Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2019, №9, с. 3–15 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

М.С. АФАНАСОВА, Г.Г. ПЕТРОСЯН

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФУНЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОБЩИМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Рассматривается краевая задача для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием, выраженным в виде операторного включения, в банаховом пространстве. В начале статьи приводится введение, в котором обосновывается актуальность исследования, затем приводятся предварительные сведения из дробного анализа, теории мер некомпактности и уплотняющих отображений, а так же некоторые сведения из многозначного анализа. Во втором пункте приводится постановка задачи и ее решение на основе теории уплотняющих многозначных отображений. В последнем пункте приводится пример частного случая решенной задачи в случае антипериодического краевого условия.

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

УДК: 517.929

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-9-3-15

1. Введение

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (например, [1]–[11] и др.).

В настоящей работе рассматриваем полулинейные функционально-дифференциальные включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве. Применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений [12], доказываем (теорема 2.1) существование решения и компактность множества решений краевой задачи для полулинейных функционально-дифференциальных включений указанного класса.

Поступила в редакцию 02.08.2018, после доработки 02.08.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственной квоты, проект №1.3464.2017/4.6, и РФФИ в рамках проектов №19-31-60011 и №17-51-52022 МНТ_а.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект 14.Z50.31.0037.

1.1. **Дробный интеграл и дробная производная.**

Определение 1.1 (например [5], [6]). Дробным интегралом порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$ называется функция

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 1.2. Дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (N-1, N]$ от функции $g \in C^N([0,T];E)$ называется функция

$$D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} g^{(N)}(s)\, ds.$$

1.2. **Многозначные отображения.** Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Введем следующие обозначения:

$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$ — множество всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$,

$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}$,

$K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}$,

$Kv(\mathcal{E}) = \{Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})\}$ — множество всех непустых компактных и выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

Определение 1.3 (например [13]). Пусть $Pb(\mathcal{E})$ — совокупность всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств $\mathcal{E}$. Для $A, B \in Pb(\mathcal{E})$ функция $\mathcal{H} : Pb(\mathcal{E}) \times Pb(\mathcal{E}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\mathcal{H}(A,B) = \inf\left\{\varepsilon \,|\, A \subset U_\varepsilon(B),\ B \subset U_\varepsilon(A)\right\},$$

где U_ε — ε-окрестность множества, называется метрикой Хаусдорфа.

Определение 1.4 (например, [12], [14]). Пусть $(\mathcal{A}, \geq)$ — некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta : P(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (МНК) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполняется

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется

1) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in P(\mathcal{E})$, $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;

2) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется

3) *правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in P(\mathcal{E})$ $\beta(\Omega) = 0$;

4) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0,\ \text{при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\}.$$

Определение 1.5 (например, [12], [13]). Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется

(i) *полунепрерывным сверху*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$,
(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$,
(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1.1 ([12]). *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ полунепрерывно сверху.*

Определение 1.6 (например, [12], [14]). Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно МНК β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено

$$\beta(F(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega).$$

Справедливы следующие теоремы о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (например, [12], [15], [16]).

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — β-уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}$: $\operatorname{Fix}\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ — непустое множество.*

Теорема 1.2. *Пусть X — замкнутое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$, β — монотонная мера некомпактности в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : X \to K(\mathcal{E})$ — замкнутый мультиоператор, который является β-уплотняющим на каждом ограниченном множестве. Если множество неподвижных точек $\mathcal{F} : \operatorname{Fix}\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ ограничено, то оно компактно.*

1.3. **Измеримые мультифункции.** Напомним некоторые понятия (например, [12], [13]). Пусть E — банахово пространство.

Определение 1.7. Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$ для $p \geq 1$ называется
$\circ$ *L^p-интегрируемой*, если она допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т. е. существует функция $g \in L^p([0, T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, T]$;
$\circ$ *L^p-интегрально ограниченой*, если существует функция $\xi \in L^p([0, T])$ такая, что

$$\|G(t)\| := \sup \{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0, T]$.

Множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции $G : [0, T] \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Определение 1.8. Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0, T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0, T] \to K(E)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t), G(t)) = 0$$

для п. в. $t \in [0, T]$, где $\mathcal{H}$ — хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p-интегрально ограничена, то она L^p-интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{ \int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}_G^p \right\} \text{ для любого } t \in [0,T].$$

Лемма 1.2 ([12], теорема 4.2.3)**.** *Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ — L^p-интегрируемая и L^p-интегрально ограниченная мультифункция такая, что $\chi(G(t)) \le q(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$, где $q \in L_+^p([0,T])$. Тогда*

$$\chi\left(\int_0^t G(s)ds\right) \le \int_0^t q(s)ds$$

для всех $t \in [0,T]$. В частности, если мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ измерима и L^p-интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем

$$\chi\left(\int_0^t G(s)ds\right) \le \int_0^t \chi(G(s))ds$$

для всех $t \in [0,T]$.

Лемма 1.3 ([12], теорема 4.2.1)**.** *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0,a];E)$ для всех $n = 1,2,\dots$ и п. в. $t \in [0,T]$ является L^1-интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\chi(\{\xi_n(t)\}) \le \alpha(t)$$

для п. в. $t \in [0,a]$, где $\alpha \in L_+^1([0,a])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует компактное множество $K_\delta \subset E$ и множество $m_\delta \subset [0,a]$ с лебеговой мерой $m_\delta < \delta$, а также множество функций $G_\delta \subset L^1([0,a];E)$ со значениями в K_δ такие, что для каждого $n \ge 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \le 2\alpha(t) + \delta, \qquad t \in [0,a] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2. Теорема существования

Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Для $a, h > 0$ обозначим

$$\mathcal{D} = C([-h,a];E), \quad \mathcal{C} = C([-h,0];E).$$

Для $x \in \mathcal{D}$ определена функция $x_t \in \mathcal{C}$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$.

Рассмотрим общую краевую задачу для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка

$$D^q x(t) \in Ax(t) + F(t,x_t), \quad t \in [0,a], \tag{1}$$

$$Qx \in Sx, \tag{2}$$

где $q \in (0,1)$ при следующих предположениях:

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий ограниченную C_0 полугруппу $\{T(t)\}_{t\ge 0}$, обозначим $M = \sup \|\{T(t)\}\|, t \ge 0$.

Для мультиоператора $F : [0,a] \times \mathcal{C} \to Kv(E)$ будем предполагать следующие условия:

$(F1)$ для всех $x \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot,x) : [0,a] \longrightarrow Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение;

$(F2)$ для п. в. $t \in [0,a]$ мультиотображение $F(t,\cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху;

$(F3)$ найдется функция $\alpha \in L^\infty([0,a])$ такая, что

$$\|F(t,x)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|_{\mathcal{C}})$$

для п. в. $t \in [0,a], x \in \mathcal{C}$;

$(F4)$ найдется функция $\mu \in L^\infty([0,a])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$ выполняется

$$\chi(F(t,\Omega)) \leq \mu(t)\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega)$$

для п. в. $t \in [0,a]$, где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E, а $\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \sup\limits_{t\in[-h,0]} e^{-pt}\chi(\Omega(t))$ — модуль послойной некомпактности в $\mathcal{C}$, где константа p будет определена ниже.

Для решения нашей задачи будем использовать суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F^\infty : \mathcal{D} \to L^\infty([0,a];E)$:

$$\mathcal{P}_F^\infty(x) = \left\{f \in L^\infty([0,a];E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ для п. в. } t \in [0,a]\right\}.$$

Для операторов из граничного условия (2) предполагаются следующие условия:

(Q) $Q : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — линейный ограниченный оператор;

(S) мультиотображение $S : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{C})$ является полунепрерывным сверху и переводит ограниченные множества в относительно компактные.

Определение 2.1. Интегральным решением задачи (1)–(2) на промежутке $[-h,a]$ называется функция $x \in \mathcal{D}$ такая, что $Qx \in Sx$,

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,a],$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \qquad \mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q), \;\; \theta \in \mathbb{R}^+,$$

и $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$.

