmatrix}}{\Delta t} = \frac{ab}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sh} \Delta t}{\Delta t} = \frac{ab}{2}, \quad (104)$$

откуда аналогично (101) получаем $S(t) = \dfrac{ab}{2}t$. Таким образом, параметр t

в уравнениях (103) — это ориентированная площадь сектора OAM, ограниченного гиперболой, взятая с коэффициентом $\dfrac{2}{ab}$.

Задача 38. Использование тригонометрического тождества $\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$ позволяет получить следующие параметрические уравнения для правой ветви гиперболы (102):

$$x = \sec t, \quad y = \operatorname{tg} t, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{105}$$

1) Используя две концентрические окружности радиусов a и b, как на рисунке 59, указать точку гиперболы, соответствующую данному значению параметра t.

2) Записать аналогичные параметрические уравнения для левой ветви гиперболы (102).

Задачи из экзаменационных билетов на свойства эллипса, гиперболы и параболы: [8], 410, 416, 417, 440, 440*, 449, 467, 468, 469, 470, 501, 502, 503, 507.

Список литературы

[1] Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* М. Наука. 1979. 512 с.

[2] Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. *Сборник задач по аналитической геометрии.* М. Наука. 1964.

[3] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* М. Наука. 1970. 528 с.

[4] Игудесман К.Б. *Задачи по аналитической геометрии. Часть I.* Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Казанск. ун-т. 2003. 63 с.

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия.* М. Наука. 1981. 232 с.

[6] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* М. Наука. 1971. 432 с.

[7] Постников М.М. *Аналитическая геометрия* (*Лекции по геометрии. Семестр I*). М. Наука. 1979. 336 с.

[8] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии.* М. Наука. 1964. 336 с.

Содержание