Замечание 2.1. $\int\limits_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}$.

Лемма 2.1 ([17]). *Операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ обладают следующими свойствами:*

1) *для любого $t \in [0,a]$ $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются линейными ограниченными операторами, более того, $\|\mathcal{G}(t)x\|_E \leq M\|x\|_E$, $\|\mathcal{T}(t)x\|_E \leq \frac{qM}{\Gamma(1+q)}\|x\|_E$;*

2) *операторы $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ сильно непрерывны для всех $t \in [0,a]$.*

Определение 2.2. Линейный оператор $G : L^\infty([0,a];E) \to \mathcal{D}$, определенный как

$$Gf(x) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds, & t \in [0,a]; \\ 0, & t \in [-h,0], \end{cases}$$

назовем оператором Коши.

Лемма 2.2 ([17], лемма 3.3)**.** *Оператор G обладает следующими свойствами*:

(G_1) *если $\frac{1}{q} < p < \infty$, то существует константа $C > 0$ такая,что*

$$\|G(\xi)(t) - G(\eta)(t)\|_E^p \leq C^p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds, \quad \xi, \eta \in L^p([0,a]);$$

(G_2) *для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,a];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п. в. $t \in [0,a]$, множество $\{G(\eta_n)\}$ относительно компактно в пространстве $C([0,a];E)$.*

Через $\mathcal{D}_0$ обозначим подпространство $\mathcal{D}$, состоящее из функций вида

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0), \; t \in [0,a],$$

и пусть Q_0 — сужение Q на $\mathcal{D}_0$.

Пусть выполняется следующее условие:

(QS) существует линейный ограниченный оператор $\Lambda : \mathcal{C} \to \mathcal{D}_0$ такой, что

$$(I - Q_0\Lambda)(y - QGf) = 0$$

для всех $x \in \mathcal{D}, y \in \mathcal{S}(x)$ и $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$.

Для того, чтобы привести пример выполнения данного условия, рассмотрим линейный ограниченный оператор $r : \mathcal{C} \to \mathcal{D}_0$, который определен следующим образом:

$$(rc)(t) = \begin{cases} c(t), & t \in [-h, 0]; \\ \mathcal{G}(t)c(0), & t \in [0,a]. \end{cases}$$

Предположим, что

($\widetilde{Q}$) линейный ограниченный оператор $\widetilde{Q} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, определенный как $\widetilde{Q}c = Q((rc)|_{[0,a]})$, является обратимым.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия ($\widetilde{Q}$) оператор Λ можно задать явным образом $\Lambda c = r\left[\widetilde{Q}^{-1}(c)\right]$. В предположении, что условие (QS) выполнено, рассмотрим многозначный оператор $\Gamma : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{D})$:

$$\Gamma(x) = \Lambda S(x) + (I - \Lambda Q)G\mathcal{P}_F^\infty(x).$$

Лемма 2.3 ([17])**.** *Мультиотображение G является полунепрерывным сверху.*

В силу условий (Q) и (QS) и леммы 2.3. справедлива

Лемма 2.4. *Мультиотображение Γ является полунепрерывным сверху.*

Отметим, что из условия (S) и леммы 2.3 вытекает, что мультиоператор Γ действительно имеет выпуклые компактные значения и, кроме того, полунепрерывен сверху. Нетрудно видеть, что мультиоператор Γ ограничен, т. е. переводит ограниченные множества в ограниченные.

Лемма 2.5. *Каждая неподвижная точка мультиоператора Γ имеет вид*

$$x = \Lambda(y - QGf) + Gf \tag{3}$$

и является интегральным решением задачи (1)–(2)*. Если дополнительно выполняется условие* ($\widetilde{Q}$)*, то каждое интегральное решение x задачи* (1)–(2) *является неподвижной точкой мультиоператора Γ.*

Доказательство. Пусть $x \in \Gamma(x)$. Это означает, что существуют $y \in S(x)$, $f \in \mathcal{P}_F(x)$ такие, что $x = \Lambda y + (I - \Lambda Q)Gf$. Поскольку x можно тогда представить в виде

$$x = \Lambda(y - QGf) + Gf,$$

заключаем, что x удовлетворяет интегральному уравнению из определения 2.1.

Проверим выполнение граничного условия. Используя условие (QS), получаем

$$Qx = Q_0\Lambda y + Q(I - \Lambda Q)Gf = y - (y - Q_0\Lambda y) + QGf - Q_0\Lambda QGf = y - (I - Q_0\Lambda)(y - QGf) = y \in Sx.$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть функция x является неподвижной точкой мультиоператора Γ, тогда она удовлетворяет соотношению

$$x = r(x(0)) + G(f)$$

для $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$. Следовательно, $Qx = \widetilde{Q}(x(0)) + QG(f)$, отсюда получаем

$$x(0) = \widetilde{Q}^{-1}\big(Qx - QG(f)\big).$$

Так как $r(x(0)) = \Lambda\big(Qx - QG(f)\big)$, то

$$x = \Lambda\big(Qx - QG(f)\big) + G(f) = \Lambda Qx + (I - \Lambda Q)G(f) \in \Gamma(x).$$ □

Пусть выполнено следующее условие:

$(H1)$ найдется $b \geq 0$ такое, что для любого ограниченного $\Omega \subset \mathcal{D}$ имеем

$$\varphi_{\mathcal{C}}(Q(\Omega)) \leq b\varphi_{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Для доказательства того факта, что мультиотображение Γ является уплотняющим, введем в пространстве $\mathcal{D}$ векторную меру некомпактности $\nu : P(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^2_+$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, определенную как

$$\nu_{\mathcal{D}}(\Omega) = \max_{D \in \Delta(\Omega)} \left(\varphi_{\mathcal{D}}(D), \operatorname{mod}_C(D)\right),$$

где $\Delta(\Omega)$ — совокупность всех счетных подмножеств Ω,

$$\varphi_{\mathcal{D}}(D) = \sup_{t \in [0,a]} e^{-pt}\chi(D(t)),$$

и константа $p > 0$ выбрана так, что для $d > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{qM\left\|\mu\right\|_\infty (1 + \|\Lambda\| b)}{\Gamma(1+q)} \frac{d^q}{q} < \frac{1}{4}, \tag{4}$$

выполняется оценка

$$\frac{qM\left\|\mu\right\|_\infty (1 + \|\Lambda\| b)}{\Gamma(1+q)} \frac{1}{pd^{1-q}} < \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Вторая компонента нами определенной меры некомпактности ν суть модуль равностепенной непрерывности:

$$\operatorname{mod}_C(D) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{u \in D} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|u(t_1) - u(t_2)\|.$$

Лемма 2.6. *Мультиоператор Γ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ — непустое ограниченное множество и

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega), \tag{6}$$

покажем, что Ω — относительно компактное множество.

Из свойств (S) и (QS) следует, что нам достаточно доказать теорему для мультиотображения $(I - \Lambda Q)Gf$.

Пусть максимум в неравенстве (6) достигается на счетном множестве $\mathcal{D}' = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$y_n(t) = (I - \Lambda Q)Gf_n(t), \quad f_n \in \mathcal{P}_F^{\infty}(x_n), \ \ n \geq 1,$$

где $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$.

Из неравества (6) следует $\varphi_{\mathcal{D}}(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi_{\mathcal{D}}(\Omega)$. Благодаря условию $(H1)$ имеем

$$\chi(\Lambda QG\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega)(t)) \leq \varphi_{\mathcal{D}}(\Lambda QG\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega)) \leq \|\Lambda\| \, \varphi_{\mathcal{C}}(QG\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega)) \leq \\ \leq \|\Lambda\| \, b\varphi_{\mathcal{D}}(G\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega)) = \|\Lambda\| \, b \sup_{0 \leq t \leq a} \chi(G\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega)(t)).$$

Для оценки $\chi(G\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega)(t))$ заметим, что

$$\varphi(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}) \geq \varphi(\{(x_n)\}_{n=1}^{\infty}). \tag{7}$$

Теперь, применяя условие регулярности $(F4)$, получим

$$\chi(\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}) \leq \mu(s) \cdot \varphi_{\mathcal{C}}(\{(x_s)_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq \\ \leq e^{ps}\mu(s) \cdot \sup_{\tau \in [0,s]} e^{-ps}\chi(\{(x(s))_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq e^{ps}\mu(s)\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Воспользуемся леммой 2.1 и последним неравенством:

$$e^{-pt}\chi((I - \Lambda Q)G\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega)(t)) \leq e^{-pt}\frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} e^{ps}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})ds+ \\ + e^{-pt}\chi(\Lambda QG\mathcal{P}_F^{\infty}(\Omega(t))) \leq e^{-pt}\frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} e^{ps}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})ds+ \\ + \|\Lambda\| \, be^{-pt}\left(\frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}}{\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} e^{ps}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})ds\right) \leq \\ \leq \frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}(1+\|\Lambda\| \, b)}{\Gamma(1+q)}e^{-pt}\int_0^t (t-s)^{q-1} e^{ps}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})ds \leq \\ \leq \frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}(1+\|\Lambda\| \, b)}{\Gamma(1+q)}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \times \\ \times \left(e^{-pt}\int_0^{t-d} (t-s)^{q-1} e^{ps}ds + e^{-pt}\int_{t-d}^t (t-s)^{q-1} e^{ps}ds\right) \leq \\ \leq \frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}(1+\|\Lambda\| \, b)}{\Gamma(1+q)}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{p(t-d)}-1}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leq \\ \leq \frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}(1+\|\Lambda\| \, b)}{\Gamma(1+q)}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\left(\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{-pd}}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leq \\ \leq \frac{qM\left\|\mu\right\|_{\infty}(1+\|\Lambda\| \, b)}{\Gamma(1+q)}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\left(\frac{1}{pd^{1-q}} + \frac{d^q}{q}\right).$$

Теперь, используя неравенства (4) и (5), для последней оценки имеем

$$\sup_{t \in [0,a]}(\{e^{-pt}y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leq \frac{1}{2}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}),$$

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq \frac{1}{2}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Учитывая неравество (7) вместе с последним, получаем

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq \frac{1}{2}\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}),$$

поэтому $\varphi_{\mathcal{D}}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$, более того, $\chi(\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) = 0$ для всех $t \in [0, a]$.

В силу условий (Q) и (QS) и доказанного факта $\operatorname{mod}_C(\{Gf_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$ ([17]) справедливо равенство

$$\operatorname{mod}_C((I - \Lambda Q)Gf) = 0,$$

а значит, $\nu(\Omega) = (0, 0)$. Тогда заключаем, что Ω — относительно компактное множество, а мультиоператор Γ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. □

Теорема 2.1. *При выполнении условий* $(F1)$–$(F4)$, (Q), (QS), $(\widetilde{Q})$, $(H1)$ *множество решений задачи* (1)–(2) *на* $[-h, a]$ *непусто и компактно.*

Доказательство. Введем эквивалентную норму в пространстве $C([-h, a]; E)$

$$\|x\|_* = \max_{t \in [-h,a]} e^{-pt} \|x(t)\|_E \,,$$

где константа $p > 0$ выбрана так, что для $d > 0$ выполняется неравенство

$$(1 + \|\Lambda\| \, \|Q\|) \frac{qM \, \|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)} \left(\frac{1}{pd^{1-q}} + \frac{d^q}{q} \right) \leq N < 1.$$

В пространстве $C([-h, a]; E)$ с нормой $\|\cdot\|_*$ рассмотрим шар

$$\overline{B}_r(0) = \{x \in C([-h, a]; E) | \, \|x\|_* \leq r\} \,,$$

где $r > 0$ выбрано таким, что

$$r \geq \max \left\{ e^{ph} K; \left(\|\Lambda\| \, K + (1 + \|\Lambda\| \, \|Q\|) \frac{qM \, \|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)} \frac{a^q}{q} \right) (1 - N)^{-1} \right\},$$

где константа $K = \sup\limits_{y \in S(x)} \|y\|$.

Заметим, что из последнего неравенства вытекает

$$\|\Lambda\| \, K + (1 + \|\Lambda\| \, \|Q\|) \frac{qM \, \|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)} \frac{a^q}{q} + Nr \leq r.$$

Докажем, что мультиоператор G преобразует шар $\overline{B}_r(0)$ в себя. Пусть $x \in \overline{B}_r(0)$ и $y \in \Gamma(x)$.

Для $t \in [-h, 0]$ имеем

$$e^{-pt} \|y(t)\|_E \leq e^{-pt} \|S(x)\| \leq e^{-pt} \sup_{y \in S(x)} \|y\| = e^{ph} K,$$

таким образом, $\|y\|_* \leq r$ для $t \in [-h, 0]$.

Пусть теперь $t \in [0, a]$. Воспользовавшись леммой 2.1 и условием $(F3)$, для всех $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ получаем

$$
\begin{aligned}
e^{-pt}\|y(t)\|_E &\leq e^{-pt}\|\Lambda S(x(t)) + (I - \Lambda Q)Gf(t)\|_E \leq \\
&\leq e^{-pt}\|\Lambda\| K + e^{-pt}\|Gf(t)\|_E + e^{-pt}\|\Lambda Q G f(t)\|_E \leq \\
&\leq e^{-pt}\|\Lambda\| K + e^{-pt}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|\mathcal{T}(t-s)\|\|f(s)\|_E\,ds + \\
&+ e^{-pt}\|\Lambda\|\|Q\|\int_0^t (t-s)^{q-1}\|\mathcal{T}(t-s)\|\|f(s)\|_E\,ds \leq \\
&\leq e^{-pt}\|\Lambda\| K + \frac{e^{-pt}qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(1 + \|x_s\|_{C([-h,0];E)})ds + \\
&+ \frac{e^{-pt}qM\|\Lambda\|\|Q\|\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(1 + \|x_s\|_{C([-h,0];E)})ds = \\
&= e^{-pt}\|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{e^{-pt}qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(1 + \max_{-h\leq\theta\leq 0}\|x(s+\theta)\|_E)ds \leq \\
&\leq e^{-pt}\|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{e^{-pt}qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\left(\int_0^t (t-s)^{q-1}ds + \right. \\
&\left. + \int_0^t (t-s)^{q-1}e^{ps}e^{-ps}\max_{-h\leq s\leq a}\|x(s)\|_E\,ds\right) \leq \\
&\leq e^{-pt}\|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{e^{-pt}qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\frac{a^q}{q} + \\
&+ \|x\|_*(1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}e^{-pt}\int_0^t (t-s)^{q-1}e^{ps}ds \leq \\
&\leq e^{-pt}\|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{e^{-pt}qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\frac{a^q}{q} + \\
&+ \|x\|_*(1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}e^{-pt}\left(\int_0^{t-d}(t-s)^{q-1}e^{ps}ds + \int_{t-d}^t (t-s)^{q-1}e^{ps}ds\right) \leq \\
&\leq \|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\frac{a^q}{q} + \\
&+ \|x\|_*(1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-q}}\frac{e^{p(t-d)} - 1}{p} + \frac{d^q}{q}\right) \leq \\
&\leq \|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\frac{a^q}{q} + \|x\|_*(1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\left(\frac{1}{pd^{1-q}} + \frac{d^q}{q}\right) \leq \\
&\leq \|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\|\|Q\|)\frac{qM\|\alpha\|_\infty}{\Gamma(1+q)}\frac{a^q}{q} + \|x\|_* N \leq r.
\end{aligned}
$$

Следовательно, для $t \in [0, a]$ имеем $\|y\|_* \leq r$.

Из лемм 2.4 и 2.5 нам известно, что мультиоператор Γ полунепрерывен сверху и ν-уплотняющий. Тогда согласно теореме 1.1 получаем, что множество Σ-решений задачи (1)–(2) непусто.

Теперь можем показать, что множество Σ априори ограничено. Действительно, из приведенных выше оценок следует, что для $x \in \Sigma$ и $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ имеем

для $t \in [-h, 0]$ $\|x\|_* \leq e^{ph} K$;
для $t \in [0, a]$

$$\|x\|_* \leq \|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\| \|Q\|) \frac{qM \|\alpha\|}{\Gamma(1+q)} \frac{a^q}{q} + \|x\|_* N,$$

в свою очередь, из последнего получается оценка

$$\|x\|_* \leq \left(\|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\| \|Q\|) \frac{qM \|\alpha\|}{\Gamma(1+q)} \frac{a^q}{q} \right) (1 - N)^{-1}.$$

Таким образом, для всех $t \in [-h, a]$ справедливо

$$\|x\|_* \leq \max \left\{ e^{ph} K; \left(\|\Lambda\| K + (1 + \|\Lambda\| \|Q\|) \frac{qM \|\alpha\|}{\Gamma(1+q)} \frac{a^q}{q} \right) (1 - N)^{-1} \right\}.$$

Воспользовавшись условием $(\widetilde{Q})$ и теоремой 1.2, получаем, что множество Σ компактно. □

3. Пример

Приведем частный случай задачи (1)–(2) для антипериодического краевого условия

$$x_0 = -x_a, \tag{8}$$

которое может быть переписано в виде

$$Qx = 0,$$

где $Qx = x_0 + x_a$, полагая $a > h$.

Заметим, что в этом случае условие $(H1)$ выполняется с константой $b = 2$. Действительно, для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{D}$ справедливы оценки

$$\varphi_{\mathcal{C}}(Q(\Omega)) \leq \varphi_{\mathcal{D}}(\Omega) + \varphi_{\mathcal{D}}(\Omega) \leq 2\varphi_{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Пусть выполняется условие:

(A_1) линейный оператор $\mathcal{G}(a) + I$ непрерывно обратим.

Покажем, что если выполняется условие (A_1), то справедливо условие $(\widetilde{Q})$. Действительно, для заданной функции $c \in \mathcal{C}$ найдем функцию $u \in \mathcal{C}$ такую, что $\widetilde{Q}u = c$. Тогда имеем $(ru)_a + u = c$, откуда

$$u(0) = (\mathcal{G}(a) + I)^{-1} c(0)$$

и для $\theta \in [-h, 0]$

$$u(\theta) = c(\theta) - \mathcal{G}(a + \theta) u(0) = c(\theta) - \mathcal{G}(a + \theta)(\mathcal{G}(a) + I)^{-1} c(0).$$

Следовательно, оператор $\widetilde{Q}^{-1}$ может быть представлен в виде

$$(\widetilde{Q}^{-1} c)(\theta) = c(\theta) - \mathcal{G}(a + \theta)(\mathcal{G}(a) + I)^{-1} c(0),$$

но тогда оператор Λ можно выписать в явном виде

$$(\Lambda c)(t) = \begin{cases} \mathcal{G}(t)(\mathcal{G}(a) + I)^{-1} c(0), & t \in [0, a]; \\ c(t) - \mathcal{G}(a + t)(\mathcal{G}(a) + I)^{-1} c(0), & t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

В данном случае мультиоператор Γ имеет вид

$$\Gamma(x) = (I - \Lambda Q) G \mathcal{P}_F(x).$$

Для его задания в явном виде заметим, что для $f \in \mathcal{P}_F(x)$ имеем

$$(QGf)(\theta) = \int_0^{a+\theta} (a+\theta-s)^{q-1}\mathcal{T}(a+\theta-s)f(s)ds.$$

Таким образом, $\Gamma(x)$ состоит из функций $y \in \mathcal{D}$, которые для $f \in \mathcal{P}_F^{\infty}(x)$ при $t \in [-h, 0]$ имеют вид

$$y(t) = \mathcal{G}(a+t)(\mathcal{G}(a)+I)^{-1}\int_0^{a}(a-s)^{q-1}\mathcal{T}(a-s)f(s)ds - \int_0^{a+t}(a+t-s)^{q-1}\mathcal{T}(a+t-s)f(s)ds,$$

а при $t \in [0, a]$ — вид

$$y(t) = \int_0^{t}(t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds - \mathcal{G}(t)(\mathcal{G}(a)+I)^{-1}\int_0^{a}(a-s)^{q-1}\mathcal{T}(a-s)f(s)ds.$$

Используя теорему 2.1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* $(F1)$–$(F4)$, (Q), (QS), $(A1)$ *множество решений задачи* $(1), (8)$ *на* $[-h, a]$ *непусто и компактно.*

Аналогичным образом в качестве частного случая задачи (1)–(2) можно рассмотреть периодическую краевую задачу.

Литература

[1] Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J. *Fractional calculus models and numerical nethods* (World Sci. Publ., New York, 2012).

[2] Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations* (Springer-Verlag, Berlin, 2010).

[3] Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics* (World Sci., Singapore, 2000).

[4] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204** (Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006).

[5] Podlubny I. *Fractional differential equations* (Academic Press, San Diego, 1999).

[6] Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications* (Gordon and Breach Sci. Publishers, Yverdon, 1993).

[7] Zvyagin V.G. *Attractors theory for autonomous systems of hydrodynamics and its application to Bingham model of fluid motion*, Lobachevskii J. Math. **38** (4), 767–777 (2017).

[8] Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C. *On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **4**, 1–20 (2017).

[9] Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C. *On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces*, Fixed Point Theory **18** (1), 269–292 (2018).

[10] Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C. *Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space*, Appl. Anal. **96**, 1–21 (2017).

[11] Obukhovskii V. and Yao J.-C. *Some existence results for fractional functional differential equations*, Fixed Point Theory **11** (1), 85–96 (2010).

[12] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, de Gruyter Ser. in Nonlinear Anal. and Appl. (Walter de Gruyter, Berlin, New-York, 2001).

[13] Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н. *Меры некомпактности и уплотняющие операторы* (Новосибирск, Наука, 1986).

[14] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* Издание 2-е, испр. и доп. (Кн. дом "Либроком", М., 2011).

[15] Басова М., Обуховский В. *Топологические методы в граничных задачах для дифференциальных включений* (Lambert AP, Saarbrucken, 2011).

[16] Obukhovskii V., Zecca P. *On boundary value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal. **13**, 769–784 (2003).

[17] Петросян Г.Г., Афанасова М.С. *О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием*, Вестн. ВГУ. Сер. ФМ **1**, 135–151 (Воронеж, 2017).

Мария Сергеевна Афанасова

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, корп. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Гарик Гагикович Петросян

Воронежский государственный университет инженерных технологий,
пр. Революции, д. 19, г. Воронеж, 394036, Россия;
Воронежский государственный педагогический университет,
ул. Ленина, д. 86, г. Воронеж, 394043, Россия,

e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

M.S. Afanasova and G.G. Petrosyan

On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with common initial condition on a Banach space

Abstract. We consider the problem for a functional differential inclusion of fractional order with a general initial condition expressed in the form of an operator inclusion in a Banach space. At the beginning of the article, an introduction is presented in which the relevance of the study is substantiated, then preliminary information from fractional analysis, the theory of measures of noncompactness and condensing mappings, as well as some information from a multivalued analysis are given. In the second subsection we state the problem and its solution on the basis of the theory of condensing multivalued mappings. In the last subsection we give an example of a particular case of the solved problem, in the case of an antiperiodic boundary condition.

Keywords: differential inclusion, the fractional derivative, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap.

Maria Sergeevna Afanasova

Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Garik Gagikovich Petrosyan

Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolution Ave., Voronezh, 394036 Russia;
Voronezh State Pedagogical University,
86 Lenin str., Voronezh, 394043 Russia,

e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru