КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.Р. Шагидуллин

Интегральные уравнения

Учебное пособие

Казанский университет
2013

Оглавление

Предисловие 4

Глава 1. **Вывод граничных интегральных уравнений теории гармонических функций** 6
§ 1. Некоторые общеупотребительные обозначения и определения . . . 6
§ 2. Объемный потенциал 14
§ 3. Поверхностные потенциалы 19
§ 4. Интегральные уравнения для основных краевых задач 25

Глава 2. **Основные интегральные неравенства** 29
§ 1. Неравенство Йенсена 29
§ 2. Неравенство Гельдера. 30
§ 3. Неравенство Минковского 32
§ 4. Неравенство Ханнера 34
§ 5. Неравенство, характеризующее проекцию на выпуклые множество 36
§ 6. Неравенство Юнга. 37
§ 7. Неравенство Харди — Литлвуда — Соболева 39

Глава 3. **Интегральные операторы** 43
§ 1. Интегральные операторы со слабой особенностью 43
§ 2. Интегральные операторы со слабой особенностью. Ослабление условий теоремы 1 47
§ 3. Интегральные операторы с ядрами общего вида 54

Глава 4. **Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве** 62
§ 1. Неоторые свойства вполне непрерывных операторов 62
§ 2. Три теоремы Фредгольма 67

Глава 5. **Исследование граничных интегральных уравнений.** . . . 70
§ 1. Разрешимость граничных интегральных уравнений 70
§ 2. Спектральные свойства граничных операторов 78

Глава 6. **Нётеровы операторы в банаховом пространстве. Сингулярные интегральные уравнения** 82
§ 1. Проекторы и прямые суммы подпространств 82
§ 2. Нормально разрешимые операторы. 87
§ 3. Нетеровы, или Ф-операторы 92
§ 4. Связь нетеровых операторов с компактными фредгольмовыми операторами. 97
§ 5. Операторы с ограниченным регуляризатором 100
§ 6. Сингулярные интегральные операторы и уравнения 102

Глава 7. **Численные методы решения интегральных уравнений** . . 108
§ 1. Принцип сжатых отображений. 108
§ 2. Вычисление собственных векторов и функций оператора по методу Келлога 114
§ 3. Вычисление других собственных функций и собственных чисел . 118
§ 4. Операторы Гильберта — Шмидта 123
§ 5. Представление решения интегрального уравнения в виде ряда . . 133
§ 6. Метод граничных элементов. 136

Глава 8. **Задачи плоской теории упругости** 142
§ 1. Система уравнений плоской задачи теории упругости 142
§ 2. Фундаментальное решение плоской задачи теории упругости . . . 146
§ 3. Вывод граничных интегральных уравнений 152

Глава 9. **Приложение** 160
§ 1. Интегрирование по поверхности. 160
§ 2. Резольвента оператора 165
§ 3. Проектирующие операторы 170
§ 4. Емкость и энергия мер 178
§ 5. Дополнительные сведения из математического анализа 188
§ 6. Введение в теорию обобщенных функций 192
§ 7. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций 199

Литература 207

Предисловие

Этот курс лекций читался студентам Казанского федерального университета, обучающимся по специальности прикладная математика и информатика. При изложении материала мы стремились:

1) представить разнообразие технических средств, применяемых при исследовании интегральных уравнений;

2) последовательно переходить к более абстрактным разделам теории, привлекающим «тонкие» факты функционального анализа, теории меры и обобщенных функций.

Остановимся кратко на содержании книги. Хотя материал первой главы, обычно, излагается в курсе уравнений математической физики, мы даем подробный вывод свойств потенциалов, поскольку только знание доказательств дает возможность варьировать формулы при изменении условий их применения.

Мы сделали упор на рассмотрение граничных интегральных уравнений, следовательно, на интегральные операторы со слабой особенностью (гл. 3) или — на снгулярные операторы (гл. 4). Классические фредгольмовы уравнения изучаются как следствия.

Интегральные неравенства — базовый технический материал — изложены во второй главе.

Из численных методов мы ограничились рассмотрением итерационных методов и представлениями решений в виде рядов, поскольку такими методами можно получать и чисто теоретические результаты. Исключение составляет § 6 гл. 7, где с точки зрения конкретных расчетов рассмотрен метод граничных элементов.

В восьмой главе с использованием аппарата обобщенных функций выведены граничные интегральные уравнения плоской теории упругости. Главная цель этой главы — показать, как находятся фундаментальные решения соответствующих систем дифференциальных уравнений.

Книга дополнена гл. 9, содержащей приложения. Они играют двоякую роль. Во-первых, они разъясняют и дополняют привлекаемые в основных разделах результаты из функционального анализа. Например, § 4 появился в связи с необходимостью установить связь абстрактных понятий теории потенциала с физикой и в связи с тем, что в основном тексте использован потенциал Робена (для равновесного распределения заряда). Во-вторых, приложения могут служить материалом для самостоятельной работы студентов и семинарских занятий.

Автор выражает благодарность профессору кафедры вычислительной математики М.М. Карчевскому. Только благодаря его настойчивости в побуждении автора написать эту книгу и его редактированию книга была, наконец, написана.

Автор выражает также благодарность профессору Р.З. Даутову за критические замечания.

Глава 1

Вывод граничных интегральных уравнений теории гармонических функций

§ 1. Некоторые общеупотребительные обозначения и определения

1. Евклидово n-мерное пространство будем обозначать через R^n или E^n, область пространства через Ω или D. Буквы x, y, ξ, η обозначают точки пространства R^n: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Расстояние между точками x и y обозначаем через $r(x, y)$, т. е.

$$r(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Расстояние между точками x, y будем обозначать также через $\rho(x, y)$, или $|x - y|$, т. е. $|x| = r(x, \theta)$, где $\theta = (0, 0 \ldots, 0)$ — нулевая точка. Стандартное скалярное произведение векторов x, y из R^n будем обозначать через $x \cdot y$. Таким образом, $x \cdot y = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Всюду далее, как правило, будем полагать, что Ω — ограниченная область, т. е. открытое ограниченное связное подмножество пространства R^n. Границу области Ω будем обозначать через $\partial\Omega$. Как минимум, будем считать, что $\partial\Omega$ является липшицевой границей. Это означает, что одновременно выполняются следующие условия. Существуют постоянные $d > 0$, $h > 0$, $\alpha > 0$, а также конечное число декартовых систем координат $(\xi_1^i, \xi_1^i, \ldots, \xi_n^i)$ и отображения $\zeta_i = a_i(\zeta_i')$, где $\zeta_i' = (\xi_1^i, \xi_1^i, \ldots, \xi_{n-1}^i)$, $\zeta_i = \xi_n^i$, $i = 1, 2, \ldots, I$, такие, что

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{I}\{(\zeta_i', \zeta_i) : \zeta_i = a_i(\zeta_i'),\ |\zeta_i'| \leqslant d\}.$$

Кроме того, для всех $i = 1, 2, \ldots, I$

$$\{(\zeta_i', \zeta_i) : a_i(\zeta_i') < \zeta_i < a_i(\zeta_i') + h;\ |\zeta_i'| \leqslant d\} \subseteq \Omega,$$

$$\{(\zeta_i', \zeta_i) : a_i(\zeta_i') - h < \zeta_i < a_i(\zeta_i');\ |\zeta_i'| \leqslant d\} \subseteq R^n \setminus \Omega,$$

$$|a_i(\xi) - a_i(\eta)| \leqslant \alpha|\xi - \eta|, \text{ если } |\xi|, |\eta| \leqslant d.$$

Например, многогранники в R^n обладают липшицевой границей.

На липшицевых границах могут быть определены поверхностные интегралы. Изложим, следуя [5, с. 68], схему их построения, предполагая известной теорию интеграла Лебега в евклидовом пространстве.

Будем говорить, что функция $v : \partial\Omega \to R$ определена da-почти всюду на $\partial\Omega$, если для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, I\}$ функция $v(\zeta_i', a_i(\zeta_i'))$ определена почти всюду в смысле $(n-1)$-меры Лебега на множестве $|\zeta_i'| < d$. Функцию v называем интегрируемой на $\partial\Omega$ и пишем $v \in L_1(\partial\Omega)$, если для всех i функции $\{\zeta_i'\} \to v(\zeta_i', a_i(\zeta_i'))$ интегрируемы по Лебегу:

$$\int\limits_{|\zeta_i'|<d} |v(\zeta_i', a_i(\zeta_i'))| d\zeta_i' < \infty.$$

Поверхностный интеграл от функции $v \in L_1(\partial\Omega)$ определяется следующим образом. Берем (см. приложение, § 5) некоторое разложение единицы $\{\psi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, I$, подчиненное покрытию $\partial\Omega$ открытыми множествами

$$U_i = \{(\zeta_i', \zeta_i) : \ |\zeta_i'| < d, \ a_i(\zeta_i') - h < a_i(\zeta_i') + h\}, \ i = 1, 2, \ldots, I.$$

По определению для функций ψ_i выполняются условия: $\psi_i : R^n \to R$, $\operatorname{spt}\psi_i \subset U_i$, где $\operatorname{spt}\psi_i$ — носитель функции ψ_i, для всех $i = 1, 2, \ldots, I$, $\sum\limits_{i=1}^{I} \psi_i = 1$ на $\partial\Omega$. С помощью разложения $\{\psi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, I$, интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} v(\xi) d\xi$ от функции v по поверхности $\partial\Omega$ определяется как сумма лебеговых интегралов

$$\int\limits_{\partial\Omega} v(\xi) da = \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{|\zeta_i'|<d} v(\zeta_i', a_i(\zeta_i'))\psi_i(\zeta_i', a_i(\zeta_i') \left\{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_i(\zeta_i')}{\partial \xi_i}\right)^2\right\}^{1/2} d\zeta_i'.$$

При этом используется, что функции a_i, удовлетворяющие условию Липшица, дифференцируемы почти всюду и $|\partial a_i(\xi)/\partial\xi_i| \leqslant \alpha$ для почти всех $|\xi| < d$. Доказательство этого факта можно найти в [6, с. 295].

Можно показать, что определенное таким образом значение интеграла $\int\limits_{\partial\Omega} v(\xi) d\xi$ не зависит от выбора локальных координат и соответствующего разложения единицы.

Площадь измеримого множества $D \subset \partial\Omega$ (как, собственно, и сама измеримость) определяется при помощи характеристической функции χ_D множества D:

$$\operatorname{meas} D = \int\limits_{\partial\Omega} chi_D \, da = \int\limits_{D} da.$$

Вследствие того, что каждая из функций $a_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, I$, дифференцируема почти всюду на $\{|\xi| < d\}$, почти всюду на поверхности $\partial\Omega$ существует единственная касательная плоскость. Единичный вектор нормали, внешней по отношению к области Ω, будем обозначать через $n = (n_1, n_2, \ldots, n_n)$. Производную по нормали будем обозначать через $\partial/\partial n$.

Чаще всего, в последующем изложении мы будем ограничиваться более сильным условием кусочной гладкости поверхности $\partial\Omega$. Это предположение принимается в большинстве классических университетских курсов ([7], с. 247, [8], с. 386, [9], с. 261) при построении теории интегрирования по поверхности (см. приложение, § 1).

Кусочная гладкость поверхности $\partial\Omega$ означает, что $\partial\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{N} S_i$, где каждое из S_i в соответствующей системе координат представляется вплоть до границы функцией класса C^1. Внутренности S_i попарно не пересекаются.

При наличии у области Ω лишь липшицевой границы весьма общие предположения на функции, обеспечивающие применимость формул типа Грина, сформулированы в [30], с. 308.

Так, например, формула интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v n_i ds \qquad (1.1)$$

справедлива, если $u \in W_p^1$, $v \in W_q^1$, где W_p^1, W_q^1 — пространства Соболева, причем $1/p + 1/q \leqslant 1 + 1/n$, если $1 \leqslant p < n$ и $1 \leqslant q < n$, $q > 1$, если $p \geqslant n$, $p > 1$, если $q \geqslant n$.

Здесь и всюду в дальнейшем вместо меры da, определяемой отображениями $a_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, I$, будем писать ds или dx.

2. Гармоническая функция — это действительная функция $u(x)$, заданная на Ω, дважды непрерывно дифференцируемая на Ω (пишем $(u(x) \in C^2(\Omega))$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega.$$

В случае, когда область Ω неограничена, добавляется условия регулярности u на бесконечности:

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \quad \text{при } n \geqslant 3, \tag{1.2}$$

$$|u(x)| \leqslant C < \infty \quad \text{для всех } x \text{ при } n = 2. \tag{1.3}$$

В дальнейшем часто используются формулы Грина

$$\int\limits_{\Omega} (u(x)\triangle v(x) + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n} dx, \tag{1.4}$$

$$\int\limits_{\Omega} (u(x)\triangle v(x) - v(x)\triangle u(x))\, dx = \\ = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) dx. \tag{1.5}$$

Справедливость этих равенств легко устанавливается с использованием формулы интегрирования по частям при этом достаточно предположить, что $v(x), u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Формулу (1.4) принято называть первой формулой Грина, формулу (1.5) — второй формулой Грина.

Все они следуют из основной формулы Грина

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k} = \int\limits_{\partial\Omega} \psi(x) n_k ds, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.6}$$

для многомерных интегралов.

В теории гармонических функций важную роль играет фундаментальное решение уравнения Лапласа, определяемое следующими соотношениями:

$$E_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{\omega_n(n-2)} r^{2-n}(x,y), & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln r(x,y), & n = 2, \end{cases} \tag{1.7}$$

$\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в пространстве R^n. Здесь Γ — функция Эйлера. Например, $\omega_3 = 4\pi$. Нетрудно убедиться, что $\Delta_x E_n(x,y) = 0$ при $x \neq y$. Здесь и далее нижний индекс у дифференциального оператора показывает, по какой переменной он применяется.

Функция E_n называется фундаментальным решением потому, что, как будет показано ниже, при любом достаточно гладком f одним из решений уравнения $\Delta u(x) = f$ является функция

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} f(y) E_n(x,y)\, dy.$$

Лемма 1 (обобщение второй формулы Грина). *Пусть* $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. *Тогда*

$$-\int\limits_{\Omega} E_n(x,y)\Delta u(x)\, dx =$$
$$= p(y)u(y) + \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} - E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} \right] dx$$
$$\forall\, y \in R^n, \quad (1.8)$$

где

$$p(y) = \begin{cases} -1, y \in \Omega, \\ -\dfrac{1}{2}, y \in \partial\Omega, \\ 0, y \in \Omega^- = R^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Доказательство. Для упрощения записей будем считать, что $n = 3$. Предположим сначала, что $y \in \Omega^-$. Тогда $E_n(x,y)$ как функция переменной x является гармонической в Ω и сколько угодно раз непрерывно дифференцируемой на $\bar{\Omega}$. Поэтому, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$-\int\limits_{\Omega} E_n(x,y)\Delta u(x) dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \nabla E_n(x,y) \cdot \nabla u(x) dx - \int\limits_{\partial\Omega} E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} dx =$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} - E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} \right] dx. \quad (1.9)$$

Пусть теперь $y \in \Omega$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\varepsilon(y) \subset \Omega$, и положим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon(y)$. По аналогии с предыдущим случаем можем написать, что

$$-\int\limits_{\Omega_\varepsilon} E_n(x,y)\Delta u(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} - E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} - E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right] dx, \quad (1.10)$$

где $S_\varepsilon(y)$ — сфера радиуса ε с центром в точке y. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} = \nabla_x E_n(x,y)\cdot n(x) = \frac{1}{4\pi|x-y|^n}(x-y)\cdot n(x). \quad (1.11)$$

Для $x \in S_\varepsilon(y)$, очевидно, выполняются равенства

$$E_n(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}, \quad \frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2},$$

следовательно, применяя теорему о среднем, будем иметь

$$\int\limits_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} - E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right] dx = -u(x') - \varepsilon\frac{\partial u(x'')}{\partial n(x)},$$

где $x', x'' \in S_\varepsilon(y)$. Устремляя теперь ε к нулю в равенстве (1.10), получим (1.8) в случае, когда $y \in \Omega$.

Пусть, наконец, $y \in \partial\Omega$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, приходим к равенству

$$-\int\limits_{\Omega_\varepsilon} E_n(x,y)\Delta u(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega\setminus\sigma_\varepsilon} \left[u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)} - E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right] dx -$$

$$- \frac{\operatorname{mes}\tilde{S}_\varepsilon(y)}{\varepsilon^2}u(x') - \frac{\operatorname{mes}\tilde{S}_\varepsilon(y)}{\varepsilon}\frac{\partial u(x'')}{\partial n(x)}, \quad (1.12)$$

где $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus S_\varepsilon(y)$, $\tilde{S}_\varepsilon(y)$ — та часть сферы $S_\varepsilon(y)$, которая принадлежит Ω, σ_ε — часть поверхности $\partial\Omega$, лежащая внутри сферы $S_\varepsilon(y)$; $x', x'' \in \tilde{S}_\varepsilon(y)$. Теперь нужно перейти к пределу в равенстве (1.12), устремляя ε к нулю.

Предел последнего слагаемого в правой части (1.12), очевидно, равен нулю.

Вычислим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\operatorname{mes}\tilde{S}_\varepsilon(y)/\varepsilon^2)$. Поскольку $\partial\Omega$ — поверхность класса C^1, мы можем построить местную декартову систему координат $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ с началом в точке y, направив ось ζ_3 вдоль нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке y. Фиксируя достаточно малое δ_0 так, что $\delta_0 > \varepsilon$, опишем $\sigma_{\delta_0}(y)$ уравнением $\zeta_3 = f(\zeta')$, где f непрерывна и непрерывно дифференцируема при $|\zeta'| \leqslant \delta_0$. В силу указанного выше способа введения системы координат $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ получаем, что $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$. Отсюда, очевидно, вытекает, что для $\zeta \in \sigma_\varepsilon(y)$ выполнены неравенства

$$|\zeta_3| \leqslant \max_{|\xi|\leqslant\varepsilon} |\nabla f(\xi)||\zeta'| \leqslant \max_{|\xi|\leqslant\varepsilon} |\nabla f(\xi)|\varepsilon. \qquad (1.13)$$

При этом, поскольку функция f непрерывно дифференцируема, то

$$\max_{|\xi|\leqslant\varepsilon} |\nabla f(\xi)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (1.14)$$

Из оценки (1.13) вытекает, что точки пересечения $\tilde{S}_\varepsilon(y)$ и $\sigma_\varepsilon(y)$ отстоят от плоскости касательной к $\partial\Omega$ в точке y не более чем на величину $h_\varepsilon = \max\limits_{|\xi|\leqslant\varepsilon} |\nabla f(\xi)|\varepsilon$. Это означает, что площадь $\tilde{S}_\varepsilon(y)$ отличается от площади полусферы радиуса ε не больше, чем на площадь сферического слоя толщины $2h_\varepsilon$. Как известно, площадь сферического слоя равна произведению длины большой окружности на толщину слоя. Таким образом, $|\operatorname{mes}\tilde{S}_\varepsilon(y) - 2\pi\varepsilon^2| \leqslant 4\pi\varepsilon^2 \max\limits_{|\xi|\leqslant\varepsilon} |\nabla f(\xi)|$. Используя теперь (1.14), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\operatorname{mes}\tilde{S}_\varepsilon(y)}{\varepsilon^2} = 2\pi + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\operatorname{mes}\tilde{S}_\varepsilon(y) - 2\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 2\pi.$$

Далее, используя переход к введенной выше местной декартовой системе координат, нетрудно убедиться, что

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} E_n(x,y) \left|\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right| dx \to 0 \qquad (1.15)$$

при $\varepsilon \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial\Omega\setminus\sigma_\varepsilon} E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}dx = \int\limits_{\partial\Omega} E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}dx.$$

Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} E_n(x,y)\Delta u(x)dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla E_n(x,y)\cdot\nabla u(x)dx+$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega\setminus\sigma_\varepsilon} E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}dx + \int\limits_{\tilde{S}_\varepsilon(y)} E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}dx. \quad (1.16)$$

Из (1.11), очевидно, вытекает, что $|\nabla E_n(x,y)| \leqslant 1/(4\pi|x-y|^2)$. Поэтому $\int\limits_{\Omega} \nabla E_n(x,y)\cdot\nabla u(x)dx$ существует и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla E_n(x,y)\cdot\nabla u(x)dx = \int\limits_{\Omega} \nabla E_n(x,y)\cdot\nabla u(x)dx.$$

Вследствие (1.15) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\Omega\setminus\sigma_\varepsilon} E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}dx = \int\limits_{\partial\Omega} E_n(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}dx.$$

Очевидно, что предел последнего слагаемого в правой части (1.16) равен нулю. Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} E_n(x,y)\Delta u(x)dx$ существует и представляет собой значение интеграла $\int\limits_{\Omega} E_n(x,y)\Delta u(x)dx$, понимаемого в смысле главного значения по Коши. Из (1.12) теперь вытекает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\Omega\setminus\sigma_\varepsilon} u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)}dx$ также существует и дает интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial n(x)}dx$, понимаемый в смысле главного значения по Коши. Учитывая проведенные рассуждения и устремляя ε к нулю в равенстве (1.12), получим (1.8) при $y\in\partial\Omega$. $\square$

Функцию

$$W_1(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n(y)}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dy$$

называют интегралом Гаусса. Полагая в формуле (1.8) функцию u тождественно равной единице, получим, что если $\partial\Omega$ — поверхность класса C^1, то

$$W_1(x) = \begin{cases} -(n-2)\omega_n, & x \in \Omega, \\ \ \ 0, & x \in \Omega^-, \\ -(n-2)\omega_n/2, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.17}$$

Из (1.8) получаются граничные интегральные уравнения для нахождения решения граничных задач для уравнения $\Delta u = f$ в Ω. Этот метод их получения называется прямым в теории граничных интегральных уравнений.

Так, если $\Delta u = f$ в Ω, $\partial u/\partial n = \psi(x)$, $x \in \partial\Omega$, то для отыскания u на границе получается уравнение

$$-\int\limits_{\Omega} E_n(x,y)f(x)dx = -\frac{1}{2}u(y) + \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial n}E_n(x,y)ds - \int\limits_{\partial\Omega} E_n(x,y)\psi(x)ds,$$

или

$$u(y) - \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\left[2\frac{\partial}{\partial n}E_n(x,y)\right]ds = \varphi(y), \tag{1.18}$$

где

$$\varphi(y) = -2\left[\int\limits_{\Omega} E_n(x,y)f(x)dx + \int\limits_{\partial\Omega} E_n(x,y)\psi(x)ds\right].$$

Решив интегральное уравнение (1.18), можно затем по формуле (1.8) вычислить значение функции u в любой точке области Ω.

§ 2. Объемный потенциал

Важную роль в теории гармонических функций играют функции специального вида: объемный и поверхностные потенциалы.

Объемный потенциал определяется интегралом

$$I(x) = \int\limits_{\Omega} \mu(\xi)E_n(x,\xi)\,d\xi. \tag{2.1}$$

При $n = 3$ согласно определению имеем $E_3(x,y) = -1/4\pi r(x,y)$, а потому

$$I(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{\mu(\xi)}{r(x,\xi)}\,d\xi.$$

Теорема 1 (свойства объемного потенциала). *Пусть Ω — ограниченная область в R_n, а $I(x)$ объемный потенциал с плотностью $\mu(x)$. Предполагается, что функция $\mu(x)$ является суммируемой и ограниченной т. е.*

$$\left|\int\limits_{\Omega} \mu(\xi)\, d\xi\right| < \infty,$$

$$|\mu(\xi)| \leqslant C < \infty \quad \text{для всех} \quad \xi \in \Omega \tag{2.2}$$

Тогда:

1) *функция $I(x)$ непрерывна во всем пространстве R^n;*

2) *первые производные $I(x)$ существуют и непрерывны во всем пространстве, причем*

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = \int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} E_n(x,\xi)\, d\xi, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.3}$$

3) *если $\mu(x)$ — кусочно непрерывно дифференцируема, то в Ω существуют непрерывные вторые производные объемного потенциала и* !!!

$$\Delta I(x) = \mu(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$\Delta I(x) = 0, \quad x \notin \overline{\Omega}; \tag{2.5}$$

4)

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{I(x)}{E_n(x,0)} = \int\limits_{\Omega} \mu(\xi)\, d\xi.$$

Доказательство. Для простоты изложения будем считать, что $n = 3$. Тогда

$$I(x) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi.$$

Заменим под интегралом $1/|x-\xi|$ на функцию

$$f_\delta(r(x,\xi)) = \begin{cases} \dfrac{1}{r(x,\xi)}, \text{ если } r(x,\xi) \geqslant \delta, \\ \dfrac{1}{2\delta}\left(3 - \dfrac{r^2(x,\xi}{\delta^2}\right), \text{ если } r(x,\xi) < \delta. \end{cases}$$

Непрерывность f_δ и первых производных f_δ по x_i и ξ_i, $i = 1, 2, 3$, легко проверяется:

$$\lim_{r\to\delta+0} f_\delta(r) = \frac{1}{\delta}, \quad \lim_{r\to\delta-0} f_\delta(r) = \frac{1}{\delta},$$

$$\lim_{r\to\delta+0} f'_\delta(r) = \frac{1}{\delta^2}, \quad \lim_{r\to\delta-0} f'_\delta(r) = \frac{1}{\delta^2},$$

Оценим разность между функциями $I(x)$ и $I_\delta(x)$, где

$$I_\delta(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \mu(\xi) f_\delta(r(x,\xi))\, d\xi.$$

Имеем

$$|I(x) - I_\delta(x)| = \frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_{\Omega} \mu(\xi)\left(\frac{1}{r(x,\xi)} - f_\delta(r(x,\xi))\right) d\xi\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_{\Omega\bigcap B_\delta(x)} \mu(\xi)\left(\frac{1}{r(x,\xi)} - f_\delta(r(x,\xi))\right) d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B_\delta(x)} |\mu(\xi)||\frac{1}{r(x,\xi)} - f_\delta(r(x,\xi))|\, d\xi \leqslant \frac{C}{4\pi}\int\limits_{B_\delta(x)} \left(\frac{1}{r} + \frac{3}{2\delta} + \frac{r^2}{2\delta^3}\right) d\xi =$$

(переходим к сферическим координатам)

$$= \frac{C}{4\pi}\int\limits_0^\delta dr \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \left(\frac{1}{r} + \frac{3}{2\delta} + \frac{r^2}{2\delta^3}\right) d\varphi =$$

$$= C\int\limits_0^\delta \left(r + \frac{3r^2}{2\delta} + \frac{r^4}{2\delta^3}\right) dr = \frac{11}{10} C\delta^2.$$

т. е. $|I(x) - I_\delta(x)| \leqslant \frac{11}{10}C\delta^2$. Полученная оценка показывает, что $I_\delta(x) \to I(x)$ равномерно на R^n при $\delta \to 0$. Поскольку равномерный предел последовательности непрерывных функций есть функция непрерывная, мы получаем, что функция I непрерывна на R_n.

Переходим к исследованию производных $\frac{\partial}{\partial x_i} I(x)$, $i = 1, 2, 3$. Пусть

$$\chi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi. \tag{2.6}$$

При $x \in \Omega$ подынтегральная функция в (2.6) имеет особенность порядка $r^{-2}(x, \xi)$. Поэтому интеграл определяет функцию $\chi(x)$ корректно.

Покажем, что $\chi(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} I(x)$. Поскольку функции f_δ, $f'_{\delta x_i}$ непрерывны, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i} I_\delta(x) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} f_\delta(r(x,\xi))\, d\xi.$$

Займемся оценками разности $\chi(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} I_\delta(x)$:

$$\left|\chi(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} I_\delta(x)\right| = \frac{1}{4\pi} \left| \int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x_i} f_\delta \right)\, d\xi \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left| \int\limits_{\Omega \bigcap B_\delta(x)} \mu(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x_i} f_\delta \right) d\xi \right| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega \bigcap B_\delta(x)} |\mu(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x_i} f_\delta \right| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{4\pi} \int\limits_{B_\delta(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} - f_\delta(r) \right) \right| d\xi \leqslant \frac{C}{4\pi} \int\limits_{B_\delta(x)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - f_\delta(r) \right) \right| d\xi =$$

$$= \frac{C}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\delta} \left(r^2 \sin\theta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{\delta^3} \right) \right) dr =$$

$$= \frac{C}{4\pi} 2\pi 2 \int\limits_0^{\delta} \left(1 - \frac{r^3}{\delta^3} \right) dr = C\left(\delta - \frac{\delta}{4} \right) = \frac{3}{4}\delta C. \tag{2.7}$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial x_i} I_\delta(x) \to \chi(x)$ при $\delta \to 0$ равномерно на R^n. Ранее была установлена равномерная сходимость $I_\delta(x) \to I(x)$.

Согласно известной теореме математического анализа из этих двух фактов следует, что $\chi(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} I(x)$ и что функция $\frac{\partial}{\partial x_i} I(x)$ непрерывна на всем пространстве R^n.

Переходим к доказательству свойства 3. Если $x \notin \overline{\Omega}$, то подынтегральная функция в выражении $I(x)$ не имеет особенностей и формула (2.5) получается очевидным образом.

Пусть теперь $x \in \Omega$. Воспользуемся установленным выше равенством:

$$-4\pi \frac{\partial}{\partial x_i} I(x) = \int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi.$$

Используя формулу интегрирования по частям (1.1), для $i = 1$, 2, 3 получаем

$$\int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi = -\int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|} n_i(\xi)\, d\xi.$$

При вычислении второй производной $I(x)$ используем уже доказанное равенство (2.3). Будем иметь

$$-4\pi \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} I(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi - \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\xi) n_i(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi + \int\limits_{\partial\Omega} \mu(\xi) n_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi.$$

Заметим теперь, что

$$-\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\mu(\xi) - \mu(x)) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (\mu(\xi) - \mu(x)) \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi - \int\limits_{\partial\Omega} (\mu(\xi) - \mu(x)) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|} n_i(\xi)\, d\xi.$$

Правомерность использования здесь формулы интегрирования по частям вытекает из того, что вследствие дифференцируемости функции μ подынтегральная функция в первом слагаемом правой части имеет особенность порядка $|x-\xi|^{-2}$ и потому соответствующий интеграл сходится. Таким образом, для $i = 1, 2, 3$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(-4\pi I(x)) = \int\limits_{\Omega} (\mu(\xi) - \mu(x)) \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi + \mu(x) \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|} n_i(\xi)\, d\xi.$$

Суммируя почленно полученные равенства по $i = 1, 2, 3$, будем иметь

$$\triangle I(x) = -\frac{1}{4\pi}\mu(x)\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\bar{n}_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi. \tag{2.8}$$

Используя теперь (1.17), получим (2.4).

Простое обоснование свойства 4 опускаем. □

Замечание 1. При доказательстве свойств 1, 2 достаточно предполагать, что функция μ является суммируемой и принадлежит $L^p(\Omega)$, $p > 3$. В доказательстве оценка модуля заменяется на применение неравенства Гельдера с соответствующими показателями.

§ 3. Поверхностные потенциалы

1. Пусть S — гладкая (т. е. класса C^1) замкнутая поверхность в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$, ограничивающая конечную область $\Omega = \Omega^+$, $\partial\Omega = S$, и пусть $\Omega^- = R^n \backslash (\Omega^+ \bigcup S)$ — внешняя бесконечная область. Пусть $E_n(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^n, n_y — единичная внешняя относительно Ω нормаль к поверхности S в точке $y \in S$.

Потенциал простого слоя представляется интегралом

$$V_\rho(x) = \int\limits_S \rho(\xi) E_n(x, \xi)\,d\xi,$$

потенциал двойного слоя есть интеграл

$$W_\chi(x) = \int\limits_S \chi(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}E_n(x, \xi)\,d\xi.$$

Важным следствием леммы 2.2 является тот факт, что любую достаточно гладкую функцию на области Ω можно представить в виде суммы трех потенциалов — объемного потенциала, потенциала простого слоя и потенциала двойного слоя.

Теорема 1 (свойства потенциала простого слоя). *Пусть S — поверхность класса C^1. Предполагается, что плотность потенциала ρ есть функция из $C(S)$ и для ρ выполняется свойство продолжимости, состоящее в том, что существует функция $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$ такая, что $u(x) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \rho(x)$ для всех $x \in S$*

и $\Delta u \in L^p(\Omega)$, $p > 3$ [1)].
Тогда:

1. *Потенциал простого слоя* $V_\rho(x)$ *есть гармоническая функция при* $x \notin S$, *причем*

$$\lim_{|x|\to\infty} (V_\rho(x)/E_n(x,0)) = \int\limits_S \rho(y)\, ds_y;$$

в частности, $\lim\limits_{|x|\to\infty} V_\rho(x) = 0$ *при* $n \geqslant 3$, *но* $\lim\limits_{|x|\to\infty} V_\rho(x) = 0$ *при* $n = 2$, *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_S \rho(y)\, ds_y = 0$.

2. *Потенциал простого слоя непрерывен во всем пространстве. Когда точка* x *пересекает границу* S *в точке* x_0, *производная потенциала в направлении касательной к* S *в точке* x_0 *меняется непрерывно, а производная в направлении нормали терпит скачок, определяемый формулами:*

$$\frac{\partial}{\partial n^+}(V_\rho)(x_0) = -\frac{1}{2}\rho(x_0) + \frac{\partial}{\partial n}(V_\rho)(x_0), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial n^-}(V_\rho)(x_0) = \frac{1}{2}\rho(x_0) + \frac{\partial}{\partial n}(V_\rho)(x_0), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n^+}(V_\rho)(x_0) - \frac{\partial}{\partial n^-}(V_\rho)(x_0) = -\rho(x_0), x_0 \in S. \tag{3.3}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}(V_\rho)(x_0)$ — *прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя, вычисленное на поверхности* S, *т. е. интеграл* $\int\limits_S \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x}E_n(x_0,\xi)\, ds_\xi$, *понимаемый в смысле главного значения;*

$$\frac{\partial}{\partial n^+}(V_\rho)(x_0) = \lim_{\substack{\times\in\Omega,\\ x\to x_o}} \frac{\partial}{\partial n_{x_0}}(V_\rho)(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial n^-}(V_\rho)(x_0) = \lim_{\substack{x\in\Omega^-,\\ x\to x_o}} \frac{\partial}{\partial n_{x_0}}(V_\rho)(x),$$

n_{x_0} — *внешняя единичная нормаль в точке* x_0 *к* S.

[1)] Требуемое продолжение существует, например, если S — поверхность Ляпунова, а $\rho \in C^1(S)$. О проблеме продолжимости, требуемой для ρ, общую постановку и библиографию см. в «Математическая Энциклопедия», т. 4, статья «Продолжения теоремы» М. Изд-во «Сов. энциклопедия», 1984 г. В частности, отметим книгу О. Т. Бесов, В. П. Ильин, Т.М. Никольский. «Интегральные представления функций и теоремы вложения». М.: Наука, 1975 г. См § 25 гл. V «Обратные теоремы о следах».

3. *Если* $S \in C^{1,\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$, *то ядро* $\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}$ *имеет слабую особенность на* S:

$$\left|\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n_x}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{|x-\xi|^{n-1-\alpha}}, x, \xi \in S; \tag{3.4}$$

в этом случае $\frac{\partial}{\partial n} V_\rho(x_0)$ *представляется интегралом Лебега (несобственным интегралом Римана).*

Доказательство основывается на обобщенной формуле Грина (1.8), которую приведем здесь в виде

$$\int_\Omega (u(\xi)\Delta_\xi \omega - v(\xi)\Delta_\xi u) d\xi =$$

$$= pu(x) + \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi)\frac{\partial v(\xi)}{\partial n} - v(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\right] ds_\xi, \tag{3.5}$$

где $v(\xi) = E_n(\xi) + \omega(\xi)$, $u(\xi)$, $\omega(\xi)$ — достаточно гладкие функции. Для упрощения записей опять положим $n = 3$, т. е. рассматриваем пространство R^3. Тогда $E_3 = -1/4\pi r(x,y)$.

Стремясь получить среди поверхностных интегралов правой части (3.5) исследуемый потенциал, положим

$$\omega(x) \equiv 0; u(\xi) = 0, \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} = -\rho(\xi)$$

для точек $\xi \in \partial\Omega$.

Равенство (3.5) превращается при таком выборе в

$$I(x) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\triangle_\xi u(\xi)}{r(x,\xi)} dx = pu(x) - V\rho(x). \tag{3.6}$$

Пусть $x \to x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega$, тогда, совершая предельный переход в (3.6) и используя свойства непрерывности объемного потенциала, получаем $I(x_0) = 0 - V\rho(x_0^+)$. Аналогично если $x \to x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega^-$, то $I(x_0) = 0 - V\rho(x_0^-)$.

Из этих двух неравенств следует, что $V\rho(x_0^+) = V\rho(x_0^-) = V\rho(x_0)$, и потенциал простого слоя непрерывен во всем пространстве.

Аналогично проверяется непрерывность производной потенциала простого слоя при пересечении границы области по направлению касательной в точке пересечения точкой x.

Рассмотрим теперь нормальную производную потенциала простого слоя, n_0— единичная внешняя нормаль в точке $x_0 \in S$. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n_0} I(x) = \frac{\partial}{\partial n_0}(pu(x)) - \frac{\partial}{\partial n_0} V\rho(x), x \in \Omega, \tag{3.7}$$

переходя к пределу, когда $x \to x_0 \in S, x \in \Omega$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial n_0} I(x_0) = -\rho(x_0) - \lim_{\substack{x\in\Omega,\\ x\to x_0}} \frac{\partial}{\partial n_0} V\rho(x) = -\rho(x_0) - \frac{\partial}{\partial n^+} V\rho(x_0).$$

Пусть $x \to x_0, x \notin \bar{\Omega}$, тогда из (3.7) следует

$$\frac{\partial}{\partial n_0} I(x_0) = -\frac{\partial}{\partial n^-} V\rho(x_0).$$

Вычитая одно предельное значение нормальной производной из другого получаем (3.3). Доказательство (3.1) и (3.2) аналогично проведенному. Следует помнить только, что под $\frac{\partial}{\partial n} V(x_0)$ следует понимать главное значение интеграла. Доказательство утверждения 3 опускаем. Заметим только, что если $S \in C^{1,\alpha}$ то $\frac{\partial}{\partial n} V(x_0)$, при $x_0 \in S$ существует как несобственный интеграл Римана, или как интеграл Лебега. $\square$

Теорема 2 (свойства потенциала двойного слоя).

1. *Пусть $S \in C^1$, $\chi(x) \in C(S)$ и для $\chi(x)$ выполняется условие продолжимости: существует функция $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$ такая, что $u(x) = \chi(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$ при $x \in S$. Потенциал двойного слоя $(W\chi)(x)$ (часто мы будем писать просто $W(x)$) есть гармоническая функция при $x \notin S$, причем*

$$\lim_{|x|\to\infty} [-\omega_n |x|^{n-1} W(x)] = \int\limits_S \chi(\xi)\, ds_\xi.$$

2. *Когда точка x пересекает границу $S = \partial\Omega$ области Ω в точке x_0, потенциал двойного слоя и его тангенциальные производные терпят разрыв, определяемый формулами:*

$$W\chi(x_0^+) - W\chi(x_0) = \frac{1}{2}\chi(x_0), \tag{3.8}$$

$$W\chi(x_0^-) - W\chi(x_0) = -\frac{1}{2}\chi(x_0), \tag{3.9}$$

$$W\chi(x_0^+) - W\chi(x_0^-) = \chi(x_0), \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}W\chi(x_0^+) - \frac{\partial}{\partial\tau_0}W\chi(x_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau_0}\chi(x_0),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}W\chi(x_0^-) - \frac{\partial}{\partial\tau_0}W\chi(x_0) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau_0}\chi(x_0),$$

а нормальная производная меняется непрерывно.

Через $(W\chi)(x_0), x_0 \in S$, *обозначено прямое значение потенциала двойного слоя, вычисленное на поверхности* S *и понимаемое в смысле главного значения:*

$$(W\chi)(x_0) = \int\limits_S \chi(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}E(x_0,\xi)\,ds_\xi, x_0 \in S. \tag{3.11}$$

3. *Если* $S \in C^{1,\alpha}$, *то правая часть является непрерывно зависящим от* x_0 *несобственным интегралом на* S, *причем ядро* $\frac{\partial}{\partial n_\xi}E(x,\xi)$ *имеет слабую особенность на* S

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_\xi}E(x,\xi)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|x-\xi|^{n-1-\alpha}}\,, \quad x,\xi \in S,$$

и интеграл в равенстве (3.11) *существует как интеграл Лебега (несобственный интеграл Римана).*

Доказательство. Идейный план доказательства такой же, как и для предыдущей теоремы: рассматриваем обобщенную формулу Грина (3.5) и один из интегралов в правой части подгоняем под потенциал двойного слоя, выбирая $V(\xi) = E_n(x,\xi), u(\xi) = \chi(\xi), \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) = 0$ для всех $\xi \in S,\ \omega(\xi) \equiv 0$.

Получаем:

$$\int\limits_\Omega (-\triangle_\xi(u_\xi))E_n(x,\xi)\,d\xi = pu(x) + W\chi(x). \tag{3.12}$$

При $x \to x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega^+$ в равенстве (3.12) имеем в пределе:

$$\int\limits_\Omega (-\triangle_\xi(u_\xi))E_n(x,\xi)\,d\xi \equiv I(x_0) = -\chi(\xi) + W\chi(x_0^+). \tag{3.13}$$

Аналогично при $x \to x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega^-$:

$$I(x_0) = 0 + W\chi(x_0^-)). \tag{3.14}$$

Для прямого значения потенциала получаем:

$$I(x_0) = -\frac{1}{2}\chi(x_0) + W\chi(x_0)). \tag{3.15}$$

Из формул (3.13) – (3.15) следуют формулы теоремы для скачков $W(x)$.

Берем нормальную производную от обеих частей равенства (3.12), $x \notin S$.

$$\frac{\partial}{\partial n_0} I(x_0) = 0 + \frac{\partial}{\partial n_0} W\chi(x_0^+), \tag{3.16}$$

n_0 — фиксированная единичная внешняя нормаль в точке $x_0 \in S$. Из уравнения (3.16) при $x \to x_0, x \in \Omega^+$ имеем в пределе:

$$\frac{\partial}{\partial n_0} I(x_0) = 0 + \frac{\partial}{\partial n_0} W\chi(x_0^+),$$

а при $x \to x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega^-$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n_0} I(x_0) = 0 + \frac{\partial}{\partial n_0} W\chi(x_0^-).$$

Два последних равенства доказывают непрерывность нормальной производной двойного слоя. Доказательство третьей части утверждений теоремы опускаем. $\square$.

Замечание 1. Формулы (3.1), (3.2), (3.8), (3.9) получены через свойства объемного потенциала и свойство продолжимости функций с границы на область, что сильно сокращает их вывод. В большинстве классических руководств по уравнениям математической физики дается прямой вывод указанных формул. Условие продолжимости не привлекается, но накладывается более сильное условие на границу: $S \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и условие существования правильной нормальной производной на S. Будем говорить, что функция $v^\pm \in C^1(\Omega^\pm)$ имеет правильную нормальную производную $\partial v^\pm / \partial n^\pm$ на S, если равномерно по $x \in S$ имеет место равенство

$$\frac{\partial v^\pm(x)}{\partial n^\pm} = \lim_{t \to 0+} \frac{\partial v^\pm(x \mp -tn_x)}{\partial n_x}.$$

Доказываются (см., например, [10]) следующие утверждения:

1. Пусть $\chi \in C(S)$, $S \in C^{1,\alpha}$. Тогда равенства (3.8), (3.9) имеют место.

2. Пусть $\rho \in C(S)$, $S \in C^{1,\alpha}$. Тогда у потенциала V_ρ существует правильная нормальная производная, которая выражается формулами (3.1), (3.2).

Замечание 2. Если $S \in C^1$, $\chi \in C(S)$, то формулы (3.8), (3.9) справедливы, при условии, что

$$\sup_{x \in R^n} \int\limits_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial n_\xi} E_n(x,\xi) \right| ds_\xi < \infty.$$

При этом имеется в виду главное значение интеграла. Этот факт можно получить из результатов статьи Ю.Д. Бураго, В.Г. Мазья, В.Д. Сапожникова «К теории потенциалов двойного и простого слоя для областей с нерегулярными границами», Сб. «Проблемы математического анализа», Изд-во ЛГУ, 1966. Это же утверждение можно вывести и непосредственно, рассматривая соответствующие пределы и рассуждая, как в доказательстве леммы 1, с 10. Утверждение справедливо и для выпуклых областей с кусочно-гладкими границами, например, для куба. Аналогичное замечание можно сделать и о формулах (3.1), (3.2).

Замечание 3. Интеграл «обычный» и интеграл в смысле главного значения рассматриваются как однотипные объекты в теории распределений. Также область и ее граница становятся «равноправными», однотипными, если рассматриваются как борелевские множества в R^n. Этот переход к распределениям (мерам, в частности) и борелевским множествам позволяет провести общее исследование потенциалов, определенных на борелевских множествах. Роль обобщенной формулы Грина, связывающей объемный и поверхностный потенциалы в изложенной выше классической теории, заменяют теоремы о носителе меры, чей потенциал удовлетворяет определенным условиям, в том случае, когда теорема утверждает, что носитель меры есть подмножество границы того борелевского множества, на котором мера определена.Пример исследования граничной задачи с очень слабыми условиями на границу области, в которой задача рассматривается, и когда применяется описанный абстрактный подход, дан в приложении.

§ 4. Интегральные уравнения для основных краевых задач

Рассмотрим внутреннюю и внешнюю задачу Дирихле: найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$, $\Omega \in R^n$, такую, что

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega, \\ u(x) = \phi^+(x), x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

и внешнюю задачу Дирихле: найти $u(x) \in C^2(\Omega^-) \bigcap C(\bar{\Omega^-})$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega^-, \\ u(x) = \phi^-(x), x \in \partial\Omega^-. \\ u(x) = \begin{cases} o(1), n > 2, x \to \infty \\ \quad O(1), n = 2. \end{cases} \end{cases} \tag{4.2}$$

Функции ϕ^+, ϕ^- предполагаются непрерывными на $\partial\Omega$. Напомним,что символы O(1) и o(1) означают, что $|u(x)| \le c$, $|u(x)| \to 0$, при $x \to \infty$, соответственно.

Решения обеих задач будем искать в виде потенциала двойного слоя $u(x) = W\chi(x)$: Следующие выкладки обосновываются просто:

$$\Delta_x \int\limits_S \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} E_n(x,\xi)\, ds_\xi = \int\limits_S \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} [\Delta_x E_n(x,\xi)]\, ds_\xi = 0,$$

так как $\Delta_x E_n(x,\xi) \equiv 0, x \in \Omega, x \ne \xi$.

Потребуем, чтобы потенциал $W(x)$ удовлетворял граничным условиям. Имеем в случае внутренней задачи, предполагая, что χ и S удовлетворяют условиям § 3 :

$$\varphi^+(x) = \lim_{\substack{\widetilde{x} \to x \in \partial\Omega^+, \\ \widetilde{x} \in \Omega}} u(\widetilde{x}) = \frac{1}{2}\chi(x) + W\chi(x).$$

Таким образом, для функции $\chi(x)$ получаем граничное интегральное уравнение

$$\chi(x) + \int\limits_S \chi(\xi) \left[2 \frac{\partial}{\partial n_\xi} E_n(x,\xi) \right] ds_\xi = 2\varphi^+(x), \quad x \in S.$$

Введем в рассмотрение оператор $T(v)(x) = \int\limits_S v(\xi)[2\frac{\partial}{\partial n_\xi} E_n(x,\xi)]\, ds_\xi$ и перепишем полученное уравнение в виде

$$\chi(x) + (T\chi)(x) = 2\varphi^+(x), x \in S. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) есть искомое интегральное уравнение для внутренней задачи Дирихле.

Для внешней задачи Дирихле (4.2) имеем:

$$\varphi^-(x) = \lim_{\substack{\widetilde{x} \to x \in \partial\Omega^-, \\ \widetilde{x} \in \Omega^-}} u(\widetilde{x}) = -\frac{1}{2}\chi(x) + W\chi(x),$$

$$\chi(x) - (T\chi)(x) = -2\varphi^{-}(x), x \in S. \qquad (4.4)$$

Уравнение (4.4) есть интегральное уравнение для внешней задачи Дирихле.

Условимся решение уравнения (4.3) записывать как χ^{+}, а решение уравнения (4.4) как χ^{-}

Объединим интегральные уравнения (4.3) и (4.4) в одной записи:

$$\chi^{\pm}(x) - \int\limits_{S} \chi^{\pm}(\xi) \left[2 \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} E_n(x,\xi) \right] dS_{\xi} = \pm 2\varphi^{\pm}(x), x \in S.$$

Интегральные уравнения для задачи Неймана внутренней и внешней.

Внутренняя задача Неймана: определить функцию u, принадлежащую $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, имеющую в каждой точке границы $S \in C^1$ нормальную производную, для которой выполняются условия:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega = \Omega^{+}, \\ \dfrac{\partial}{\partial n^{+}} u(x) = \psi^{+}(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Для функции класса $C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$ под нормальной производной на границе понимают предел

$$\lim_{x' \to x} \frac{\partial u}{\partial n}(x'),$$

где $x' = x - tn, n > 0, n-$ единичная внешняя нормаль в фиксированной точке x границы $\partial\Omega$. Предполагается существование как производной $\frac{\partial u}{\partial n}(x')$, так и предела. (Иногда добавляют условие, что предел существует равномерно относительно точек $x \in \Omega$, и называют этот предел правильной нормальной производной).

Внешняя задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in E_n \backslash \bar{\Omega} = \Omega^{-}, \\ \dfrac{\partial}{\partial n^{-}} u(x) = \psi^{-}(x), x \in \partial\Omega, \\ u(x) = \begin{cases} o(1), n > 2, \\ O(1), n = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Решение задачи Неймана будем искать в виде потенциала простого слоя:

$$V\rho(x) = \int\limits_{S} \rho(\xi) E_n(x,\xi) \, ds_{\xi}.$$

Уравнению Лапласа этот потенциал удовлетворяет:

$$\Delta_x V\rho(x) = 0,\ x \in \Omega^+,\ x \in \Omega^-.$$

Рассматривая внутреннюю задачу Неймана, вычислим значение нормальной производной от $V(x)$; при этом используем формулу (3.1) (предполагается, что ρ удовлетворяет соответствующим условиям):

$$\lim_{\substack{\bar{x}\to x,\\ \bar{x}\in\Omega^+}} \frac{\partial}{\partial n_x} V\rho(\bar{x}) = \psi^+(x) = -\frac{1}{2}\rho(x) + \frac{\partial}{\partial n_x} V\rho(x).$$

Получили интегральное уравнение для неизвестной ρ :

$$\rho(x) - \int\limits_S \rho(\xi) 2\frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x,\xi)\, dS_\xi = -2\psi^+(x), x \in S. \qquad (4.5)$$

Аналогично для внешней задачи Неймана из формулv:

$$\lim_{\bar{x}\to x, \bar{x}\in\Omega^-} \frac{\partial}{\partial n_x} V\rho(\bar{x}) = \psi^-(x) = \frac{1}{2}\rho(x) + \frac{\partial}{\partial n_x} V\rho(x).$$

Получаем интегральное уравнение для неизвестной плотности $\rho(x)$:

$$\rho(x) + \int\limits_S \rho(\xi) 2\frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x,\xi)\, dS_\xi = 2\psi^-(x), x \in S. \qquad (4.6)$$

Пусть решение внутренней задачи Неймана есть ρ^+, решение внешней задачи Неймана ρ^-.
Объединим интегральные уравнения (4.5) и (4.6) в единой записи:

$$\rho^\pm(x) \mp \int\limits_S \rho^\pm(\xi) 2\frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x,\xi)\, dS_\xi = \mp 2\psi^\pm(x), x \in S.$$

Замечание 1. Мы получили интегральные уравнения для плотностей потенциалов, предполагая, что χ и ρ обладают известными свойствами. Вопрос, обладает ли решение уравнений в заданном функциональном пространстве (например, в $L_2(S)$) этими свойствами требует иногда дополнительных исследований, например, если $\partial\Omega$ есть поверхность класса C^1, а не $C^{1,\alpha}$.

Глава 2
Основные интегральные неравенства

В этой главе собраны важнейшие употребляемые в теории интегральных уравнений неравенства. Изложение следует монографии [11], с. 33–42, с. 85–96. Необходимые сведения из теории меры в виде сводки результатов можно найти в [12], с. 123–134. Употребляемые меры предполагаются борелевскими в евклидовом пространстве.

§ 1. Неравенство Йенсена

Здесь и всюду далее в этой главе Ω — открытое связное подмножество R^n.

Теорема 1. *Пусть $J : R \to R$ выпуклая функция, f есть μ-измеримая вещественнозначная функция на области Ω конечной меры. Так как функция J выпукла, она непрерывна.Поэтому функция $(J \circ f)(x) = J(f(x))$ является μ-измеримой на Ω. Предположим, что $\mu(\Omega) = \int\limits_\Omega \mu(dx)$ конечно. Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и $\langle f \rangle$ – среднее значение f, т. е.*

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int\limits_\Omega f d\mu.$$

Тогда справедливы утверждения:

(i) $(J \circ f)\_ = \max\{0, -(J \circ f)\}$, *т. е. отрицательная часть $(J \circ f)$, принадлежит $L^1(\Omega)$ и, следовательно, интеграл $\int\limits_\Omega (J \circ f)\mu(dx)$ корректно определен, хотя и может равняться $+\infty$,*

(ii)
$$\langle J \circ f \rangle \geqslant J(\langle f \rangle). \tag{1.1}$$

Если J строго выпукла в точке $\langle f \rangle$, то равенство в (1.1) достигается тогда и только тогда, когда f — константа.

Доказательство. Ввиду выпуклости J существует по крайней мере одна опорная плоскость в каждой точке ее графика. Поэтому существует константа $V \in R$ такая, что

$$J(t) \geqslant J(\langle f \rangle) + V(t - \langle f \rangle) \tag{1.2}$$

для всех t$\in R$. Следовательно,

$$(J(f))\_(x) \leqslant |J(\langle f\rangle)| + |V||\langle f\rangle| + |V||f(x)|,$$

и в силу условия: $\mu(\Omega)< \infty$, утверждение (i) доказано. Подставив $f(x)$ вместо t в (1.2) и проинтегрировав по Ω, получим (1.1). Пусть теперь J строго выпукла в $\langle f\rangle$. Тогда неравенство (1.2) строгое либо для всех $t > \langle f\rangle$, либо для всех $t < \langle f\rangle$. Если f не является константой, то $f(x) - \langle f\rangle$ принимает как положительные, так и отрицательные значения на множествах положительной меры, что доказывает последнее утверждение теоремы.

§ 2. Неравенство Гельдера.

Теорема 1. *Пусть p и p' — двойственные сопряженные показатели, т. е. $1/p + 1/p' = 1$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пусть $f \in L^p(\Omega)$ и $g \in L^{p'}(\Omega)$. Тогда поточечное произведение $(fg)(x) = f(x)g(x)$ принадлежит $L^1(\Omega)$ и справедливы наравенства*

$$\left|\int\limits_\Omega fg d\mu\right| \leqslant \int\limits_\Omega |f||g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{2.1}$$

Первое неравенство в (2.1) превращается в равенство тогда и только тогда, когда

(i) *$f(x)g(x) = e^{i\theta}|f(x)||g(x)|$ для некоторой вещественной константы θ и μ-почти всюду для всех x (сокращенно: μ-п. в. x).*

При $f \neq 0$, второе неравенство в (2.1) превращается в равенство тогда и только тогда, когда существует константа $\lambda \in R$ такая, что

(iia) *если $1 < p < \infty$, то $|g(x)| = \lambda\,|f(x)|^{p-1}$ для μ-п. в. x,*

(iib) *если $p = 1$, то $|g(x)| \leqslant \lambda$ для всех x и $|g(x)| = \lambda$ при $f(x) \neq 0$,*

(iic) *если $p = \infty$, то $|f(x)| \leqslant \lambda$ для всех x и $|f(x)| = \lambda$ при $g(x) \neq 0$.*

Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — функции на Ω, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ и $\sum\limits_{j=1}^m 1/p_i = 1$. Тогда

$$\left|\int\limits_\Omega \prod_{i=1}^m f_i d\mu\right| \leqslant \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Первое неравенство в (2.1) очевидно, случаи $p = \infty$ или $p = 1$ тоже тривиальны. Доказательство поэтому проведем, предполагая $1 < p < \infty$, а функции f и g неотрицательными.

Положим, $A = \{x : g(x) > 0\} \subseteq \Omega$ и $B = \{x : g(x) = 0\}$. Множества A и B определены с точностью до множества меры нуль. Поскольку

$$\int\limits_{\Omega} f^p d\mu = \int\limits_{A} f^p d\mu + \int\limits_{B} f^p d\mu,$$

$$\int\limits_{\Omega} g^p d\mu = \int\limits_{A} g^p d\mu, \int\limits_{\Omega} fg d\mu = \int\limits_{A} fg d\mu,$$

то, не теряя общности, можем считать в (2.1) $\Omega \equiv A$. Вводим (при сделанном предположении) новую меру в Ω:

$$\nu(dx) = g^{p'}(x)\mu(dx).$$

Применим к мере ν, функции $F(x) = f(x)g(x)^{-p'/p}$, области Ω и функции $J(t) = |t|^p$ неравенство Йенсена:

$$\langle J \circ F \rangle \geq J(\langle F \rangle). \tag{2.3}$$

Имеем

$$\langle F \rangle = \int\limits_{\Omega} fg \, d\mu \ \ / \int\limits_{\Omega} g^{p'} d\mu,$$

$$\int\limits_{\Omega} J \circ F \, d\nu = \int_{\Omega} f^p d\mu.$$

С учетом этих равенств, из (2.3) следует (2.1). Условия (ii) также следуют из неравенства Йенсена. Неравество (2.2) элементарно следует из (2.1), если положить

$$f = f_1, \quad g = \prod_{j=2}^{m} f_j,$$

и затем применить индукцию по m. $\square$

§ 3. Неравенство Минковского

Теорема 1. *Пусть Ω и Γ — две области, возможно, в разных евклидовых пространствах с сигма-конечными мерами μ и ν соответственно. Пусть f — неотрицательная $\mu\times\nu$-измеримая функция на $\Omega\times\Gamma$, и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_{\Omega} f^p(x,y)\mu(dx)\right)^{1/p}\nu(dy) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\nu(dy)\right)^{p}\mu(dx)\right)^{1/p}, \quad (3.1)$$

где подразумевается, что если левая часть конечна, то правая часть также конечна. Равенство и условие конечности в (3.1) при $1 < p < \infty$ означает существование μ-измеримой функции $\alpha:\ \Omega \to R^+$ и ν-измеримой функции $\beta:\ \Gamma \to R^+$ таких, что

$$f(x,y) = \alpha(x)\beta(y) \quad \text{для} \quad \mu\times\nu - \text{п.в. } (x,y).$$

*Частный случай — **неравенство треугольника**. Для (возможно, комплексно-значных) функций $f, g \in L^p(\Omega, d\mu)$ справедливо неравенство*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \quad (3.2)$$

При $f \neq 0$ и $1 \leqslant p < \infty$ равенство в (3.2) достигается тогда и только тогда, когда $g = \lambda f$ для некоторого $\lambda \geqslant 0$.

Доказательство. Сначала отметим, что две функции

$$\int\limits_{\Omega} f^p(x,y)\mu(dx), \quad H(x) = \int\limits_{\Gamma} f(x,y)\nu(dy)$$

измеримы в силу теоремы Фубини и условия $\mu\times\nu$-измеримости f. Будем считать, что $f > 0$ на множестве положительной $\mu\times\nu$-меры. Мы также предположим, что правая часть (3.1) конечна. В противном случае можно «срезать» функцию f так, что срезка будет конечной функцией, а затем применить монотонную сходимость для срезок. На этом шаге опять используется сигма-конечность мер. Правую часть (3.1) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega} H^p(x)\mu(dx) = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\nu(dy)\right)H^{p-1}(x)\mu(dx) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{\Omega} f(x,y) H^{p-1}(x) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Второе равенство справедливо по теореме Фубини. Пользуясь неравенством Гельдера для правой части, находим, что

$$\int\limits_{\Omega} H^p(x)\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{\Omega} f^p(x,y)\mu(dx) \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} H^p(x)\mu(dx) \right)^{(p-1)/p} \nu(dy). \quad (3.3)$$

Разделив обе части (3.3) на величину $\left(\int\limits_{\Omega} H^p(x)\mu(dx) \right)^{(p-1)/p}$, отличную от нуля и бесконечности (ввиду условия на f), получаем (3.1).

Если в неравенстве Гельдера достигается равенство, то для ν-п.в. y существует число $\lambda(y)$ (т. е. не зависящее от x) такое, что

$$\lambda(y) H(x) = f(x,y) \quad \text{для} \quad \mu \text{ — п.в. } x. \quad (3.4)$$

Как указано выше, функция H μ-измерима. Для доказательства ν-измеримости λ заметим, что

$$\lambda(y) \int\limits_{\Omega} H^p(x)\mu(dx) = \int\limits_{\Omega} f^p(x,y)\mu(dx),$$

откуда получаем требуемый результат, так как правая часть ν-измерима (по теореме Фубини). Остается доказать (3.2). В силу неравенства

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \quad (3.5)$$

наша задача сводится к доказательству (3.2) для неотрицательнvx функций. Очевидно, что при $p = 1$ или $p = \infty$ неравенство (3.2) следует из (3.5). Поэтому будем полагать, что $1 < p < \infty$. Пусть $F(x,1) = |f(x)|, F(x,2) = |g(x)|$ и ν — считающая мера множества $\Gamma = \{1,2\}$, т. е. $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 1$. Тогда неравенство (3.2) есть частный случай неравенства (3.1) (по теореме Фубини). При достижении равенства в (3.2) существует константы λ_1 и λ_2, не зависящие от x такие, что

$$\|f(x)\| = \lambda_1(\|f(x)\| + \|g(x)\|), \quad \|g(x)\| = \lambda_2(\|f(x)\| + \|g(x)\|). \quad (3.6)$$

Таким образом, $|g(x)| = \lambda |f(x)|$ почти всюду для некоторой константы λ. Учитывая достижение равенства в (3.5), получаем, что $g(x) = \lambda f(x)$, где число λ вещественно и неотрицательно.

§ 4. Неравенство Ханнера

Неравенство треугольника в пространстве $L^p(\Omega)$ запишем в следующих двух формах. Предположим $p \geqslant 2$; $f(x), g(x) \in L^p(\Omega)$. Имеем

$$\|f+g\|^p \leqslant (\|f\| + \|g\|)^p, \tag{4.1}$$

$$\|f-g\|^p \geqslant |\|f\| - \|g\||^p\,. \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что величина $d = |\,\|f\| - \|g\|\,|^p - \|f-g\|^p$, неположительна. Поэтому добавление d к правой части (4.1) усиливает неравенство (4.1). Ханнер доказал, что это усиленное неравенство справедливо для всех f и $g \in L^p(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть f и g — функции из $L^p(\Omega)$. Если $p \geqslant 2$, то*

$$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p \leqslant (\|f\| + \|g\|)^p + |\,\|f\| - \|g\|\,|^p. \tag{4.3}$$

Если $p \leqslant 2$, знак $\leqslant$ в неравенстве (4.3) *надо заменить на обратный.*

Доказательство. Используем «числовой» аналог доказываемого неравенства. Для чисел $0 \leqslant r \leqslant 1$, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\alpha(r)A^p + \beta(r)B^p \geqslant |A+B|^p + |A-B|^p. \tag{4.4}$$

Здесь

$$\alpha(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1},$$
$$\beta(r) = [(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]r^{1-p},\ p > 2.$$

Правая часть является минимумом левой части и достигается при $r = \frac{B}{A} \leqslant 1$ Если $p < 2$ имеет место обратное к (4.4) неравенство, и правая часть будет представлять максимум левой части. Применяя (4.4), получаем

$$|f+g|^p + |f-g|^p \leqslant \alpha(r)|f|^p + \beta(r)|g|^p. \tag{4.5}$$

Интегрируем по области Ω обе части неравенства:

$$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p \leqslant \alpha(r)\|f\|^p + \beta(r)\|g\|^p.$$

Берем минимум правой части по r, который достигается при $r = \|g\|/\|f\|$, если $r = \|g\|/\|f\| \leqslant 1$. Последнее можно без потери общности считать выполненным. Получаем

$$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p \leqslant (\|f\| + \|g\|)^p + |\|f\| - \|g\||^p.$$

Фактически, мы дважды применили (4.4), т. е. дважды минимизировали по r выражение вида $\alpha(r)a + \beta(r)b$ с разными a, b.

Рассуждения при $1 < p < 2$ аналогичны. Неравенство (4.3) при $p = 1$ или $p = 2$ очевидно.

Осталось доказать неравенство (4.4). Разделив его на A^p, обозначив B/A через R и полагая $R \leqslant 1$, представляем доказываемое в форме:

$$\alpha(r) + \beta(r)R \geqslant (1+R)^p + (1-R)^p, \quad 0 \leqslant \ r \leqslant 1. \tag{4.6}$$

Вычислим производную функции $F(r)$:

$$F'(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}](1 - \left(\frac{R}{r}\right)^p,$$

Единственная критическая точка есть $r = R$, при этом, если $r < R$, то производная отрицательна, а при $r > R$ положительна, т. е. в точке $r = R$ находится минимум $F(r)$, который равен $(1+R)^p + (1-R)^p$. Итак (4.4) доказано для $A \geqslant B$.

Если $A < B$, то

$$\alpha(r)A^p + \beta(r)B^p \geqslant \alpha(r)B^p + \beta(r)A^p,$$

ибо $\beta(r) \geqslant \alpha(r)$ при $p > 2$. Затем оцениваем снизу правую часть по неравенству (4.4), ибо имеем для него уже исследованный случай. □

Замечание 1. Банахово пространство X называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon$ следует, что $\|x+y\| \leqslant 2(1-\delta(\varepsilon))$. Неравенство Ханнера (4.3) при $p \geqslant 2$ показывает равномерную выпуклость пространства $L^p(\Omega)$. Действительно, кроме (4.3) надо учесть, что $\varphi(a,b) = (a+b)^2 + (a-b)^2$ в замкнутой области $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$, $a - b \geqslant 0$ меньше или равно 2^p. Равномерная выпуклость имеет большое значение при исследовании сходимости последовательности x_n к x. При ее наличии из слабой сходимости x_k к x и сходимости $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$ следует сильная сходимость (сходимость по норме):

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0.$$

Равномерная выпуклость на самом деле имеет место для всех пространств $L^p(\Omega)$, где $p > 1$.

§ 5. Неравенство, характеризующее проекцию на выпуклые множество

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, K — выпуклое замкнутое множество в $L^p(\Omega)$. Пусть f — произвольная функция из $L^p(\Omega)$, не принадлежащая K. Определим расстояние от f до K:*

$$D = \inf_{g \in K} \|f - g\|. \tag{5.1}$$

Тогда существует функция $h \in K$ такая, что $D = \|f - h\|_p$. При этом для любой функции $g \in K$ выполняется неравенство

$$Re \int\limits_{\Omega} [(g-h)(\bar{f} - \bar{h})]\, |f - h|^{p-2} d\mu \leqslant 0. \tag{5.2}$$

Напомним, что $\bar{f}$ обозначает комплексно-сопряженную к f функцию, а μ обозначает борелевскую меру на $R^n \supseteq \Omega$. Для простоты восприятия доказательства, как мы уже отмечали, можно считать μ мерой Лебега.

Доказательство. Не теряя общности, положим $f \equiv 0$. Рассмотрим случай $p \leqslant 2$ (случай $p > 2$ исследуется аналогично с очевидными изменениями). Пусть $h^j, j = 1, 2, \ldots$ — последовательность элементов из K, такая что $\|h^j\| \to D$ при $j \to \infty$. Поскольку K выпукло, то $\frac{1}{2}(h^j + h^k) \in K$, поэтому

$$2D \leqslant \|h^j + h^k\| \leqslant \|h^j\| + \|h^k\| \to 2D.$$

Следовательно,

$$\|h^j + h^k\| \to 2D, \quad \text{при } j, k \to \infty.$$

Полагая в неравенствах Ханнера $f = h^j + h^k$, $g = h^j - h^k$, $p \leqslant 2$, получаем:

$$\begin{gathered}\left(\|h^j + h^k\| + \|h^j - h^k\|\right)^p + \big|\|h^j + h^k\| - \\ - \|h^j - h^k\|\,\big|^p \leqslant 2^p \left\{\|h^j\|^p + \|h^k\|^p\right\}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Предположим, что $\|h^j - h^k\|$ для бесконечно большого числа значений j и k остается ограниченным снизу положительным числом $b > 0$. Переходя в (5.3) к соответсвующему пределу по этим j и k, получаем

$$|2D + b|^p + |2D - b|^p \leqslant 2^{p+1} D^p. \tag{5.4}$$

Но функция $x \to |2D+x|^p$ строго выпукла и потому

$$|2D+x|^p + |2D-x|^p > 2|2D|^p \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{5.5}$$

Из (5.4), (5.5) вытекает, что $b=0$, а потому последовательность $\|h^j - h^k\|$ стремится к нулю при $j \to \infty, k \to \infty$. В силу полноты пространства существует предел $\lim\limits_{j\to\infty} h^j = h \in K$.

Для доказательства (5.2) фиксируем $g \in K$ и полагаем

$$g_t = (1-t)h + tg \in K \quad \text{для всех } t \in [0;1].$$

По-прежнему считая $f=0$, имеем $N(t) \equiv \|f-g_t\|^p \geqslant D^p$ и $N(0)=D^p$. Так как $N(t)$ дифференцируема, то справедливо неравенство $N'(0) \geqslant 0$. Вычисляем производную:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} |(f-h)(x) + t(h-g)(x)|^p \mu(dx)\ |_{t=0} =$$

$$= \frac{p}{2}\int\limits_{\Omega} |f-h|^{p-2}\{(\bar f - \bar h)(h-g) + (f-h)(\bar h - \bar g)\}\mu(dx).$$

Из выражения производной и условия $N'(0) \geqslant 0$ следует (5.2). $\square$

Замечание 1. Неравенство (5.2) часто применяется при оценках близости приближенных решений x_n исследуемых уравнений к точному решению x.

§ 6. Неравенство Юнга.

Теорема 1. *Пусть p, q, $r \geqslant 1$, $1/p + 1/q + 1/r = 2$, $f \in L^p(R^n)$, $g \in L^q(R^n)$, $h \in L^r(R^n)$. Тогда*

$$\left|\int\limits_{R^n} f(x)(g*h)(x)dx\right| = \left|\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{p,q,r,n}\, \|f\|_p\, \|g\|_q\, \|h\|_r\,. \tag{6.1}$$

Здесь через $(g*h)$ обозначена свертка функций g и h:

$$g*h(x) = \int_{R^n} g(x-y)h(y)dy.$$

Доказательство. Не теряя общности, будем считать функции f, g, h вещественными и неотрицательными. Напишем двойной интеграл в (6.1) в виде

$$I = \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y)dxdy,$$

где

$$\alpha(x,y) = f(x)^{p/r'}g(x-y)^{q/r'},$$
$$\beta(x,y) = g(x-y)^{q/p'}h(y)^{r/p'},$$
$$\gamma(x,y) = f(x)^{p/q'}h(y)^{r/q'}.$$

Заметим, что p', q', r' — сопряженные к p, q, r показатели, то есть $1/p + 1/p' = 1$ и т. п., и что в силу условий теоремы:

$$1/p' + 1/q' + 1/r' = 1.$$

Используем неравенство Гельдера:

$$|I| \leqslant \|\alpha\|_{r'} \|\beta\|_{p'} \|\gamma\|_{q'}. \tag{6.2}$$

Вычислим нормы, стоящие в правой части:

$$\|\alpha\|_{r'} = \left\{\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} f(x)^p g(x-y)^q dxdy\right\}^{1/r'} = \|f\|_p^{p/r'}\|g\|_q^{q/r'},$$

$$\|\beta\|_{p'} = \left\{\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} g(x-y)^q h(y)^r dxdy\right\}^{1/p'} = \|g\|_q^{q/p'}\|h\|_r^{r/p'},$$

$$\|\gamma\|_{q'} = \left\{\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} f(x)^p h(y)^r dxdy\right\}^{1/q'} = \|f\|_p^{p/q'}\|h\|_r^{r/q'}.$$

Подстановка этих выражений норм в (6.2) доказывает теорему с константой $C_{p,q,r,n} = 1$. $\square$

Замечание 1. Известны точная константа $C_{p,q,r,n}$ и условия равенства в (6.1), см. [11].

При изучении интегральных операторов (со слабой особенностью) оказывается полезным неравенство, получаемое так же, как (6.1), но при замене R^n на ограниченную область Ω и заменой $g(x-y)$ на $1/|x-y|^{\lambda}$. Если берем $p=r>1$, то условие на λ есть $\lambda q<n$, что эквивалентно $\lambda p'<2n$.

При $q=n\lambda$ функция $g(x)=|x|^{-\lambda}$ не принадлежит $L^q(R^n)$, но принадлежит так называемому слабому пространству $L^q_\omega(R^n)$ — пространству измеримых функций f таких, что

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \operatorname{mess}\{x : |f(x)|>\alpha\}^{1/q}<\infty,$$

с нормой при $q>1$:

$$\|f\|_{q,\omega}=\sup_{A}|A|^{-1/q}\int\limits_{A}|f(x)|dx,$$

где A пробегает измеримые множества конечной меры. Для $q=n/\lambda$ неравенство Юнга модифицируется в следующем параграфе.

§ 7. Неравенство Харди — Литлвуда — Соболева

Теорема 1. *Пусть* $p,r>1$, $0<\lambda<n$, $1/p+\lambda/n+1/r=2$, $f\in L^p(R^n)$, $h\in L^r(R^n)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} f(x)|x-y|^{-\lambda}h(y)dxdy\right|\leqslant C(n,\lambda,p)\|f\|_p\|h\|_r. \tag{7.1}$$

Доказательство. Используем следующее легко усматриваемое представление суммируемой функции $\psi(x)$, называемое послойным:

$$\psi(x)=\int\limits_0^\infty \chi_{\{\psi>a\}}(x)da.$$

Здесь $\chi_{\{\psi>a\}}$ — характеристическая функция множества тех x, на которых $\psi(x)>a$. Слабый намек на необходимость этого представления дает нам замечание в конце § 6. Итак, имеем

$$f(x)=\int\limits_0^\infty \chi_{\{f>a\}}(x)da, \tag{7.2}$$

$$h(x)=\int\limits_0^\infty \chi_{\{h>b\}}(x)db, \tag{7.3}$$

и после некоторых преобразований такого же представления $|x|^{-\lambda}$ также получаем:

$$|x|^{-\lambda} = \lambda \int_0^\infty c^{-\lambda-1}\chi_{\{|x|<c\}}(x)dc. \tag{7.4}$$

С учетом формул (7.2)–(7.4) имеем равенство

$$I \equiv \int_{R_n}\int_{R_n} f(x)|x-y|^{-\lambda}h(y)dxdy = \tag{7.5}$$

$$= \lambda \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{R_n}\int_{R_n} c^{-\lambda-1}\chi_{\{f>a\}}(x)\chi_{\{h>b\}}(y)\chi_{\{|x|<c\}}(x-y)dxdydadbdc.$$

Заменяем одну из трех χ в (7.5) единицей и получаем

$$I \leqslant \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty c^{-\lambda-1}I(a,b,c)dadbdc, \tag{7.6}$$

где $I(a,b,c) = V(a)W(b)U(c)/\max\{V(a),W(b),U(c)\}$,

$$W(b) = \int_{R_n} \chi_{\{h>b\}}(y)dy,$$

$$V(a) = \int_{R_n} \chi_{\{f>a\}}(x)dx,$$

$$U(c) = \omega_n c^n/n,$$

ω_n — поверхность сферы единичного радиуса, $U(c)$ — объем шара радиуса c в R^n. Не теряя в общности, можем считать нормы функций f и h единичными:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= p\int_0^\infty a^{p-1}V(a)da = 1,\\ \|h\|_r^r &= r\int_0^\infty b^{r-1}W(b)db = 1. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Для представления норм опять использовали послойное представление функций. В левой части (7.6) оценим интеграл по c. Предположим, что $V(a) \geqslant W(b)$

$$\int_0^\infty c^{-\lambda-1} I(a,b,c)d \leqslant \int_{U(c)\leqslant V(a)} c^{-\lambda-1} W(b)U(c)dc+$$

$$+\int_{U(c)>V(a)} c^{-\lambda-1} W(b)V(a)dc = W(b)(\omega_n/n)\int_0^{\left(\frac{V(a)n}{\omega_n}\right)^{1/n}} c^{-\lambda-1+n}dc+$$

$$+W(b)V(a)\int_{\left(\frac{V(a)n}{\omega_n}\right)^{1/n}}^\infty c^{-\lambda-1}dc = n/\lambda(n-\lambda)(\omega_n/n)^{\lambda/n}W(b)V^{1-\lambda/n}(a).$$

Повторяя те же вычисления для области, в которой $W(b) \geqslant V(a)$, получим в итоге:

$$I \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n(\omega_n/n)^{\lambda/n}}{(n-\lambda)}\int_0^\infty\int_0^\infty \min\{W(b)V^{1-\lambda/n}(a), W^{1-\lambda/n}(b)V(a)\}dadb. \quad (7.8)$$

Учтем, что неравенство $W(b) \leqslant V(a)$ равносильно неравенству $W(b)V(a)^{1-\lambda/n} \leqslant W(b)^{1-\lambda/n}V(a)$. Интеграл по b представим как сумму двух интегралов: один от 0 до $a^{p/r}$ и другой от $a^{p/r}$ до ∞. Соответственно, интеграл (7.8) оценится сверху суммой

$$\int_0^\infty V(a)\int_0^{a^{p/r}} W^{1-\lambda/n}(b)dbda + \int_0^\infty V^{1-\lambda/n}(a)\int_{a^{p/r}}^\infty W(b)dbda. \quad (7.9)$$

Согласно неравенству Гельдера (ниже $m=(r-1)(1-\lambda/n)$) имеем

$$\int_0^{a^{p/r}} W^{1-\lambda/n}(b)b^m b^{-m}db \leqslant \left(\int_0^{a^{p/r}} W^{\frac{(1-\lambda/n)}{(1-\lambda/n)}}(b)b^{r-1}db\right)^{1-\lambda/n}\left(\int_0^{a^{p/r}} b^{-\frac{mn}{\lambda}}db\right)^{\lambda/n}.$$

Из условия теоремы следует, что $mn/\lambda < 1$, поэтому первое слагаемое в (7.9) ограничено (см. (7.7)) величиной $(1/pr)((\lambda/n)/(1-1/p))^{\lambda/n}$. Аналогично показываем, что второе слагаемое, которое можно представить в виде

$$\int_0^\infty W(s)\int_0^{s^{r/p}} V^{1-\lambda/n}(t)dtds,$$

ограничено величиной

$$(1/pr)((\lambda/n)/(1-1/r))^{\lambda/n}.$$

Теорема следует из этих оценок, (7.8) и (7.9). $\square$

Замечание 1. Послойное представление суммируемой функции, использованное в доказательстве теоремы, интересно тем, что сводит интеграл Лебега к несобственному интегралу Римана. В общем виде оно следует из равенства (μ, ν — борелевские меры):

$$\int\limits_0^\infty \mu\{x:\ f(x)>t\ \&\ x\in\Omega\}\nu(dt) = \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \chi_{\{f>t\}}(x)\mu(dx)\nu(dt).$$

В силу теоремы Фубини

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \chi_{\{f>t\}}(x)\mu(dx)\nu(dt) = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x)\nu(dt)\right)\mu(dx) =$$

$$= \int\limits_\Omega \int\limits_0^{f(x)} \nu(dt)\mu(dx).$$

Получаем общую формулу послойного представления

$$\int\limits_\Omega \int\limits_0^{f(x)} \nu(dt)\mu(dx) = \int\limits_0^\infty \mu\{x:\ f(x)>t\}\nu(dt),$$

здесь область определения $f(x)$ есть Ω. Формула (7.2) есть частный случай этой формулы, когда μ — мера Дирака, сосредотенная в точке x, ν — мера Лебега.

Глава 3
Интегральные операторы

§ 1. Интегральные операторы со слабой особенностью

Рассматривается ограниченное измеримое замкнутое множество Ω в m-мерном евклидовом пространстве: $\Omega \subseteq E_m$, а также пространство функций

$$L_p(\Omega) = \{\varphi : \int\limits_\Omega |\varphi(x)|^p dx < \infty\},$$

где $p > 1$, с нормой

$$\|\varphi\|_p = \left[\int\limits_\Omega |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

относительно которой $L_p(\Omega)$ — банахово пространство.

Введем оператор

$$(Kf)(x) = \int\limits_\Omega \frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda} f(y)\, dy, \tag{1.1}$$

где $f \in L_p(\Omega)$, Предполагается, что $A(x,y)$ есть непрерывная функция на $\Omega \times \Omega$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \Omega$. Параметр $\lambda > 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\lambda p' < m, \tag{1.2}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Если выполняется неравенство $\lambda < m$, то оператор (1.1) называют *интегральным оператором со слабой особенностью.*

Теорема 1. *Интегральный оператор со слабой особенностью (1.1) при выполнении условия (1.2) переводит пространство $L_p(\Omega)$ в пространство непрерывных функций $C(\Omega)$ и является вполне непрерывным оператором.*

Напомним, что:

1. Оператор называется вполне непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество в относительно компактное (множество относительно компактно, если его замыкание компактно).

2. Множество компактно, если из всякого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное покрытие. Эквивалентное для метрического пространства определение: любая конечная последовательность множества содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества.

3. Если $\Omega = B_R(x)$, $A(x,y) = 1$, $f(y) = 1$, то значение оператора (1.1) можно представить явно:

$$\int\limits_{B_R(x)} \frac{dy}{|x-y|^{\beta}} = \frac{\omega_m R^{m-\beta}}{m-\beta}. \tag{1.3}$$

Здесь $B_R(x)$ — шар радиуса R с центром в точке x, то есть $B_R(x) = \{y : |y-x| < R\}$, $\beta < m$, ω_m — площадь сферы единичного радиуса в пространстве E_m. Интеграл вычисляется в явном виде, если перейти к сферическим координатами с центром в точке x.

Доказательство. Будем использовать *теорему Арцела*: множество $B = \{\psi(x)\} \subset C(\Omega)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда:

1) множество ограничено по норме пространства C, т. е.

$$\|\psi\|_c \equiv \max_{x\in\Omega} |\psi(x)| \leqslant \text{const} < \infty$$

сразу для всех $\psi \in B$;

2) множество равномерно равностепенно непрерывно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что $|\Delta x| < \delta$ влечет $|(\psi(x+\Delta x) - \psi(x))| < \varepsilon$ для любых $x \in \Omega$ и $\psi \in B$.

Пусть дано ограниченное M множество функций

$$\{\varphi_\alpha(x)\}_{\alpha\in I} = M \subset L_p(\Omega), \quad \|\varphi_\alpha\|_p \leqslant C_1 \ \forall \varphi_\alpha.$$

Мы должны показать, что множество $\{K\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ компактно. Докажем сначала его равномерную равностепенную непрерывность. Обозначим

$$\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} = \phi(x,y).$$

Пусть $f \in M$. Полагая, что x и $x + \Delta x \in \Omega$, рассмотрим разность

$$|Kf(x+\Delta x) - Kf(x)| = \left| \int\limits_{\Omega} \left(\frac{A(x,y)}{|x+\Delta x - y|^{\lambda}} - \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\lambda}} \right) f(y)dy \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} (\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x,y)) f(y)dy \right|.$$

Разобьем Ω на два непересекающиеся множества:

$$\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2, \; \Omega_1 = \Omega \bigcap B_{\eta}(x), \; \Omega_2 = \Omega - B_{\eta}(x),$$

где $B_{\eta}(x)$ — шар радиуса $\eta > 0$ с центром в точке x. Соответственно, разобьем интеграл по Ω на два интеграла:

$$|Kf(x+\Delta x) - Kf(x)| = \left| \int\limits_{\Omega_1} (\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x,y)) f(y)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega_2} (\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x,y)) f(y)dy \right|. \tag{1.4}$$

Положив, что

$$I_1 = \left| \int\limits_{\Omega_1} (\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x,y)) f(y)dy \right|,$$

$$I_2 = \left| \int\limits_{\Omega_2} (\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x,y)) f(y)dy \right|,$$

имеем $|Kf(x+\Delta x) - Kf(x)| \leqslant I_1 + I_2$. Оценим I_1 с помощью неравенства Гельдера, увеличив область интегрирования Ω_1 до $B_{\eta}(x)$:

$$I_1 \leqslant \int\limits_{B_{\eta}(x)} |\phi(x+\Delta x, y)| \, |f(y)| \, dy + \int\limits_{B_{\eta}(x)} |\phi(x,y)| \, |f(y)| \, dy \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \int\limits_{B_{\eta}(x)} \frac{|f(y)|}{|x+\Delta x - y|^{\lambda}} dy + \int\limits_{B_{\eta}(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} dy \right\}.$$

Использовали, что A — непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве, и, следовательно, $|A(x,y)| \leqslant C\ \forall x,y$. Применяя неравенство Гельдера, получим:

$$I_1 \leqslant C \left\{ \|f(y)\|_{L_p(B_\eta(x))} \left[\int\limits_{B_\eta(x)} \frac{dy}{|x+\Delta x-y|^{\lambda p'}} \right]^{\frac{1}{p'}} + \right.$$

$$\left. + \|f(y)\|_{L_p(B_\eta(x))} \left[\int\limits_{B_\eta(x)} \frac{dy}{|x-y|^{\lambda p'}} \right]^{\frac{1}{p'}} \right\}.$$

В интеграле $\left[\int\limits_{B_\eta(x)} \frac{dy}{|x+\Delta x-y|^{\lambda p'}} \right]^{\frac{1}{p'}}$ увеличим область интегрирования: $B_{\eta_1}(x+\Delta x) \supseteq B_\eta(x)$, где $\eta_1 = 2\eta$, предполагается, что $|\Delta x| \leqslant \eta$. Таким образом, получим:

$$I_1 \leqslant C\,\|f\|_p \left\{ \left[\int\limits_{B_{2\eta}(x+\Delta x)} \frac{dy}{|x+\Delta x-y|^{\lambda p'}} \right]^{\frac{1}{p'}} + \left[\int\limits_{B_\eta(x)} \frac{dy}{|x+\Delta x-y|^{\lambda p'}} \right]^{\frac{1}{p'}} \right\}.$$

Теперь согласно формуле (1.3) получаем при соответствующем выборе δ_2 для любых $0 < \eta < \delta_2,\ f \in M,\ x \in \Omega$:

$$I_1 \leqslant C\,\|f\|_p\,\omega_m \left[\left(\frac{(2\eta)^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\frac{\eta^{m-\lambda p'}}{m-\lambda p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь оценим I_2:

$$I_2 = \left| \int\limits_{\Omega_2} (\phi(x+\Delta x,y) - \phi(x,y)) f(y)\,dy \right|. \tag{1.5}$$

Функция $\phi(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda}$ непрерывна на множестве $D = \{(x,y) : |x-y| \geqslant \delta,\ (x,y) \in \Omega \times \Omega\}$, которое есть замкнутое и ограниченное множество: при $x_n \to x,\ y_n \to y\ x_n, y_n \in D \Rightarrow (x,y) \in D$ и $|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| \leqslant 2\,\mathrm{diam}(\Omega)$ для любых двух точек из D. В силу того, что $\phi(x)$ непрерывна на D, то она равномерно непрерывна на D. Это означает, что для заданного ε_1 существует δ_1 такое, что:

$$\rho[(x_1, y_1, (x_2, y_2))] < \delta_1 \Rightarrow |\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)| < \varepsilon_1$$

для всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$; ρ означает расстояние между этими точками. Зафиксируем $\varepsilon_1, \delta_1,\ \delta$ и положим $\eta = \delta_1 + \delta,\ \Delta x < \delta_1$. Требуем также, чтобы $\eta = \delta_1 + \delta < \delta_2$. В равенстве (1.5) точка (x, y) принадлежит D, выясним, какому множеству принадлежит точка $(x+\Delta x, y)$:

$$|(x + \Delta x - y)| \geqslant |x - y| - |\Delta x| \geqslant \eta - \delta_1 = \delta \Rightarrow (x + \Delta x, y) \in D.$$

Тогда

$$|(x, y) - (x + \Delta x, y)| = |\Delta x| \leqslant \delta_1 \Rightarrow |\phi(x + \Delta x, y) - \phi(x, y)| < \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow I_2 \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{\Omega} |f(y)|\, dy.$$

По неравенству Гельдера:

$$I_2 \leqslant \varepsilon_1 \|f\|_p \|1\|_{p'} = \varepsilon_1 \|f\|_p (\mathrm{mess}\Omega)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

при соответствующем выборе ε_1. В целом, получаем такую оценку: существует δ_1 такое, что неравенство $|\Delta x| \leqslant \delta_1$ влечет

$$I_1 + I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|Kf(x + \Delta x) - Kf(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall f \in M,\ \forall x \in \Omega, \text{если}\, |\Delta x| \leqslant \delta_1,$$

т. е. $K(M)$ — равностепенно равномерно непрерывное множество функций. Повторяя оценки интеграла I_1, где опускаем $\phi(x + \Delta x, y)$, а область Ω_1 заменяем на Ω, получаем, что множество $\{Kf\}_{f \in M}$ равномерно ограничено, следовательно, по теореме Арцела, множество $K(M)$, принадлежащее пространству непрерывных функций $C(\Omega)$, относительно компактно. $\square$

§ 2. Интегральные операторы со слабой особенностью. Ослабление условий теоремы 1

Рассматривается интегральный оператор со слабой особенностью:

$$Ku(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{A(x, y)}{r^{\alpha}(x, y)} u(y)\, dy, \tag{2.1}$$

где Ω — измеримое ограниченное множество, $0 \leqslant \alpha < m$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Функция $|A(x, y)| \leqslant C$ $\forall x, y \in \Omega \subseteq E_m$ и измерима.

Теорема 1. *Интегральный оператор со слабой особенностью (2.1) определен на всем пространстве $L_2(\Omega)$ и ограничен в нем. Норма этого оператора допускает оценку*

$$\|K\| \leqslant \frac{C\omega_m H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \tag{2.2}$$

где $H = \operatorname{diam}\Omega$, ω_m — поверхность единичной сферы в m-мерном пространстве.

Доказательство. Нужно показать, что K — оператор, действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и его норма удовлетворяет (2.2). Как мы заметили в §1, если $\beta < m$, то

$$\int\limits_{B_r(x)} \frac{dy}{r^\beta(y, a)} = \frac{\omega_m r^{m-\beta}}{m-\beta}.$$

Доказывается равенство переходом к сферическим координатам. Дифференциалы dS_1 и dS_r площадей на сферах радиуса 1 и r относятся как:

$$\frac{dS_1}{dS_r} = \frac{1}{r^{m-1}},$$

поэтому

$$\int\limits_{B_r(x)} \frac{dy}{r^\beta(y, a)} = \int\limits_0^r r^{m-\beta-1} dr \int\limits_{S_1} dS_1,$$

далее очевидно.

Рассмотрим двойной интеграл

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{u^2(y)}{r^\alpha(x, y)} dx dy = \int\limits_\Omega u^2(y) dy \int\limits_\Omega \frac{dx}{r^\alpha(x, y)}.$$

Шар $B_H(y)$ содержит Ω, поэтому справедливы оценки:

$$\int\limits_\Omega u^2(y) dy \int\limits_\Omega \frac{dx}{r^\alpha(x, y)} \leqslant \int\limits_\Omega u^2(y) dy \int\limits_{B_H(y)} \frac{dx}{r^\alpha(x, y)} = \int\limits_\Omega u^2 \frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha} dy,$$

т. е.

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{u^2(y)}{r^\alpha(x, y)} dx dy \leqslant \frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int\limits_\Omega u^2 dy < \infty, \tag{2.3}$$

так как $u(y) \in L_2(\Omega)$. Из формулы (2.3) и теоремы Фубини заключаем, что:

$$\left| \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(y)}{r^{\alpha}(x,y)} dy \right| < \infty \tag{2.4}$$

для почти всех $x \in \Omega$.

Оценим теперь функцию $Ku(x)$. По определению:

$$[Ku(x)]^2 = \left[\int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{r^{\alpha}(x,y)} u(y) dy \right]^2 = \left[\int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{r^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{u(y)}{r^{\frac{\alpha}{2}}} dy \right]^2 .$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$\left[\int\limits_{\Omega} \frac{A(x,y)}{r^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{u(y)}{r^{\frac{\alpha}{2}}} dy \right]^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{A^2(x,y)}{r^{\alpha}(x,y)} dy \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(y)}{r^{\alpha}(x,y)} dy.$$

Поскольку A — ограниченная константой C функция, то

$$\int\limits_{\Omega} \frac{A^2(x,y)}{r^{\alpha}(x,y)} dy \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(y)}{r^{\alpha}(x,y)} dy \leqslant C^2 \int\limits_{B_H(y)} \frac{dy}{r^{\alpha}(x,y)} \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(y)}{r^{\alpha}(x,y)} dy =$$

$$= C^2 \frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(y)}{r^{\alpha}(x,y)} dy.$$

Далее, интегрируя по переменной x, получаем:

$$\int\limits_{\Omega} [Ku(x)]^2 dx \leqslant C^2 \frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(y)}{r^{\alpha}(x,y)} dx dy \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \left(\frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right)^2 \int\limits_{\Omega} u^2(y) dy.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\Omega} u^2(y) dy = (\|u\|_{L_2})^2 = \left(\int\limits_{\Omega} u^2(y) dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_\Omega [Ku(x)]^2 dx = \|Ku\|\,,$$

$$\|Ku\| \leqslant C\frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha}\,\|u\|_{L_2}\,.$$

Следовательно, K — ограниченный оператор и

$$\|K\| \leqslant C\frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

Интегральный оператор со слабой особенностью оказывается непрерывным оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. □

Теорема 2. *Интегральный оператор со слабой особенностью* (2.1) *является вполне непрерывным оператором, действующим из* $L_2(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и разобъем ядро K на два слагаемых:

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)}{r^\alpha(x,y)} = K_\varepsilon(x,y) + K'_\varepsilon(x,y),$$

где слагаемые определяются следующим образом:

$$K_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & r(x,y) \geqslant \varepsilon, \\ 0, & r(x,y) < \varepsilon, \end{cases}$$

$$K'_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 0, & r(x,y) \geqslant \varepsilon, \\ K(x,y), & r(x,y) < \varepsilon, \end{cases}$$

$$Ku(x) = \int_\Omega K_\varepsilon(x,y)u(y)dy + \int_\Omega K'_\varepsilon(x,y)u(y)dy =$$
$$= K_\varepsilon(u) + K'_\varepsilon(u).$$

Функция $K_\varepsilon(x,y)$ ограничена по x, y и допускает простую оценку:

$$\left|\frac{A(x,y)}{r^\alpha(x,y)}\right| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}.$$

Таким образом, K_ε — интегральный оператор с ограниченным ядром, а потому является фредгольмовым. Фредгольмовы операторы —

вполне непрерывные операторы, действующие из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Второе слагаемое

$$v(y) = \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon(x)} K'_\varepsilon(x,y)u(y)dy$$

оценим по модулю:

$$|v| \leqslant C \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)|}{r^\alpha}dy = C \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)|\cdot 1}{r^{\frac{\alpha}{2}}r^{\frac{\alpha}{2}}}dy.$$

По неравенству Коши — Буняковского :

$$|v|^2 \leqslant C^2 \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon(x)} \frac{u^2(y)}{r^\alpha}dy \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon(x)} \frac{dy}{r^\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Omega |v(y)|^2\, dx \leqslant C^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{u^2(y)}{r^\alpha}dxdy \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \frac{dy}{r^\alpha(x,y)},$$

Согласно формуле (2.3) имеет место неравенство:

$$C^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{u^2(y)}{r^\alpha}dxdy \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \frac{dy}{r^\alpha} \leqslant C^2\frac{\omega H^{m-\alpha}}{m-\alpha}\int\limits_\Omega u^2(y)dy\frac{\omega\varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|K'_\varepsilon(u)\|^2 \leqslant \frac{C^2\omega^2}{(m-\alpha)^2}H^{m-\alpha}\varepsilon^{m-\alpha}\,\|u\|^2 \Rightarrow \|K'_\varepsilon(u)\| \leqslant \text{const}\ \varepsilon^{\frac{m-\alpha}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|K'_\varepsilon\| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Далее сошлемся на теорему: если линейный оператор L может быть сколь угодно точно по норме аппроксимирован вполне непрерывным оператором, то и сам оператор L вполне непрерывный. Для нас имеет место как раз такая ситуация: $K = K_\varepsilon + K'_\varepsilon$, $\|K - K_\varepsilon\| = \|K'_\varepsilon\| \to 0$, т. е. K может быть сколько угодно точно аппроксимирован по норме вполне непрерывным оператором K_ε. □

Продолжаем рассматривать интегральный оператор со слабой особенностью

$$Ku(x) = \int\limits_\Omega \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)}u(\xi)d\xi, \quad 0 \leqslant \alpha < m,\ \Omega \subseteq E_m, \qquad (2.5)$$

где $\Omega \equiv \bar{\Omega}$ — измеримое, ограниченное, замкнутое множество. Функция $A(x,\xi)$ непрерывна по обеим переменным в Ω.

Теорема 3. *Интегральный оператор со слабой особенностью* (2.5) *вполне непрерывен в пространстве непрерывных функций.*

Доказательство проводится так же как и для теоремы 1, § 1, но со значительными упрощениями. Следует сразу заметить, что из доказательства следует, что K переводит всякую ограниченную функцию в непрерывную.

Итак, пусть дано некоторое множество $M = \{u\} \subset C(\Omega)$, причем $\|u\|_C = \max\limits_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant C_1$ для всякого $u \in M$, т. е. M ограничено. Нужно доказать, что $K(M)$ — относительно компактное множество. Для этого покажем, что $K(M)$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела, а именно,что $K(M)$ — ограниченное и равностепенно непрерывное множество функций в $C(\Omega)$. Имеем

$$|Ku(x)| \leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{|A(x,\xi)|}{r^\alpha(x,\xi)}|u(\xi)|d\xi \leqslant C_2C_1 \int\limits_{\Omega} \frac{d\xi}{r^\alpha(x,\xi)} \leqslant C_2C_1 \int\limits_{B_H(x)} \frac{d\xi}{r^\alpha(x,\xi)}.$$

Здесь H — диаметр Ω, C_2 — максимум непрерывной функции $A(x,\xi)$ на замкнутом ограниченном множестве Ω. Таким образом,

$$|Ku(x)| \leqslant C_1C_2\frac{\omega_m H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.6}$$

Это влечет:

$$\|Ku(x)\|_C \leqslant C_1C_2\omega_m\frac{H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \quad \forall u \in \Omega.$$

Следовательно, $K(M)$ ограничено.

Исследуем равностепенную непрерывность $K(M)$. Имеем

$$|Ku(x+h) - Ku(x)| = \left|\int\limits_{\Omega} \left(\frac{A(x+h,\xi)}{r^\alpha(x+h,\xi)} - \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)}\right) u(\xi)d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_{\Omega} \left|\frac{A(x+h,\xi)}{r^\alpha(x+h,\xi)} - \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)}\right| d\xi.$$

Использовали то, что $u \in M$ и как следствие $|u(x)| \leqslant C_1$.

Разобьем Ω на два подмножества и, соответственно, интеграл на сумму

$$\int\limits_{\Omega} = \int\limits_{\Omega\setminus B_\delta(x)} + \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)}.$$

Получим

$$|Ku(x+h)-Ku(x)| \leqslant C_1 \left\{ \int\limits_{B_\delta(x)} \frac{|\overbrace{A(x+h,\xi)}^{\leqslant C_2}|}{r^\alpha(x+h,\xi)} d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{B_\delta(x)} \frac{|\overbrace{A(x,\xi)}^{\leqslant C_2}|}{r^\alpha(x,\xi)} d\xi + \int\limits_{\Omega \backslash B_\delta(x)} \left|\frac{A(x+h,\xi)}{r^\alpha(x+h,\xi)} - \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)}\right| d\xi \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\{ C_2 \int\limits_{B_2\delta(x+h)} \frac{d\xi}{r^\alpha(x+h,\xi)} + C_2 \int\limits_{B_\delta(x)} \frac{d\xi}{r^\alpha(x,\xi)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega \backslash B_\delta(x)} \left|\frac{A(x+h,\xi)}{r^\alpha(x+h,\xi)} - \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)}\right| d\xi \right\}.$$

То есть

$$|Ku(x+h)-Ku(x)| \leqslant C_1 \left\{ C_2 \frac{\omega_m (2\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} + C_2 \frac{\omega_m (\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega \backslash B_\delta(x)} \left|\frac{A(x+h,\xi)}{\tau^\alpha(x+h,\xi)} - \frac{A(x,\xi)}{\tau^\alpha(x,\xi)}\right| d\xi \right\}.$$

Можем выбрать δ так, чтобы выполнялось неравентсво

$$C_2 C_1 \frac{\omega_m}{m-\alpha} \delta^{m-\alpha} \left(2^{m-\alpha}+1\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

При фиксированных ε и δ, при $h \leqslant \frac{\delta}{2}$, рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\Omega \backslash B_\delta(x)} \left|\frac{A(x+h,\xi)}{\tau^\alpha(x+h,\xi)} - \frac{A(x,\xi)}{\tau^\alpha(x,\xi)}\right| d\xi.$$

Здесь

$$r(x+h,\xi) > r(\xi,x) - r(x,x+h) > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

и потому рассмотрим множество $D = \{(x, \xi) : x, \xi \subseteq \Omega\}$ пар точек (x, ξ), расстояние между которыми $r(x, \xi) \geqslant \delta/2$. Очевидно, D есть замкнутое множество, ограниченное и, следовательно, компактное; $D \subseteq \Omega \times \Omega$. Если $\xi \in \Omega \setminus B_\delta(x)$, то

$$r(x, \xi) \geqslant \delta, r(x+h, \xi) \geqslant \frac{\delta}{2} \Rightarrow (x, \xi), (x+h, \xi) \in D,$$

Расстояние между точками (x, ξ) и $(x + h, \xi)$ вычисляется так: $r[(x, \xi), (x + h, \xi)] = |h|$, здесь $(x, \xi) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ принадлежит $\Omega \times \Omega$, $h = (h_1, h_2, .., h_m)$. Функция $\Psi \equiv \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)}$ непрерывная на D, равномерно непрерывна, поскольку D — компактное множество. По заданному ε_1 находится δ_1 такое, что $|\psi(A) - \psi(B)| < < \varepsilon_1$, если $r(A, B) < \delta_1$. Выберем h так, что $|h| \leqslant \min\{\delta/2, \delta_1\}$. При таком выборе h получаем $|\psi(x+h, \xi) - \psi(x, \xi)| \leqslant \varepsilon_1$ на $\Omega \setminus B_\delta(x)$. Это приводит к оценке $|Ku(x + h) - Ku(x)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon_1 \mathrm{mess}\,\Omega$. Выбираем ε_1 так,что $\mathrm{mess}\,\Omega \leqslant \varepsilon/2$. В итоге $|Ku(x + h) - Ku(x)| \leqslant \varepsilon$, если $|h| < \min\{\delta/2, \delta_1\}$; и это неравенство выполняется для любого $u \in M$, любого $x \in \Omega$. Равностепенная непрерывность доказана. Оператор K вполне непрерывен.

Следствие 1. *Если Ω — ограниченное замкнутое множество и ядро $K(x, \xi)$ по обеим переменным непрерывно на Ω, то оператор Фредгольма*

$$Ku(x) = \int_\Omega K(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

вполне непрерывен в пространстве $C(\Omega)$.

Для доказательства заметим, что оператор Фредгольма есть частный случай оператора со слабой особенностью, когда $\alpha = 0$.

§ 3. Интегральные операторы с ядрами общего вида

Исследуем интегральный оператор U:

$$(Ux)(s) = \int_D K(s, t) x(t) dt,$$

когда он переводит функцию $x = x(t) \in L^p(D)$ в функцию $y = y(s)$ из $L^q(D')$. Ограниченная область D' лежит в E_ν, D — ограниченная область в E_μ.

Пусть далее, $p, q \geqslant 1$, а сопряженные показатели p' и q' определяются равенствами $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$. Не теряя в общности результатов для упрощения вкладок предполагаем, что $\operatorname{mess} D = 1$, и полагаем, что $K(s,t)$ — ядро оператора — измеримо по обеим переменным в области $D \times D'$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $\left(\int\limits_D |K(s,t)|^r dt\right)^{1/r} \leqslant C_1$ *для почти всех* $s \in D'$, $r > 0$;

2) $\left(\int\limits_{D'} |K(s,t)|^\sigma ds\right)^{1/\sigma} \leqslant C_2$ *для почти всех* $t \in D$, $\sigma > 0$;

3) $q \geq p, q \geq \sigma, (1 - \sigma/q)\, p' \leqslant r$.

Тогда интегральный оператор U — непрерывный линейный оператор из $L^p(D)$ в $L^q(D')$, причем $\|U\| \leqslant C_1^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q}$.

Доказательство. Пусть $x(t) \in L^p(D)$, рассмотрим функцию

$$y(s) = Ux(s) = \int\limits_D K(s,t)x(t)dt, s \in D'.$$

Модуль этой функции допускает оценку:

$$|y(s)| \leqslant \int\limits_D |K(s,t)||x(t)|dt =$$

$$\int\limits_D |K(s,t)|^{1-\frac{\sigma}{q}} |K(s,t)|^{\frac{\sigma}{q}} |x(t)|^{\frac{p}{q}} |x(t)|^{1-\frac{p}{q}} dt =$$

$$= \int\limits_D \left(|K(s,t)|^\sigma |x(t)|^p\right)^{\frac{1}{q}} |K(s,t)|^{1-\frac{\sigma}{q}} |x(t)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} dt.$$

Применим к последнему интегралу неравенство Гельдера для трех функций

$$\left|\int\limits_D \varphi_1\varphi_2\varphi_3 dt\right| \leqslant \left(\int\limits_D \varphi_1^{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^{\lambda_1} \left(\int\limits_D \varphi_2^{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^{\lambda_2} \left(\int\limits_D \varphi_3^{\frac{1}{\lambda_3}}\right)^{\lambda_3},$$

где

$$\underbrace{\frac{1}{q}}_{\lambda_1}+\underbrace{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}_{\lambda_2}+\underbrace{(1-\frac{1}{p})}_{\lambda_3}=1,$$

$$\lambda_i \geq 0, i=1,2,3, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Получаем

$$|y(s)| \leqslant \left[\int\limits_D |K(s,t)|^{\sigma}|x(t)|^p\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int\limits_D |K(s,t)|^{p'(1-\frac{\sigma}{q})}dt\right]^{\frac{1}{p'}}\left[\int\limits_D |x(t)|^p dt\right]^{\frac{q-p}{pq}}.$$

По условию теоремы $p'(1-\sigma/q) \leqslant r$. Кроме того, воспользуемся монотонностью по p нормы $||\varphi||_p$. Действительно, пусть $q = p_2/p_1 > 1$, $p_2 > p_1$, $1/q + 1/q' = 1$. Имеем тогда, применяя опять неравенство Гельдера:

$$\int\limits_D \varphi(t)^{p_1}dt \leqslant ||\varphi^{p_1}||_q ||1||_{q'} = \left(\int\limits_D \varphi(t)^{p_2}dt\right)^{\frac{1}{q}=\frac{p_1}{p_2}} \underbrace{\left(\int\limits_D 1^{q'}dt\right)^{\frac{1}{q'}}}_{=1},$$

$$||\varphi||_{p_1}^{p_1} \leqslant ||\varphi||_{p_2}^{p_1} \sim ||\varphi||_{p_1} \leqslant ||\varphi||_{p_2}, \text{ если } p_1 < p_2.$$

Пользуясь этими фактами, получаем

$$|y(s)| \leqslant \left(\int\limits_D |K(s,t)|^{\sigma}|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} ||x||_p^{1-\frac{p}{q}} \left(\int\limits_D |K(s,t)|^r dt\right)^{\frac{1}{r}(1-\frac{\sigma}{q})}.$$

Интегрируем это неравенство, получая слева норму функции $y(s)$:

$$\left(\int\limits_D |y(s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant ||x||_p^{1-\frac{p}{q}} C_1^{1-\frac{\sigma}{q}} \left(\int\limits_{D_1}\int\limits_D |K(s,t)|^{\sigma}|x(t)|^p dt ds\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= ||x||_p^{1-\frac{p}{q}} C_1^{(1-\frac{\sigma}{q})} \left(\int\limits_{D_1} |x(t)|^p \left(\int\limits_D |K(s,t)|^{\sigma} ds\right) dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant ||x||_p^{1-\frac{p}{q}} C_1^{(1-\frac{\sigma}{q})} \left(\int\limits_{D_1} |x(t)|^p C_2^{\sigma} dt\right)^{(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}\frac{p}{q})} = C_1^{(1-\frac{\sigma}{q})} C_2^{\frac{\sigma}{q}} ||x||_p.$$

В итоге имеем

$$\|(Ux)(s)\|_q \leqslant C_1^{(1-\frac{\sigma}{q})} C_2^{\frac{\sigma}{q}} \|x\|_p,$$

то есть оператор U непрерывный с нормой

$$\|U\| \leqslant C_1^{(1-\frac{\sigma}{q})} C_2^{\frac{\sigma}{q}}. \ \square$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1) *и* 2) *из теоремы* 1, *то есть*

1) $\left(\int\limits_D |K(s,t)|^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_1,$

2) $\left[\int\limits_{D'} |K(s,t)^\sigma ds\right]^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant C_2,$

а условие 3 *выполняется в усиленной форме*

3) $q \geqslant p,\ q > \sigma,\ \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' < r.$

Тогда интегральный оператор U является вполне непрерывным оператором $U : L^p(D) \to L^q(D')$.

Доказательство. Выберем число ρ так, что $\left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' < \rho < r$ и введем ядра $K_n(s,t)$, полагая $K_n(s,t) = -n$, если $-n > K(s,t)$, $K_n(s,t) = K(s,t)$, если $|K(s,t)| \leqslant n$, $K_n(s,t) = +n$, если $K(s,t) > n$. Из этого следует что: $|K_n(s,t)| \leqslant n\ \forall s,t$. Оценим замену ядра $K(s,t)$ на $K_n(s,t)$:

$$\left(\int\limits_D |K(s,t) - K_n(s,t)|^\rho dt\right)^{\frac{1}{\rho}} \leqslant \left(\int\limits_{A_n(s)} |K(s,t)|^\rho dt\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

где

$$A_n(s) = \{t : |K(s,t)| > n\}.$$

Поскольку $|K(s,t)|^r = |K(s,t)|^\rho |K(s,t)|^{r-\rho} \geq |K(s,t)|^\rho n^{r-\rho}$, то

$$|K(s,t)|^\rho \leqslant \frac{|K(s,t)|^r}{n^{r-\rho}} \ \text{ для } \ t \in A_n(s),$$

$$\left(\int\limits_D |K(s,t) - K_n(s,t)|^\rho dt\right)^{\frac{1}{\rho}} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{r-\rho}{\rho}}} \left[\int\limits_{A_n(s)} |K(s,t)|^r dt\right]^{\frac{1}{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{\frac{r-\rho}{\rho}}} C_1^{\frac{r}{\rho}} \to 0(n \to \infty).$$

Интегральный оператор U_n, соответствующий ядру K_n, является вполне непрерывным. Это следует из теоремы 2, потому что ядра K_n ограниченны и суммируемы в $D \times D'$.

Разность $\|U - U_n\| \leqslant \varepsilon$ по теореме 1, где в неравенстве заменяем r на ρ , а в качестве неравенства условия 1) берем последнее полученное неравенство при достаточно большом n, таком, что $C_1^{\frac{r}{\rho}} \frac{1}{n^{\frac{r-\rho}{\rho}}} < \varepsilon$. Поскольку оператор U может быть аппроксимирован сколь угодно точно вполне непрерывным оператором, то U вполне непрерывный. □

Замечание 1. Если $q < p$, то доказательство непрерывности оператора U проводится с использованием дополнительного условия $(1 - \sigma/p) \leqslant r$.

В условиях теоремы 1, пусть D и D' лежат в одном евклидовом пространстве, и пусть $K(s,t) = \frac{B(s,t)}{|s-t|^m}$, где $B(s,t)$ ограниченная функция, непрерывная в точках $(s,t), s \neq t$.

Числа r и σ, фигурирующие в условиях, можно взять сколько угодно близкими к $\frac{\mu}{m}$ и $\frac{\nu}{m}$ соответственнно, и так, что $mr < \mu$, а $m\sigma < \nu$. Так что, для того, чтобы условия теоремы 1 и замечания 1 выполнялись при подходящем выборе r и σ достаточно потребовать выполнения неравенств:

$$\left(1 - \frac{\nu}{mq}\right) p' < \frac{\mu}{m}, \quad \left(1 - \frac{\nu}{mp}\right) p' < \frac{\nu}{m}.$$

Второе неравенство мы выписали с учетом замечания 1. Эти два неравенства, обеспечивающие возможность выбора r и σ можно выписать в эквивалентной форме.

$$q < \frac{\nu p}{\mu - (\mu - m)p}, \nu > \mu - (\mu - m)p. \tag{3.1}$$

Наши рассуждения показывают, что справедлива следующая.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (3.1), *то интегральный оператор с ядром*

$$K(s,t) = \frac{B(s,t)}{|s-t|^m}$$

является вполне непрерывным оператором, отображающим пространство $L_p(D) \to L_q(D')$, где D и D' — ограниченные области в евклидовых пространствах размерности μ и ν, соответственно.

Подведем итоги изучения интегрального оператора U из теоремы 1: $U : L_p(D) \to L_q(D')$.

Интегральный оператор U, является непрерывным, если выполняются условия:

1) $q \geq p, q \geq \sigma, \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' \leqslant r$ (при условиях $q, p \geq 1, r, \sigma > 0$);

   и вполне непрерывным, если

2) $q \geq p, q > \sigma, \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' < r$;

3) параметры σ и r, можно подобрать, выполняющими условия теорем 1, 2, если выполнены неравенства

$$q < \frac{\nu p}{\mu - (\mu - m)p}, \nu > \mu - (\mu - m)p;$$

   при этом оператор U будет непрерывным и вполне непрерывным из $L_p \to L_q$, если его ядро $K(s,t)$ имеет слабую особенность вида:

$$K(s,t) = \frac{B(s,t)}{|s-t|^m}. \tag{3.2}$$

Замечание 2. В теореме 3 под D можно понимать ограниченную μ-мерную поверхность. И, аналогично, под D' можно понимать ν-мерную поверхность из достаточно гладкого класса в евклидовых пространствах. Доказательство в идейном плане остается точно таким же. Можно от интегрирования по поверхностной мере перейти к интегралам по областям в евклидовом пространстве, как описано в § 1 гл. 1, и воспользоваться уже доказанными теоремами.

Вернемся к нашим интегральным уравнениям для граничных задач. Вместо меры Лебега в евклидовом пространстве используются a-меры на поверхностях (см. начало первой главы). Таким образом, возникает требование, чтобы поверхность $S = \partial\Omega$ была, по крайней мере, липшицевой. Ниже полагаем поверхность S класса $C^{1,\alpha}$, т. е. ляпуновской.

Для задач Дирихле в трехмерном пространстве мы получили уравнение:

$$\chi^{\pm}(s) + \int\limits_{S \equiv \partial\Omega} 2\frac{\partial}{\partial n}\gamma_3(r(s,t))\chi^{\pm}(t)dS_t = \pm\varphi(s)^{\pm}, \tag{3.3}$$

где

$$\Omega \subseteq E_3; \quad \gamma_3 = \frac{-1}{4\pi\omega_1}\frac{1}{r(s,t)}.$$

Интегральный оператор этого уравнения

$$U\chi(s) = \int\limits_S K(s,t)\chi(t)dt$$

имеет следующее ядро.

$$K(s,t) = -2\frac{1}{4\pi\omega_1}\frac{1}{r^2(s,t)}\frac{\partial}{\partial n_t}(r) = \frac{1}{2\pi\omega_1}\frac{1}{r^2(s,t)}\cos(n_t, \overrightarrow{r}(s,t)).$$

Если S — поверхность Ляпунова, то, как известно из курса уравнений математической физики,

$$|\cos(n_t, r(s,t)| \leqslant Cr^\alpha(s,t).$$

Из этого следует, что для поверхности Ляпунова:

$$|K(s,t)| \leqslant C\frac{1}{r^{2-\alpha}(s,t)}, K(s,t) = \frac{A(s,t)}{r^{2-\alpha}(s,t)},$$

где $A(s,t)$ — измеримая ограниченная на S функция. Таким образом, оператор в уравнении (3.3), есть интегральный оператор со слабой особенностью. Это утверждение остается справедливым в любом евклидовом пространстве для поверхностей S класса $C^{1,\alpha}$.

Согласно доказанным теоремам оператор T является вполне непрерывным оператором, который переводит $L_2(S) \to L_2(S)$. Также T переводит ограниченные функции из L_2 в непрерывные функции, кроме того является вполне непрерывным оператором в пространстве $C(S)$.

Согласно последней теореме мы можем рассмотреть оператор $T : L_p(S) \to L_q(S)$, как вполне непрерывный, где p и q определяются условием 1), $m = 2 - \alpha$.

Интегральный оператор задачи Неймана имеет в ядре также особенность порядка $1/r^{2-\alpha}$. Следовательно, справедливы для него те же утверждения.

Теорема 4. *Если Ω — ограниченное и замкнутое множество, $\Omega \subseteq R^n$, а функции $A(x,\xi), f(x)$ непрерывны по своим переменным в Ω, $0 \leqslant \alpha < n$, то любое решение уравнения*

$$u(x) - \int\limits_\Omega \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)}u(\xi)d\xi = f(x),$$

принадлежащее классу $L^2(\Omega)$, является непрерывным в Ω.

Доказательство. Используем теорему Лузина, которая говорит, что если функция $u(\xi)$ измерима на Ω, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество $F \subseteq \Omega$, такое что u будет непрерывным на F и $\operatorname{mess}(\Omega - F) \leqslant \varepsilon$. По ε найдем F и представим оператор T в следующем виде:

$$(Tu)(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)} u(\xi) d\xi = \int\limits_{F} \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)} u(\xi) d\xi + \int\limits_{\Omega \setminus F} \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)} u(\xi) d\xi.$$

Хотя ξ меняется по F, а x — по Ω, доказательство теоремы 3, § 2, с очевидными изменениями остается в силе, поэтому функция $V_1(x) = \int\limits_F \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)} u(\xi) d\xi$ непрерывна. При оценке

$$|V_2(x)| = \left| \int\limits_{\Omega \setminus F} \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)} u(\xi) d\xi \right|$$

применяем теорему 1, § 3, в частности, оценку $\|U\| \leqslant C_1^{1-\frac{\sigma}{q}} C_2^{\frac{\sigma}{q}}$. Используем, что $\operatorname{mess}(\Omega - F) \leqslant \varepsilon$ и получаем, что $\|V_2\| < \operatorname{const} \varepsilon^\rho \|u\|$, при некотором $\rho > 0$. Для оператора

$$(T_\varepsilon u)(x) = V_2(x) = \int\limits_{\Omega \setminus F} \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha(x,\xi)} u(\xi) d\xi,$$

получаем, что $\|T_\varepsilon\| < 1$ при подходящем ε. Перепишем исходное уравнение:

$$u(x) - T_\varepsilon u(x) = f(x) + V_1(x), (I - T_\varepsilon) u(x) = f(x) + V_1(x) \equiv g(x),$$

$g(x)$ непрерывна.

Теперь по теореме Банаха для сжимающих операторов, $u(x)$ может быть представлена рядом:

$$u(x) = (I - T_\varepsilon)^{-1} g(x) = g(x) + T_\varepsilon g(x) + \left(T_\varepsilon^2 g\right)(x) + \dots + \left(T_\varepsilon^n g\right)(x) + \cdots,$$

который по норме мажорируется сходящейся суммой геометрической прогрессии. Оператор T_ε есть интегральный оператор, который удовлетворяет условию теоремы 3, § 2 , а потому каждый член ряда есть функция непрерывная. Поскольку указанный ряд сходится равномерно, то и предел этого ряда — $u(x)$ — есть непрерывная функция. □

Замечание 3. Упомянутая выше теорема Банаха будет доказана в главе 7, § 1.

Глава 4

Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве

§ 1. Неоторые свойства вполне непрерывных операторов

Рассмотрим гильбертово пространство H над полем комплексных чисел. Напомним, что в H определены две операции: сложение элементов и умножение элемента на число. Таким образом для любых $x, y \in H$ и любых $\alpha, \beta \in C$ определен элемент $\alpha x+\beta y \in H$. Здесь C — поле комплексных чисел. По сложению H является абелевой группой:

$$x + y = y + x,\ \forall u\ v\ \exists x\ u + x = v;$$

$$\forall u\ \exists\ \theta\ \exists\ (-u) \quad u + \theta = u,\ u + (-u) = \theta.$$

Кроме операций $x + y$ и αx определена операция скалярного произведения элементов H, для которой справедливы аксиомы:

$$\begin{aligned}
&1)\ \ (x, x) \geqslant 0, (x, x) = 0 \Rightarrow x = \theta,\\
&2)\ \ (x, y) = \overline{(x, y)},\\
&3)\ \ (\alpha x, z) = \alpha(x, z),\\
&4)\ \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z).
\end{aligned}$$

Определяется норма элемента $||x|| = \sqrt{(x, x)}$, и расстояние между элементами $\rho(x, y) = ||x - y||$. По определению H должно быть полным метрическим пространством, т. е. в нем каждая фундаментальная последовательность сходится.

Мы будем рассматривать линейные, непрерывные операторы $A : H \to H$. Линейность означает, что $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay$, а непрерывность равносильна выполнению неравенства $||Ax|| \leq c||x||$.

Оператор A вполне непрерывен, если он переводит ограниченное множество в относительно компактное, т. е. замыкание которого компактно.

Если оператор A ограниченный и линейный, то существует сопряженный оператор A^*, определенный равенством

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall x, y \in H.$$

Теорема 1. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, $A : H \to H$. Пусть $\{g_k\}_{k=0,1,\ldots}$ — ортонормированная последовательность элементов, принадлежащих, H, т. е.*

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

если при этом для любого $k = 0, 1, \ldots$

$$Ag_k = a_{k,0}g_0 + a_{k,1}g_1 + \cdots + a_{k,k}g_k; \;\; a_{k,i} \in C \;\forall i \leqslant k, \tag{1.1}$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} a_{kk} = 0$.

Доказательство. Пусть $k > i$. Тогда

$$||Ag_k - Ag_i||^2 = (Ag_k - Ag_i, Ag_k - Ag_i) = (a_{k,k}g_k + \cdots + a_{k,i+1}g_{i+1} + \\ + (a_{k,i} - a_{i,i})g_i + (a_{k,i-1} - a_{i,i-1})g_{i-1} + \cdots + (a_{k,0} - a_{i,0})g_0, \; a_{k,k}g_k + \cdots \\ \cdots + a_{k,i+1}g_{i+1} + (a_{k,i} - a_{i,i})g_i + (a_{k,i-1} - a_{i,i-1})g_{i-1} + \cdots + (a_{k,0} - a_{i,0})g_0) = \\ = a_{k,k}^2 + \cdots \geqslant a_{k,k}^2.$$

Если $\lim\limits_{k\to\infty} a_{kk} \neq 0$, то $\exists \delta > 0$ и последовательность номеров k таких, что $a_{k,k}^2 \geqslant \delta$, т. е. существует последовательность g_{k_m}, $m = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$\|Ag_{k_l} - Ag_{i_p}\| \geqslant \delta \;\forall l, p. \tag{1.2}$$

Последовательность $\{g_k\}$ ограниченная, так как $||g_k|| = 1 \;\forall k$. По определению вполне непрерывного оператора множество $\{Ag_k\}$ относительно компактно т. е. из каждой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность, в частности, существует подпоследовательность множества $\{Ag_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ со свойством: для любого ε имеем $||Ag_{k_l} - Ag_{k_p}|| < \varepsilon \;\forall\, k, l > N_\varepsilon$, что противоречит (1.2), следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{kk} = 0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор и пусть элементы $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots \in H$ обладают свойством:*

$$\begin{cases} Af_0 - \lambda f_0 = \theta, \;\; \textit{где } \lambda \neq 0, \\ Af_1 - \lambda f_1 = f_0, \;\; \textit{т. е. } f_1 \textit{— присоединенный вектор к } f_0, \\ Af_2 - \lambda f_2 = f_1, \;\; \textit{т. е. } f_2 \textit{ — присоединенный вектор к } f_1, \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ Af_n - \lambda f_n = f_{n-1}, \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \end{cases}$$

Тогда $f_0 = \theta$, а значит и $f_1, \ldots, f_n, \ldots = \theta$.

Доказательство. Предположим, что $f_0 \neq \theta$. Докажем, что из этого следует, что система векторов $\{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\} = \{f_i\}$ линейно независима. Допустим обратное, тогда существует вектор с наименьшим номером n, который линейно выражается через предыдущие векторы:

$$f_n = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ \ldots \ + \alpha_{n-1} f_{n-1}.$$

Применим оператор A к f_n:

$$Af_n = \alpha_0 \lambda f_0 + \alpha_1 \lambda f_1 + \alpha_1 f_0 + \ \ldots \ + \alpha_{n-1} \lambda f_{n-1} + \alpha_{n-1} f_{n-2},$$

$$Af_n - \lambda f_n = f_{n-1} = \alpha_1 f_0 + \alpha_2 f_1 + \ \ldots \ + \alpha_{n-1} f_{n-2},$$

следовательно, f_{n-1} линейно выражается через предыдущие, что противоречит выбору n. Таким образом система векторов линейно независима. Применим к системе $\{f_i\}$ процесс ортогонализации Грама — Шмидта для того, чтобы воспользоваться теоремой 1. Согласно этому процессу строим ортогональную систему векторов $g_0, g_1, g_2, \ \ldots$ следующим образом:

$$\begin{array}{l} g_0 = \beta_{00} f_0, \\ g_1 = \beta_{10} f_0 + \beta_{11} f_1, \\ - - - - - - - - - - - - \\ g_n = \beta_{n0} f_0 + \beta_{n1} f_1 + \cdots + \beta_{nn} f_n, \\ - - - - - - - - - - - -, \end{array}$$

Применим оператор A к элементам этой последовательности:

$$Ag_n = \beta_{n0} \lambda f_0 + (\beta_{n1} \lambda f_1 + \beta_{n1} f_0) + \cdots + (\beta_{nn} \lambda f_n + \beta_{nn} f_{n-1}),$$

$$Ag_n - \lambda g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k f_k = (\text{выражаем } f_k \text{ через } g_k,\ f_k = \sum_{i=0}^{k} \theta_i g_i) = \sum_{i=0}^{k} \mu_i g_i.$$

Числа γ_k и μ_i не зависят от λ. По предыдущей теореме μ_n, равное λ, стремится к 0, а значит $\lambda = 0$. Получили противоречие, следовательно, $f_0 = \theta$. $\square$

Замечание 1. Теорему 2 можно интерпретировать так: вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве не имеет бесконечной системы присоединенных векторов, отвечающих собственному вектору с ненулевым собственным числом.

Теорема 3. *Для заданного положительного числа ρ всякий вполне непрерывный оператор A может иметь только конечное число линейно независимых собственных векторов, принадлежащих собственным значениям λ, для которых $|\lambda| > \rho$.*

.

Доказательство ведем от противного. Пусть $\{f_i\}$ — последовательность собственных векторов оператора A, причем $Af_n = \lambda_n f_n$, $|\lambda_n| > \rho$, $n = 1, 2, \ldots$ Предположим, что система векторов $\{f_i\}$ линейно независима и применим к ней процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Получаем последовательность $g_0, g_1, g_2, \ldots$ такую, что:

$$\begin{array}{l} g_0 = a_{00} f_0, \\ g_1 = a_{10} f_0 + a_{11} f_1, \\ g_n = a_{n0} f_0 + \ldots + \alpha_{nn} f_n, \\ - - - - - - - - - - - - -, \end{array}$$

Применим оператор A к обеим частям полученных равенств:

$$Ag_n = a_{n0}\lambda_0 f_0 + a_{n1}\lambda_1 f_1 + \cdots + a_{nn}\lambda_n f_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Имеем далее

$$Ag_n - \lambda_n g_n = a_{n0}(\lambda_0 - \lambda_n) f_0 + a_{n1}(\lambda_1 - \lambda_n) f_1 + \ldots$$

$$\cdots + a_{n,n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) f_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{nk} g_k.$$

Тогда по теореме 1 получаем, что $\lambda_n \to 0$, а это противоречит предположению о том, что $|\lambda_n| > \rho$. Таким образом, обсуждаемой бесконечной системы собственных векторов не существует. $\square$

Следствие 1. *Любому ненулевому собственному числу вполне непрерывного оператора отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных векторов.*

Теорема 4. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда существует такая константа $c > 0$, зависящая только от оператора A и λ, что всякий раз, когда уравнение*

$$Af - \lambda f = h \tag{1.3}$$

разрешимо, хотя бы для одного его решения, выполняется неравенство

$$\|f\| \leqslant c||h||. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $h \in H$ таково, что (1.3) разрешимо. Множество решений уравнения (1.3), как нетрудно видеть, выпукло и вследствие непрерывности оператора A замкнуто. Поэтому существует решение, обладающее наименьшей нормой. Доказательство этого факта совпадает с первой частью доказательства теоремы 1, § 5, гл. 2.

Далее, предположим, что вопреки утверждению теоремы существуют последовательность элементов $h_n \in H$ и последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n \ldots$ решений уравнения (1.3) такие, что для них выполняются равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||f_n||}{||h_n||} = \infty, \quad Af_n - \lambda f_n = h_n. \tag{1.5}$$

Предположим, что каждое f_n — решение с минимальной нормой для соответствующего h_n, и поделим уравнение (1.5) на $||f_n||$. Получим

$$A\tilde{f}_n - \lambda\tilde{f}_n = \tilde{h}_n, \tag{1.6}$$

где $\tilde{f}_n = f_n/||f_n||$, $\tilde{h}_n = h_n/||f_n||$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} ||\tilde{h}_n|| = 0$. Поскольку $||\tilde{f}_n|| = 1$, то $\left\{A\tilde{f}_n\right\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Не теряя общности, предположим, что сама последовательность $A\tilde{f}_1, A\tilde{f}_2, \ldots$ сходится. Тогда из (1.6) следует, что последовательность $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_n, \ldots$ тоже сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n = g$, имеем $Ag - \lambda g = \theta$. С другой стороны имеем, поскольку $||\tilde{f}_n|| = 1$, что и $||g|| = 1$. Элементы $\tilde{f}_n + \beta g$ — тоже решение уравнения (1.6). Выбором β можем норму этого решения сделать меньше $||\tilde{f}_n||$, получим противоречие. Другое рассуждение: $\tilde{f}_n - g$ — решение уравнения (1.6), и вследствие минимальности нормы $\tilde{f}_n$ среди всех решений $||\tilde{f}_n - g|| \geqslant 1$, что противоречит сходимости $\tilde{f}_n - g$ к θ. $\square$

Теорема 5. *Пусть A — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Если A имеет собственное число $\lambda \neq 0$, то $\bar{\lambda}$ есть собственное число для оператора A^*.*

Доказательство. Доказательство проводится в два этапа. Для оператора $A - \lambda I$ рассмотрим область значений

$$R(A - \lambda I) = \{y : \exists x \in H \;\&\; Ax - \lambda x = y\} \equiv J.$$

На первом этапе докажем, что J — замкнутое подпространство пространства H. Так, если $y_1, y_2 \in J$, то $\alpha y_1 + \beta y_2 \in J$ и, следовательно, J — подпространство. Покажем его замкнутость. Пусть $y_n \in J$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Нужно показать, что $y \in J$. Существуют $x_n : Ax_n - \lambda x_n = y_n$, и согласно теореме 4 можем считать, что $||x_n|| \leqslant c||y_n||$. Так как $\{y_n\}$ — сходящаяся последовательность, то $\{||y_n||\}$ — ограниченное множество чисел, следовательно, и множество $\{x_n\}$ ограничено. Оператор A вполне непрерывный, и потому $\{Ax_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Примем, что сама $\{Ax_n\}$ сходится, значит, и $\{x_n\}$ сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$. Переходя к пределу в равенстве $Ax_n - \lambda x_n = y_n$ получим $A\tilde{x} - \lambda\tilde{x} = y$, что означает $y \in J$ и, следовательно, J замкнуто.

Вторая часть доказательства. Так как J замкнуто, то у него существует ортогональное дополнение: $H = J \oplus J_1$. Каждый элемент $h \in H$ единственным образом представим в виде $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in J$, $h_2 \in J_1$ при этом $(h_1, h_2) = 0$. Рассмотрим скалярное произведение:

$$(Af - \lambda f,\ g) = 0 = (f,\ A^* g - \bar{\lambda} g),$$

где $f \in H$, $g \in J_1$. Следовательно, любой элемент g из ортогонального дополнения к $R(A - \lambda I)$ является собственным вектором оператора A^* с собственным числом $\bar{\lambda}$. $\square$

§ 2. Три теоремы Фредгольма

Рассматривается вполне непрерывный оператор A в гильбертовом пространстве: $A : H \to H$.

Теорема 1 (Альтернатива Фредгольма). *Если $\lambda \neq 0$, то или уравнение $Af - \lambda f = \theta$ имеет нетривиальное решение, или уравнение $Af - \lambda f = h$ разрешимо при любой правой части.*

Теорема есть частный случай более общей теоремы 2 (если учесть теорему 5,§ 1).

Теорема 2. *Уравнение $Af - \lambda f = h$ при $\lambda \neq 0$ разрешимо тогда и только тогда, когда h ортогонально множеству всех решений уравнения $A^* f - \bar{\lambda} f = \theta$.*

Доказательство следует из доказательства теоремы 5, § 1. Именно, было показано, что $H = R(A - \lambda I) \oplus N(A^* - \bar{\lambda} I)$, где $N(A^* - \bar{\lambda} I)$ — множество всех решений уравнения $(A^* - \bar{\lambda} I) f = \theta$, или в принятых там обозначениях $H = J \oplus J_1$. То, что $x \in J_1$, означает по доказательству, что это собственный вектор, отвечающий собственному значению $\bar{\lambda}$: $(A^* - \bar{\lambda} J)x = 0 \sim x \in N(A^* - \bar{\lambda} I)$, а само ортогональное разложение означает, что элемент h из $R(A - \lambda I)$ характеризуется тем, что он ортогонален всем элементам из $N(A^* - \bar{\lambda} I)$. $\square$

Теорема 3. *Размерности пространств решений уравнений $Af - \lambda f = \theta$ и $A^* f - \bar{\lambda} f = \theta$ совпадают.*

Доказательство. Нужно показать , что

$$\dim N(A - \lambda I) = \dim N(A^* - \bar{\lambda} I).$$

В доказательстве выделим три этапа.

Первый этап. Докажем, что

$$\dim N(A-\lambda I) \geqslant \dim\left\{(R(A-\lambda I))^{\perp}\right\},$$

где через $M^{\perp}$ обозначено ортогональное дополнение к замкнутому подпространству M.

$$M^{\perp} = H \ominus M \sim H = M \oplus M^{\perp}, (x,y)=0, x\in M, y\in M^{\perp}.$$

В теореме 5, § 1 было доказано, что $R(A-\lambda I)$ — множество значений оператора $A-\lambda I$ — является замкнутым, поэтому имеет смысл говорить об ортогональном разложении, и $(R(A-\lambda I))^{\perp}$ является замкнутым подпространством. Предположим, что

$$\dim N(A-\lambda I) < \dim(R(A-I))^{\perp}.$$

Пусть K — линейный, ограниченный оператор, который отображает взаимнооднозначно $N(A-I)$ в пространство $(R(A-I))^{\perp}$. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $N(A-I)$, а $g_1, \ldots, g_k, g_{k+1} \ldots$ — базис в $(R(A-I))^{\perp}$. Оператор K можно построить как отображение:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \to \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i.$$

Продолжим оператор K на все гильбертово пространство, считая, что $Kx=\theta,\ x\in (N(A-I))^{\perp}$. Оператор K переводит ограниченное множество в ограниченное в образе конечномерного пространства. Следовательно, оператор K вполне непрерывен, так как каждое ограниченное множество в конечномерном пространстве относительно компактно.

Второй этап. Для упрощения записи формул возьмем $\lambda=1$. Рассмотрим оператор $A_1 = A+K$, где A — исходный оператор, а K построенный выше. Докажем, что множество нулей оператора A_1 состоит из одного нулевого элемента, т. е. $N(A_1-I)=\theta$. Пусть $x\in N(A_1-I) \ \sim\ A_1x - x = \theta \ \sim (A-I)x + Kx = \theta$, множество значений оператора $A-I$ есть $R(A-I)$, а $Kx \in (R(A-I))^{\perp}$. Так как $H = [R(A-I)] \oplus [(R(A-I))^{\perp}]$, и любой элемент представим в виде суммы двух элементов, принадлежащих $R(A-I)$, $(R(A-I))^{\perp}$ соответственно, единственным образом, в частности, $\theta+\theta=\theta$, то

$$\begin{cases} (A-I)x=\theta, \\ Kx=\theta. \end{cases}$$

K взаимнооднозначный и линейный оператор, а потому $x=\theta$.

Третий этап. К уравнению $A_1 f - f = h$ применим теорему 2 (Фредгольма) из которой следует, что это уравнение разрешимо при любой правой части. Выберем ненулевое h так, чтобы

$$h \in (R(A-I))^{\perp} \ \& \ h \perp K(N(A-I)),$$

и рассмотрим уравнение $A_1 f - f = h$. Итак, существует такое f, что

$$(A-I)f + Kf = h, \ (A-I)f \in R(A-I), \ Kf \in (R(A-I))^{\perp},$$

а $h \in (R(A-I))^{\perp}$. В силу единственности разложения по взаимно ортогональным подпространствам $(A-I)f = \theta \ \& \ Kf = h$. Получили противоречие, так как из $Kf = h$ следует, что $h \in K(N(A-I))$, а с другой стороны $h \perp K(N(A-I))$. Противоречие возникло из предположения, что

$$\dim N(A-\lambda I) < \dim \left\{(R(A-\lambda I))^{\perp}\right\}.$$

Значит на самом деле

$$\dim N(A-\lambda I) \geqslant \dim \left\{(R(A-\lambda I))^{\perp}\right\}.$$

Ранее было замечено, что

$$(R(A-\lambda I))^{\perp} = N(A^* - \bar{\lambda} I),$$

поэтому можем записать, что $\dim N(A-\lambda I) \geqslant \dim N(A^*-\bar{\lambda} I)$. Противоположное неравенство получается, если мы проведем те же самые рассуждения, но поменяв местами A и A^*, а также λ и $\bar{\lambda}$.

Получим

$$\dim N(A^* - \bar{\lambda} I) \geqslant \dim N(A-\lambda I). \ \square$$

Глава 5
Исследование граничных интегральных уравнений.

§ 1. Разрешимость граничных интегральных уравнений

Везде в этом параграфе предполагаем, что $S \in C^{1,\alpha}$ (S — поверхность Ляпунова).

Мы получили, что:

1. внутренняя и внешняя задача Дирихле представляются интегральными уравнениями:
$$\chi^{\pm}(x) \pm T\chi^{\pm} = 2\varphi^{\pm}(x),\ x \in S,\ \text{где}$$
$$N = 2W_{\chi^{\pm}} = 2\int\limits_S \chi^{\pm}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x}E_n(x,\xi)ds_\xi;$$
2. внутренняя и внешняя задача Неймана представляется интегральными уравнениями:
$$\rho^{\pm}(x) \mp T^*\rho^{\pm} = \mp 2\psi^{\pm},\ x \in S,\ \text{где}$$
$$T^*\rho^{\pm} = 2\frac{\partial}{\partial n_x}V\rho^{\pm} = 2\int\limits_S \rho^{\pm}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x}E_n(x,\xi)ds_\xi.$$

При сделанном предположении о $\partial\Omega$ оператор T — оператор со слабой особенностью. Поэтому по доказанному ранее он переводит пространство $L_2(S)$ в $L_2(S)$ и является вполне непрерывным. Нетрудно проверить, что оператор T^* есть сопряженный к T в гильбертовом пространстве $H \equiv L_2(S)$.

Если поверхность $S = \partial\Omega$ только липшицева, то операторы T и T^* этой главы будут сингулярными операторами, теория которых излагается в следующей главе.

Первыми исследуем внутреннюю задачу Дирихле и внешнюю задачу Неймана, предполагая $n \geqslant 3$ (n — размерность переменных x, ξ):
$$\chi^+(x) + T\chi^+ = 2\varphi^+(x),\ x \in S, \tag{1.1}$$
$$\rho^-(x) + T^*\rho^- = 2\psi^-(x),\ x \in S. \tag{1.2}$$

Воспользуемся первой или второй теоремой Фредгольма. Для этого рассмотрим уравнение:

$$\rho^-(x) + T^*\rho^- = 0. \tag{1.3}$$

По второй теореме Фредгольма уравнение (1.1) разрешимо для функции φ^+, ортогональной любому решению уравнения (1.3). Функция $\rho^- \equiv 0$ есть тривиальное решение для (1.3). Покажем, что других решений нет.

Предположим, что функция $\varphi^\pm$, $\psi^\pm$ непрерывны, отсюда (см. § 3 гл. 3) следует, что решения уравнений (1.1) и (1.2) непрерывны.

Пусть $\rho_0^-(x)$ — некоторое решение уравнения (1.3). Построим потенциал простого слоя с этой плотностью

$$\left(V\rho_0^-\right)(x) = \int\limits_S \rho_0^-(\xi)E_n(x,\xi)dS_\xi,\ n \geq 3.$$

Потенциал простого слоя — гармоническая функция, как в Ω^-, так и в Ω^+. Для предельных значений нормальной производной имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n^-}\left(V\rho_0^-\right)(x) = \frac{1}{2}\rho_0^-(x) + \frac{\partial}{\partial n_x}\left(V\rho_0^-\right)(x) = 0.$$

Последнее равенство выполняется в силу (1.3).

Итак, функция $U(x) \equiv \left(V\rho_0^-\right)(x)$ удовлетворяет равенствам:

$$\begin{cases} \Delta U = 0,\ x \in \Omega^-, \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} U(x) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $U(x)$ — решение задачи Неймана для Ω^-.

Из курса уравнений математической физики мы знаем, что решение внешней задачи Неймана единственно. Поэтому, $U(x) \equiv 0$ в Ω^-. Привлекаем то свойство, что $U(x)$ непрерывна во всем пространстве, и получаем, что в Ω^+ функция U является решением следующей задачи Дирихле

$$\begin{cases} \triangle U = 0,\ x \in \Omega^+, \\ U(x) = 0,\ x \in S. \end{cases}$$

Воспользовавшись тем, что решение внутренней задачи Дирихле единственно, получаем, что $U(x) \equiv 0$ в Ω^+. Это влечёт за собой, что $\frac{\partial U}{\partial n^+}(x) \equiv 0,\ x \in S$. По доказанному ранее свойству потенциалов простого слоя имеем:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n^-} - \frac{\partial U}{\partial n^+}\right)(x) = \rho_0^-(x),\ x \in S.$$

Но обе производные, как мы установили, тождественно равны нулю, поэтому $\rho_0^-(x) = 0$. Таким образом, уравнение (1.3) имеет только тривиальное решение. Отсюда в силу теорем Фредгольма следует

Теорема 1. *При сделанных предположениях (Ω — область, ограниченная поверхностью класса $C^{1,\alpha}$, $\varphi^\pm$, $\psi^\pm$ — непрерывные функции, $n \geqslant 3$), внутренняя задача Дирихле всегда разрешима. При этом решение представимо в виде потенциала двойного слоя с плотностью χ из пространства $L_2(S)$. Внешняя задача Неймана тоже всегда разрешима, при этом решение представимо в виде потенциала простого слоя с плотностью ρ из пространства $L_2(S)$.*

Рассмотрим теперь внешнюю задачу Дирихле и внутреннюю задачу Неймана (по-прежнему, полагая $n \geqslant 3$):

$$\chi^-(x) - T\chi^- = -2\varphi^-(x),\ x \in S, \tag{1.4}$$

$$\rho^+(x) - T^*\rho^+ = -2\psi^+(x),\ x \in S. \tag{1.5}$$

Сначала исследуем соответствующие однородные уравнения:

$$\chi^-(x) - T\chi^- = 0, \tag{1.6}$$

$$\rho^+(x) - T^*\rho^+ = 0. \tag{1.7}$$

По теореме Фредгольма, пространства решений уравнений (1.6), (1.7) имеют одинаковую конечную размерность. Уравнение (1.6) имеет нетривиальное решение. Действительно возмем $\chi_0^- \equiv 1$. Тогда

$$T\chi_0^- = 2\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_\xi} E_n(x,\xi)\,dS_\xi = 2I(x),\ E_n = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}(x,\xi).$$

Как мы установили, при $n = 3$ интеграл $I(x)$ вычисляется через телесный угол, под которым из точки x видна поверхность S, и в общем случае равен

$$I(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \Omega^+, \\ \dfrac{1}{2},\ x \in S, \\ 0,\ x \in \Omega^-. \end{cases}$$

Для точек $x \in S$ имеем $T\chi_0^- = 1$. Поэтому $\chi_0^- \equiv 1$ является решением уравнения (1.6). Уравнение (1.7) тоже имеет нетривиальное решение вследствие упомянутой теоремы Фредгольма.

Лемма 1. *Каждое из уравнений* (1.6), (1.7) *имеет одномерное пространство решений, т. е. двух линейно независимых решений быть не может.*

Доказательство. Докажем это утверждение для уравнения (1.7). Допустим, что ρ_1^+, ρ_2^+ — нетривиальные решения уравнения (1.7). Построим функции $U_i(x) = V\rho_i^+$, $i = 1, 2$. Сразу заметим, что U_i — гармоническая функция в Ω^+, Ω^-. В силу свойства потенциала простого слоя

$$\frac{\partial U_i(x)}{\partial n_+} = -\frac{1}{2}\rho_i^+(x) + \frac{\partial}{\partial n}U_i(x), \quad x \in S,$$

и поскольку ρ_i^+ — решение (1.7), то выполняется равенство

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_+}(x) = 0, \ x \in S. \tag{1.8}$$

Получается, что U_i — решение следующей задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta U_i(x) = 0, \ x \in \Omega^+, \\ \frac{\partial U_i}{\partial n}(x) = 0, \ x \in S. \end{cases}$$

Из курса УМФ известно, что решение внутренней задачи Неймана единственно с точностью до прибавления постоянной, а потому

$$U_i \equiv C_i \text{ в } \Omega^+. \tag{1.9}$$

Из обощенной формулы Грина (1.8), § 3, гл. 1, следует общее предложение: если потенциал простого слоя $V_\rho(x)$ удовлетворяет условиям: $\frac{\partial}{\partial n_+}(V_\rho) = 0, \ x \in S$ и $V\rho = 0$ на S, то $V\rho \equiv 0$ в Ω^+.

Составим новую функцию $U(x) = C_2U_1(x) - C_1U_2(x)$, она обладает свойствами:

$$\frac{\partial U}{\partial n_+}(x) = 0, \ x \in S \text{ по } (1.8),$$

$$U(x) = 0, \ x \in S \text{ по } (1.9).$$

Из предложения, сформулированного выше, следует, что $U(x) \equiv 0$ в $\Omega^+ \sim C_2U_1 - C_1U_2 \equiv 0$, то есть U_1, U_2 линейно зависимы. Лемма доказана.

Следствие 1. *Любое решение уравнения* (1.6) *имеет вид*

$$\chi^- \equiv C = \text{const}.$$

Опишем класс решений уравнения (1.7). Для этого выбираем решение $\rho_0^+(x)$ уравнения (1.7) со свойством $\int\limits_S \rho_0^+(x)dS_x = 1$. Это решение называется плотностью потенциала Робена. Выше мы доказали, что потенциал простого слоя $V\rho_0^+ = C = \text{const}\ \forall x\ \in \Omega^+$. Эта постоянная C называется *емкостью области* Ω^+. Из наших рассуждений следует (мы сохраняем предположения: $S \in C^{1,\alpha}$, ψ^+, ψ^- непрерывны)

Теорема 2. *Интегральное уравнение* (1.5), *соответствующее внутренней задаче Неймана, разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_S \psi^+(x)dS_x = 0. \tag{1.10}$$

Из этого результата вытекает, что внутренняя задача Неймана разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.10). *При выполнении условия* (1.10) *решение представимо в виде потенциала простого слоя с плотностью из* L_2.

Интегральное уравнение (1.4), *соответствующее внешней задаче Дирихле, разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_S \rho_0^+(x)\varphi^-(x)dS_x = 0, \tag{1.11}$$

где ρ_0^+ *- плотность потенциала Робена. При выполнении условия* (1.11) *внешняя задача Дирихле разрешима и ее решение представимо в виде потенциала двойного слоя.*

Замечание 1. Из теоремы 2 не следует, что если условие (1.11) не выполняется, то внешняя дифференциальная задача Дирихле не разрешима. Чтобы исследовать этот случай, получим *модифицированное интегральное уравнение* для внешней задачи Дирихле при $n \geqslant 3$.

Ищем решение внешней задачи Дирихле в виде

$$U(x) = \left(W\chi^-\right)(x) + \frac{1}{|x|^{n-2}}\int\limits_S \chi^-(\xi)ds_\xi, \quad x \in \Omega^-. \tag{1.12}$$

Без потери общности в результатах можем полагать $0 \notin \Omega$ Поскольку $\Delta W = 0$ и $\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}} = 0$, то $U(x)$ — гармоническая функция со свойством: $U = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$ при $x \to \infty$, тогда как потенциал двойного слоя на бесконечности убывает быстрее:

$$(W\chi)(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right),\ x \to \infty.$$

Устремим $x \to x_0$ в равенстве (1.12), полагая $x \in \Omega^-,\ x_0 \in S = \partial\Omega$, получим вследствие свойств потенциала двойного слоя:

$$\varphi^-(x_0) = -\frac{1}{2}\chi^-(x_0) + \left(W\chi^-\right)(x_0) + \frac{1}{|x_0|^{n-2}}\int\limits_S \chi^-(\xi)dS_\xi,$$

или

$$\chi^-(x) - T_1\chi^-(x) = -2\varphi^-(x), x \in S, \tag{1.13}$$

где

$$T_1\chi^- = \int\limits_S 2\chi^-(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n_\xi}E_n(x,\xi) + \frac{1}{|x|^{n-2}}\right]dS_\xi.$$

Здесь T_1 — интегральный оператор со слабой особенностью, поэтому T_1 — вполне непрерывный оператор, действующий из $L_2(S)$ в $L_2(S)$.

Для исследования уравнения (1.13) применим альтернативу Фредгольма: или уравнение (1.13) разрешимо при любой правой части, или соответствующее однородное уравнение

$$\chi^-(x) - T_1\chi^-(x) = 0 \tag{1.14}$$

имеет нетривиальное решение.

Пусть $\chi_0^-(x)$ — решение (1.14), при этом $\chi_0^-(x) \in L_2(S)$. По свойствам оператора T_1 отсюда следует, что $\chi_0^-(x) \in C(S)$.

Пусть $U_0^-(x)$ получается по формуле (1.12) из $\chi_0^-(x)$. Если проследить за выводом (1.13), имеем, что $U_0^-(x) = 0$ на S.

Заметим, что $\Delta U_0^-(x) = 0$ в Ω^- и $U_0^- = o(1),\ x \to \infty$. Следовательно, U_0^- — решение внешней задачи Дирихле с нулевым граничным условием. Из единственности решения этой задачи вытекает, что $U_0^-(x) \equiv 0$ в Ω^-.

Получаем, что

$$U_0^- = \int\limits_S \chi_0^-(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}E_n(x,\xi)dS_\xi + \frac{1}{|x|^{n-2}}\int\limits_S \chi_0^-(\xi)ds_\xi = 0$$

для всех $x \in \Omega^-$. Следовательно, для всех $x \in \Omega^-$ имеем:

$$\int\limits_S \chi_0^-(\xi)dS_\xi = -|x|^{n-2}\left(W\chi_0^-\right)(x).$$

Устремив в этом равенстве $x \to \infty$, получим:

$$\int\limits_S \chi_0^-(\xi) dS_\xi = 0, \tag{1.15}$$

поскольку W имеет порядок на бесконечность $O\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right)$. Следовательно,

$$U_0^-(x) = W\chi_0^-, \text{ или } \chi_0^-(x) - T\chi_0^-(x) = 0. \tag{1.16}$$

Учитывая (1.15) и то, что решение уравнения (1.16) является только постоянная, получим, что $\chi_0^- \equiv 0$. Поэтому уравнение (1.14) имеет лишь тривиальное решение. Так что уравнение (1.13) разрешимо при любой правой части.

Теорема 3. *Если $n \geqslant 3$, то внешняя задача Дирихле всегда разрешима, при этом её решение представимо в форме* (1.12).

Исследуем **разрешимость задач Неймана и Дирихле при** $n = 2$.

Сначала рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле и внешнюю задачу Неймана:

$$\chi^+(x) + T\chi^+ = 2\varphi^+(x), \ x \in S, \tag{1.17}$$

$$\rho^-(x) + T^*\rho^- = 2\psi^-(x), \ x \in S. \tag{1.18}$$

Результаты о разрешимости этих уравнений при $n \geqslant 3$ справедливы для $n = 2$. Доказательство проводится так же, как в предыдущем случае. Отличие состоит в том месте, когда $U(x) = V\rho^-$ брали решением задачи Неймана. При $n \geq 3$ $U(x) = V\rho^- \to 0, \ x \to \infty$, а когда $n = 2$, в общем случае имеем:

$$U(x) = \left(V\rho^-\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho^-(\xi) \ln r(x,\xi) dS_\xi \to \infty \text{ при } x \to \infty.$$

Поэтому утверждать, что $U(x)$ — решение задачи Неймана при $n = 2$, мы не можем, так как, возможно, нарушается условие поведения на бесконечности. Пусть дополнительно выполняется условие

$$\int\limits_S \psi^-(\xi) dS_\xi = 0. \tag{1.19}$$

Проинтегрируем (1.18) по поверхности S:

$$\int\limits_S \rho^-(x) dS_x + 2\int\limits_S dS_x \int\limits_S \rho^-(\xi) \frac{\partial}{\partial n_x}\left[\frac{1}{2\pi}\ln r(x,\xi)\right] dS_\xi =$$

$$= -2\int\limits_S \psi^- dS_x = 0.$$

В повторном интеграле поменяем порядки интегрирования:

$$\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_x}\left[\frac{1}{2\pi}\ln r(x,\xi)\right] dS_x = W(1)(\xi) = I(\xi) = 1,$$

так как ξ лежит внутри области (I — интеграл Гаусса, исследованный в первой главе). Получим:

$$\int\limits_S \rho^-(x) dS_x = 0. \tag{1.20}$$

Условие (1.20) позволяет нам потенциал простого слоя записать в виде:

$$\left(V\rho^-\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho^-(\xi)\ln r(x,\xi) dS_\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho^-(\xi)\ln\frac{r(x,\xi)}{|x|} dS_\xi.$$

Теперь получаем, что $\ln(r(x,\xi)/|x|) \to 0$ при $x \to \infty$ равномерно относительно $\xi \in S$, а потому потенциал $\left(V\rho^-\right)(x) = O(1)$, т. е. ограничен. Далее рассуждаем как при $n = 3$.

Из курса УМФ известно, что условие (1.20) необходимо для разрешимости. Итак, имеет место

Теорема 4. *Внутрення задача Дирихле при $n = 2$ всегда разрешима и решение представимо в виде потенциала двойного слоя. Для разрешимости внешней задачи Неймана при $n = 2$ н необходимо и достаточно, чтобы для граничного значения нормальной производной выполнялось условие* (1.19). *При выполнении условия* (1.19), *решение внешней задачи Неймана представимо в виде потенциала простого слоя.*

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле и внутреннюю задачу Неймана:

$$\chi^-(x) - \left(T\chi^-\right)(x) = -2\varphi^-(x), \tag{1.21}$$

$$\rho^+(x) - \left(T^*\rho^+\right)(x) = 2\psi^+(x), \tag{1.22}$$

Результаты о разрешимости соответствующих дифференциальных краевых задач остаются теми же самыми. Только в одном месте, где доказывается линейная зависимость двух нетривиальных решений $\rho_1^+(x)$, $\rho_2^+(x)$ уравнения

$$\rho^+(x) - T^*\rho^+(x) = 0, \tag{1.23}$$

нужно внести изменения.

Изменения таковы. Пусть $U_i(x) = \left(V\rho_i^+\right)(x),\ i = 1, 2,$ — функции, соответствующие нетривиальным решениям ρ_i^+. Рассмотрим интегралы

$$I_i = \int\limits_S \rho_i^+(x)dS_x,\ i = 1, 2.$$

Предположим, что $I_i = 0$. Мы видели выше, что это влечет убывание на бесконечности: $\left(V\rho_i^+\right)(x) \to 0$ при $x \to \infty$ $(n = 2)$. Поэтому функция $U_i(x) = \left(V\rho_i^+\right)(x)$ является гармонической в Ω^-. Затем, так как она удовлетворяет уравнению (1.23), то $\partial U_i/\partial n^+ = 0$ на S. Поэтому U_i есть решение внутренней задачи Неймана с однородным граничным условием. Отсюда следует, что $U_i = \mathrm{const},\ x \in \Omega^+$ (см. курс УМФ).

Рассмотрим теперь U_i в Ω^-. В силу непрерывности на всем пространстве функции U_i и из единственности решения внешней задачи Дирихле получаем, что $U_i(x) = \mathrm{const},\ x \in \Omega^-$, а поэтому $U_i(x) = 0$, так как на бесконечности она равна нулю. Получили $U_i(x) = \left(V\rho_i^+\right)(x) \equiv 0$ на E_2. Применяя свойства потенциала простого слоя, легко показать, что $\rho_i^+(x) = \partial/\partial n^- U_i - \partial/\partial n^+ U_i \equiv 0$.

Получили противоречие с тем, что ρ_i^+ — нетривиальное решение. Поэтому

$$\int\limits_S \rho_i(x)dS_x \neq 0,\ i = 1, 2.$$

Попутно мы доказали такое общее утверждение:

Если $\int\limits_S \rho(\xi)dS_\xi = 0$ и $\frac{\partial}{\partial n^+}\left(V\rho\right)(x) \equiv 0,\ x \in S$ то $\rho \equiv 0$ на S.

Возьмем $\rho(x) = \rho_1^+(x)\int\limits_S \rho_2^+(\xi)dS_\xi - \rho_2^+(x)\int\limits_S \rho_1^+(\xi)dS_\xi$. Выполняются условия общего утверждения:

1) $\int\limits_S \rho(x)dS_x = 0,$

2) $\frac{\partial}{\partial n^+}\left(V\rho\right)(x) \equiv 0,\ x \in S.$

Отсюда следует, что $\rho(x) = 0$ и $\rho_1^+(x),\ \rho_2^+(x)$ линейно зависимы. В остальном доказательство протекает так же, как при $n \geqslant 3$.

§ 2. Спектральные свойства граничных операторов

Для оператора A в гильбертовом пространстве H рассмотрим следующую задачу: найти $\lambda \in R^1$ и $x \neq \theta : Ax = \lambda x$. Число λ называется собственным числом оператора, а ненулевой элемент $x \in H$ —

собственным вектором. Совокупность собственных чисел будем называть спектром вполне непрерывного оператора. Иногда вводят характеристическое число, которое есть обратное к собственному числу, то есть числа $\lambda : x = \lambda A x, x \neq \theta$.

Обсудим свойства характеристических чисел операторов T и T^*, введенных в предыдущем параграфе.

1. Если λ — характеристическое число оператора T, то $\bar{\lambda}$ — характеристическое число оператора T^*.

2. $\lambda = 1$ — характеристическое число оператора T.

Доказательство: $x - Tx = \theta$ — определяющее x уравнение при $\lambda = 1$. Как показано в предыдущем параграфе, у него существует решение $x \equiv 1$.

3. $\lambda = -1$ не является характеристическим числом.

Доказательство: Предположим противное. Тогда получим для $\rho^-(s) \not\equiv 0$

$$\rho^-(s) + (T^* \rho^-)(s) = \theta.$$

Однако, исследуя внутреннюю задачу Дирихле и внешнюю задачу Неймана, мы заметили, что соответствующие однородные уравнения имеют только тривиальное решение. Полученное противоречие говорит о том, что -1 не является характеристическим числом.

Теорема 1. *Если λ — характеристическое число оператора T, то:*

1) λ — *вещественное число,*

2) $|\lambda| \geqslant 1$.

Доказательство. Построим потенциал двойного слоя $W\chi$ и потенциал простого слоя $V\rho$. Для них имеем:

$$\begin{aligned} &(1-\lambda) W\chi(x^+) - (1+\lambda) W\chi(x^-) = (\chi - \lambda T\chi)(x), \quad x \in S, \\ &(1-\bar{\lambda}) \frac{\partial V\rho}{\partial n^-}(x) - (1+\bar{\lambda}) \frac{\partial V\rho}{\partial n^+}(s) = (\rho - \bar{\lambda} T^* \rho)(x), \quad x \in S. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Все описанные выше формулы следуют из свойств потенциалов, доказанных нами ранее (формулы (3.1), (3.2), (3.8), (3.8), § 3, гл. 1):

$$W\chi(x^\pm) = W\chi(x) \pm \tfrac{1}{2}\chi(x),$$
$$\tfrac{\partial V\rho}{\partial n^\pm}(x) = \mp \tfrac{1}{2}\rho(x) + \tfrac{\partial V\rho}{\partial n}(x), \; x \in S.$$

Предположим, что λ — комплексное характеристическое число, (мы запишем его в виде $\lambda = \alpha + i\beta$), которому соответствует собственный вектор $\rho(s) = \rho_1(s) + i\rho_2(s)$; $\bar{\lambda}$ — характеристическое число для оператора T^*. Подставим в равенства (2.1) вместо λ и ρ их выражения через α, β, ρ_1 и ρ_2, получим

$$(1-\alpha+i\beta)\left(\frac{\partial V\rho_1}{\partial n^-}+\frac{\partial V\rho_2}{\partial n^-}\right)-(1+\alpha-i\beta)\left(\frac{\partial V\rho_1}{\partial n^+}+\frac{\partial V\rho_2}{\partial n^+}\right)=0.$$

Соберем отдельно мнимую и действительную части равенства:

$$(1-\alpha)\frac{\partial V\rho_1}{\partial n^-}-\beta\frac{\partial V\rho_2}{\partial n^-}-(1+\alpha)\frac{\partial V\rho_1}{\partial n^+}-\beta\frac{\partial V\rho_2}{\partial n^+}=0, \tag{2.2}$$

$$(1-\alpha)\frac{\partial V\rho_2}{\partial n^-}+\beta\frac{\partial V\rho_1}{\partial n^-}-(1+\alpha)\frac{\partial V\rho_2}{\partial n^+}+\beta\frac{\partial V\rho_1}{\partial n^+}=0. \tag{2.3}$$

Умножим (2.3) на $V\rho_1$, а (2.2) — на $V\rho_2$, после сложения полученных равенств получим:

$$\begin{gathered}(1-\alpha)\left(V\rho_1\tfrac{\partial V\rho_1}{\partial n^-}+V\rho_2\tfrac{\partial V\rho_2}{\partial n^-}\right)-\beta\left(V\rho_1\tfrac{\partial V\rho_2}{\partial n^-}-V\rho_2\tfrac{\partial V\rho_1}{\partial n^-}\right)-\\ -(1-\alpha)\left(V\rho_1\tfrac{\partial V\rho_1}{\partial n^+}+V\rho_2\tfrac{\partial V\rho_2}{\partial n^+}\right)-\beta\left(V\rho_1\tfrac{\partial V\rho_2}{\partial n^+}-V\rho_2\tfrac{\partial V\rho_1}{\partial n^+}\right)=0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Используем формулу Грина (1.5), § 1, гл. 1:

$$\int\limits_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)dx=\int\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

где n — внешняя нормаль, $\partial u/\partial n$ и $\partial v/\partial n$ — правильные нормальные производные, а также соотношение

$$\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\limits_\Omega(\nabla u)^2dx, \tag{2.5}$$

которое справедливо для гармонических функций и следует из формулы Грина (1.4), § 1, гл. 1.

Функции $V\rho_1$ и $V\rho_2$ есть потенциалы простого слоя. Известно, что они являются гармоническими функциями. В силу (2.5) для них имеет место равенство

$$\int\limits_S V\rho_i\frac{\partial V\rho_i}{\partial n^\pm}ds=\pm\int\limits_{\Omega_\pm}(\nabla V\rho_i)^2dx,$$

Примем следующие обозначения:

$$I^i_\pm=\int\limits_{\Omega_\pm}(\nabla V\rho_i)^2dx.$$

Проинтегрируем (2.4) по S, получим:

$$(1-\alpha)\left(I_-^1 + I_-^2\right) + (1+\alpha)\left(I_+^1 + I_+^2\right) = 0. \tag{2.6}$$

Умножая (2.2) на $V\rho_2$, в (2.3) на $V\rho_1$ и, действуя аналогично вышеизложенному, можем получить следующее:

$$\beta\left(-\left(I_-^1 + I_-^2\right) + \left(I_+^1 + I_+^2\right)\right) = \theta. \tag{2.7}$$

На (2.6) и (2.7) будем смотреть как на систему линейных алгебраических уравнений. Вычислим ее определитель

$$\det\begin{pmatrix} 1-\alpha & 1+\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} = \beta(1-\alpha) + \beta(1+\alpha) = 2\beta.$$

Если $\beta \neq 0$, то $\det \neq 0$, т. е. система имеет только тривиальное решение. Из $I_\pm^1, I_\pm^2 = 0$ следует, что $V\rho_i$ постоянны как в Ω^+, так и в Ω^-. Из свойства потенциала простого слоя:

$$\frac{\partial V}{\partial n^-}(\rho) - \frac{\partial V}{\partial n^+}(\rho) = \rho(s),\ s \in S,$$

следует, что $\rho_1 = \rho_2 = 0$ на S. Это противоречит нетривиальности функции $\rho(s)$. Противоречие означает, что $\beta = 0$, т. е. $\lambda = \bar{\lambda}$.

Приступим к доказательству второго пункта утверждения. Из (2.6) получаем

$$(1+\lambda)\left(I_+^1 + I_+^2\right) + (1-\lambda)\left(I_-^1 + I_-^2\right) = 0.$$

Из уже доказанного следует, что $I_+^2 = 0$ и $I_-^2 = 0$, а потому имеем просто:

$$(1+\lambda)I_+^1 + (1-\lambda)I_-^1 = 0, \quad I_+^1 + I_-^1 = \lambda\left(I_-^1 - I_+^1\right),$$

$$\lambda = \frac{I_+^1 + I_-^1}{I_-^1 - I_+^1}.$$

Учитывая, что $I_+^1 \geqslant 0, I_-^1 \geqslant 0$, получим, что $|\lambda| \geqslant 1$. $\square$

Глава 6

Нётеровы операторы в банаховом пространстве. Сингулярные интегральные уравнения

§ 1. Проекторы и прямые суммы подпространств

Следующие фундаментальные теоремы функционального анализа постоянно будем использовать.

Теорема 1. *Пусть E и F — нормированные пространства, причём F полно (т. е. банахово), а D — линейное подпространство E второй категории. Пусть T — линейное отображение с областью определения D и значениями в F. Если график отображения $G(T)$ замкнут в $E \times F$, то отображение T непрерывно, а D совпадает с E.*

Теорема 2. *При непрерывном линейном отображении одного банахового пространства на другое образ каждого открытого множества является открытым множеством.*

Теорема 3. *Пусть E — нормированное пространство, A и B — непересекающиеся выпуклые множества и A открыто. Тогда существует непрерывный линейный функционал f такой, что множества $f(A)$ и $f(B)$ не пересекаются (f отделяет A от B).*

Предложение 1. *Пусть E — векторное пространство (над полем вещественных или комплексных чисел), а E^* — сопряженное к нему пространство линейных на E функционалов. Пусть $f_1, \dots, f_n$ принадлежат E^* и линейно независимы. Для любого функционала f_0 из E^* справедливо утверждение: либо f_0 является линейной комбинацией $f_1, \dots, f_n$, либо существует такой элемент $a \in E$, что $f_0(a) = 1$, а $f_i(a) = 0$ для $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Применяя математическую индукцию, предположим, что существует элементы $a_i \in E$ с условием $f_j(a_i) = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Элемент $x - \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) a_i \in N = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}(0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i$ для всех $x \in E$. Если $f_0(y) = 0$ $\forall y \in N$, то $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) f_i(a_i)$, т. е. f_0 есть линейная комбинация функционалов $f_1, \dots, f_n$. Если же $f_0(y_0) \neq 0$ на некотором элементе $y_0 \in N$, то искомое a есть $y_0/f_0(y_0)$.

Таким образом, индукционный шаг выполняется для $f_{n+1} \equiv f_0$ при $a_{n+1} \equiv a$. $\square$

Следствие 1. *Если $f_1, \ldots, f_n$ — линейно независимые функционалы над E, то существуют элементы $a_1, \ldots, a_n$, принадлежащие E, со свойством $f_i(a_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Система $\{a_j\}_{j=1}^{n}$ называется биортогональной к системе функционалов $\{f_i\}_{i=1}^{n}$.*

Предложение 2. *Пусть E — линейное нормированное пространство, тогда любое его конечномерное подпространство N замкнуто в E.*

Доказательство. Выберем определённый базис $e_1, \ldots, e_n$ в N. Элементы e_i, $i = 1, \ldots, n$ можно рассматривать как функционалы над E' — топологически сопряжённом к E пространстве. Согласно предложению 1 для $a \notin N$ существует такое $f \in E'$, что $f(a) = 1$, и $f(b) = 0$, если $b \in N$. Рассмотрим окрестность нуля, определяемую неравенством $U = \{x : x \in E \& \, |f(x)| < 1\}$. Окрестность $a+U$ элемента a с множеством N не пересекается, в силу того что $f(a)+f(c) \neq 0$, если $c \in U : (a + U) \cap N = \emptyset$. Следовательно, a не предельна для N, N замкнуто. $\square$

Определение 1. *Пусть X — линейное пространство. Линейный оператор P, определённый на всём X и отображающий в себя ($P : X \to X$), называется проектором, если $P^2 = P$.*

Если P — проектор то оператор $Q = I - P$ также является проектором, причем, $\operatorname{im} P = \ker Q$. Напомним, что I обозначает тождественный оператор; символ $\operatorname{im} A$ обозначает образ A; $\ker A$ — ядро оператора A.

В банаховом пространстве X норма непрерывного проектора P, не равного нулю, не меньше единицы. В гильбертовом пространстве X норма ортогонального проектора, т. е. непрерывного проектора P, для которого $\operatorname{im} P \perp \ker P$, всегда равна единице.

Определение 2. *Пусть M и N — подпространства пространства X (не обязательно замкнутые). Суммой $M + N$ называется множество элементов из X вида $x + y$, $x \in M$, $y \in N$. Если $M \cap N = \{\theta\}$, то сумма называется прямой и обозначается через $M \oplus N$. В случае, если $M \oplus N = X$, подпространство N называется алгебраическим дополнением к M в X. Для любого подпространства M алгебраическое дополнение существует ([9], с. 142).*

Легко показать, что сумма $M + N$ прямая тогда и только тогда, когда каждый элемент из $Z = M + N$ имеет единственное представление вида $x + y$, $x \in M$, $y \in N$.

Каждый проектор P в линейном пространстве X порождает представление X в виде прямой суммы

$$X = M \oplus N,\ M = \operatorname{im} P, N = \ker P.$$

Обратно, разложение $X = M \oplus N$ определяет проектор P пространства X на M параллельно N.

Определение 3. *Если проектор P непрерывен (следовательно, непрерывен и $Q = I - P$), то разложение, им порождаемое, называется топологической прямой суммой и обозначается $X = M \dot{+} N$. В последнем случае N называется топологическим дополнением M в X.*

Замечание 1. Топологические (так же, как и алгебраические) дополнения определяются не однозначно в общем случае.

Предложение 3. *Алгебраическая прямая сумма $M \oplus N = X$, где X — банахово пространство, является топологической тогда и только тогда, когда подпространства M и N замкнуты.*

Доказательство. Если $M = \operatorname{im} P$, $N = \operatorname{im} Q$, $Q = I - P$, P непрерывен, то $N = \ker P$ замкнуто. Аналогично, $M = \ker Q$, Q непрерывен и, следовательно, M замкнуто.

Пусть M и N замкнуты, $M \cap N = \{\theta\}$, $M \oplus N = X$. Рассматриваемые как самостоятельные пространства M и N банаховы, поэтому банахово их декартово произведение $Y = M \times N$. Отображение $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M$, $x_2 \in N$ непрерывно, проектирование на $M : p(x_1, x_2) \to x_1$ также непрерывно. По теореме об открытом отображении обратное к f отображение непрерывно, поэтому композиция $p \circ f^{-1} = P$ непрерывна. $\square$

Определение 4. *Пусть M — подмножество нормированного пространства X. Если $f \in X'$, т. е. f — непрерывный линейный функционал над X, значение f на $x \in X$ будем обозначать помимо $f(x)$, как $< x, f >$. Введём множество $M^{\perp}$ тех функционалов, которые обращаются в нуль на каждом элементе из M:*

$$M^{\perp} = \{f \in X' :< x, f >= 0\ \forall x \in M\}.$$

Будем называть $M^{\perp}$ аннулятором M в X'.

Предложение 4. *Если банахово пространство X есть топологическая прямая сумма $X = M \dot{+} N$, то $X' = M^{\perp} \dot{+} N^{\perp}$.*

Доказательство. Подпространства $M^{\perp}$ и $N^{\perp}$ замкнуты в топологии поточечной сходимости. Пусть $f \in X'$. Определим функцию

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in M, \\ 0\,, & x \in N. \end{cases}$$

Легко проверить непрерывность f_M, т. е. $f_M \in X'$. Аналогично определим $f_N(x)$.

Если $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M$, $x_2 \in N$, то

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_M(x_1) + f_N(x_2) = f_M(x) + f_N(x),$$

$f_M \in N^\perp$, $f_N \in M^\perp$.

Если $f = f_1 + f_2$ — другое представление f, $f_1 \in M^\perp$, $f_2 \in N^\perp$, то $f_N - f_1 + f_M - f_2 = 0$. Для элемента $x \in M$ имеем $f_M(x) = f_2(x)$, аналогично $f_N(x) = f_1(x)$ $\forall x \in N$. Это влечёт $f_M = f_2$, $f_N = f_1$. $\square$

Замечание 2. Предложение 4 останется верным если вместо $\dot{+}$ брать $\oplus$, а функционалы брать как элементы алгебрически сопряжённого к линейному пространству X, т. е. пространства X^*.

Определение 5. *Пусть X — нормированное пространство, M — его замкнутое подпространство. Элементами пространства X/M (фактор-пространства X по подпространству M) являются множества вида $a + M$, $a \in X$. Легко видеть, что два таких множества либо не пересекаются, либо совпадают. Множество элементов $a + M$ как элемент пространства X/M будем обозначать через $[a]_M$, а само множество $a+M$ в краткой записи — через $\{a\}_M$.*

Линейные операции в X/M определяются естественным образом: $\alpha\,[a]_M + \beta\,[b]_M = [\alpha a + \beta b]_M$. Норма $\|[a]_M\| = \inf\limits_{x \in \{a\}_M} \|x\|$. Сравнительно просто показать, что X/M при таких определениях есть нормированное пространство, а если X банахово, то таковым является и X/M.

Предложение 5. *Сумма $M + N$ замкнутого подространства $M \subseteq X$ и конечномерного подпространства $N \subseteq X$ всегда замкнута в нормированном пространстве X.*

Доказательство. Легко проверить, исходя из выше приведённых определений, что каноническое отображение

$$\phi(x) = [x]_M : X \to X/M$$

непрерывно. Образ N при этом отображении есть конечномерное подпространство $\phi(N)$, а поэтому замкнуто. Следовательно, замкнуто множество $\phi^{-1}(\phi(N)) = M + N$. $\square$

Предложение 6. *В прямой сумме $X = M \oplus N$ подпространство N линейно изоморфно X/M (рассматриваются только линейные операции, а X — как линейное пространство). В топологической сумме $X = M \dot{+} N$ подпространство N топологически изоморфно X/M (X и X/M — банаховы пространства).*

Доказательство. Докажем только второе утверждение. Пусть $X = M \dot{+} N$. Определим отображение ϕ банахово пространства N на X/M, полагая $\phi(x) = [x]_M$ для $x \in N$. Легко видеть, что это есть непрерывное взаимно однозначное отображение на всё X/M. В силу теоремы об открытом отображении N и X/M как банаховы пространства изоморфны. $\square$

Определение 6. *Для замкнутого подпространства M нормированного пространства X коразмерность определяется как размерность пространства X/M и обозначается через* $\operatorname{codim} M$.

Предложение 7. *Если замкнутое подпространство M данного банахова пространства X имеет конечную размерность или коразмерность, то M обладает топологическим дополнением.*

Доказательство.

а) Пусть конечномерно M и $e_1, \ldots, e_m$ — его базис. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — биортогональная к этому базису система функций из сопряжённого пространства X'. Подпространство $N = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \ker f_i$ замкнуто. Пусть $x \in X$, элемент $x_2 = x - \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x) e_i \in N$, а поэтому $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x) e_i \in M$, а $x_2 \in N$. Далее, если $x_1 + x_2 = \theta$, $x_1 \in M$, $x_2 \in N$ и $x_1 \neq \theta$, то для одного из функционалов, скажем f_k, $f_k(x_1) \neq 0$. Следовательно, и $f_k(x_2) \neq 0$, что невозможно. Предположение $x_1 \neq \theta$ неверно. Верно, что $x_1 = x_2 = \theta$.

б) Пусть конечномерно X/M, а $[y_1]_M, \ldots, [y_m]_M$ — его базис. Через N обозначим пространство, порождённое элементами $y_1, \ldots, y_m$. Если $x \in X$, то $[x]_M = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i [y_i]_M = \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\right] \Rightarrow x - \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \in M$. Итак, $x = x_1 + x_2$, $x_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \in N$, $x_1 \in M$. Если x нулевой элемент, то $x_2 \in M$, а потому $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i [y_i]_M = \theta$. Следовательно все $\alpha_i = 0$ (ибо $[y_1]_M, \ldots, [y_m]_M$ есть базис). $\square$

Предложение 8. *Пусть X — нормированное пространство, M — его замкнутое подпространство. Тогда коразмерность M равна размерности $M^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{codim} M < \infty$. Согласно предложению 7 имеет место разложение $X = M \dot{+} N$. Вследствие предложения 6 имеем $\dim N = \dim X/M < \infty$, а из доказательства предложения 4 следует, что $\dim M^{\perp} = \dim N$. Рассуждение «в обратном порядке» приводит к утверждению: если $\dim M^{\perp} < \infty$, то $\dim M^{\perp} = \operatorname{codim} M < \infty$. $\square$

§ 2. Нормально разрешимые операторы.

Теорема 1 (о перестройке). *Пусть банахово пространство X есть топологическая прямая сумма замкнутого подпространства X_1 и конечномерного подпространства X_0, и пусть D — плотное подпространство в X. Тогда:*

1) *$D_1 = D \cap X_1$ плотно в X_1;*

2) *пространство X представимо в виде топологической прямой суммы $X = X_1 \dot{+} X_2$, где X_2 — подпространство D и конечномерно.*

Доказательство. Смысл теоремы состоит в том, чтобы «сдвинуть» слагаемое X_0 на известную нужную позицию (сделав его подпространством D).

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — базис X_0; а $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — система функционалов из X' со свойствами $< e_i, f_j >= \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$; $< x, f_i >= 0$ и $\forall x \in X_1$.

Теперь мы можем охарактеризовать X_1 как множество в точности тех элементов из X, на которых все функционалы f_i, $i = 1, \ldots, m$ имеют значение нуль.

Для каждого e_i выберем в его окрестности элемент $\tilde{e}_i \in D$ так, чтобы $\det\{< \tilde{e}_i, f_j >\} \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, m$. Это возможно, поскольку:

1) $< e_i, f_j >= I$ — единичная матрица;

2) скалярное произведение непрерывно;

3) D плотно в X.

Доказываем утверждение 1) теоремы. Пусть $x_k \to x$, $x \in X_1$, $x_k \in D$. «Переделаем» элементы x_k из D в элементы $\tilde{x}_k$ из D_1. Для этого $\tilde{x}_k$ будем искать, подправляя x_k линейными комбинациями элементов $\tilde{e}_j$:

$$\tilde{x}_k = x_k + \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\tilde{e}_j, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Подбираем a_{kj} так, чтобы для всех i выполнялось условие

$$< \tilde{x}_k, f_i >= 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Отметим, что $x_k \in D$, $\tilde{e}_j \in D$, следовательно, $\tilde{x}_k \in D$, и запишем условие в виде системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_{kj} < \tilde{e}_j, f_i >= - < x_k, f_i >, \quad i = 1, \ldots, m,$$

для фиксированного k. Определитель этой системы отличен от нуля, и поэтому система имеет решение. Перейдем к пределу при $k \to \infty$ в получающейся системе равенств. Поскольку $\det\{< \tilde{e}_i, f_j >\} \neq 0$, а $\lim\limits_{k\to\infty} < x_k, f_i >= 0$ то, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{kj} = 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{x}_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

Второе утверждение теоремы получается, если в качестве X_0 возьмем подпространство, порожденное $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \cdots \tilde{e}_m$. Действительно, в разложении $x = x_1 + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \tilde{e}_j$ элемент x_1 принадлежит X_1 тогда и только тогда, когда для всех $i \in \{1, 2 \ldots m\}$ выполняется условие

$$f_i\left(x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tilde{e}_j\right) = 0.$$

Эти равенства эквивалентны системе

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j < \tilde{e}_j, f_j >= f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и, поскольку определитель этой системы отличен от нуля, существуют числа α_j такие, что в разложении $x = x_1 + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \tilde{e}_j$, $x_1 \in X_1$, а $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \tilde{e}_j \in D$. Если $x = \theta$, то все $f_i(x) = 0$, следовательно, все $\alpha_j = 0$, $x_1 = \theta$. $\square$

Определение 1. *Оператор $A(X \to Y)$ называется нормально разрешимым, если уравнение $Ax = y$ тогда и только тогда имеет решение, когда*

$$< y, f >= 0, \quad \forall f \in (\operatorname{im} A)^{\perp}.$$

Иными словами: оператор A нормально разрешим, если $y \in \operatorname{im} A$ при условии $< y, f >= 0$ для всех $f \in (\operatorname{im} A)^{\perp}$.

В случае, когда область определения $D(A)$ оператора A плотна в X, то, как следствие, оператор обладает сопряженным оператором

A^*; можно доказать, что (см. доказательство эквивалентности (б) и (г) в теореме 4)

$$(\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*. \tag{2.1}$$

В этом случае нормальная разрешимость оператора означает, что уравнение $Ax = y$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$< y, f >= 0$$

для всякого решения f уравнения $A^* f = \theta$.

Теорема 2. *Оператор A тогда и только тогда нормально разрешим, когда его множество значений замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{im} A$ замкнуто. Пусть

$$y_0 \in Y \,\&\, y_0 \notin \operatorname{im} A.$$

Строим линейный непрерывный функционал f_0. Определяем его сначала на замкнутом подпространстве $Y_0 = \operatorname{im} A + \{\alpha y_0\}$, α пробегает R или C, полагая $< y + \alpha y_0, f_0 >= \alpha$. По теореме Хана — Банаха его можно непрерывно продолжить на всё Y. Имеем для $f_0 :< y_0, f_0 >= 1 \neq 0$, $f_0 \perp \operatorname{im} A$. Значит, если $< y, f >= 0$ для всех $f \in (\operatorname{im} A)^{\perp}$, то непременно $y \in \operatorname{im} A$. $\square$

Свяжем понятия «нормальная разрешимость» и «проектор». Пространство X представим в виде прямой суммы (предполагая, что $\ker A$ замкнуто)

$$X = X_1 \oplus \ker A.$$

Рассмотрим проектор P_A пространства X на $\ker A$, $Q = I - P_A$ есть проектор на X_1. По предположению A — линейный оператор с областью определения $D(A)$, не обязательно равной X.

Пусть $D_1 = D(A) \cap X_1$, и через A_1 обозначим сужение A на D_1 (A_1 обозначают также через A/D_1 и A_{D_1}).

Очевидно, $\ker A_1 = \{\theta\}$, $\operatorname{im} A_1 = \operatorname{im} A$. Поэтому существует обратное отображение $A_1^{-1} : \operatorname{im} A \to D_1$ со свойствами:

$$AA_1^{-1} y = y, \quad y \in \operatorname{im} A, \tag{2.2}$$

$$A_1^{-1} Ax = x - P_A x, \quad x \in D(A). \tag{2.3}$$

Оператор A_1 назовем оператором, *ассоциированным* с A.

Теорема 3 (об ассоциированном операторе). *Замкнутый оператор A тогда и только тогда нормально разрешим, когда оператор A_1^{-1} непрерывен.*

Доказательство. Пусть A нормально разрешим. Замкнутость оператора A обеспечивает непрерывность P_A, и вследствие этого подпространство X_1 замкнуто. Поэтому легко проверить, что A_1 и A_1^{-1} замкнутые операторы. По теореме о замкнутом графике A_1^{-1} непрерывен (ибо A_1^{-1} определен на банаховом пространстве $\operatorname{im} A$).

Обратно, пусть A_1^{-1} непрерывен. Пусть $y_n \in \operatorname{im} A$ и $y_n \to y$. Тогда $x_n = A_1^{-1} y_n \to x \in X$, оператор A_1 замкнут, и как следствие имеем $y = A_1 x \in \operatorname{im} A$. Область значений $\operatorname{im} A$ замкнута, и по предыдущей теореме A нормально разрешим.

Теорема 4 (Банаха — Хаусдорфа). *Пусть X и Y — банаховы пространства. A — линейный замкнутый оператор, отображающий X в Y и имеющий плотную область определения $D(A)$. Следующие его свойства эквивалентны:*

(*а*) *область значений imA замкнута;*

(*б*) *оператор A нормально разрешим;*

(*в*) $\operatorname{im} A = \{y \in Y : \quad < y, f >= 0, \quad \forall f \in \ker A^*\}$;

(*г*) $\operatorname{im} A^* = \{f \in X^* :< x, f >= 0, \forall x \in \ker A\} \sim \big(\operatorname{im} A^* = (\ker A)^\perp\big)$;

(*д*) *оператор A^* нормально разрешим;*

(*е*) *область значений* $\operatorname{im} A^*$ *замкнута в* X^*.

Доказательство. Условия (а) и (б) эквивалентны, как установлено теоремой 2. Выше, сразу после определения нормальной разрешимости, была показана эквивалентность (б) и (в).

Пусть A нормально разрешим. Если $f \in \operatorname{im} A^*$, т. е. $f = A^* g$, $g \in Y^*$, и если $x \in \ker A$, то имеем

$$0 =< Ax, g >=< x, A^* g >=< x, f >, \quad f \perp x.$$

Поэтому $\operatorname{im} A^* \subseteq (\ker A)^\perp$.

Обратно, пусть $g \in (\ker A)^\perp$. Определим на $\operatorname{im} A$ функционал f_0, положив $f_0(y) =< A_1^{-1} y, g >$, $y \in \operatorname{im} A$. Оператор A_1^{-1} ассоциирован с A (см. определение перед теоремой 2). По теореме 3 функционал f_0 непрерывен на подпространстве $\operatorname{im} A$ пространства Y. Возьмем, пользуясь теоремой Хана — Банаха, расширение f на Y функционала f_0. Для $x \in D(A)$ имеем:

$$< Ax, f >=< Ax, f_0 >=< A_1^{-1} Ax, g >=< x - P_A x, g >=< x, g > .$$

Здесь P_A — проектор на $\ker A$. Поскольку выписанные равенства имеют место для всех $x \in D(A)$, получаем, что $A^* f = g$. Следовательно, $(\ker A)^\perp \subseteq \operatorname{im} A^*$. Итак, из (б) следует (г).

Импликации: (г)$\Rightarrow$ (д), (д)$\Rightarrow$ (е) очевидны. Пусть выполняется условие (е) т. е. $\operatorname{im} A^*$ — замкнутое множество в X^*. Оператор A рассмотрим как оператор, отображающий $D(A) \subseteq X$ в пространство $Y_1 = \overline{\operatorname{im} A}$. Дальнейшие рассуждения оформим в виде последовательности рассуждений 1) – 3). При этом результаты п. п. 1) и 2) имеют и самостоятельное значение для теории банаховых пространств (собственно, пункт 1 есть основа для доказательства теоремы 2 § 1).

1) Здесь и везде $B_\rho(a)$ будет обозначать открытый шар радиуса ρ и с центром в a: $B_\rho(a) = \{x : \|x - a\| < \rho\}$. Замыкание этого шара обозначается через $\overline{B}_\rho(a)$. Пусть

$$B_1 = \{x \in D(A) : \|x\| \le 1\}, \quad B_r = \{y \in Y_1 : \|y\| \le r\}.$$

Предположим, что выполняется условие

$$\overline{A(B_1)} \supseteq B_r. \tag{2.4}$$

Покажем, что отсюда следует

$$A(B_1) \supseteq B_{r/2}. \tag{2.5}$$

Фиксируем $y \in B_r$ и последовательность чисел $\varepsilon_n : \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ $\varepsilon_n \to 0$. Из (2.4) следует, что $\overline{A(B_{\varepsilon_n})} \supseteq B_{\varepsilon_n r}$. Это позволяет последовательно получать элементы $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ из B_r, удовлетворяющие неравенствам:

$$\begin{array}{lll}
x_1 \in B_1 & \& & \|y - Ax_1\| \le \varepsilon_1 r, \\
x_2 \in B_{\varepsilon_1} & \& & \|y - Ax_1 - Ax_2\| \le \varepsilon_2 r, \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n \in B_{\varepsilon_{n-1}} & \& & \|y - Ax_1 - Ax_2 - \ldots - Ax_n\| \le \varepsilon_n r, \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Положим $\varepsilon_n < \varepsilon/2^n$. Ряд $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ сходится, ибо

$$\|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m\| < \frac{\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \ldots = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}},$$

т. е. последовательность частичных сумм σ_n ряда фундаментальна. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = x$. По построению $\lim\limits_{n\to\infty} A\sigma_n = y$, в силу замкнутости оператора A имеем $Ax = y$.

Оценим норму x:

$$\|x\| \leqslant 1 + \varepsilon \leqslant 2,$$

что дает нам включение $A(2B_1) \supseteq B_r$, эквивалентное (2.5).

2) Если (2.4) выполнено, то $\operatorname{im} A = \overline{\operatorname{im} A}$. Действительно, пусть $y \in \overline{\operatorname{im} A} = Y_1$. Возьмем $y_1 \in \operatorname{im} A$ таким, что $\|y - y_1\| \leqslant \frac{r}{2}$. Существует x_1, $\|x_1\| \leqslant 1$, $Ax_1 = y - y_1$. Поэтому $y = y_1 + Ax_1 \in \operatorname{im} A$.

3) Предположим, что (2.4) не выполняется ни при каком $r > 0$. Это предположение равносильно тому, что $B_{1/n} \setminus \overline{A(B_1)}$ не пусто для всех целых положительных n. Пусть $\|y_n\| \leqslant \frac{1}{n}, \quad y_n \notin \overline{A(B_1)}$. По теореме об отделении выпуклых множеств существует непрерывный линейный функционал $f_n \in Y^*$ такой, что

$$f_n(y_n) > 1, \quad |f_n(Ax)| \leq 1, \quad \forall x \in B_1, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Рассмотрим оператор A^*, сопряженный к оператору A, как отображающему X в Y, и рассмотрим оператор A_1^*, сопряженный к оператору A, как отображающему X в $Y_1 = \overline{\operatorname{im} A}$. Легко показать, что $\operatorname{im} A_1^* = \operatorname{im} A^*$. Действительно, если $g = A^* f, \quad x \in D(A)$, то $< x, g > = < Ax, f >$. Для определения g достаточно знать значения f на $\overline{\operatorname{im} A}$. По условию $\operatorname{im} A^*$ — замкнутое подпространство, таковым является и $\operatorname{im} A_1^*$; $\ker A_1^* = \{\theta\}$, ибо если $f \in \ker A_1^*$, то $< Ax, f > = < x, A_1^* f > = 0$ для $x \in D(A)$. Поэтому $f = 0$ на $\overline{\operatorname{im} A}$. По теореме 3 оператор $(A_1^*)^{-1}$ непрерывен. Это позволяет провести оценки с некоторой константой $C > 0$:

$$C\|f_n\| \leq \|A_1^* f_n\| = \sup_{\|x\|=1,\, x \in D(A)} |< Ax, f_n >| \quad \leq 1 < f_n(y_n) \leq \|f_n\|\|y_n\|.$$

Отсюда следует, что $C \leq \|y_n\| \ \forall\, n$. Но это противоречит тому, что $y_n \to 0$. Итак, имеет место (2.4) при каком-то $r > 0$, и потому, как показано в части 2) доказательства, $\operatorname{im} A$ замкнуто, т. е. из (e) следует (a). $\square$

§ 3. Нетеровы, или Ф-операторы

Пусть A — линейный оператор из банахового пространства X в банахово пространство Y. Введем ряд определений.

Фактор-пространство $Y/\overline{\operatorname{im} A}$ называется коядром оператора A и обозначается $\operatorname{coker} A$; определим также $\dim \operatorname{coker} A = \beta(A)$ — дефектное число оператора A, и размерность ядра оператора: $\dim \ker A = \alpha(A)$.

Пространство $(\operatorname{im} A)^{\perp}$ называется дефектным пространством оператора A.

Представим пространство Y в виде прямой топологической суммы: $Y = \overline{\operatorname{im} A} \dotplus Y_2$. Слагаемое Y_2 топологически изоморфно фактор-пространству $Y/\overline{\operatorname{im} A}$ и потому имеет размерность $\beta(A)$. Как мы знаем, разложение $Y = \overline{\operatorname{im} A} \dotplus Y_2$ влечет разложение $Y^{'} = (\overline{\operatorname{im} A})^{\perp} \dotplus Y_2^{\perp}$ топологически сопряженного $Y^{'}$, и при этом пространство $(\overline{\operatorname{im} A})^{\perp}$ изоморфно $Y_2^{'}$ (см. доказательство предложения 4, § 1), поэтому

$$\dim(\overline{\operatorname{im} A})^{\perp} = \dim(\operatorname{im} A)^{\perp} = \dim Y_2^{'} = \dim Y_2 = \dim Y/\overline{\operatorname{im} A} = \beta(A).$$

Итак, мы доказали

Предложение 1. *Дефектное число $\beta(A)$ есть также размерность дефектного пространства* $(\operatorname{im} A)^{\perp}$.

Предложение 2. *Пусть $\overline{D(A)} = X$, тогда $\beta(A) = \alpha(A^*)$.*

Доказательство. В силу всюду плотности $D(A)$ существует сопряженный оператор A^*. Исходя из разложения $Y^{'} = (\overline{\operatorname{im} A})^{\perp} \dotplus Y_2^{\perp}$ легко установить, что $(\overline{\operatorname{im} A})^{\perp}$ является ядром оператора A^*. Остальное следует из вышеизложенных рассуждений. □

Определение 1. *Числовая пара $(\alpha(A), \beta(A))$ называется d-характеристикой оператора A (допускается для α и β значение ∞). Оператор имеет конечную d-характеристику, или конечный индекс, если $\alpha(A) < \infty$ и $\beta(A) < \infty$. Число* $\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \beta(A)$ *называется индексом оператора A.*

Определение 2. *Замкнутый нормально разрешимый оператор A называется нетеровым, или Φ-оператором, если его d-характеристика конечна. Если выполняется только одно из неравенств: $\alpha(A) < \infty$ или $\beta(A) < \infty$, оператор называется полунетеровым, или, соответственно, Φ_+ или Φ_--оператором.*

Пример. Каждый оператор A вида $I + F$, где I — тождественный оператор: $Ix = x,\ x \in X$, а F — вполне непрерывный оператор, переводящий банахово пространство X в X, является нетеровым. Согласно теремам Фредгольма $\alpha(A) = \beta(A) < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $A : X \to Y$ — замкнутый линейный оператор. Оператор A тогда и только тогда является Φ_+-оператором, когда существуют такие вполне непрерывные операторы $T_j : X \to X$, $j = 1, 2, \dots l$, и константа $c > 0$, что выполняется оценка:*

$$||x|| \leqslant c(||Ax|| + \sum_{j=1}^{l} ||T_j x||), \quad x \in D(A). \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть A есть Φ_+ — оператор, а следовательно, нормально разрешимый. Рассмотрим часто употребляемое нами разложение банахового пространства $X = X_1 \dot{+} \ker A$ (смотри теорему 3 §2; P_A — проектор на $\ker A$; A_1 — ассоциированный с A оператор; алгебраическая прямая сумма X_1 и $\ker A$ заменяется топологической согласно предложению 7 § 1). Из условия теоремы следует, что P_A вполне непрерывен, ибо конечномерен; A_1^{-1} непрерывен на $\operatorname{im} A = \overline{\operatorname{im} A}$ согласно нормальной разрешимости; область определения A_1 есть подпространство $D(A_1) = D(A) \cap \operatorname{im}(I - P_A)$. Итак, существует константа $c > 0$ такая, что

$$x \in D(A_1) \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leqslant c\|A_1 x\|. \tag{3.2}$$

Берем элемент $x \in D(A)$ и его (единственное) представление

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in D(A_1), \quad x_2 \in \ker A. \tag{3.3}$$

Используя (3.2) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \|x\| \leqslant c\|A_1 x\| + \|P_A x\| \leqslant \\ \leqslant c_1(\|Ax\| + \|P_A x\|), \quad c_1 = \max(c, 1). \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть выполняется оценка (3.1). Проведем по шагам следующие рассуждения.

Первый шаг. Доказываем конечномерность ядра оператора A. Если $x \in \ker\ A$, то вследствие (3.1)

$$||x|| \leqslant c \sum_{j=1}^{l} ||T_j x||. \tag{3.4}$$

Пусть $B_1 = B_1(\theta)$ — шар единичного радиуса с центром в θ в пространстве x. Следующие множества относительно компактны: $T_j(B_1)$, $j = 1, \ldots, l$, $\ker A \cap B_1$. Действительно, множества $T_j(B_1)$ относительно компактны, так как операторы T_j вполне непрерывны. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ есть последовательность попарно различных элементов множества $\ker A \cap B_1$. Не теряя общности, можем считать, что для каждого j последовательность $T_j x_1, T_j x_2, \ldots$ фундаментальна. Из (3.4) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Мы доказали, следовательно, что окрестность нуля $\ker A \cap B_1$ в пространстве $ker\ A$ предкомпактна. Отсюда уже следует конечномерность $\ker A$ по теореме Колмогорова (доказательство которой приводится ниже).

Второй шаг. Докажем, что $\operatorname{im} A = \overline{\operatorname{im} A}$. Пусть $y_n = Ax_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $x_n \in D_1 = D(A_1)$, где A_1 — ассоциированный с A оператор. Множество x_n, $n = 1, 2, \ldots$, ограничено. Если это не так, и

$\|x_n\| \to \infty$, то положим $\bar{x}_n = x_n/\|x_n\|$, $\bar{y}_n = y_n/\|x_n\|$. Имеем

$$\|\bar{x}_n\| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|\bar{y}_n\| \to 0, \quad A\bar{x}_n = \bar{y}_n. \tag{3.5}$$

Из (3.5) вытекает существование такой подпоследовательности $\bar{x}_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой последовательность $T_j \bar{x}_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится при каждом $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Используя (3.4), заключаем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \bar{x}_{n_k} = x$ существует, при этом $A\bar{x}_{n_k} = \bar{y}_{n_k}$, $\bar{y}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \theta$. Ввиду замкнутости оператора A_1 имеем $A_j x = \theta$. Ввиду обратимости A_1 отсюда следует, что $x = \theta$, но $\|x\| = 1$. Полученное противоречие говорит о том, что множество $\{x_n\}$ ограничено. Повторяя проведенные рассуждения, с заменой $\{\bar{x}_n\}$ на $\{x_n\}$, получаем $\exists\, x \in D(A)$ & $Ax = y$. Итак, $\operatorname{im} A$ — замкнутое подпространство, и оператор A в силу этого нормально разрешим. □

Теорема 2 (Колмогоров). *Если в нормированном пространстве X существует предкомпактная окрестность нуля, то X конечномерно.*

Доказательство. Пусть U — предкомпактная окрестность нуля в X. По определению предкомпактности существуют такие точки a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, из X, что

$$U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + \frac{1}{2}U). \tag{3.6}$$

Рассмотри линейное подпространство $M = L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, порожденное элементами a_i. Включение (3.6) можно «итерировать», используя M:

$$U \subseteq M + \frac{1}{2}U \subseteq M + \frac{1}{2}(M + \frac{1}{2}U) \subseteq M + \frac{1}{2}(M + \frac{1}{2}(M + \frac{1}{2}U)) \subseteq \ldots \tag{3.7}$$

Поскольку

$$M + \frac{1}{2}M + \ldots \frac{1}{2^n}M + \ldots = M,$$

то из (3.7) следует включение $U \subseteq M + \dfrac{1}{2^k}U$ для любого целого положительного k. Отсюда

$$U \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} (M + \frac{1}{2^k}U) = \overline{M} = M.$$

Пространство M (как и X) порождается U, а поэтому $X = M$. □

Теорема 3. *Пусть $A \in \Phi(X, Y)$ (так будем обозначать класс нетеровых операторов из X в Y), область определения $D(A)$ всюду плотная. Тогда сопряженный оператор A^* является тоже Φ оператором из Y' в X', $\alpha(A^*) = \beta(A)$, $\beta(A^*) = \alpha(A)$.*

Доказательство. То, что A^* является Φ-оператором, следует из теоремы Банаха — Хаусдорфа. Из предложения 2 следует, что $\beta(A) = \alpha(A^*)$. Пусть $\alpha(A) < \infty$. Возьмем привычное нам разложение $X = X_1 \dot{+} \ker A$. Функционал $f \in (\ker A)'$ продолжим нулем на X_1, полученное подпространство X', по-прежнему, будем обозначать $(\ker A)'$. Ясно, что

$$((\ker A)')^{\perp} \equiv \{x \in X : \ f(x) = 0, \ \text{если } f \in (\ker A)'\} = X_1,$$

а $X_1^{\perp} = \ker A'$. Другое равенство $\operatorname{im} A^* = (\ker A)^{\perp}$ мы установили при доказательстве теоремы Банаха — Хаусдорфа. Используя предложение 4, последовательно получаем равенство:

$$X' = (\ker A)^{\perp} \dot{+} X_1^{\perp} = \operatorname{im} A^* \dot{+} (\ker A)'.$$

Отсюда $\dim \ X'/\operatorname{im} A^* = \beta(A^*) = \dim(\ker A)' = \dim \ker A = \alpha(A)$. $\square$

Следующие две теоремы мы приведем только с краткими указаниями к доказательствам.

Теорема 4. *Замкнутый нормально разрешимый оператор A является Φ_+-оператором тогда и только тогда, когда прообраз каждого компактного множества из $\operatorname{Im}(A)$ является локально компактным.*

Достаточность сформулированного условия очевидна. Указание к доказательству необходимости: рассмотреть относительную окрестность $[B_r(b) + B_r(c)] \cap [A_1^{-1}(K) \oplus \ker A]$ точки $b + c$ такой, что $A(b)$ принадлежит множеству K, $A(c) = \theta$, $r > 0$, $B_r(b)$ и $B_r(c)$ — замкнутые шары в пространствах X_1 и $\ker A$ соответственно (см. теорему об ассоциированном с A операторе A_1); учесть непрерывность оператора A_1^{-1} и конечномерность $\ker A$.

Теорема 5. *Если A — линейный непрерывный оператор из X в Y — нормально разрешим, то каждому $y \in A(X)$ соответствует такое x, что $Ax = y$ и $\|x\| \leqslant c\|y\|$, где константа c не зависит от y.*

Эта теорема следует из теоремы 3. Мы приводим ее в формулировке, аналогичной теореме 4, § 1, гл. 4, теории вполне непрерывных операторов. Она допускает изящное доказательство ([14], с. 525), если применить принцип открытых отображений (теорема 2, § 1). Согласно последнему единичный шар $B_1(0)$ пространства X отображается на множество $AB_1(0)$, содержащее относительный шар

$$\{y : y \in A(X),\ \|y\| < \delta, \delta > 0\}.$$

Отсюда, если $y \neq 0$ и $y \in A(B_1(0))$, то $\exists z$, $\|z\| \leqslant 1$, $Az = (\delta/2\|y\|)y$, а потому $Ax = y$, где $x = (2\|y\|/\delta)z$, $\|x\| \leqslant (2/\delta)\|y\|$.

§ 4. Связь нетеровых операторов с компактными фредгольмовыми операторами.

Из теоремы 1 предыдущего параграфа следуют важные для приложений результаты о суммах и произведениях операторов, один из которых нетеров.

Предложение 1. *Если оператор $A \in \Phi_+(X,Y)$ и $T \in K(X,Y)$, т. е. T является вполне непрерывным оператором, переводящим пространство X в пространство Y, то $A+T \in \Phi_+(X,Y)$.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 предыдущего параграфа существует вполне непрерывный оператор T_1 и выполняется для любого $x \in X$ неравенство

$$\|x\| \leqslant C(\|Ax\| + \|T_1x\|).$$

Поскольку $\|Ax\| \leqslant \|Ax+Tx\| + \|Tx\|$ (неравенство треугольника), то из выписанных двух неравенств имеем

$$\|x\| \leqslant C(\|(A+T)x\| + \|Tx\| + \|T_1x\|),$$

откуда, заметив, что доказательство достаточности из теоремы 1 проходит и при более общем предположении, что T_j отображает X в другое пространства Y_j, получаем доказываемое предложение. □

Предложение 2. *Пусть $A : X \to Y$ — замкнутый оператор, B — линейный непрерывный оператор, отображающий Y в Z. Тогда, если $BA \in \Phi_+(X,Z)$, то $A \in \Phi_+(X,Y)$.*

Доказательство. Пусть $BA \in \Phi_+(X,Z)$. Как показано, существует $T \in K(X,X)$ такой, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $\|x\| \leqslant C(\|BAx\| + \|Tx\|)$, но B непрерывно и мы можем продолжить оценку

$$\|x\| \leqslant C(C_1\|Ax\| + \|Tx\|) \leqslant C_2(\|Ax\| + \|Tx\|).$$

Опять из теоремы 1 предыдущего параграфа следует доказываемое предложение. □

Предложение 3. *Пусть* X_1 *— замкнутое подпространство нормированного пространства* X, X_2 *— замкнутое подпространство* X_1. *Тогда* $\dim X/X_2 = \dim X/X_1 + \dim X_1/X_2$.

Доказательство. Пусть $\{[a_i]_{X_2}\}_{i\in I}$, где $a_i \in X_1$, образуют базис пространства X_1/X_2 (обозначения $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ поясняются в § 1). Аналогично, пусть $\{[b_j]_{X_1}\}_{j\in J}$ — базис пространства X/X_1. Тогда

$$\{z\}_{X_1} = \sum_j \beta_j b_j + X_1, \beta_j \in R.$$

Отсюда следует, что $z - \sum_j \beta_j b_j \in X_1$, а потому

$$[z - \sum_j \beta_j b_j]_{X_2} = \sum_i \alpha_i [a_i]_{X_2}, \alpha_i \in R.$$

Последнее равенство говорит о том, что

$$z - \sum_j \beta_j b_j - \sum_i \alpha_i a_i \in X_2,$$

т. е. $[b_j]_{X_2}$, $[a_i]_{X_2}$ образуют базис в X/X_2. Действительно, система векторов $\{[b_j]_{X_1}\}_{j\in J} \cup \{[a_i]_{X_2}\}_{i\in I}$ линейно независима. В противном случае имели бы для конечных множеств J_1, I_1

$$\sum_{j\in J_1} \beta_j b_j + \sum_{i\in I_1} \alpha_i a_i = d \in X_2 \Rightarrow -\sum_{j\in J_1} \beta_j b_j + d \in X_1.$$

Последнее означало бы линейную зависимость системы векторов $[b_j]_{X_1}, j \in J_1$, в противоречии с тем, что она — базис. Предложение следует из доказаного. □

Теорема 1. *Пусть* $A : X \to Y$ *есть замкнутый оператор,* $B : Y \to Z$ *— непрерывный оператор с конечномерным ядром. Тогда, если* $BA \in \Phi(X, Z)$, *то* $A \in \Phi(X, Y)$.

Доказательство. В силу предложения 2 имеем $A \in \Phi_+(X, Y)$, в частности A нормально разрешим и $\operatorname{im} A$ — замкнутое пространство. Предположим, что $\beta(A) = \infty$, и последовательно будем определять следующие топологические прямые суммы. Сначала положим

$$\ker B = N_1 \dot{+} N_2, \tag{4.1}$$

где $N_1 = \ker B \cap \operatorname{im} A$. Затем «увеличим» слагаемое N_1 и определим пространство

$$Y_1 = \operatorname{im} A \dotplus N_2. \tag{4.2}$$

Согласно предложению 3, где $X_2 = \operatorname{im} A, X_1 = Y_1$, получаем, что $\dim Y/Y_1 = \infty$. Выбирая произвольно натуральное число m, строим биортогональную систему $\{f_i\}, i = 1, \ldots, m, f_i \in Y_1^{\perp}$, для линейно независимой системы веторов $\{y_j\}, j = 1, \ldots, m, y_j \in Y$, так, что $\langle y_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$. Пусть Y_2 — конечномерное линейное пространство, порожденное $\{y_j\}$. «Дополняем» разложения (4.1), (4.2) прямой суммой (отметим, что $Y_1 \cap Y_2 = \{\theta\}$):

$$M = \operatorname{im} A \oplus N_2 \oplus Y_2. \tag{4.3}$$

Множества $\operatorname{im}(BA)$ и $B(Y_2)$ не пересекаются. Действительно, если $u = BA(x) = B(y)$, где $x \in X, y \in Y_2$, то

$$Ax - y \in \ker B.$$

Но тогда, с одной стороны все функционалы $\{f_i\}$ «зануляют» $Ax - y$, а с другой по построению Y_2 найдется функционал f среди функционалов $\{f_i\}$ такой, что $f(y) \neq 0$ (но обязательно $f(Ax) = 0$). По предположению $\operatorname{im}(BA)$ замкнуто, поэтому $B(M) = \operatorname{im}(BA) \dotplus B(Y_2)$ также замкнуто. Корректно, следовательно, рассмотрение фактор-пространства $Z/B(M)$. Согласно предложению 3 имеем

$$\dim(Z/B(M)) = \beta(BA) - m. \tag{4.4}$$

Принимая во внимание включение $B(M) \subset \operatorname{im} B$, получаем

$$\dim(Z/B(M)) \geqslant \dim(Z/\overline{\operatorname{im} B}) = \beta(B), \tag{4.5}$$

Из (4.4), (4.5) следует, что $\beta(BA) \geqslant \beta(B) + m$. Поскольку m можно взять сколь угодно большим, получаем $\beta(BA) = \infty$ в противоречие с предположением теоремы. Следовательно, гипотеза, что $\beta(A) = \infty$, неверна, $\beta(A) < \infty$. $\square$

С использованной техникой доказательств установим еще несколько результатов.

Предложение 4. *Пусть $B : X \to Y$ — непрерывный линейный оператор, а $A : Y \to Z$ — замкнутый оператор. Пусть $\operatorname{im} B$ принадлежит $D(A)$. Из включения $AB \in \Phi_-(X, Z)$ следует, что $A \in \Phi_-(Y, Z)$.*

Доказательство. Положим $AB = C$, тогда $\operatorname{im} C \subset \operatorname{im}, A$ и

$$\operatorname{im} A = \operatorname{im} C \oplus N, \tag{4.6}$$

где N конечномерно. Из (4.6) следует, что $\operatorname{im} A$ — замкнутое подпространство, а потому A нормально разрешим. Остается заметить, что $\beta(A) \le \beta(C) < \infty$. $\square$

Теорема 2. *Для того чтобы замкнутый оператор* $A : X \to Y$ *был* Φ*-оператором, необходимо и достаточно, чтобы существовали два непрерывных оператора* B_1, B_2 *такие, что* $\operatorname{im} B_2 \subseteq D(A)$, $D(B_i) = Y, B_i : Y \to X,\ i = 1, 2,$ *и выполнялись равенства:*

$$B_1 A = I - T_1, \quad AB_2 = I - T_2, \tag{4.7}$$

где T_1 *и* T_2 *— вполне непрерывные операторы в* X *и* Y *соответственно,* I *— единичный оператор на соответствующих пространствах. При этом для* Φ*-операторов* A B_1 *и* B_2 *можно выбрать так, чтобы* $B_1 = B_2$, *а* $T_1 = T_2$ *были непрерывными проекторами конечного ранга, т. е. проекторами на конечномерные подпространства.*

Доказательство. Достаточность просто следует из предыдущих результатов. Необходимость. Пусть $A \in \Phi(X, Y)$. Пусть P_A — непрерывный проектор на $\ker A$, а A_1 — постоянно используемый в предшествующих параграфах определяемый на $(I - P_A)X \cup D(A)$ ассоциированный с A оператор. В наших условиях оператор A_1^{-1} непрерывен и определен на замкнутом подпространстве $\operatorname{im} A$. Размерность $\beta(A)$ конечна и потому $\operatorname{im} A$ имеет в Y топологическое дополнение Y_1:

$$Y = \operatorname{im} A \dotplus Y_1. \tag{4.8}$$

Пусть K — конечного ранга непрерывный проектор пространства Y на Y_1 параллельно $\operatorname{im} A$. Положим $B = A_1^{-1}(I - K)$. Для этого оператора имеем: $BA = I - P_A$ на $D(A)$ и $AB = I - K$. $\square$

Итак, существует непрерывное преобразование нетерового оператора в оператор $I - T$ теории Фредгольма, где T — вполне непрерывный оператор, а I — единичный оператор.

§ 5. Операторы с ограниченным регуляризатором

Пусть X, Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор.

Определение 1. *Оператор* $B : Y \to X$ *называется левым (соответственно, правым) регуляризатором оператора* A, *если* $D(B) \supset \operatorname{im} A$ *(соответственно,* $D(A) \supset \operatorname{im} B$*) и*

$$BA = I_x + T_x,$$

соответственно,

$$AB = I_y + T_y.$$

Здесь I_x, I_y — тождественные операторы, T_x, T_y — вполне непрерывные операторы в X и Y, соответственно.

Из теоремы 2 предыдущего параграфа непосредственно вытекает

Теорема 1. *Замкнутый оператор тогда и только тогда является Φ-оператором, когда он обладает ограниченными левым и правым регуляризаторами. При этом для Φ-оператора левый и правый регуляризаторы можно считать совпадающими, т. е. существует двусторонний регуляризатор.*

Следствие 1. *Разность любых двух ограниченных регуляризаторов одного и того же Φ-оператора есть вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. Если B_1 — левый, а B_2 — правый регуляризаторы, то $B_1AB_2 = (I_x + T_x)B_2 = B_1(I_x + T_y)$, следовательно,

$$B_1 - B_2 = T_xB_2 - B_1T_y.$$

Оператор $B_1 - B_2$ вполне непрерывен, так как произведение непрерывного оператора и вполне непрерывного вполне непрерывно. Пусть теперь B_1 и B_2 — оба левые регуляризаторы оператора A. В силу теоремы 1 существует ограниченный правый регуляризатор B. Оператор

$$B_1 - B_2 = (B_1 - B) + (B - B_2)$$

как сумма вполне непрерывных по уже доказанному операторов вполне непрерывен. □

Следствие 2. *Каждый ограниченный левый* (*соответственно, правый*) *регуляризатор ограниченного Φ-оператора одновременно служит его правым* (*соответственно, левым*) *регуляризатором.*

Используя технические средства и идеи уже проведенных доказательств можно доказать следующие теоремы:

Теорема 2. *Пусть $A : X \to Y$ — замкнутый нормально разрешимый оператор, $B \in \Phi_+(Y, Z)$ и $C \in \Phi_-(Z, X)$. Тогда операторы $BA : X \to Z$ и $AC : Z \to Y$ нормально разрешимы*

Теорема 3. *Из соотношений $A \in \Phi(X, Y)$, $B \in \Phi(Y, Z)$ и $\overline{D(B)} = Y$ следует, что $BA \in \Phi(X, Z)$ и $\operatorname{ind} BA = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$. При этом $\operatorname{ind} A$, индекс оператора A, равен $\alpha(A) - \beta(A)$.*

Теорема 4. *Пусть* $A \in \Phi(X, Y)$ *и* $T \in K(X, Y)$*. Тогда*

$$A + T \in \Phi(X, Y), \quad \operatorname{ind}(A + T) = \operatorname{ind} A.$$

Теорема 5. *Пусть* $A \in \Phi(X, Y)$*. Тогда существует такое число* $\rho > 0$*, что если* C *— линейный непрерывный оператор из* X *в* Y *с нормой* $\|C\| < \rho$*, то* $A + C \in \Phi(X, Y)$ *и* $\operatorname{ind}(A + C) = \operatorname{ind} A$*.*

Доказательства теорем 2–5 можно найти в [15].

§ 6. Сингулярные интегральные операторы и уравнения

Пусть Γ — гладкая замкнутая кривая на комплексной плоскости $x = x + iy$, делящая плоскость на две области: ограниченную внутреннюю Ω^+ и внешнюю Ω^-.

Гладкость означает, что кривая имеет непрерывную меняющуюся касательную в каждой точке и не имеет точек самопересечения.

На кривой Γ будем рассматривать пространство $H^\mu(\Gamma)$ — совокупность всех определенных на Γ комплекснозначных функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\mu, 0 < \mu \leqslant 1$:

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant A\,|t - t'|^\mu$$

для любых точек $t, t' \in \Gamma$ при некоторой (зависящей от φ) константе A. Норма в пространстве $H^\mu(\Gamma)$ определяется формулой:

$$\|\varphi\|_{H^\mu} = \sup_{t\in\Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{t,t'\in\Gamma} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t')|}{|t - t'|^\mu}.$$

С этой нормой множество функций $H^\mu(\Gamma)$ является не только банаховым пространством, но и алгеброй, т. е. если $\varphi, \psi \in H^\mu(\Gamma)$, то и $\varphi\psi \in H^\mu(\Gamma)$ и выполняется неравенство

$$\|\varphi\psi\|_{H^\mu} \leqslant \|\varphi\|_{H^\mu} \|\psi\|_{H^\mu}\,.$$

Эти утверждения, как и другие недоказанные в этом параграфе, можно найти вместе с доказательствами в книгах [16]–[19].

Пусть, далее, $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ есть пространство всех измеримых функций $\varphi(t)$, определенных на Γ, интегрируемых в степени p,

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\int\limits_\Gamma |\varphi(t)|^p\,|dt|\right)^{1/p}.$$

Для функций из $H^\mu(\Gamma)$ рассмотрим оператор Коши S:

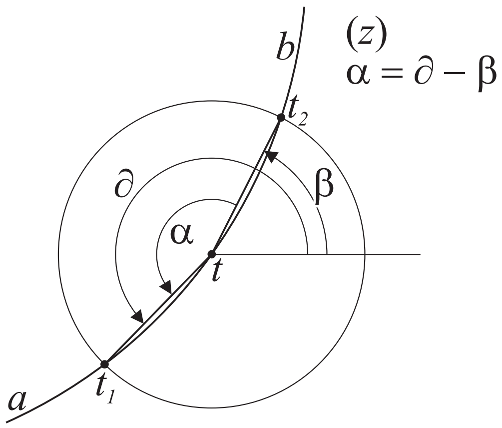

Рис. 1. К вычислению интеграла $S \cdot 1$

$$S\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Кривая Γ обходится против часовой стрелки (область Ω_+ остаётся слева при обходе). Если $z \notin \Gamma$, то $S\varphi(z)$ представляет как интеграл типа Коши функцию аналитическую как и Ω_+, так и в Ω_-. Если $z = t \in \Gamma$, то $S\varphi(z)$ следует понимать в смысле главного значения:

$$S\varphi(z) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad \Gamma_\varepsilon = \{z : |z - t| < \varepsilon\}.$$

Оператор S называется *сингулярным оператором Коши*. Он переводит пространство $H^\mu(\Gamma)$ в пространство $H^\mu(\Gamma)$ (теорема Племеля — Привалова), если $0 < \mu < 1$.

Предложение 1.

$$S(1) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = 1, \quad t \in \Gamma.$$

Доказательство. Проведём разрез комплексной области z вдоль некоторой кривой L, соединяющей t и ∞ (см. рис. 1). В односвязной области $(z) - L$ рассмотрим однозначную ветвь аналитической функции $\ln(z - t)$, она будет в этой области первообразной для $1/(z - t)$. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_{ab} - \Gamma_\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln(\tau - t)|_a^{t_1} + \ln(\tau - t)|_{t_2}^b = \ln \frac{b - t}{a - t} + \ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t}.$$

Здесь a и b — фиксированные точки на Γ, выделяющие часть кривой Γ_{ab}, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap B_\varepsilon(t)$. Имеем далее

$$\ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t} = \ln \frac{|t_1 - t|}{|t_2 - t|} + i\left[\arg(t_1 - t) - \arg(t_2 - t)\right].$$

Заметим, что $|t_1 - t| = |t_2 - t|$, а угол $\alpha \to \pi$, когда $\varepsilon \to 0$. Отсюда получаем

$$v.p. \int\limits_{\Gamma_{ab}} \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln \frac{b - t}{a - t} + i\pi.$$

Здесь символы $v.p.$ означают взятие главного значения сингулярного интеграла. $\square$

Предложение 2. *Имеют место формулы Сохоцкого — Племеля*

$$(S\varphi)^+(t) = \varphi(t) + S\varphi(t),$$

$$(S\varphi)^-(t) = -\varphi(t) + S\varphi(t),$$

где

$$(S\varphi)^+(t) = \lim_{z \to t,\ z \in\ \Omega^+} S\varphi(z),\ (S\varphi)^-(t) = \lim_{z \to t,\ z \in\ \Omega^-} S\varphi(z), \quad t \in \Gamma.$$

Доказательство. Рассмотрим предел $S\varphi(z)$ при стремлении z к точке t на Γ изнутри области Ω_+

$$\lim_{z \to t} \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \lim_{z \to t} \left[\frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau \right] + \lim_{z \to t} \frac{\varphi(t)}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

По теореме Коши интеграл во втором слагаемом равен $2\pi i$ (он равен нулю по той же теореме в случае $z \in \Omega^-$), и равен πi согласно предложению 1, если $z \in \Gamma$. Интеграл в первом слагаемом есть интеграл со слабой особенностью, а потому непрерывен по z во всем пространстве. Действительно, пусть z приближается к $t \in \Gamma$, находясь в Ω, по траектории, которая не касается Γ в точке t (важное условие). Введем обозначения: $\Gamma^1 = \Gamma \cap B_\varepsilon(t)$, $\Gamma^2 = \Gamma - B_\varepsilon(t)$. Проведем преобразования интеграла:

$$\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau = \int\limits_{\Gamma^2} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \int\limits_{\Gamma^1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \cdot \frac{\tau - t}{\tau - z} d\tau.$$

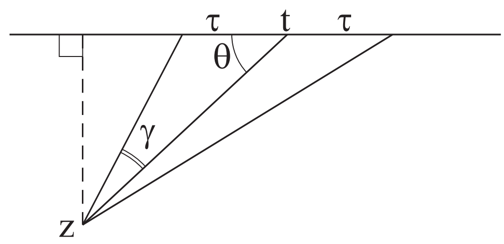

Рис. 2. К доказательству предложения 2

Функция $(\varphi(\tau)-\varphi(t))/(\tau-t)$ в силу условия Гёльдера суммируема на Г. Оценим интеграл:

$$\left|\int\limits_{\Gamma^1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\cdot\frac{\tau-t}{\tau-z}d\tau\right|\leqslant C\int\limits_{\Gamma^1}\frac{1}{|\tau-t|^{1-\mu}}\left|\frac{\tau-t}{\tau-z}\right|d\tau.$$

Для достаточно малых ε по теореме синусов (см. рис. 2)

$$\left|\frac{\tau-t}{\tau-z}\right|\leqslant 2\left|\frac{\sin\gamma}{\sin\theta}\right|,$$

где $(\pi/2)\geqslant\theta>0$, θ — угол, под которым z пересекает Г. Используя эти оценки, получаем

$$\left|\int\limits_{\Gamma^1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\cdot\frac{\tau-t}{\tau-z}d\tau\right|\leqslant\frac{C}{|\sin\theta|}\int\limits_{\Gamma^1}\frac{d\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}}.$$

Ввиду суммируемости функции $|\tau-t|^{\mu-1}$ и гладкости кривой Г заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{z\to t}\int\limits_{\Gamma^2}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\cdot\frac{\tau-t}{\tau-z}d\tau\right)\to 0.$$

С учетом этого имеем

$$(S\varphi)^+(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+2\varphi(t). \tag{6.1}$$

Аналогично,

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\varphi(t), \tag{6.2}$$

$$(S\varphi)^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}d\tau. \tag{6.3}$$

Вычитая равенство (6.2), последовательно из (6.1) и (6.3), получаем наше предложение. $\square$

С использованием формул Сохоцкого — Племеля доказывается

Предложение 3 (формула Пуанкаре — Бертрана). *Если функция $\varphi(t,\tau)$ по обеим переменным удовлетворяет условию Гёльдера* $|\varphi(t,\tau)-\varphi(t',\tau')| \leqslant A\left[|t-t'|^\mu + |\tau-\tau'|^\mu\right],\ \ 0<\mu\leqslant 1,\ \ t,\tau\in\Gamma,$ *то справедлива формула*

$$\int\limits_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\rho,\tau)}{\rho-\tau}d\rho = \int\limits_\Gamma d\rho\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\rho,\tau)}{(\tau-t)(\rho-\tau)}d\tau + \varphi(t,t). \tag{6.4}$$

Доказательство проводится с использованием уже изложенной техники рассуждений (см. [19], с. 68–71).

Предложение 4. *Для сингулярного оператора Коши S выполняется равенство*

$$S^2 = I. \tag{6.5}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi(t) = S\varphi(t)$. Применяя к ней повторно оператор S и пользуясь формулой (6.4), получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t}\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\tau_1} = \varphi(t) - \frac{1}{\pi^2}\int\limits_\Gamma \varphi(\tau)d\tau\int\limits_\Gamma \frac{d\tau_1}{(\tau_1-t)(\tau-\tau_1)} =$$

$$= \varphi(t) + \frac{1}{\pi^2}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}\left[\int\limits_\Gamma \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} - \int\limits_\Gamma \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}\right] = \varphi(t).$$

Формула (6.5) доказана. $\square$

Рассмотрим простейшее сингулярное уравнение

$$Ax(t) \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t). \tag{6.6}$$

Предположим, что $a(t), b(t), f(t) \in H_\mu(\Gamma)$. Теорема Племеля — Привалова утверждает, что оператор S является ограниченным во всех пространствах $H_\mu(\Gamma),\ 0<\mu<1$. Легко проверить также, что операторы умножения на $a(t)$ и $b(t)$ также ограничены в этих пространствах, следовательно, A — непрерывный оператор, переводящий $H_\mu(\Gamma)$ в $H_\mu(\Gamma),\ 0<\mu<1$.

Теорема 1. *Если* $a(t), b(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$, *то оператор* A *нётеров во всех пространствах* $H_\alpha(\Gamma)$, *где* $0 < \alpha < \mu/2$.

Доказательство. Рассмотрим оператор T_b:

$$T_b x = bSx - S(bx) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{b(t) - b(\tau)}{\tau - t} x(\tau) d\tau.$$

Ядро интеграла справа имеет слабую особенность, поэтому интеграл представляет вполне непрерывный оператор во всех пространствах $H_\alpha(\Gamma)$ с $\alpha < \mu/2$. Доказательство этого факта в технической части такое же, как и доказательство, проведенное нами для интегральных операторов со слабой особенностью в § 1, гл 3, и здесь опускается. Предположим, что $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, когда t пробегает Γ. Тогда

$$\begin{aligned}(a - bS)(a + bS) &= a^2 + abS - bSa - bSbS = \\ &= a^2 + b(aS - Sa) - b^2 + b(bS - Sb)S = \\ &= a^2 + bT_a - b^2 + bT_bS = a^2 - b^2 + T. \qquad (6.7)\end{aligned}$$

Здесь $T = bT_a + bT_bS$ — вполне непрерывный оператор в $H_\alpha(\Gamma)$, в преобразованиях использовали (6.5), a и b обозначают операторы $a(t)I$, $b(t)I$, соответствено. Из (6.7) следует, что оператор

$$B = \frac{1}{a^2(t) - b^2(t)}(a - bS)$$

будет двусторонним регуляризатором для оператора A. Остаётся сослаться на теорему 1 предыдущего параграфа. □

Глава 7
Численные методы решения интегральных уравнений

§ 1. Принцип сжатых отображений.

Пусть X — банахово пространство. Оператор A, переводящий X в X, называется оператором сжатия с коэффициентом сжатия q, если

$$\|Ax - Ay\| \leqslant q\|x - y\|,\ 0 < q < 1,\ \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

Теорема 1. *Пусть множество $M \subseteq X$ замкнуто, оператор сжатия A переводит M в M. Тогда оператор A имеет в M одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Определим функционал Φ на пространстве X:

$$\Phi(x) = ||x - Ax||\ \forall x \in X.$$

Пусть

$$\alpha = \inf_{x=M} \Phi,\ \alpha \geqslant 0,$$

и последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ минимизирует функционал Φ, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \alpha,\ x_n \in M.$$

Рассмотрим числа $\Phi(Ax_n)$:

$$\Phi(Ax_n) = \|Ax_n - A^2x_n\| \leqslant q\|x_n - Ax_n\| \Rightarrow \alpha \leqslant \Phi(Ax_n) \leqslant q\Phi(x_n).$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$, получим: $\alpha \leq q\alpha$, Но $q < 1$, а потому неравенство означает, что $\alpha = 0$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - Ax_n) = \theta. \tag{1.2}$$

Покажем, что последовательность x_n фундаментальна. Имеем:

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - Ax_n + Ax_n - Ax_m + Ax_m - x_m\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax_m\| + \|Ax_m - x_m\| \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(x_n) + \Phi(x_m) + q\|x_n - x_m\|.$$

Отсюда получаем оценку для $\|x_n - x_m\|$:

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{\Phi(x_n) + \Phi(x_m)}{1-q} \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Таким образом, последовательность x_n фундаментальна, и в силу полноты пространства X существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Из (1.2) получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$, или $a = Aa$, т. е. a — неподвижная точка. В силу замкнутости M получаем, что $a \in M$. Рассмотрим произвольно взятую неподвижную точку b оператора $A : b = Ab$. Тогда

$$a - b = Aa - Ab \Rightarrow \|a - b\| \leqslant q\|a - b\| \Rightarrow \|a - b\| = 0 \sim a = b. \ \square$$

Теорема 2. *Пусть A — оператор сжатия с коэффициентом сжатия q, удовлетворяющий оценке в точке $x_0 \in X$ $(r > 0)$:*

$$\|Ax_0 - x_0\| \leqslant r(1-q).$$

Тогда A переводит шар $\bar{B}_r(x_0)$ в себя и, следовательно, имеет в нем неподвижную точку.

Доказательство. Пусть $x \in \bar{B}_r(x_0)$. Проведем следующие оценки:

$$\|Ax - x_0\| \leqslant \|Ax - Ax_0\| + \|Ax_0 - x_0\| \leqslant q\|x - x_0\| + r(1-q) \leqslant r.$$

Таким образом, $A : \bar{B}_r(x_0) \to \bar{B}_r(x_0)$. Применяя предыдущую теорему, получаем доказываемое утверждение. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1, x_1 — произвольная точка пространства X. Тогда последовательность*

$$x_1, \ x_2 = Ax_1, \ x_3 = Ax_2, \ \ldots, x_n = Ax_{n-1}, \ \ldots$$

сходится к неподвижной точке оператора A.

Доказательство. Ясно, что

$$\Phi(x_{n+1}) = ||x_{n+1} - Ax_{n+1}|| = ||A^n x_1 - A^{n+1} x_1|| \leqslant$$

$$\leqslant q||A^{n-1}x_1 - A^n x_1|| \leqslant \ \ldots \ \leqslant q^n ||x_1 - Ax_1|| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ минимизирует Φ, а тогда из доказательства теоремы 1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — неподвижная точка оператора A. $\square$

Теорема 4. *Пусть* $A : X \to X$ *— линейный непрерывный оператор,* X *— банахово пространство. Тогда существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \rho$.

Доказательство. Пусть $\rho = \inf\limits_{n} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, $\rho \geqslant 0$. Фиксируем призвольно положительное ε и выберем m так, что $\sqrt[m]{\|A^m\|} - \rho \leqslant \varepsilon$. Пусть

$$M = \max(||A||, \sqrt[2]{\|A^2\|}, \dots, \sqrt[m-1]{\|A^{m-1}\|}).$$

Для произвольно натурального числа n имеем:

$$n \geqslant m \Rightarrow n = mk + l,\ 0 \leqslant l \leq m - 1$$

Проводим следующие оценки

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \sqrt[n]{\|A^{mk}\|\|A^l\|} \leqslant \left(\sqrt[m]{\|A^{mk}\|}\sqrt[m]{\|A^l\|}\right)^{\frac{m}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt[m]{\|A^{mk}\|}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\sqrt[m]{\|A^l\|}\right)^{\frac{m}{n}} \leqslant (\rho+\varepsilon)^{\frac{km}{n}} M^{\frac{l}{n}} \leqslant (\rho+\varepsilon) M^{\frac{l}{n}}, \text{ ибо } \frac{km}{n} \leqslant 1.$$

Итак, мы получили, что

$$\rho \leqslant \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant (\rho + \varepsilon) M^{\frac{l}{n}}.$$

Поскольку $M^{\frac{l}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$, то для достаточно больших n имеем

$$\rho \leqslant \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \rho + 2\varepsilon.$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \rho$. $\square$

Рассмотрим ряд

$$I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \dots + \lambda^n A^n + \cdots \tag{1.3}$$

Мы доказали, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\lambda|^n \|A^n\|} = |\lambda|\rho$. Легко показать, что, если $|\lambda|\rho < 1$, то ряд (1.3) сходится, а если $|\lambda|\rho > 1$, то ряд (1.3) расходится.

Действительно. Если $|\lambda|\rho < 1$, то ряд (1.3) по норме мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n \|A^n\|$, который по признаку Коши сходится.

Если $|\lambda|\rho > 1$, $(\rho > \frac{1}{|\lambda|})$, $|\lambda| \neq 0$, то необходимое условие сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda|^n \|A^n\| = 0$, не выполняется, ибо $\sqrt[n]{|\lambda^n|\|A^n\|} \geqslant \rho|\lambda|, \Rightarrow$ $\|\lambda^n A^n\| \geqslant \rho^n \lambda^n > 1$.

Случай $|\lambda|\rho = 1$ исследуется особо.

Число $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}}$ называется радиусом сходимости ряда (1.3), и с ним формулируются результаты сходимости, как и для числовых степенных рядов:

если $|\lambda| < R$, ряд (1.3) сходится,

если $|\lambda| > R$, ряд (1.3 расходится.

Число ρ, обратное к радиусу сходимости, называется спектральным радиусом оператора A. Довольно просто доказываются следующие свойства спектрального радиуса:

1) $\rho \leqslant \|A\|$;
2) если $|\lambda| > \rho$, то существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$;
3) если A вполне непрерывный оператор, то спектральный радиус равен $|\lambda_0|$, где λ_0 — наибольшее по модулю собственное значение оператора A.

Теорема 5. *Пусть $A\colon X \to X$ линейный непрерывный оператор. Тогда существует эквивалентная норма в X, при которой норма оператора A сколь угодно близка к его спектральному радиусу.*

Доказательство. Пусть $\|x\|$ — заданная норма на X. Определим новую норму $\|x\|_H$ равенством

$$\|x\|_H = (\rho+\varepsilon)^{n-1}\|x\| + (\rho+\varepsilon)^{n-2}\|Ax\| + (\rho+\varepsilon)^{n-3}\|A^2x\| + \cdots \\ \cdots + \|A^{n-1}x\|, \quad (1.4)$$

где $\varepsilon > 0$. Свойства нормы легко проверяются, а также это, действительно, норма, эквивалентная старой. Из (1.4) следует, что

$$\|Ax\|_H = (\rho+\varepsilon)^{n-1}\|Ax\| + (\rho+\varepsilon)^{n-2}\|A^2x\| + \cdots + \|A^nx\| =$$
$$= (\rho+\varepsilon)[(\rho+\varepsilon)^{n-2}\|Ax\| + (\rho+\varepsilon)^{n-3}\|A^2x\| + \cdots + \|A^{n-1}x\|] + \|A^nx\|.$$

При достаточно больших n по определению спектрального радиуса имеют место оценки:

$$\|A^nx\| \le \|A^n\|\|x\| \le (\rho+\varepsilon)^n\|x\|, \ (\|A^n\|)^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho+\varepsilon, \Rightarrow \|A^n\| \leqslant (\rho+\varepsilon)^n.$$

Используя оценку с таким выбором n, получаем

$$\|Ax\|_H \leqslant (\rho+\varepsilon)[(\rho+\varepsilon)^{n-2}\|Ax\| \ldots] + (\rho+\varepsilon)^n\|x\| \le (\rho+\varepsilon)\|x\|_H.$$

Таким образом, $\|A\|_H \leqslant \rho + \varepsilon$. С другой стороны, так как $\|x\|_H \sim \|x\|$, то и норма $\|A\|_H$ эквивалентна $\|A\|$, а потому $\rho = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|_H} \leqslant \|A\|_H$. Таким образом, $\rho \le \|A\|_H \le \rho+\varepsilon$. $\square$

Следствие 1. *Пусть линейный ограниченный оператор A действует в банаховом пространстве X и пусть $\rho(A) < 1$. Тогда итерационный процесс $x_{n+1} = Ax_n$ сходится и дает решение уравнения $Ax = x$.*

Примеры применения

1. Интегральное уравнение Вольтерра, $x(t) = Ax(t)$,

$$Ax(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds.$$

Предполагаем, что k непрерывна по

$$t, s : k \in C([0,1] \times [0,1]), 0 \leqslant t \leqslant 1, \ x(s) \in C([0,1]).$$

Докажем, что спектральный радиус оператора Вольтерра равен нулю. В силу непрерывности функции $k(t,s)$ в замкнутой области существует константа a такая, что

$$|k(t,s)| \leqslant a \ \forall\, t, s \in [0,1].$$

Имеем

$$A^2x(\tau) = \int_0^\tau k(\tau,t) \int_0^t k(t,s)x(s)dsdt,$$

$$|A^2x(\tau)| \leqslant a^2 \int_0^\tau \int_0^t |x(s)|dsdt \leqslant a^2 \left(\int_0^\tau \int_0^t dsdt \right) \|x\|.$$

Аналогично получаем

$$|A^n x(t_n)| \leq a^n \|x\| \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \ldots \int_0^{t_1} dsdt_1 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= a^n \|x\| \int_0^{t_n} (t_n - t)^{n-1} dt/(n-1)! = a^n \|x\| \frac{t_n^n}{n!} \leqslant \frac{a^n}{n!} \|x\|.$$

Отсюда вытекает, что $\|A^n\| \leqslant a^n/n!$ и

$$\rho(A) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Как следствие получаем, что уравнение Вольтерра обладает решением и его можно получить методом последовательных приближений.

2. Рассмотрим теперь нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$x(t) = \int\limits_0^t k(t,s)f(s,x(s))ds + \phi(t) \equiv Ax(t),$$

где $k(t,s) \in C[0;1] \times C[0;1]$, $f(s,x) \in C[0;1] \times C[-\infty;+\infty]$;

$$\phi(t),\ x(s) \in C[0;1];\ |k(t,s)| \leqslant a\ \forall\, t,s \in [0;1].$$

Пусть по второму аргументу функции f выполняется условие Липшица:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y.$$

Введем новую норму в пространстве $C[0;1]$, полагая

$$\|x(t)\|_y = \max_{t\in[0;1]}(e^{-L_1 t}|x(t)|),$$

где $L_1 > 0$ и подлежит последующему определению. Легко показать эквивалентность новой нормы обычной норме пространства $C[0;1]$.

Проведем оценки, выявляющие, когда оператор A будет оператором сжатия в новой норме:

$$\|Ax(t) - Ay(t)\|_H = \max\left\{e^{-L_1 t}\left|\int\limits_0^t k(t,s)(f(s,x(s)) - f(s,y(s)))ds\right|\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{e^{-L_1 t}\int\limits_0^t aL|x(s)-y(s)|ds\right\} \leq$$

$$\leq aL\max_t\left\{e^{-L_1 t}\int\limits_0^t e^{L_1 s}(e^{-L_1 s}|x(s)-y(s)|ds)\right\} \leq$$

$$\leq aL\|x-y\|_y \max_t \int\limits_0^t e^{L_1(s-t)}ds \leq \frac{aL}{L_1}\|x-y\|_y.$$

Видим, что когда $\frac{aL}{L_1} < 1$, нелинейный оператор Вольтера будет оператором сжатия и решение соответствующего уравнения можно получить методом последовательных приближений.

§ 2. Вычисление собственных векторов и функций оператора по методу Келлога

Рассмотрим называемый метод Келлога итерационный процесс нахождения собственных чисел и функций оператора

$$Ay(s) = \int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds,$$

действующего в пространстве $L_2(a,b)$. Условия на K:

1) $K(x,s)$ — вещественная, непрерывная на $[a,b]\times[a,b]$ функция;

2) $K(x,s) = K(s,x)\ \forall x,s\in[a,b]$;

3) $K(x,s)\not\equiv 0$;

Напомним: λ — характеристическое число, если $\exists\ y(s)\not\equiv 0$ и $\lambda Ay = y$. Отсюда следует, что $\lambda\neq 0$, то $Ay = (1/\lambda)y$, и $1/\lambda$ — собственное число.

Рассмотрим следующий итерационный процесс

$$y_0\in C[a,b],\ y_1(x) = Ay_0(x),\ y_2(x) = Ay_1(x) = A^2y_0(x),\ \ldots,$$
$$\ldots, y_n(x) = A^ny_0(x),\ \ldots,$$

где y_0 — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $Ay_0(x)\not\equiv 0$. Для последовательности $\{y_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, при $p\leqslant n$ имеем

$$(y_{n+p}, y_{n-p}) = \int\limits_a^b y_{n+p}(s)y_{n-p}(s)ds = (Ay_{n+p-1}, y_{n-p}) =$$
$$= (y_{n+p-1}, A^*y_{n-p}) = (y_{n+p-1}, Ay_{n-p}) =$$
$$= (y_{n+p-1}, y_{n-p+1}) = \cdots = (y_n, y_n).$$

Симметрия ядра обеспечивает, что A — самосопряженный оператор: $A = A^*$. Итак, мы доказали равенство

$$(y_{n+p}, y_{n-p}) = (y_n, y_n). \tag{2.1}$$

Последовательность $\{y_n\}$ преобразуем:

$$\|y_n\|_{L_2(a,b)} = N_n,\quad \varphi_n = \frac{y_n(x)}{N_n},\quad \|\varphi_n\| = 1.$$

Оператор Фредгольма A можно рассматривать как оператор со слабой особенностью, где показатель особенности α сколь угодно мал:

$$Ay = \int_a^b \frac{K(x,s)|x-s|^\alpha}{|x-s|^\alpha} y(s)ds = \int_a^b \frac{\tilde{K}(x,s)}{|x-s|^\alpha} y(s)ds.$$

Отсюда, как было ранее показано, следует, что A — вполне непрерывный оператор, переводящий $L_2(a,b)$ в $C(a,b)$.

Перепишем $y_{n+1} = Ay_n$ как $N_{n+1}\varphi_{n+1}(x) = N_n A\varphi_n(x)$. Следовательно, следующая формула рекурентно определяет $\varphi_i(x)$:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = M_{n+1}A\varphi_n(x), \\ M_{n+1} = \dfrac{N_n}{N_{n+1}}. \end{cases}$$

Из (2.1), применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$N_n^2 \leqslant N_{n+p}N_{n-p}, \quad \frac{N_{n-1}}{N_n} \geqslant \frac{N_n}{N_{n+1}}, \quad M_n \geqslant M_{n+1}.$$

Итак, M_n — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, а потому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} M_n = M \geqslant 0$. Оценим M:

$$N_n^2 = (y_n, y_n) = (Ay_{n-1}, y_n) = \left(\int_a^b K(x,s)y_{n-1}(s)ds, y_n(x) \right) =$$

$$\int_a^b\int_a^b K(x,s)y_{n-1}(s)y_n(x)dsdx \leqslant \left[\int_\Omega K^2(x,s)dxds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega y_n^2(x)y_{n-1}^2(s)dxds \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$C = \left[\int_\Omega K^2(x,s)dxds \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \Omega = [a,b]\times[a,b], \quad N_n^2 \leqslant CN_nN_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ N_n \leqslant CN_{n-1} \Rightarrow M_n \geqslant \frac{1}{C} > 0, \quad M = \lim M_n > \frac{1}{C}.$$

Поскольку $\{\varphi_n\}$ ограничена, то $\{A\varphi_n\}$ — относительно компактное множество. Значит, из $\{A\varphi_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим последовательность, определенную четными индексами $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\{M_{2k+1}A\varphi_{2k}\} = \{\varphi_{2k+1}\}$, и соответствующую сходящуюся подпоследовательность $\{\varphi_{2k_j+1}\}$, $j = 1, 2, \ldots$.

$$\exists \lim_{j\to\infty} \varphi_{2k_j+1} = \overline{\varphi} \quad \text{в} \quad C[a, b].$$

Пусть $m, l \in \{2k_j + 1\}$ и $\|\varphi_l - \varphi_m\| \leqslant \varepsilon$, если $l, m \geqslant N_\varepsilon$ (определение фундаментальности). Имеем:

$$J_{l,m} \equiv \|\varphi_l - \varphi_m\|^2 = (\varphi_l - \varphi_m, \varphi_l - \varphi_m) = 2 - 2\underbrace{(\varphi_l, \varphi_m)}_{\leqslant 1} \Rightarrow 2(\varphi_l, \varphi_m) = 2 - J_{l,m},$$

пусть $l > m$, $(\varphi_{l-2}, \varphi_m) = \frac{1}{2}(2 - J_{l-2,m})$. Отношение двух таких последовательных величин преобразуем:

$$\frac{(\varphi_l, \varphi_m)}{(\varphi_{l-2}, \varphi_m)} = \frac{2 - J_{l,m}}{2 - J_{l-2,m}} = \frac{(y_1, y_m)N_{l-2}N_m}{N_l N_m (y_{l-2}, y_m)} = \frac{(y_{l-\frac{l-m}{2}}, y_{m+\frac{l-m}{2}})N_{l-2}}{N_l(y_{l-2-\frac{l-2-m}{2}}, y_{m+\frac{l-2-m}{2}})} =$$

$$= \frac{N^2_{\frac{l+m}{2}} N_{l-2}}{N_l N^2_{\frac{l+m-2}{2}}} = \frac{N_{l-2}N_{l-1}}{M^2_{\frac{l+m}{2}} N_{l-1} N_l} = \frac{M_{l-1}M_l}{M^2_{\frac{l+m}{2}}} \leqslant 1.$$

Заметим, что $l - 2 \geqslant m \Rightarrow l - 1 \geqslant \frac{l+m}{2} \Rightarrow M_{\frac{l+m}{2}} \geqslant M_{l-1}$. Отсюда

$$\frac{2 - J_{l,m}}{2 - J_{l-2,m}} \leqslant 1 \Rightarrow J_{l,m} \geqslant J_{l-2,m} \geqslant 0.$$

Аналогично доказываем, что $J_{l,m+2} \leqslant J_{l,m}$. В итоге, получаем, что для нечетных i, j, $m \leqslant i < j \leqslant l$,

$$J_{j,i} \leqslant J_{l,m} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, вся последовательность $\{\varphi_k\}$ (k нечетно) фундаментальна, и потому существует $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k+1} = \overline{\varphi}$. Аналогично исследуем последовательность $\{\varphi_{2i}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, и эта последовательность также сходится: $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k} = \overline{\overline{\varphi}}$.

В равенстве $M_{n+1}A\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x)$ перейдем к пределу, полагая вначале $n = 2k$, $k \to \infty$; затем $n = 2k + 1$, $k \to \infty$. Получаем

$$MA\overline{\overline{\varphi}}(x) = \overline{\varphi}(x) \quad (n = 2k), \quad MA\overline{\varphi}(x) = \overline{\overline{\varphi}}(x) \quad (n = 2k + 1) \Rightarrow$$

$$MA(MA\overline{\overline{\varphi}}) = \overline{\overline{\varphi}} \Rightarrow M^2A^2\overline{\overline{\varphi}} - \overline{\overline{\varphi}} = \theta, (M^2A^2 - I)\overline{\overline{\varphi}} = \theta,$$

$$(MA + I)(MA - I)\overline{\overline{\varphi}} = 0.$$

Возможны два случая:

1) $(MA - I)\overline{\overline{\varphi}} = 0 \Rightarrow \overline{\overline{\varphi}}$ — собственный вектор, M — характеристическое число, в этом случае $\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi}$;

2) $(MA - I)z = 0 \Rightarrow z = (MA - I)\overline{\overline{\varphi}} \neq 0$, z — собственный вектор, $-M$ — характеристическое число.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Итерационный процесс Келлога построения функций φ_n приводит к вычислению характеристического числа и соответствующей собственной функции: если $\overline{\varphi} = \overline{\overline{\varphi}}$, то собственной функцией является $\overline{\varphi}$, если $\overline{\varphi} \neq \overline{\overline{\varphi}}$, то собственной функцией является $\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}}$, где $\overline{\varphi} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k+1}$, $\overline{\overline{\varphi}} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k}$.*

Пример. Рассматривается уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (-e^{x+s}) y(s) ds.$$

Полагаем $y_0(x) \equiv 1$. Тогда

$$y_1(x) = -\int_0^1 e^{x+s} ds = -e^x \int_0^1 e^s ds = -e^x(e - 1),$$

$$y_2(x) = Ay_1 = -\int_0^1 e^{x+s}(-e^s)(e-1)ds = e^x(e-1)\left(\left.\frac{e^{2s}}{2}\right|_0^1\right) =$$

$$= e^x(e-1)\frac{1}{2}(e^2 - 1),$$

$$y_3(x) = Ay_2 = (-1)\int_0^1 e^{x+s} y_2(s) ds = (-1)\frac{1}{4}(e-1)(e^2-1)e^x,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y_n(x) = Ay_{n-1} = (-1)^n (e-1) e^x \left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Согласно теореме 1 нужно сосчитать $N_n = \|y_n\|$, M_n, φ_n:

$$N_n^2 = \int_0^1 y_n^2(x) dx = (e-1)^2 \left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{2n-2} \int_0^1 e^{2x} dx =$$

$$= (e-1)^2 \left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{2n-2} \frac{1}{2}(e^2-1), \quad \varphi_n = \frac{1}{e^2-1} e^x (-1)^n,$$

$$M_n^2 = \left(\frac{N_{n-1}}{N_n}\right)^2 = \left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{2n-4} \Big/ \left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{2n-2} = \left(\frac{2}{e^2-1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \lim_{n\to\infty} M_n = \frac{2}{e^2-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{2i} = \frac{1}{e^2-1} e^x = \overline{\overline{\varphi}}(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{2i-1} = -\frac{1}{e^2-1} e^x = \overline{\varphi}(x).$$

$\overline{\varphi} \neq \overline{\overline{\varphi}} \Rightarrow$ имеет место второй случай.

Характеристическое число есть $-\lambda = \dfrac{2}{1-e^2}$. Собственный вектор есть $\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} = \dfrac{2}{e^2-1} e^x$. Итак, характеристическое число $\lambda = -\dfrac{2}{1-e^2}$, собственная функция $y = e^x$. Полученный результат легко проверить непосредственными выкладками.

§ 3. Вычисление других собственных функций и собственных чисел

Рассмотрим уравнение, определяющее характеристические числа и функции, $y(x) = \lambda A y(x)$, где

$$Ay(s) = \int_a^b K(x,s) y(s) ds, \quad K(x,s) \text{ непрерывна}, \quad K(x,s) = K(s,x).$$

Пусть мы нашли характеристическое число λ_1 и собственную функцию $y_1(x)$,

$$\int_a^b y_1^2(x) dx = 1, \quad y_1(x) = \lambda_1 A y_1(x), \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Рассмотрим оператор с ядром

$$K_2(x,s) = K(x,s) - \frac{y_1(x) y_1(s)}{\lambda_1}, \quad A_2 y(s) = \int_a^b K_2(x,s) y(s) ds.$$

Лемма 1. *Собственными функциями оператора A_2 в точности являются все собственные функции оператора $A_1 = A$, ортогональные y_1, с теми же характеристическими числами.*

Доказательство. Пусть y_2 — собственный вектор оператора $A_2 : \lambda_2 A_2 y_2 = y_2$. Имеем:

$$(y_2, y_1) = \int\limits_a^b y_2(x)y_1(x) = \int\limits_a^b \left[\lambda_2 \int\limits_a^b K_2(x,s)y_2(s)ds\right] y_1(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \lambda_2 \int\limits_a^b \left[K(x,s)y_2(s) - \frac{y_1(x)y_1(s)}{\lambda_1} y_2(s)\right] dsy_1(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \lambda_2 \int\limits_a^b \left[K(x,s)y_1(x)dx\right] y_2(s)ds - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int\limits_a^b y_1^2(x)dx \int\limits_a^b y_1(s)y_2(s)ds =$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_1, y_2) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(y_1, y_2) = 0.$$

Докажем, что y_2 — собственный вектор оператора A (т. е. $\lambda_2 A y_2 = y_2$):

$$\lambda_2 \int\limits_a^b \left[K(x,s) - \frac{y_1(x)y_1(s)}{\lambda_1}\right] y_2(s)ds =$$

$$= \lambda_2 \int\limits_a^b K(x,s)y_2(s)ds - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}{}_1(x) \int\limits_a^b y_1(s)y_2(s)ds = \lambda_2 A y_2 = y_2.$$

Легко проверить, что обратное также верно: если y_2 собственный вектор оператора A, ортогональный y_1, то y_2 — собственный вектор оператора A_2 с тем же характеристическим числом. □

Из леммы следует

Теорема 1. *Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — ортонормированная система собственных функций оператора A:*

$$\lambda_i A y_i(x) = y_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad (y_i, y_j) = \delta_{i,j}, \quad \lambda_i \neq 0.$$

Возьмем оператор A_{n+1} с ядром

$$K_{n+1}(x,s) = K(x,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i}, \quad A_{n+1}(y) = \int\limits_a^b K_{n+1}(x,s)y(s)ds.$$

Тогда собственными векторами оператора A_{n+1} будут в точности собственные векторы оператора A, которые ортогональны к системе $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$, с теми же характеристическими числами.

Итак, процесс Келлога позволяет находить не одно, а целый ряд собственных функций и характеристических чисел, а также позволяет полностью описать последние в случае интегральных операторов с вырожденными ядрами.

Определение. *Интегральный оператор*

$$Ay(s) = \int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds$$

имеет вырожденное ядро, если $K(x,s)$ имеет вид:

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{m} \Omega_i(x)\omega_i(s).$$

Теорема 2. *Интегральный оператор с вырожденным ядром имеет конечное число характеристических чисел. Если у интегрального оператора ядро $K(x,s)$ симметрично и оператор имеет конечное число характеристических чисел, то ядро этого оператора вырожденное.*

Доказательство.

1. Пусть верно, что A есть оператор с вырожденным ядром, λ — характеристическое число оператора A, и ему соответсвует собственный вектор $y(x)$. Тогда

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b \sum_{i=1}^{m} \Omega_i(x)\omega_i(s)y(s)ds = \lambda \sum_{i=1}^{m} \Omega_i(x)c_i, \tag{3.1}$$

где $c_i = \int\limits_a^b \omega_i(s)y(s)ds$. Таким образом, $y(x)$ — линейная комбинация функций $\Omega_i(x)$. Умножим (3.1) на $\omega_k(x)$ и проинтегрируем, получим:

$$c_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda c_i \int\limits_a^b \Omega_i(x)\omega_k(x)dx. \tag{3.2}$$

Уравнения (3.2) представляет систему линейных однородных уравнений для определения c_k:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.3}$$

где

$$a_{ik} = \begin{cases} \lambda \int\limits_a^b \Omega_i(x)\omega_k(x)dx, & i \neq k, \\ \lambda \int\limits_a^b \Omega_i(x)\omega_k(x)dx - 1, & i = k. \end{cases}$$

Система (3.3) имеет ненулевое решение, так как не все $c_i = 0$. Таким образом, определитель системы (3.3) равен нулю. Получаем алгебраическое уравнение для опеределения λ степени m. Итак, оператор A имеет не больше, чем m характеристических чисел.

2. Докажем, что если у оператора A конечное число m характеристических чисел, то его ядро симметрично. Рассмотрим ядро

$$\widetilde{K}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i(x) y_i(s)}{\lambda_i},$$

где y_i — собственная функция для λ_i, $\|y_i\|_{L_2} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если $\widetilde{K}(x, s) \not\equiv 0$, то к интегральному оператору A с ядром $\widetilde{K}$ можно применить метод Келлога для нахождения еще одного собственного числа $\lambda_{m+1} \neq 0$ с собственной функцией y_{m+1}. Ясно, что λ_{m+1} не принадлежит $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Противоречие, так как всего имеется m характеристических чисел. Таким образом $\widetilde{K}(x, s) \equiv 0$. $\square$

Примеры вычисления характеристических чисел для вырожденного ядра

$$\text{Пример 1:} \quad y(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x - s) y(s) ds, \quad K(x, s) \equiv x - s,$$

$$y(x) = \lambda x \int\limits_0^1 y(s) ds - \lambda \int\limits_0^1 s y(s) ds = ax + b,$$

$$ax + b = \lambda \int_0^1 (x-s)(as+b)ds = \lambda x \int_0^1 (as+b)ds -$$

$$-\lambda \int_0^1 (as^2 + bs)ds = \lambda x \left(\frac{a}{2} + b\right) - \lambda \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \lambda \left(\dfrac{a}{2} + b\right), \\ b = -\lambda \left(\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} a \left(\dfrac{\lambda}{2} - 1\right) + b\lambda = 0, \\ a\dfrac{\lambda}{3} + b \left(\dfrac{\lambda}{2} + 1\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{2} - 1 & \lambda \\ \dfrac{\lambda}{3} & \dfrac{\lambda}{2} + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = \sqrt{12}i, \quad \lambda_2 = -\sqrt{12}i.$$

Пример 2: $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x^2 s^2 - 1) y(s) ds,$

$$ax^2 + b = \lambda \int_0^1 (x^2 s^2 - 1)(as^2 + b)ds = \lambda x^2 \int_0^1 s^2 (as^2 + b)ds -$$

$$-\lambda \int_0^1 (as^2 + b) = \lambda x^2 \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{3}\right) - \lambda \left(\frac{a}{3} + b\right),$$

$$\begin{cases} a = \lambda \left(\dfrac{a}{5} + \dfrac{b}{3}\right), \\ b = -\lambda \left(\dfrac{a}{3} + b,\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} a \left(\dfrac{\lambda}{5} - 1\right) + b\dfrac{\lambda}{3} = 0, \\ -a\dfrac{\lambda}{3} - b\,(\lambda + 1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{5} - 1 & \dfrac{\lambda}{3} \\ \dfrac{-\lambda}{3} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{14}}{2}.$$

Пример 3: $y(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \cos(x)\sin(x) y(s) ds.$

$$a\cos(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x)\sin(s) a\cos(s) ds =$$

$$\lambda\cos(x)\int\limits_0^\pi \cos(s)\sin(s)ads = \lambda\cos(x)\int\limits_0^\pi \frac{\sin(2s)}{4}ad(2s) =$$

$$= \lambda\cos(x)\left(-\frac{a}{4}\left(\cos(2s)|_0^\pi\right)\right).$$

Отсюда следует, что $a = 0$, а потому характеристических чисел нет.

Интегральные операторы с вырожденными ядрами легко исследуются. Поэтому встает вопрос, когда для оператора можно взять подходящее приближение, имеющее вырожденное ядро. Следующий параграф посвящается этому вопросу.

§ 4. Операторы Гильберта — Шмидта

Переходим к рассмотрению одного класса интегральных операторов, которые можно по операторной норме сколь угодно точно приближать интегральными операторами, имеющими вырожденные ядра.

Рассмотрим пространство $L^2(a,b) = H$. В этом пространстве задается интегральный оператор $g(x) = Kf(x)$ следующей формулой:

$$g(x) = \int\limits_b^a K(x,s)f(s)ds, \tag{4.1}$$

где ядро $K(x,s)$ удовлетворяет условию:

$$\iint\limits_D K^2(x,s)dxds < \infty, \quad D = (a,b)\times(a,b). \tag{4.2}$$

Оператор вида (4.1) с условием (4.2) на ядро называется интегральным оператором Гильберта — Шмидта. Интервал (a,b) может быть бесконечным

Оператор переводит H в H и является ограниченным, так как для почти всех x имеем:

$$|g(x)| \leqslant \left\{\int\limits_a^b K^2(x,s)ds\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_a^b f^2(s)ds\right\}^{\frac{1}{2}},$$

использовали неравенство Коши — Буняковского и теорему Фубини. Интегрируем полученное неравенство, возведя его предварительно в квадрат:

$$\int\limits_a^b g^2(x)dx \leqslant \int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,s)dsdx\|f\|^2, \quad \|f\|^2 = \int\limits_a^b f^2(s)ds.$$

Обозначив

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,s)dsdx \equiv C < \infty,$$

получаем $\|g\| \leqslant \sqrt{C}\|f\|$. Отсюда следует, что K — ограниченный оператор, переводящий $L^2(a,b)$ в себя.

Оператор Гильберта — Шмидта допускает абстрактную характеристику (только в терминах гильбертова пространства).

Пусть H — произвольное гильбертово пространство. Положим, что оно сепарабельное (т. е. обладает счетным базисом). Пусть дан ограниченный линейный оператор $A : H \to H$. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ два произвольно взятых ортонормированных базиса в H. Пусть, далее, для оператора A выполнено условие:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}(Af_i, e_j)^2 < \infty. \tag{4.3}$$

Сумма, стоящая в левой части неравенства (4.3) не зависит от выбора базисов $\{f_i\}$ и $\{e_j\}$. Для доказательства используем уравнение замкнутости: если $x \in H,\ x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j e_j$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^2 = \|x\|^2$. Имеем:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}(Af_i, e_j)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(Af_i, e_j)^2\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\|Af_i\|^2.$$

Отсюда видно, что сумма в неравенстве (4.3) не зависит от выбора базиса $\{e_j\}$. С другой стороны:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}(Af_i, e_j)^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty}(f_i, A^*e_j)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(f_i, A^*e_j)^2\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\|A^*e_j\|^2.$$

Отсюда следует, что сумма не зависит от выбора $\{f_i\}$.

Таким образом, для любого выбора базисов сумма в неравенстве (4.3) будет одна и та же.

Пусть

$$N^2(A) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (Af_i, e_j)^2. \tag{4.4}$$

Назовем$N(A)$ абсолютной нормой оператора A. Рассмотрим некоторые свойства абсолютной нормы.

1. Величина

$$N(A) = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} (Af_i, e_j)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

действительно, является нормой.

Доказательство. Аксиомы нормы $N(A) \geqslant 0$, $N(cA) = |c|N(A)$ тривиально следуют из определения абсолютной нормы. Проверим неравенство треугольника, т. е. $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$. Имеем:

$$N(A+B) = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} ((A+B)f_i, e_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Af_i + Bf_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применим неравенство треугольника в пространстве сходящихся последовательностей l_2:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Получим

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Af_i + Bf_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Af_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Bf_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= N(A) + N(B) < \infty.$$

Таким образом, неравенство треугольника выполнено и $N(A)$, действительно, является нормой. $\square$

2. $N(A) = N(A^*)$. Следует непосредственно из определения (4.4).

3. Обычная норма оператора не превосходит абсолютную:

$$\|A\| \leqslant N(A).$$

Доказательство. По определению

$$\|A\| = \sup_{f \neq \theta} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} \|Af\|.$$

Всегда можно выбрать f такое, что $\|f\| = 1$ и $\|Af\| \geqslant \|A\| - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Дополним это f до ортонормированного базиса: $f_1 = f, f_2, f_3, \ldots$ В этом случае:

$$N^2(A) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (Af_i, e_j)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Af_i\|^2 \geqslant \|Af\|^2.$$

Отсюда следует, что $N(A) \geqslant \|Af\| \geqslant \|A\| - \varepsilon$. Так как ε любое, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\|A\| \leqslant N(A)$.

4. Если C — непрерывный оператор, A — оператор с конечной абсолютной нормой, то операторы CA и AC также обладают конечной абсолютной нормой.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|CAf_i\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|C\|^2 \|Af_i\|^2 = \|C\|^2 N^2(A) < \infty.$$

5. Линейные операторы с конечной абсолютной нормой образуют линейное нормированное пространство.

6. Если $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность операторов, имеющих конечную абсолютную норму, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} N(A_k) < \infty$, то операторный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится к оператору A, при этом имеет место неравенство $N(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} N(A_k)$.

Доказательство. Поскольку абсолютная норма мажорирует операторную, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится к оператору A по операторной норме. Далее, имеем

$$\sum_{i=1}^{Q} \left\| \left(\sum_{k=1}^{M} A_k \right) f_i \right\|^2 \leqslant N^2 \left(\sum_{k=1}^{M} A_k \right) \leqslant \left[\sum_{k=1}^{M} N(A_k) \right]^2.$$

Переходя к пределу, сначала по M, затем по Q, получаем

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \|Af_i\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} N(A_k). \ \square$$

7. Если для оператора A абсолютная норма $N(A) < \infty$, то A — вполне непрерывный оператор.

Доказательство.

$$N^2(A) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2,$$

где $e_1, \ldots, e_j, \ldots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\sum\limits_{j=n_\varepsilon+1}^{\infty} \|A^* e_j\| \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим оператор B_ε, который определим так:

$$B_\epsilon f = \sum_{j=1}^{n_\epsilon} (Af, e_j) e_j. \tag{4.5}$$

По построению B_ε — линейный ограниченный оператор, причем $\|B_\varepsilon f\|^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} |(Af, e_j)|^2 \leqslant n_\epsilon \|Af\|^2$ (учли, что $|(Af, e_j)| \leqslant \|Af\| \|e_j\|$). Таким образом, $\|B_\varepsilon f\| \leqslant \sqrt{n_\varepsilon} \|A\| \|f\|$. Оператор B_ε конечномерный, так как любое его значение есть линейная комбинация конечного числа векторов (см. (4.5)). А непрерывный конечномерный оператор является вполне непрерывным: он переводит ограниченное множество в относительно компактное.

Оценим величину $\|A - B_\varepsilon\|$:

$$\|A - B_\varepsilon\| \leqslant N(A - B_\varepsilon) = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} ((A - B_\varepsilon) f_i, e_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n_{\varepsilon+1}}^{\infty} (Af_i, e_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=n_{\varepsilon+1}}^{\infty} \|A^* e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

по выбору n_ε, при этом учли, что

$$(B_\varepsilon f_i, e_j) = \begin{cases} 0, j > n_\varepsilon, \\ (Af_i, e_j), j \leqslant n_\varepsilon. \end{cases}$$

Итак, $\|A - B_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. Поэтому оператор A по норме может быть приближен сколь угодно точно вполне непрерывным оператором, тогда, как известно, он сам — вполне непрерывный. $\square$

8. Операторы с конечной абсолютной нормой образуют алгебру, то есть, если $N(A) < \infty$ и $N(B) < \infty$, то и $N(AB) < \infty$ (см. [20], с. 96– 103).

Теорема 1. *Класс операторов Гильберта — Шмидта исчерпывает класс всех операторов с конечной абсолютной нормой в пространстве $L_2(a,b)$.*

Доказательство. 1. Пусть K — оператор Гильберта — Шмидта. Выберем ортонормированный базис в $L_2 : \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ Имеем

$$(K\varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\varphi_j(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\Phi_{ij}(s,x)dsdx,$$

где $\Phi_{ij}(s,x) = \varphi_i(s)\varphi_j(x),\ i,j = 1,2,\dots$ — ортонормированный базис в $L_2((a,b)\times(a,b))$. Используя уравнение замкнутости получаем

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,s)dxdx = \sum_{i,j=1}^{\infty}(K\varphi_i,\varphi_j)^2 = N^2(K).$$

Итак, получили что оператор Гильберта — Шмидта имеет конечную абсолютную норму

$$N(K) = \sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x,s)dxdx}.$$

2. Пусть оператор K имеет конечную абсолютную норму:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}(K\varphi_i,\varphi_j)^2 < \infty.$$

Определим функцию двух переменных $K(x,s)$ равенством

$$K(x,s) = \sum_{i,j=1}^{\infty}(K\varphi_i,\varphi_j)\Phi_{ij}(x,s).$$

В силу того, что $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}(K\varphi_i,\varphi_j)^2 < \infty$, функция $K(x,s)$ принадлежит $L_2((a,b)\times(a,b))$. Рассмотрим оператор $\widetilde{K}f = \int\limits_a^b K(x,s)f(s)ds$

Покажем, что K и $\widetilde{K}$ совпадают. Для этого достаточно проверить, что для любых $i, j = 1, 2, \ldots$

$$(K\varphi_i, \varphi_j) = (\widetilde{K}\varphi_i, \varphi_j).$$

Имеем

$$(\widetilde{K}\varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\varphi_j(x) \right) =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\Phi_{ij}(s,x)dsdx = (K\varphi_i, \varphi_j).$$

Итак, $K = \widetilde{K}$, т. е. оператор K является оператором Гильберта — Шмидта. $\square$

Замечание 1. Только что доказанная теорема интересна уже тем, что определяет класс операторов в пространстве $L_2(a,b)$, характеризуемых без употребления интеграла, но представимых как интегральные.

Всюду далее в этом параграфе будем предполагать, что A — оператор Гильберта — Шмидта, ядро которого $K(x,s)$ удовлетворяет условиям: $K(x,s)$ непрерывна на $\overline{D} = [a,b] \times [a,b]; K(x,s) = K(s,x)$; $K(x,s) \not\equiv 0, |a|, |b| < \infty$.

Теорема 2 (Гильберта — Шмидта). *Если функция f принадлежит области значений оператора A, то она может быть разложена в ряд*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i y_i(x), \tag{4.6}$$

где y_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированная система собственных функций оператора A,

$$f_i = (f, y_i) = \int\limits_a^b f(x)y_i(x)dx.$$

При этом ряд (4.6) *сходится на $[a,b]$ абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что оператор Гильберта — Шмидта A переводит вполне непрерывным образом $L^2(a,b)$

в $C[a, b]$. Как следует из результатов главы 4 в сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ из собственных векторов вполне непрерывного оператора A, где $Ay_n = \lambda_n y_n, n = 1, 2, \ldots$. Пусть $f = Ah$, где

$$h(x) \in L^2(a, b) \quad \text{и} \quad h = \sum_{i=1}^{\infty}(h, y_i)y_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i.$$

Поскольку $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i y_i(x)$ сходится к h по норме $L^2(a, b)$, то $AS_n(x)$ сходится к $f(x)$ по норме пространства $C[a, b]$. Имеем

$$AS_n(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \lambda_i y_i(x) = \sum_{i=1}^{n}(h, y_i)\lambda_i y_i(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(h, \lambda_i y_i)y_i(x) = \sum_{i=1}^{n}(h, Ay_i)y_i(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(Ah, y_i)y_i(x) = \sum_{i=1}^{n}(f, y_i)y_i(x).$$

Абсолютная сходимость ряда (4.6) следует из его безусловной сходимости, ибо при любом порядке перечисления собственных функций y_i имеет место равенство (4.6).

Теорема 3 (Мерсера). *Если у оператора Гильберта — Шмидта с ядром $K(x, s)$ все собственные числа λ_i положительны, то*

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i(x) y_i(s), \tag{4.7}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b] \times [a, b] = D$.

Доказательство. Используя теорему Гильберта — Шмидта, легко показать, что условие $\lambda_i > 0\ \forall i$ эквивалентно условию

$$\int\limits_D K(x, s)\varphi(x)\varphi(s)dxds > 0$$

для любой непрерывной функции $\varphi \not\equiv 0$. Ядро $K(x, s)$, удовлетворяющее этому неравенству (а также сам оператор A) называется положительно определенным. Следствием является то, что $K(x, x) \geqslant 0$

для любого x из $[a, b]$. Рассмотрим разность

$$K(s, x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(x) y_i(s) = K_{n+1}(s, x).$$

Согласно предыдущему параграфу собственными числами $K_{n+1}\,(s, x)$ являются собственные числа $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$ оператора A, а потому $K_{n+1}(s, x)$ также — положительно определенное ядро, а это влечет, что $K_{n+1}(x, x) \geqslant 0$, и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2(x) \leqslant K(x, x). \tag{4.8}$$

Из (4.8) следует, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i(x) y_i(s)$ в каждой точке (x, s) абсолютно сходится, ибо

$$\sum_{i=n}^{m} \lambda_i |y_i(x)||y_i(s)| \leqslant \left\{\sum_{i=n}^{m} \lambda_i y_i^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{i=n}^{m} \lambda_i y_i^2(s)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Рассмотрим далее получаемое простыми выкладками равенство

$$\int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(x) y_i(s)\right]^2 ds = K_2(x, x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 y_i^2(x). \tag{4.10}$$

Здесь $K_2(x, s) = \int\limits_a^b K(x, t) K(t, s) dt$ — ядро оператора A^2. Из перечисленных выше свойств операторов с конечной абсолютной нормой следует, что A^2 тоже оператор Гильберта — Шмидта, и для него, следовательно, имеет место теорема 2. Для функции $K_2(x, s)$ имеем:

$$\int_a^b K_2(x, s) y_i(x) dx = \int_a^b K(t, s) \int_a^b K(x, t) y_i(x) dx dt =$$

$$= \lambda_i \int_a^b K(t, s) y_i(t) dt = \lambda_i^2 y_i(s).$$

По теореме Гильберта — Шмидта ядро $K_2(x, s)$ при фиксированном s как функции от x раскладывается в равномерно по x сходящийся ряд

$$K_2(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 y_i(s) y_i(x).$$

По лемме Фату ([21], с. 114) и (4.10):

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty}\left[K(x,s)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i(x)y_i(s)\right]^2 ds \leqslant \lim_{n\to\infty}\left[K_2(x,x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 y_i^2(x)\right].$$

Отсюда для всех x и s поточечно имеет место равенство

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i y_i(x)y_i(s).$$

Равенство имеет место и в (4.8):

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2(x)=K(x,x).$$

А тогда по теореме Дини ([22], с. 454) ряд $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2(x)$ сходится равномерно. Из (4.9) следует, что и ряд (4.7) сходится равномерно и абсолютно. □

Замечание 2. Из проведенного доказательства следует, что операторы Гильберта — Шмидта с положительно определенным ядром обладают важной особенностью:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i=\int_a^b K(x,x)dx. \tag{4.11}$$

В общем же случае для оператора Гильберта — Шмидта выполняется более слабое условие

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2<\infty.$$

В силу (4.11) интегральные операторы Гильберта — Шмидта с положительно определенными ядрами являются ядерными операторами, которые образуют важный подкласс класса вполне непрерывных операторов, характеризуемый прежде всего аппроксимативными свойствами ([23]).

Среди линейных интегральных операторов операторы Гильберта — Шмидта являются простейшими. Если ослабить условия на ядро $K(s,t)$, потребовав (пусть $\Omega=(-\infty,\infty)$): почти для всех $s\in\Omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,s)|^2dt<\infty,\quad \overline{K(s,t)}=K(t,s),$$

то получим интегральный оператор Карлемана. Его область определения принадлежит $L_2(\Omega)$. Свойства этого оператора превосходно изложены в дополнении 1 книги [20].

§ 5. Представление решения интегрального уравнения в виде ряда

Пусть K — оператор Гильберта — Шмитда,

$$g(s) = Kf(s), \quad g(s) = \int\limits_a^b K(s,t)f(t)dt,$$

где ядро $K(s,t)$ непрерывно в $D = [a,b]\text{x}[a,b]$, симметрично, т. е. $K(s,t) = K(t,s)$.

По-прежнему, оператор K рассматривается в гильбертовом пространстве $L^2(a,b)$.

Предположим, что имеет место разложение

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}, \tag{5.1}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно, а λ_i — характеристические числа оператора $K : \lambda_i K\varphi_i = \varphi_i,\ i = 1, 2\ldots$ Система собственных функций $\varphi_i(s)$ ортонормирована. Разложение (5.1) с требуемым свойством существует по крайне мере при положительной определенности ядра $K(t,s)$ (теорема Мерсера).

Рассмотрим решение неоднородного уравнения

$$f(s) = u(s) - \lambda\int\limits_a^b K(s,t)u(t)dt, \tag{5.2}$$

где λ — параметр, не совпадающий с характеристическим числом оператора K. Легко угадать представление решения в виде ряда. Действительно, если в качестве $f(s)$ возьмем собственную функцию $\varphi_i(s)$, то решение, легко видеть, есть $c\varphi_i(s)$, где константа определяется из условия:

$$\varphi_i(s) = c\varphi_i(s) - \frac{\lambda c}{\lambda_i}\varphi_i(s),\ (c-1)\lambda_i = \lambda c,\ c = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \lambda)}.$$

Если функция $f(s)$ раскладывается в ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(s), \; a_n = \int_a^b f(s)\varphi_n(s)ds, \tag{5.3}$$

то можно надеяться получить решение (5.2), складывая решения, получаемые для каждого слагаемого в (5.3), взятого в качестве свободного члена (5.2):

$$u(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(s). \tag{5.4}$$

Перепишем этот ряд в виде:

$$u(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(s) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(s),$$

что дает

$$u(s) = f(s) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(s). \tag{5.5}$$

Докажем, что ряд (5.5) равномерно сходится и, действительно, определяет решение уравнения (5.2).

Лемма 1. *Если функция $f \in L^2(a, b)$, то ряд*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(s), \; a_n = \int_a^b f(s)\varphi_n(s)ds,$$

сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. Рассмотрим часть суммы, p и q — натуральные числа:

$$\left| \sum_{n=p}^{p+q} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(s) \right| = \left| \sum_{n=p}^{p+q} \frac{a_n}{\lambda_n} \lambda_n \int_a^b K(s,t)\varphi_n(t)dt \right| =$$

$$\left| \int_a^b K(s,t) \sum_{n=p}^{p+q} a_n \varphi_n(t)dt \right| \leqslant \left[\int_a^b K(s,t)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=p}^{p+q} a_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

В силу уравнения замкнутости $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, и потому для всякого $\varepsilon > 0$ существует N, что при $p > N$:

$$\left|\sum_{n=p}^{p+q} \frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(s)\right| \leqslant \varepsilon \left[\int\limits_a^b K(s,t)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon c\sqrt{b-a}.$$

Использовали, что функция $K(s,t)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, а потому ограничена: $|K(s,t)| \leqslant c$. В силу полученных оценок частичные суммы для S образуют фундаментальную последовательность в пространстве $C\,[a,b]$. Подобные проведенным выкладки доказывают и абсолютную равномерную сходимость. $\square$

Теорема 1. *Неоднородное уравнение* (5.2) *имеет для всякого значения* λ, *не совпадающего с характеристическим числом оператора* K, *одно и только одно решение, представимое в виде*

$$u(s) = f(s) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(s), \tag{5.6}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$; a_n *есть коэффициенты Фурье-разложения* $f(s)$ *по ортонормированному базису* $L^2(a,b)$ *из собственных функций оператора* K.

Доказательство. Равномерная сходимость ряда в (5.5) следует из леммы 1 и свойств вполне непрерывного оператора. Рассмотрим K и S:

$$Ku(s) = \int\limits_a^b K(s,t)\left[f(t) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(t)\right]dt =$$

$$= \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n} f(t)dt + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n-\lambda}\int\limits_a^b K(s,t)\varphi_n(t)dt = \tag{5.7}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(s) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(\lambda_n-\lambda)\lambda_n}\varphi_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(s).$$

Используя полученное равенство (5.6), имеем

$$u(s) - \lambda K u(s) = f(s) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(s) - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(s) = f(s).$$

Единственность решения непосредственно вытекает из того, что λ — не характеристическое число. $\square$

Теоретико-функциональными методами разложение (5.6) получено для общих операторов в приложении 2. Это разложение тесно связано с теорией резольвенты оператора.

§ 6. Метод граничных элементов.

Одним из численных методов решения граничных интегральных уравнений является метод граничных элементов (МГЭ). По сравнению с методом конечных элементов (МКЭ) решения соответствующих дифференциальных краевых задач размерность матрицы коэффициентов получаемой в итоге системы линейных алгебраических уравнений для МГЭ на порядок меньше. Но матрица получается заполненной, тогда как для МКЭ она оказывается существенно разреженной.

Примечательной особенностью МГЭ является тот факт, что при аппроксимации поверхности плоскими многоугольными элементами, а неизвестной плотности потенциалов кусочно-постоянной функцией, мы получаем коэффициенты матрицы результирующей системы линейных алгебраических уравнений МГЭ без применения квадратурных формул, поскольку возникающие интегралы допускают явное выражение через элементарные функции.

Это позволяет избежать анализа погрешности вычисления многомерных интегралов при помощи той или иной квадратурной формулы.

Цель этого параграфа — получить эти явные выражения коэффициентов результирующей системы линейных уравнений МГЭ для задач Дирихле и Неймана из первой главы.

Рассмотрим полученное в главе 5 модифицированное интегральное уравнение для внешней задачи Дирихле, неизвестной функцией которого является $\chi^-(x)$ — плотность соответствующего потенциала двойного слоя

$$\varphi^-(x) = -\frac{1}{2}\chi^-(x) + \int\limits_S \chi^-(x)\frac{\partial}{\partial n_\xi}E_n(x,\xi)ds_\xi + \\ + \frac{1}{|x|^{n-2}}\int\limits_S \chi^-(x)ds_\xi, \quad x \in S. \tag{6.1}$$

Далее предполагаем размерность пространства равной 3 ($n = 3$), поверхность S кусочно-гладкой, представимой как совокупность плоских четырехугольных элементов M_i, $i = 1, 2\ldots, N$. Считаем неизвестную плотность χ на каждом элементе M_i постоянной, равной $y_i = \chi(p_i)$, где, к примеру, p_i — центр тяжести элемента M_i и применяем обычную процедуру коллокации по центрам тяжести элементов. При такой аппроксимации получаем из (6.1) систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} y_j = b_j, i = 1, 2\ldots, N. \tag{6.2}$$

Здесь $b_i = \phi^-(p_i)$ — заданное на границе значение функции $u^-(x)$,

$$a_{ij} = \begin{cases} \int\limits_{M_j} \dfrac{\partial}{\partial n_\xi} E_3(p_i, \xi) ds_\xi + \dfrac{1}{|p_i|} \int\limits_{M_j} ds, & \text{если } i \neq j, \\ \\ \dfrac{1}{|p_i|} \int\limits_{M_j} ds_\xi - \dfrac{1}{2}, & \text{если } i = j. \end{cases} \tag{6.3}$$

Перейдем к вычислению интеграла I:

$$I = \int\limits_{M_j} \frac{\partial}{\partial n_\xi} E_3(p_i, \xi) ds_\xi = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{M_j} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{r(p_i, \xi)} ds_\xi.$$

Обсуждая свойства поверхностного потенциала в главе 1, мы установили, что I выражается через телесный угол ω, под которым из точки p_i виден конечный элемент M_j, $i \neq j$:

$$I = \begin{cases} -\omega/(4\pi), & \text{если точка } p_i \text{ лежит с той стороны,} \\ & \text{куда смотрит нормаль } n_\xi \text{ к элементу } M_j, \\ \omega/(4\pi), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим плоский элемент M_j как совокупность треугольников. Задача сводится, таким образом, к вычислению телесного угла под которым из точки $P \in E_3$ виден треугольник ABC. Рассмотрим пирамиду с вершиной P и основанием ABC. Для трехгранного угла при вершине P, т. е. для искомого телесного угла ω имеет место формула Жирара (см. [24], с. 226):

$$\omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \tag{6.4}$$

где α — двугранный угол, примыкающий к ребру PA, β — к ребру PB, γ — к ребру PC. Вычислим нормали к боковым граням:

$$n_1 = \frac{PA \times PC}{|PA \times PC|}, \quad n_2 = \frac{PA \times PB}{|PA \times PB|}, \quad n_3 = \frac{PC \times PB}{|PC \times PB|},$$

а затем двугранные углы по фрмулам:

$$\alpha = \arccos(n_1 \cdot n_2),\ \beta = \arccos(n_2 \cdot n_3),\ \gamma = \arccos(-n_1 \cdot n_3).$$

По формуле (6.4) находим ω. С какой стороны от плоскости элемента с нормального n_ξ лежит точка P определяется знаком скалярного произведения $PA \cdot n_\xi$. Если $PA \cdot n_\xi < 0$, то P лежит с той стороны, куда смотрит нормаль.

Итак, для задачи Дирихле мы избегаем погрешности от использования квадратурных формул для вычисления интегралов.

При решении задачи Неймана мы используем для представления гармонической функции u потенциал простого слоя

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \rho(\xi)\frac{1}{r(x,\xi)}ds_\xi.$$

Применяя прежнюю аппроксимацию поверхности и плотности ($n = 3$), получаем систему линейных алгебраических уравнений (для внутренней задачи):

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{M}\rho(p_j)\int\limits_{M_j}\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{r(p_i,\xi)}ds_\xi - \frac{1}{2}\rho(p_i) = \psi^+(p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Вычислим входящий в уравнение интеграл, считая, что M_j есть четырехугольник $ABCD$, а x и n_x взяты для элемента M_i, $i \neq j$ (см. рис. 1).

Введем на элементе $ABCD$ местную систему координат η_1, η_2, η_3 с началом в точке A и ортами g_1, g_2, g_3 координатных осей, орт g_1 направлен от A к B, орт g_2 лежит в плоскости $ABCD$. Координаты точки x в новой системе пусть будут y_1, y_2, y_3. Имеем

$$I = \int\limits_M \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{r(x,\xi)}ds_\xi = n_x\int\limits_M grad_x\frac{1}{r(x,\xi)}ds_\xi = \left[n_1\int\limits_M\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{1}{r(y,\eta)}ds_\eta + \right.$$

$$\left. + n_2\int\limits_M\frac{\partial}{\partial y_2}\frac{1}{r(y,\eta)}ds_\eta + n_3\int\limits_M\frac{\partial}{\partial y_3}\frac{1}{r(y,\eta)}ds_\eta\right]_{y=x},$$

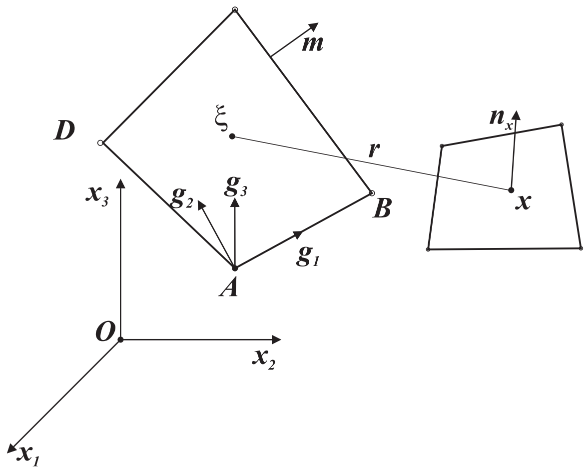

Рис. 1. К вычислению интегралов МГЭ

(n_1, n_2, n_3) — представление нормали n_x в координатной системе (g_1, g_2, g_3). Поскольку в последнем интеграле производная $\partial/\partial y_3$ совпадает с производной по нормали к M, то ее вычисление уже описано. Для оставшихся интегралов воспользуемся равенством:

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{1}{r(y,\eta)} = -\frac{\partial}{\partial \eta_k}\frac{1}{r(y,\eta)}, \quad k = 1, 2,$$

а также формулой (1.6) из гл. 1:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} f(x)n_i ds.$$

В итоге, имеем (обозначая через m единичную внешнюю нормаль к границе элемента $ABCD$ в плоскости последнего):

$$I = -n_x \cdot m_{AB}\int\limits_A^B \frac{dl}{r(x,\eta)} - n_x \cdot m_{BC}\int\limits_B^C \frac{dl}{r(x,\eta)} - n_x \cdot m_{CD}\int\limits_C^D \frac{dl}{r(x,\eta)} -$$

$$-n_x \cdot m_{DA}\int\limits_D^A \frac{dl}{r(x,\eta)} - n_3\int\limits_M \frac{\partial}{\partial n_\eta}\frac{1}{r(y,\eta)}ds_\eta. \qquad (6.5)$$

Первые четыре интеграла в (6.5) однотипны. Рассмотрим поэтому вычисление одного из них, скажем $\int\limits_A^B \frac{dl_Q}{r(P,Q)}$.

В треугольнике PAB пусть C — основание высоты, опущенной из P на AB и имеющей длину H. Элементарные вычисления дают

$$\int\limits_A^C \frac{ldl}{rl} = \int\limits_H^{r_A} \frac{rdr}{rl} = \int\limits_H^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - H^2}} = \ln \frac{r_A + \sqrt{r^2 - H^2}}{H}. \tag{6.6}$$

Использовано обозначение $r_A = r(A, P)$ и то, что $l^2 + H^2 = r^2(P, \eta)$, где l — расстояние η от C. Вводя в рассмотрение величину:

$$E = \begin{cases} 1, & \text{если } BP \cdot BA \geqslant 0 \text{ и } AP \cdot AB \geqslant 0, \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{6.7}$$

получаем

$$\int\limits_A^B \frac{dl_Q}{r(P,Q)} = \left| \ln \left(\frac{r_A + \sqrt{r_A^2 - H^2}}{H} \right) + E \ln \left(\frac{r_B + \sqrt{r_B^2 - H^2}}{H} \right) \right|. \tag{6.8}$$

Итак, формула (6.8) дает нам возможность в явном виде через элементарные функции вычислить (16).

Поскольку гармоническая функция, дающая приближение к решению исходной задачи, выражается через найденные значения ρ_i в виде

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N} \rho_j \int\limits_{M_j} \frac{ds}{r(x,\xi)},$$

то проведем вычисления интеграла для прямоугольника $ABCD$ и точки $x = P \notin ABCD$.

Пусть Φ основание перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость $ABCD$, $P\Phi = H$. Вычисление интеграла по $ABCD$ сведем к вычислению интегралов по треугольникам:

$$\int\limits_{ABCD} = \delta_1 \int\limits_{\triangle \Phi AB} + \delta_2 \int\limits_{\triangle \Phi BC} + \delta_3 \int\limits_{\triangle \Phi CD} + \delta_4 \int\limits_{\triangle \Phi AD} .$$

Числа δ_i равны ± 1. Введем на плоскости $ABCD$ полярные координаты с центром в Φ, угол φ отсчитывается от ΦA, нормаль n к $ABCD$ внешняя к исходной поверхности $\partial\Omega$. Имеем

$$I_{\triangle \Phi AB} = \int\limits_{\Delta} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{H^2 + \rho^2}} = \int\limits_0^{\gamma} \int\limits_0^{R(\varphi)} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{H^2 + \rho^2}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\gamma} \Big(\sqrt{R^2(\varphi) + H^2} - H \Big) d\varphi. \tag{6.9}$$

Здесь γ — угол, под которым из точки Φ виден отрезок AB, $\rho = R(\varphi)$ есть уравнение прямой AB. По теореме синусов

$$R(\varphi) = R(0) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}, \quad \alpha = \angle \Phi AB. \tag{6.10}$$

Подстановка (6.10) в (6.9) и элементарные выкладки дают:

$$I_{\triangle \Phi AB} = H \left\{ \left| \int\limits_{\cos\alpha}^{cos(\alpha+\gamma)} \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{1 - y^2} dy \right| - \gamma \right\}, \ b^2 = \frac{R^2(0)\sin^2\alpha + H^2}{H^2}. \tag{6.11}$$

Элементарно определяются H, α, $R^2(0)$, b. На их вычислении не останавливаемся. Интеграл в (6.11) также вычисляется стандартно:

$$I_{\triangle \Phi AB} = H \left| \left(\arcsin \frac{y}{b} + \sqrt{b^2 - 1} \ln \frac{y\sqrt{b^2-1} + \sqrt{b^2 - y^2}}{\sqrt{1 - y^2}} \right) \Bigg|_{\cos\alpha}^{\cos(\alpha+\gamma)} \right| - H\gamma,$$

если $H \neq 0$. Если $\cos(\alpha + \gamma) = 1$ и $\cos \alpha = 1$, то $I = 0$. Если $H = 0$, то

$$I = -R(0) \sin \alpha \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| \right] \Bigg|_{\cos\alpha}^{\cos(\alpha+\gamma)}.$$

В заключение отметим, что метод граничных элементов — активно развивающаяся область вычислительной математики (см. [25], [26]).

Глава 8

Задачи плоской теории упругости

В настоящей главе на примере задачи плоской теории упругости изложим методику перехода от уравнений с частными производными к интегральным уравнениям. Этот переход использует теорию распределений (обобщенных функций), в частности, общее понятие о фундаментальном решении. Начальные сведения о распределениях излагаются в приложении (гл. 9, §§ 6,7).

С математическим задачами теории упругости можно познакомиться, например, по книгам [27]–[29].

§ 1. Система уравнений плоской задачи теории упругости

Пусть $B \subset R^3$ — область, занимаемая упругим телом, отнесенная к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3. Требуется найти вектор-функцию $u = (u_1, u_2, u_3)$ — *вектор смещений* — как решение системы уравнений равновесия упругого тела

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in B, \tag{1.1}$$

$\sigma_{ij},\ i, j = 1, 2, 3,$ — компоненты тензора напряжений, $f = (f_1, f_2, f_3)$ — вектор внешних объемных сил, действующих на упругое тело, ρ — плотность материала. Предполагается, что тело однородно и изотропно. Тогда компоненты тензора напряжений связаны *законом Гука* с компонентами тензора деформаций:

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii} \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\lambda,\ \mu$ — положительные числа (постоянные Ламе), характеризующие упругие свойства материала, ε_{kl} — компоненты тензора деформаций — вычисляются через компоненты вектора смещений по формулам

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.3}$$

Таким образом, система (1.1)–(1.3) есть система трех линейных уравнений с частными производными относительно компонент вектора смещений u.

К системе (1.1)–(1.3) нужно добавить граничные условия. Чаще всего рассматриваются условия двух типов.

1. Граничные условия Дирихле (граничные условия первого рода)

$$u(x) = \mu(x), \quad x \in \partial B. \tag{1.4}$$

Эти условия означают, что на границе тела задан вектор смещений.

2. Граничные условия второго рода

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = g_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in \partial B, \tag{1.5}$$

где $g_i = g_i(x)$, $x \in \partial B$, — заданные функции, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичная внешняя нормаль к ∂B. Условие (1.5) означает, что на ∂B заданы поверхностные силы с плотностью $g = (g_1, g_2, g_3)$ (вектор напряжений).

В приложениях довольно часто возникает тот случай, когда $\partial B = \partial B_u \cup \partial B_\sigma$, на ∂B_u задано условие (1.4), а на ∂B_σ —условие (1.5). Возникающая при этом задача называется смешанной граничной задачей для системы уравнений теории упругости.

В некоторых довольно важных для приложений ситуациях трехмерная система уравнений теории упругости может быть сведена к более простым так называемым плоским задачам теории упругости.

Чаще всего рассматривают следующие две существенно различные с точки зрения механики, но идентичные с математической точки зрения задачи.

1) Задача о плоской деформации. Эта задача возникает при рассмотрении длинных цилиндрических тел в предположении, что ось цилиндра параллельна декартовой оси x_3, а массовые силы и вектор смещений перпендикулярны оси цилиндра и не зависят от координаты x_3. При этих предположениях система уравнений (1.1)–(1.3) может быть записана так

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \in \Omega, \tag{1.6}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(u) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_{ii} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2. \tag{1.8}$$

где Ω — ограниченная область на плоскости (x_1, x_2) — сечение цилиндра B, перпендикулярное его оси, $f_i = f_i(x_1, x_2)$ — заданные функкции — компоненты вектора массовых сил, $u_i = u_i(x_1, x_2)$ — искомые функции — компоненты вектора смещений $u = (u_1, u_2)$.

Элементарными преобразованиями система (1.6)–(1.8) приводится к виду

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} u + \Delta u_i + \frac{\rho}{\mu} f_i = 0, \ i = 1, 2, \ x \in \Omega, \tag{1.9}$$

где $\alpha = (\lambda + \mu)/\mu$.

Смешанные граничные условия для системы уравнений (1.9) формулируются на основе (1.4), (1.5) и записываются следующим образом:

$$u(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega_u, \tag{1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij} n_j = g_i(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in \partial\Omega_\sigma, \tag{1.11}$$

где $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma = \partial\Omega$.

2) Задача об обобщенном плоском напряженном состоянии. Эта задача возникает при рассмотрении цилиндра малой по сравнению с другим размерами высоты, иначе говоря, тонкой пластины, нагруженной силами, параллельными ее основанию и распределенными симметрично, относительно срединной плоскости пластины. При этом массовые силы, тензор напряжений, тензор деформаций и вектор перемещений заменяются их усреднениями по толщине пластины. Возникающая при таком усреднении смешанная граничная задача по виду совпадает с (1.9)–(1.11), но постоянная λ должна быть заменена на величину $\lambda^* = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)$.

В дальнейшем, говоря о плоской задаче теории упругости, мы всегда для определенности будем иметь в виду задачу о плоской деформации (1.9)–(1.11), хотя, конечно, все результаты будут справедливыми и для задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии.

Отметим также, что часто постоянную α удобнее представлять в виде $\alpha = 1/(1 - 2\nu)$, где $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$ — так называемый коэффициент Пуассона. Он характеризует относительное укорочение в направлении осей x_2, x_3, наблюдаемое при растяжении изотропного упругого материала в направлении оси x_3.

Далее мы всегда будем предполагать $\partial\Omega$, кусочно-гладкой кривой.

Остановимся на некоторых свойствах системы уравнений (1.6)–(1.8). Будем говорить, что вектор-функция u принадлежит некоторому классу гладкости, если каждая компонента u принадлежит этому классу гладкости. Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ — решение системы (1.6)–(1.8), а u^* — произвольная вектор-функция из $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Умножим i-е уравнение системы (1.6) на u_i^* проинтегрируем полученное равенство по области Ω, а затем воспользуемся формулой интегрирования по частям. Суммируя почленно получившиеся таким образом равенства после элементарных преобразований будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u^*)dx + \int\limits_{\partial\Omega} t(u) \cdot u^* ds = \int\limits_{\Omega} \rho f \cdot u^* dx, \qquad (1.12)$$

где $t_i(u) = \sum\limits_{j=1}^{2} \sigma_{ij}(u) n_j$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u^*) = \lambda \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_{ii}(u) \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_{ii}(u^*) + 2\mu \sum_{ij=1}^{2} \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u^*),$$

следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u^*) = \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}(u^*)\varepsilon_{ij}(u). \qquad (1.13)$$

Предположим теперь, что u^* — решение системы вида (1.6)–(1.8), соответствующее массовой силе f^*. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}(u^*)\varepsilon_{ij}(u)dx + \int\limits_{\partial\Omega} t(u^*) \cdot u ds = \int\limits_{\Omega} \rho f^* \cdot u dx, \qquad (1.14)$$

Вычитая почленно (1.12), (1.14) и учитывая (1.13), получим

$$\int\limits_{\partial\Omega} (t(u) \cdot u^* - t(u^*) \cdot u) ds = \int\limits_{\Omega} \rho (f \cdot u^* - f^* \cdot u) dx. \qquad (1.15)$$

Равенство (1.15) выражает собой так называемую теорему Бетти о взаимности работ массовых и поверхностных сил.

§ 2. Фундаментальное решение плоской задачи теории упругости

Сведения из теории обобщенных функций (распределений), необходимые для понимания материала этого параграфа, изложены в § 5, § 6 гл. 9.

Определим фундаментальное решение системы (1.9) как матрицу функций

$$W = \begin{pmatrix} w_{11}(x_1, x_2) & w_{12}(x_1, x_2) \\ w_{21}(x_1, x_2) & w_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

где функции w_{ij} удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{div} w_1 + \Delta w_{11} = \delta(x_1, x_2), \\ \alpha \dfrac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{div} w_1 + \Delta w_{12} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

и

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{div} w_2 + \Delta w_{21} = 0, \\ \alpha \dfrac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{div} w_2 + \Delta w_{22} = \delta(x_1, x_2). \end{cases} \tag{2.2}$$

Системы (2.1) и (2.2) рассматриваются как уравнения в пространстве обобщенных функций $D'(\Omega \times \Omega)$, через w_1 обозначен вектор (w_{11}, w_{12}), а через w_2 — вектор (w_{21}, w_{22}).

Роль фундаментального решения для системы (1.9) проясняется следующим предложением.

Предложение 1. *Если W — фундаментальное решение системы (1.9), то одним из решений системы (1.9) является вектор-функция $u(x) = -\dfrac{\rho}{\mu} f * W$, где применяется матричное умножение:*

$$u(x) = \left(-\frac{\rho}{\mu}\right) (f_1 * w_{11} + f_2 * w_{21}, f_1 * w_{12} + f_1 * w_{22}) . \tag{2.3}$$

Проверяется предложение непосредственной подстановкой (2.3) в уравнения. Например, для первой компоненты u_1:

$$\left(-\frac{\rho}{\mu}\right) \left[\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{div}(f * W) + \Delta(f_1 * w_{11} + f_2 * w_{21})\right] =$$

$$= \left(-\frac{\rho}{\mu}\right)\left[\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (f_1 * w_{11} + f_2 * w_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (f_1 * w_{12} + f_2 * w_{22})\right) +\right.$$

$$+\left(f_1 * \Delta w_{11} + f_2 * \Delta w_{21}\right)\Big] = \left(-\frac{\rho}{\mu}\right)\left[f_1 * \alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} w_1 + \right.$$

$$\left. + f_2 * \alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} w_2 + \left(f_1 * \Delta w_{11} + f_2 * \Delta w_{21}\right)\right] =$$

$$= \left(-\frac{\rho}{\mu}\right)\left[f_1 * \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} w_1 + \Delta w_{11}\right) + \right.$$

$$\left. + f_2 * \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} w_2 + \Delta w_{21}\right)\right]. \quad (2.4)$$

В проведенных выше преобразованиях использовано известное свойство свертки над обобщенными функциями φ, ψ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi * \psi) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} * \psi\right) = \left(\varphi * \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right),$$

что позволяет все дифференциальные операции «пронести через $*$». Первая группа членов в (2.4) представляет собой левую часть первого уравнения системы (2.1), вторая группа — системы (2.2); следовательно,

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} u + \Delta u_1 + \frac{\rho}{\mu} f_1 = \left(-\frac{\rho}{\mu}\right)(f_1 * \delta) + \frac{\rho}{\mu} f_1 = 0.$$

Переходим к определению компонент решения W. Займемся сначала решением системы (2.1). К обеим частям (2.1) применим преобразование Фурье обобщенных функций от переменных x_1, x_2:

$$\begin{cases} F\left[\alpha\dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} w_1\right] + F\left[\Delta w_{11}\right] = F\left[\delta\left(x_1, x_2\right)\right], \\[2ex] F\left[\alpha\dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} w_1\right] + F\left[\Delta w_{11}\right] = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

и воспользуемся свойствами преобразования Фурье:

$$F\left[\delta\right] = 1 \qquad \text{и} \qquad F\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\psi\right] = (i\sigma_k) F\left[\psi\right],$$

где F действует на основные функции ψ от переменных σ_1, σ_2. В обозначениях

$$F\left[w_{11}\right] = \vartheta_1(\sigma_1, \sigma_2), \qquad F\left[w_{12}\right] = \vartheta_2(\sigma_1, \sigma_2)$$

из (2.5) получаем

$$\begin{cases} [(\alpha+1)\sigma_1^2+\sigma_2^2]\vartheta_1+\alpha\sigma_1\sigma_2\vartheta_2=-1, \\ \alpha\sigma_1\sigma_2\vartheta_1+[(\alpha+1)\sigma_2^2+\sigma_1^2]\vartheta_2=0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Исключая из системы (2.5) неизвестную функцию (все операции над обобщенными функциями допустимы, так как $\sigma_1\sigma_2$, $(\alpha+1)\sigma_1^2+\sigma_2^2$, $(\alpha+1)\sigma_2^2+\sigma_1^2$ — бесконечно дифференцируемые функции, а операцию исключения можно провести посредством умножений на эти функции и сложения), получаем

$$\rho^4(\alpha+1)\vartheta_1(\sigma_1,\sigma_2)=-\alpha\sigma_2^2-\rho^2, \tag{2.7}$$

и

$$\rho^4(\alpha+1)\vartheta_2(\sigma_1,\sigma_2)=\alpha\sigma_1\sigma_2, \qquad \text{где} \qquad \rho^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2. \tag{2.8}$$

Представим ϑ_1 как сумму $\vartheta_1=\vartheta_{11}+\vartheta_{12}$ и потребуем, чтобы

$$\rho^4(\alpha+1)\vartheta_{11}=-\alpha\sigma_2^2,$$

$$\rho^4(\alpha+1)\vartheta_{12}=-\rho^2.$$

Решение этих двух уравнений и (2.8) сводится к решению следующих:

$$\rho^4\tilde{\tilde{\vartheta}}(\sigma_1,\sigma_2)=1, \tag{2.9}$$

$$\rho^2\tilde{\vartheta}(\sigma_1,\sigma_2)=1. \tag{2.10}$$

в пространстве обобщенных функций, так как

$$\vartheta_{11}=-\frac{\alpha}{\alpha+1}\sigma_2^2\tilde{\tilde{\vartheta}},$$

$$\vartheta_{12}=-\frac{1}{\alpha+1}\sigma_2^2\tilde{\vartheta},$$

$$\vartheta_2=-\frac{\alpha}{\alpha+1}\sigma_1\sigma_2\tilde{\tilde{\vartheta}}.$$

Итак,

$$\vartheta_1(\sigma_1,\sigma_2)=-\frac{\alpha}{\alpha+1}\sigma_2^2\tilde{\tilde{\vartheta}}-\frac{1}{\alpha+1}\sigma_2^2\tilde{\vartheta},$$

$$\vartheta_2(\sigma_1,\sigma_2)=-\frac{\alpha}{\alpha+1}\sigma_1\sigma_2\tilde{\tilde{\vartheta}}. \tag{2.11}$$

Снова заметим, что определяя ϑ_1,ϑ_1 подобным образом, мы не выходим за рамки допустимых действий над обобщенными функциями.

Рассмотрим фундаментальное решение для оператора Лапласа γ_1,

$$\Delta\gamma_1 = \delta(x_1, x_2). \tag{2.12}$$

После применения преобразования Фурье к обеим частям (2.12), получим:

$$[(i\sigma_1)^2 + (i\sigma_2)^2]F[\gamma_1] = 1,$$

или $\rho^2 F[-\gamma_1] = 1$. Из последнего соотношения:

$$\widetilde{\vartheta} = F[-\gamma_1] = F\left[-\frac{1}{2\pi}\log r\right], \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{2.13}$$

Такой же прием применим для нахождения $\tilde{\tilde{\vartheta}}$, а именно:

Пусть γ_2 — фундаментальное решение бигармонического уравнения

$$\Delta^2\gamma_2 = \delta(x_1, x_2). \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует, что $\rho^4 F[\gamma_2] = 1$, а значит $\tilde{\tilde{\vartheta}}$ определяется по (2.9) как

$$\tilde{\tilde{\vartheta}} = F[\gamma_2]. \tag{2.15}$$

Функция γ_1 известна: $\gamma_1 = \frac{1}{2\pi}\log r$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Решение же (2.14) легко сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\Delta\gamma_2 = \gamma_1. \tag{2.16}$$

Перейдем в (2.16) к полярным координатам, полагая, что γ_2 есть функция, зависящая только от r:

$$\Delta\gamma_2(r) = \gamma_2''(r) + \frac{1}{r}\gamma_2'(r) = \gamma_1(r).$$

Проведя очевидные преобразования, получим:

$$r\gamma_2'' + \gamma_2' = r\gamma_1,$$

$$(r\gamma_2')' = r\gamma_1,$$

$$r\gamma_2' = \int\limits_0^r \rho\gamma_1(\rho)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \rho\log\rho\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\log\rho\Big|_0^r - \int\limits_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\rho^2}{2}\,\mathrm{d}\rho\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\log r - \frac{r^2}{4}\right],$$

$$\gamma_2'(r) = \frac{1}{4\pi}\left[r\log r - \frac{1}{2}r\right],$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{r^2}{2}\log r - \frac{r^2}{2}\right] = \frac{r^2}{8\pi}(\log r - 1).$$

Для нахождения функций $w_{11}(x)$ и $w_{12}(x)$ к равенствам (2.11) применим обратное преобразование Фурье F^{-1}:

$$\begin{aligned}
w_{11} = F^{-1}[\vartheta_1] = -\frac{\alpha}{\alpha+1}F^{-1}\left[\sigma_2^2\widetilde{\widetilde{\vartheta}}\right] - \frac{1}{\alpha+1}F^{-1}\left[\widetilde{\vartheta}\right] = \\
= -\frac{\alpha}{\alpha+1}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 F^{-1}\left[\widetilde{\widetilde{\vartheta}}\right] - \frac{1}{\alpha+1}F^{-1}\left[\widetilde{\vartheta}\right] = \\
= -\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}F^{-1}\left[F[\gamma_2]\right] - \frac{1}{\alpha+1}F^{-1}\left[F[-\gamma_1]\right] = \\
= \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\gamma_2 + \frac{1}{\alpha+1}\gamma_1,
\end{aligned}$$

$$w_{11} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{r^2}{8\pi}(\log r - 1)\right) + \frac{1}{2\pi(\alpha+1)}\log r. \tag{2.17}$$

В преобразованиях использовались формулы (2.13), (2.15) и свойство обратного преобразования Фурье:

$$F^{-1}[\sigma_k\psi] = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)F^{-1}[\psi].$$

Аналогичные выкладки проводим для получения w_{12}:

$$w_{12} = F^{-1}[\vartheta_2] = \frac{\alpha}{\alpha+1}F^{-1}\left[\sigma_1\sigma_2\widetilde{\widetilde{\vartheta}}\right] = -\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F^{-1}\left[\widetilde{\widetilde{\vartheta}}\right] =$$

$$= -\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\gamma_2,$$

$$w_{12} = -\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{r^2}{8\pi}(\log r - 1)\right). \tag{2.18}$$

В итоге, находим функцию $w_{1j},\ j = 1, 2$,

$$w_{1j} = c_1\left(c_2\delta_{1j}\log r - \frac{x_1x_j}{r^2}\right) + \alpha_{1j},$$

где α_{1j} — в общем, произвольные постоянные; $c_1 = 1/(8\pi(1-\nu))$, $c_2 = 3 - 4\nu$.

Как видно из сравнения систем (2.1) и (2.2), решение w_{2j}, $j = 1, 2$, системы (2.2) получается из функций w_{1j} перестановкой x_1 и x_2, значит,

$$w_{ij} = c_1 \left(c_2 \delta_{ij} \log r - \frac{x_i x_j}{r^2} \right) + \alpha_{ij}, \tag{2.19}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}, \qquad c_2 = 3 - 4\nu.$$

Формулы (2.19) и определяют фундаментальное решение для (1.9).

Теперь приведем данные, необходимые нам в дальнейших вычислениях. Пусть в точке y с координатами y_1, y_2 приложена единичная сосредоточенная сила:

$$f_y(x) = (e_1(y), e_2(y))\delta(x-y), \quad e_1^2 + e_2^2 = 1,$$

e_1, e_2 — орты координатной системы (x_1, x_2). Согласно (2.3) эта сила вызывает перемещение в точке x, равное

$$u_i(x) = \left(-\frac{\rho}{\mu}\right) \sum_{k=1}^{2} f_{yk} * w_{ki} = \left(-\frac{\rho}{\mu}\right) \sum_{k=1}^{2} e_k(y)\delta(x-y) * w_{ki},$$

$$u_i(x) = \left(-\frac{\rho}{\mu}\right) \sum_{k=1}^{2} e_k(y) w_{ki}(x-y), \qquad i = 1, 2. \tag{2.20}$$

Подсчитаем также компоненты тензора деформаций в точке x и компоненты тензора напряжений для этого случая:

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \sum_{k=1}^{2} B_{ijk}(x,y) e_k(y). \tag{2.21}$$

Здесь

$$B_{ijk}(x,y) = \left(-\frac{\rho}{\mu}\right)\left(\frac{c_1}{r^2}\right)\Bigg[(1-2\nu)(\delta_{ik}(x_j - y_j) + \delta_{jk}(x_i - y_i)) +$$

$$+ \frac{2(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^2} - \delta_{ik}(x_k - y_k)\Bigg],$$

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{2} T_{ijk}(x,y) e_k(y), \tag{2.22}$$

$$T_{ijk}(x,y) = \frac{c_3}{r^2}\Bigg[c_4(\delta_{ik}(x_j-y_j)+\delta_{jk}(x_i-y_i)-\delta_{ij}(x_k-y_k)+$$

$$+\frac{2(x_i-y_i)(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{r^2}\Bigg],$$

$$c_3 = -\frac{\rho}{4\pi(1-\nu)}, \quad c_4 = 1-2\nu.$$

Нам понадобятся также усилия $t(x) = (t_1, t_2)$ в точке x поверхности (линии) с внешней нормалью $n_j(x)$, которые вычисляются из соотношения:

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}(x)n_j(x) = \sum_{k=1}^{2}F_{ik}(x,y)e_k(y), \qquad i=1,2, \qquad (2.23)$$

где

$$F_{ik}(x,y) = \frac{c_3}{r^2}\Bigg[c_4(n_k(x_i-y_i)-n_i(x_k-y_k))+$$

$$+\left(c_4\delta_{ik}+\frac{2(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{r^2}\right)\sum_{j=1}^{2}n_j(x_j-y_j)\Bigg].$$

В полученных нами формулах (2.21)–(2.23) величина r^2 равна $(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$. Их можно извлечь также из общих формул (см. [27], [29]). Обобщение результатов этого и последующего параграфа на трехмерные упругие тела см. в [30], с. 152–161.

§ 3. Вывод граничных интегральных уравнений

В формуле (1.15) в качестве $u^*(x)$ возьмем перемещения, вызываемые распределением массовой силы $f_y^*(x) = (e_1(y), e_2(y))\delta(x-y)$; формулы (2.20) и (2.23) определяют $u^*(x)$ и $t^*(x)$. Напомним, что среда однородна, т. е. $\rho(x) = \mathrm{const}$. Подставив эти данные, получаем:

$$\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i,k=1}^{2}F_{ik}(x,y)e_k(y)u_i(x)ds_x + \int\limits_{\Omega}\rho\sum_{i=1}^{2}e_i(y)\delta(x-y)u_i(x)dx =$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i,k=1}^{2}t_i(-\frac{\rho}{\mu}e_k(y)w_{ki}(x-y)ds_x + \int\limits_{\Omega}\rho\sum_{i,k=1}^{2}f_i(x)(-\frac{\rho}{\mu}e_k(y)w_{ki}(x-y)dx,$$

или

$$\sum_{k=1}^{2} e_k(y) \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{2} F_{ik}(x,y) u_i(x) ds_x + \sum_{k=1}^{2} e_k(y) \rho u_k(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} e_k(y) \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{2} (-\frac{\rho}{\mu} t_i(x) w_{ki}(x-y) ds_x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} e_k(y) \int\limits_{\Omega} \rho \sum_{i=1}^{2} f_i(x) w_{ki}(x-y) \left(-\frac{\rho}{\mu}\right) dx. \qquad (3.1)$$

Здесь $e_1(y), e_2(y)$ — произвольные непрерывные функции, подчиненные условию $e_1^2(y) + e_2^2(y) = 1$, поэтому из (6) следует равенство коэфициентов, стоящих у этих функций:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{2} F_{ik}(x,y) u_i(x) ds_x + \rho u_k(y) =$$

$$= \left(-\frac{\rho}{\mu}\right) \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{2} t_i(x) w_{ki} ds_x + \left(-\frac{\rho^2}{\mu}\right) \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} f_i w_{ki} dx,$$

$$u_k(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\left(-\frac{1}{\mu}\right) \sum_{i=1}^{2} t_i(x) w_{ki}(x-y) - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{2} F_{ik}(x,y) u_i(x) \right) ds_x -$$

$$-\frac{\rho}{\mu} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} f_i(x) w_{ki}(x-y) dx, \quad y \in \Omega. \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) представляет перемещение $u(y)$ для любой внутренней из Ω точки y через значения $u(x)$ и $t(x)$ на границе Ω и через заданные массовые силы $f(x)$.

Устремим точку y к точке $y_0 \in \partial\Omega$ и вычислим пределы отдельных слагаемых в формуле (3.2):

$$I_1 = \lim_{y \to y_0} u_k(y) = u_k(y_0),$$

$$I_2 = \lim_{y \to y_0} \int\limits_{\partial\Omega} t_i(x) w_{ki}(x-y) ds_x =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \int\limits_{\partial\Omega} t_i(x) \left[c_1 \left(c_2 \delta_{ki} \log r(x,y) - \frac{(x_k - y_k)(x_i - y_i)}{r^2(x,y)} \right) + \alpha_{ij} \right] ds_x.$$

Для вычисления последнего предела представим $\partial\Omega$ как объединение кривых ACB и Ay_0B; введем локальные координаты, как показано на рисунке 1. Ось ξ направлена по касательной к $\partial\Omega$ в точке y_0,

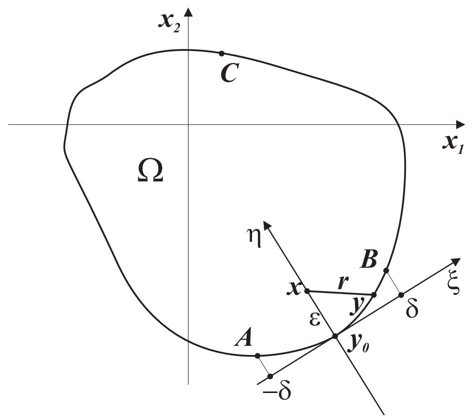

Рис. 1. К вычислению интеграла I_2

ось η — по нормали в этой точке. Считаем, что δ достаточно мало, и кривая Аy_0В представима уравнением: $\eta(\xi) = \frac{1}{2R}\xi^2$, $-\delta < \xi < \delta$, R — радиус кривизны контура $\partial\Omega$ в точке y_0. Границу $\partial\Omega$ предполагаем гладкой, из класса C_2, $y \in \Omega$. Имеем тогда

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_{Ay_0B} t_i(x)\left[c_1\left(c_2\delta_{ik}\log(r(x,y)) - \frac{(x_k-y_k)(x_i-y_i)}{r^2(x,y)}\right) + \alpha_{ij}\right] ds_x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\delta}^{\delta} t_i(\xi)\left[c_1\left(c_2\delta_{ik}\frac{1}{2}\log(\xi^2 + (d\xi^2-\varepsilon)^2)\right) - \frac{r^2\cos\alpha_k\cos\alpha_i}{r^2} + \alpha_{ij}\right] ds_x.$$

Здесь $d = 1/(2R)$; α_i — угол между $\overline{r}$ и осью x_i, $i = 1, 2$;

$$ds_x^2 = d\xi^2\left(1 + \left(\frac{1}{R}\xi\right)^2\right).$$

Продолжаем вычисление предела, считая $t_i(\xi)$ непрерывной функцией:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\delta}^{\delta} t_i(\xi)\left[c_1\left(c_2\delta_{ik}\frac{1}{2}\log(\xi^2 + d^2\xi^4 - 2d\varepsilon\xi^2 + \varepsilon^2)\right)\right]\sqrt{1+\frac{\xi^2}{R^2}}\,d\xi -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\delta}^{\delta}(\cos\alpha_k\cos\alpha_i - \alpha_{ij})\sqrt{1+\frac{\xi^2}{R^2}}\,d\xi.$$

Второй интеграл по модулю меньше, чем

$$(1 + \max_{i,j} |\alpha_{ij}|) \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{R^2}}\, d\xi$$

и стремится к нулю, когда $\delta \to 0$.

Переходим к оценке первого интеграла и представим его в виде:

$$\int_{-\delta}^{\delta} t_i(\xi) \left[c_1 \left(c_2 \delta_{ik} \frac{1}{2} \log(d^2\xi^2 + 1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \log \left(\xi^2 + \frac{\varepsilon^2 - 2d\varepsilon\xi^2}{1 + d^2\xi^2} \right) \right) \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{R^2}} \right] d\xi.$$

Величина $(\varepsilon^2 - 2d\varepsilon\xi^2)/(1 + d^2\xi^2)$ равномерно по ξ из отрезка $[-\delta, \delta]$ стремится к нулю при $\xi \to 0$, поэтому к пределу можно перейти под знаком интеграла. В итоге получаем:

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} t_i(x) w_{ki}(x - y_0) ds_x. \tag{3.3}$$

Аналогично выводится, что

$$I_3 = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\rho} \int_{\partial\Omega} F_{ik}(x, y) u_i(x) ds_x =$$
$$= -\frac{1}{2} u_i(y_0) \delta_{ik} + \frac{1}{\rho} \int_{\partial\Omega} F_{ik}(x, y_0) u_i(x) ds_x. \tag{3.4}$$

Впрочем, для доказательства равенства (3.4) легче провести несколько иные рассуждения. Предположим, что уже исходная система координат такова, что точка y_0 служит началом координатной системы; ось x_1 направлена вдоль касательной к контуру $\partial\Omega$, ось x_2 — по внутренней нормали (рис. 2). Имеем

$$\lim_{y \to y_0} \int_{\partial\Omega} u_i(x) F_{ik}(x, y) ds_x = \lim_{y \to y_0} \int_{S_1} u_i(x) F_{ik}(x, y) ds_x + \int_{\partial\Omega \setminus S_1} u_i(x) F_{ik}(x, y_0) ds_x.$$

Здесь S_1 — малая часть контура $\partial\Omega$ от C до D, внутренней точкой которой является y_0. Далее, учтем, что в выражении для $F_{ik}(x, y)$

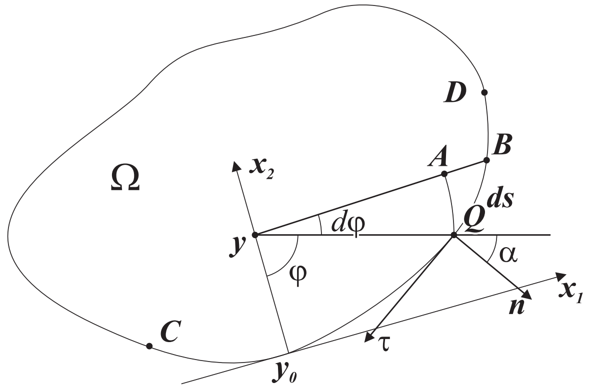

Рис. 2. К доказательству равенства (3.4)

$$F_{ik}(x,y) = \frac{c_3}{r^2}\left[c_4(n_k(x_i-y_i) - n_i(x_k-y_k)) + \right.$$

$$\left. + \left(c_4\delta_{ik} + 2\frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{r^2}\right)\sum_{j=1}^{2}(x_j-y_j)n_j\right],$$

число $\beta = n_k(x_i-y_i) - n_i(x_k-y_k)$ есть скалярное произведение векторов $(n_k, -n_i)$ и (x_i-y_i, x_k-y_k). Можно считать, что $i \neq k$ (иначе $\beta = 0$), и что $(x_i-y_i, x_k-y_k) = r$, тогда $(n_k, -n_i) = \tau$ и $\beta = |r|\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -|r|\sin\alpha$, где α — угол между векторами $r = x-y$ и n.

Другие величины примут вид:

$$\frac{x_i-y_i}{r} = \cos\left(i\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\sum_{j=1}^{2}(x_j-y_j)n_j = r\cos\alpha.$$

Будем считать, что при изменении дуговой координаты s в пределах S_1 угол φ меняется от $-\varphi_0$ до φ_1. Тогда

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{S_1} u_iF_{ik}(x,y)ds_x = \lim_{y\to y_0}\int\limits_{S_1} u_ic_3\{-c_4\sin\alpha(1-\delta_{ik}) +$$

$$+c_4\delta_{ik}\cos\alpha + 2\cos(i\frac{\pi}{2}-\varphi)\cos\alpha\}\frac{ds_x}{r} =$$

$$= \lim_{y\to y_o} c_3\int\limits_{S_1} u_i(x)\left\{-c_4\frac{dr}{r}(1-\delta_{ik}) + c_4\delta_{ik} + \right.$$

$$+ 2\cos\left(i\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\Big\} d\varphi.$$

Использованные здесь равенства $dr = \sin\alpha ds$ и $d\varphi = \cos\alpha ds/r$ следуют из рассмотрения прямоугольного треугольника QAB (рис. 2).

Проводим дальнейшие вычисления.

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{s_1} u_i(x)F_{ik}(x,y)ds_x = -c_3c_4\left((1-\delta_{ik})\lim_{y\to y_0}\int\limits_{s_1} u_i(x)\frac{dr}{r} + \right.$$

$$+c_3\lim_{y\to y_0}\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_1} u_i(x)\left(c_4\delta_{ik} + 2cos\left(i\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)d\varphi =$$

$$-c_3c_4(1-\delta_{ik})u_i(y_0)\lim_{y\to y_0}\ln|r(D)||r(C)| +$$

$$+c_3u_i(y_0)\lim_{y\to y_0}(c_4\delta_{ik}(\varphi_1 + \varphi_0)) +$$

$$+\lim_{y\to y_0}\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_1}[\cos(\frac{\pi}{2}(i+k) - 2\varphi) + \cos(\frac{\pi}{2}(i-k))]d\varphi.$$

Считая, что контур S_1 всегда выбирается таким образом, что $r(D, y_0) = r(C, y_0)$, т. е. берется главное значение интеграла, получаем

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{S_1} u_i(x)F_{ik}(x,y)dS_x = c_3u_i(y_0)(\lim_{y\to y_0}(c_4\delta_{ik}(\varphi_1 + \varphi_0) +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\sin((i+k)\frac{\pi}{2} - 2\varphi_1) - \sin\left((i+k)\frac{\pi}{2} - 2\varphi_0\right)\right] + \delta_{ik}(\varphi_1 + \varphi_0))),$$

$i, k = 1, 2$.

Если отрезок CD стягивается к точке y_0, то $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi_1 = \lim\limits_{y\to y_0}\varphi_0 - \pi/2$.

С учетом этого имеем

$$\lim_{S_1\to y_0}\{\lim_{y\to y_0}\int\limits_{s_1} u_i(x)F_{ik}(x,y)ds_x\} = c_3u_i(y_0)[c_4\delta_{ik}\pi + \delta_{ik}\pi] =$$

$$= -\frac{\rho}{2}u_i(y_0)\delta_{ik}.$$

Итак, формула (3.4) доказана для частного случая выбора системы координат (x_1, x_2). Поскольку пределом являются векторные величины, результат остается справедливым и для других координатных систем, отличных от использованной.

С учетом сказанного, из формул (3.2), (3.3), (3.4) получаем искомое граничное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2}u_k(y_0) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2} (t_i(x) \left(-\frac{1}{\mu}\right) w_{ki}(x - y_0) - \frac{1}{\rho} F_{ik}(x, y_0) u_i(x)) \right] ds_x +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \rho f_i(x) \left(-\frac{1}{\mu}\right) w_{ki}(x - y_0) dx. \tag{3.5}$$

Решив уравнение (3.5) при определенных граничных условиях, перемещения в любой внутренней точке области находим по формуле (3.2); деформации — по формуле (3.6):

$$\varepsilon_{jk}(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{2} [t_i(x) B^*_{ijk}(x, \xi) - c^*_{ijk}(x, \xi) u_i(x)] dS_x +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \rho \sum_{i=1}^{2} f_i(x) B^*_{ijk}(x, \xi) dx, \quad \xi \in \Omega, \tag{3.6}$$

где

$$B^*_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial w_{ik}}{\partial \xi_j} \right), \; c_{ijk}(x, \xi) = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial \xi_j} \right).$$

Напряжения во внутренних точках ξ определяется по формуле (3.7):

$$\sigma_{jk}(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} [t_i(x) T^*_{ijk}(x, \xi) - E^*_{ijk}(x, \xi) u_i(x)] ds_x +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \rho f_i(x) T^*_{ijk}(x, \xi) dx, \tag{3.7}$$

где

$$T^*_{ijk}(x, \xi) = \frac{a_1}{r} \left[\frac{a_2}{r} (\delta_{ik} y_j + \delta_{jk} y_i - \delta_{ij} y_k) + 2 \frac{y_i y_j y_k}{r^3} \right],$$

$$E^*_{ijk}(x,\xi) = \frac{a_3}{r^2}\left[\left(\sum_{l=1}^{2}\frac{n_l y_l}{r^2}\right)\left\{2a_2\delta_{ij}y_k + 2\nu(\delta_{ik}y_j + \delta_{jk}y_i) - 8\frac{y_i y_j y_k}{r^2}\right\} + \right.$$

$$\left. + n_i\left(2\frac{\nu y_j y_k}{r^2} + a_2\delta_{jk}\right) + n_j\left(2\frac{\nu y_i y_k}{r^2} + a_2\delta_{ik}\right) + n_k\left(2\frac{a_2 y_i y_j}{r^2} - a_4\delta_{ji}\right)\right],$$

$$a_1 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}, \quad a_3 = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)},$$

$$a_2 = 1 - 2\nu, \quad a_4 = 1 - 4\nu,$$

$$y_i = x_i - \xi_i, \quad i = 1, 2, \quad r^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Глава 9
Приложение

§ 1. Интегрирование по поверхности.

Главная цель этого дополнения — напомнить, как определяется мера на поверхности и интеграл по этой мере.

1. Напомним, что множество $E \subset R^k$ называется измеримым по Жордану, если найдутся множества, являющие конечными объединениями пересекающихся прямоугольников, одно — содержащееся в E, другое — содержащее E, разность объемов которых, определяемых очевидным образом, сколь угодно мала. Мерой Жордана такого множества E называется нижняя грань объемов множеств — конечных объединений прямоугольников, покрывающих E.

Множество, измеримое по Жордану, измеримо и по Лебегу, и его мера Жордана совпадает с его мерой Лебега. Область определения меры Жордана является кольцом, но не σ-кольцом. Ограниченное множество $E \subset R^k$ измеримо по Жордану (т. е. является жордановым множеством) тогда и только тогда, когда его граница имеет меру Жордана нуль или, что равносильно, когда его граница имеет меру Лебега нуль.

2. Пусть $x = \varphi(u) : R^k \to R^n$ — отображение, определенное в некоторой области $U \subset R^k$ и имеющее там непрерывные производные первого порядка, т. е. $\varphi \in C^1(U)$. Пусть $D \subset U$ — замкнутое жорданово подмножество. Назовем k-мерной поверхностью в R^n множество $S = \varphi(D)$.

Далее предполагаем функцию φ взаимно однозначной на D, исключая, возможно, множество меры нуль. Возьмем произвольное конечное жорданово разбиение $\Pi = \{E_i\}$ множества D, E_i — жордановы множества, их внутренности не пересекаются, $\cup E_i = D$.

Обозначим через $d(\Pi)$ максимальный из диаметров множеств E_i. В каждом множестве E_i (не теряя общности, можно принять, что E_i — прямоугольники) фиксируем произвольным образом внутренние точки ξ_i и рассмотрим на множестве E_i отображение:

$$\xi_i + \Delta u \to \varphi(\xi_i) + \varphi'(\xi_i)\Delta u, \quad \xi_i + \Delta u \in E_i. \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi'(\xi_i)$ — линейный оператор — производная отображения φ в точке ξ_i. Образ $\mathcal{E}_i$ множества E_i при этом отображении является жордановым подмножеством в соответствующем касательном k-мерном линейном многообразии. Построим интегральную сумму

$$\sum_i f(\varphi(\xi_i))|\mathcal{E}_i|_k,$$

где f — непрерывная функция на S, $|\mathcal{E}_i|_k$ — жорданова мера множеств $\varphi(E_i) = \mathcal{E}_i$. Если отображение $x = \varphi(u)$ в покоординатной записи имеет вид

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(u_1, \ldots, u_k), \end{gathered}$$

то, как следует из (1.1), мера $|\mathcal{E}_i|_k$ равна квадратному корню из суммы квадратов всех миноров k-го порядка матрицы $\left\|\frac{\partial\varphi_i(\xi)}{\partial u_j}\right\|$, умноженному на $|E_i|$, в символьных обозначениях:

$$|\mathcal{E}_i|_k = \left|\left[\frac{\partial\varphi(\xi_i)}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial\varphi(\xi_i)}{\partial u_k}\right]\right| |E_i|,$$

где $|E_i|$ — мера Жордана E_i.

Так как функции $f(\varphi(u))$ и $\left|\left[\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_i}, \ldots, \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\right]\right|$ непрерывны, то интегральные суммы при $d(\Pi) \to 0$ стремится к определенному пределу:

$$\int\limits_D f(\varphi(u)) \left|\left[\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_i}, ..., \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\right]\right| du,$$

который мы и определим как интеграл от непрерывной функции f по гладкой поверхности S, обозначив его $\int\limits_S f(x)ds$.

При $f(x) \equiv 1$ получаем площадь поверхности S, т.е.

$$|S_k| = \int\limits_S ds = \int\limits_D \left|\left[\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\right]\right| du.$$

Корректность определения и свойства интеграла по k-мерной поверхности в R^n подробно обсуждаются в [9], с. 251.

3. Обсудим связь введенного понятия интеграла по поверхности с общей теорией интегрирования в топологических пространствах. Схема построения теории, взаимосвязь основных фактов приведены в пособии [12].

Пусть $S = \varphi(D)$, где как и выше, D — замкнутое ограниченное жорданово множество $D \subseteq R^k$. В топологии, индуцированной из R^n, поверхность S является компактным метрическим пространством. Продолжаем предполагать φ взаимнооднозначной из класса $C^1(D)$. Алгебра жордановых множеств на D переходит в алгебру замкнутых множеств на S с аддитивной функцией m, определяемой формулой

$$m(\varphi(B)) = \int\limits_B \left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right| du,$$

B — жорданово подмножество D. Порожденная ими σ-алгебра совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств на S. Следовательно, мы можем интегрировать на S с борелевской мерой μ, продолжающей m, и ее пополнением $\overline{\mu}$ — лебеговской мерой. В силу того, что S — полное сепарабельное метрическое пространство, мера μ радонова.

В силу условий на S и непрерывности f (достаточно чтобы f была ограниченной и множество точек разрыва имело меру нуль) интеграл по мере μ от f , определяемый общей теорией, будет совпадать с определенным в п.2 интегралом. Этот факт делает возможным применить все общие теоремы относительно интегрирования относительно радоновых мер. Но «простое» описание интеграла в п.2 весьма полезно при вычислениях.

4. В частности, площадь поверхности $S = \varphi(D)$, D — замкнутая область в R^k, является пределом площадей определенным образом вписанных в S многогранных поверхностей.

Опишем построение этой многогранной поверхности. Пусть

$$Q = \alpha_1 \leqslant u_1 \leqslant \beta_1, \ \ldots, \alpha_k \leqslant u_k \leqslant \beta_k$$

есть k-мерный куб, лежащий в R^k, и

$$\beta_1 - \alpha_1 = \cdots = \beta_k - \alpha_k = h.$$

Пусть $g_1, \ldots, g_k$ — ребра куба Q, исходящие из фиксированной вершины P, например из вершины $u_1 = \alpha_1, \ \ldots, u_k = \alpha_k$. Векторы

$$\lambda_1 g_{i_1} + \lambda_2 (g_{i_1} + g_{i_2}) + ... + \lambda_k (g_{i_1} + ... + g_{i_k}), \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leqslant 1,$$

заполняют симплекс $Q_{i_1 \ldots i_k}$ с вершинами в точках

$$P, P + g_{i_1}, P + g_{i_1} + g_{i_2}, ..., P + g_{i_1} + ... + g_{i_k}.$$

Объем этого симплекса равен $\frac{h^k}{k!}$, так что все симплексы $Q_{i_1 \ldots i_k}$ равновелики, и не имеют попарно общих внутренних точек.

Если теперь рассмотреть разбиение Π пространства R_k на кубы $Q^{(j)}$ с ребрами h, отобрать из них те, которые содержатся целиком в области D, разделить каждый такой куб на $k!$ равновеликих симплексов $Q^{(j)}_{i_1\,...\,i_k}$ и построить соответствующие симплексы $\widetilde{\varphi}_j(Q^{(j)}_{i_1\,...\,i_k})$, где $\widetilde{\varphi}_j$ — линейная функция, совпадающая в вершинах сиплекса $Q^{(j)}_{i_1\,...\,i_k}$ с функцией φ, то в целом все построение даст нам некоторую многогранную поверхность Π_h, все вершины которой лежат на исходной поверхности.

Доказывается (см. [9], с. 275, 276), что построенные нами многогранные поверхности имеют пределом своих площадей площадь самой поверхности, а интеграл по поверхности S от любой кусочно-непрерывной функции f может быть получен как предел интегралов от этой функции по многогранным поверхностям, аппроксимирующим поверхность S, при стремлении $h \to 0$.

5. Рассмотрим, к примеру, интеграл Гаусса в трехмерном пространстве:

$$I(x) = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi.$$

Здесь S — поверхность, как мы ее определили в п. 2, $S = \varphi(D)$, $\varphi \in C^1(D)$, D — замкнутая ограниченная область в R^2, $S \subset R^3$, $n(\xi)$ — единичная нормаль к S, $x \not\subseteq S$. Нетрудно видеть, что

$$I(x) = \int\limits_S \sum_{i=1}^{3} \frac{\xi_i - x_i}{r^3(x,\xi)} n_i(\xi) ds_\xi.$$

Согласно последнему предложению п. 4 нам достаточно сосчитать интеграл на плоских треугольниках ABC. В нашем случае он считается в явном виде через элементарные функции. Вычисления подобны вычислениям в гл.7 § 4. Точное значение $I(x)$, когда $S = \triangle ABC$, равно телесному углу, под которым из точки x виден треугольник ABC, если x лежит в стороне от плоскости ABC, противоположной нормали.

Можно получить, этот же результат через интегральные суммы для $I(x)$. Для этого рассмотрим конус лучей (рис. 1), проведенных из точки x к точкам границы элемента $\Delta S_i \subseteq S, \xi \in \Delta S_i$. Пусть $\Delta\sigma_i$ — площадь поверхности сферы радиуса $|x-\xi|$ с центром в точке x, попадающей внутрь конуса; $\Delta\omega_i$ — соответствующая поверхность сферы единичного радиуса. Элементарные вычисления показывают, что

$$\triangle S_i \left(\overline{n} \cdot \frac{\overline{x\xi}}{r}\right) = \triangle\sigma_i + O(|\triangle\sigma_i|^2) = r^2 \triangle\omega_i + O(|\triangle\omega_i|^2).$$

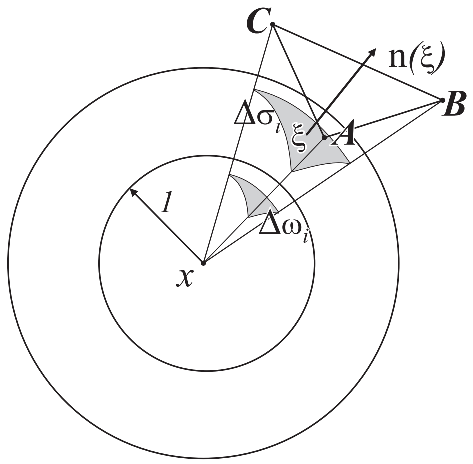

Рис. 1. К вычислению интеграла Гаусса

Составляя интегральную сумму и переходя к пределу, получаем

$$I(x) = \int\limits_{\Delta ABC} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = \omega.$$

Пусть точка x лежит в области ограниченной как поверхностью S, так и аппроксимирующим S многогранником M. В этом случае при любой аппроксимации

$$\int\limits_M \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = 4\pi.$$

Переходя к пределу, согласно предложению п.4 (теорема § 3.65 гл.3 [9]) получаем:

$$I(x) = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = 4\pi, \quad S = \partial\Omega,\ x \in \Omega.$$

Случаи иного расположения x по отношению к S рассматриваются аналогично. Все эти рассуждения применимы и для R^n и поверхности S, являющейся гиперповерхностью в R^n. Вычисление интеграла Гаусса и в этом случае сводится к явно вычисляемому через элементарные функции интегралу. В итоге имеем:

$$I(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} ds_\xi = \begin{cases} 1,\ x \in \Omega, \\ 1/2,\ x \in \partial\Omega, \\ 0,\ x \in \Omega^- \equiv R^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Здесь $\partial\Omega$ — граница ограниченной области $\Omega \subset R^3$, являющаяся кусочно-гладкой поверхностью. В случае, когда $x \in \partial\Omega$ считается, что в некоторой окрестности x касательная плоскость к $\partial\Omega$ меняется непрерывно.

§ 2. Резольвента оператора

Цель этого приложения — получить методами функционального анализа результаты § 4, гл. 7 для общих непрерывных операторов в комплексном банаховом пространстве; глубже изучить свойства спектрального радиуса, ввести важное понятие резольвенты оператора. При этом мы ограничимся рассмотрением непрерывного линейного оператора, определенного на всем пространстве. Изложение базируется на книге [31], с. 485–490.

В функциональном анализе резольвентой оператора U называется оператор $R_\mu = (\mu I - U)^{-1}$, если μ таково, что указанный обратный оператор существует и ограничен. Все точки комплексной плоскости C, отличные от указанных μ, образуют спектр оператора U, обозначаемый через $\sigma(U)$. Точки множества $\rho(U) = C \setminus \sigma(U)$ называют регулярными точками оператора U.

В теории линейных интегральных уравнений резольвента Фредгольма B_λ определяется равенством:

$$I + \lambda B_\lambda = (I - \lambda U)^{-1}, \tag{2.1}$$

также при предположении существования и ограниченности обратного оператора. Множество соответствующих чисел λ называется неособым и обозначается через $\pi(U)$. Дополнение $\pi(U)$ до всей комплексной плоскости называется характериситческим множеством оператора U и обозначается через $\chi(U)$.

Как связаны эти две резольвенты B_λ и R_λ? Если $\mu \neq 0$, то

$$R_\lambda = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} B_{\frac{1}{\mu}}. \tag{2.2}$$

Наоборот, имеем

$$\lambda B_\lambda = (I - \lambda U)^{-1} - I = (I - \lambda U)^{-1}(I - (I - \lambda U)) = (I - \lambda U)^{-1}\lambda U =$$
$$= (I - (I - \lambda U))(I - \lambda U)^{-1} = \lambda U (I - \lambda U)^{-1},$$

то есть, если $\lambda \neq 0$, то

$$B_\lambda = U(I - \lambda U)^{-1} = (I - \lambda U)^{-1} U = \frac{1}{\lambda} U R_{\lambda^{-1}} = \frac{1}{\lambda} R_{\frac{1}{\lambda}} U. \tag{2.3}$$

Исследуем поведение резольвенты B_λ при малых λ. Рассмотрим ряд

$$I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \cdots + \lambda^n U^n + \cdots \qquad (2.4)$$

При достаточно малых λ этот ряд сходится по операторной норме и легко доказать, что

$$(I - \lambda U)^{-1} = I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \cdots + \lambda^n U^n + \cdots ,$$

откуда

$$B_\lambda = U + \lambda U^2 + ... + \lambda^n U^n + ... \qquad (2.5)$$

Эта формула имеет место для тех же λ, для которых сходится ряд (2.4). Но, как установлено в § 1 гл. 7, ряд, (2.4) сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\lambda^n U^n\|} < 1,$$

и расходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\lambda^n U^n\|} > 1.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Резольвента B_λ разлагается в ряд* (2.5) *по степеням λ, радиус сходимости которого равен*

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}}.$$

Если от резольвенты B_λ с помощью соотношения (2.3) перейти к резольвенте R_μ, то получим

Следствие 1. *Резольвента R_μ разлагается в ряд по степеням μ^{-1} :*

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} U + \cdots + \frac{1}{\mu^n} U^{n-1} + \cdots ,$$

ряд сходится при $|\mu| > 1/r$.

Можно указать другое выражение для радиуса сходимости ряда (2.5), связанное с расположением характеристического множества на комплексной плоскости. Докажем сначала два вспомогательных предложения.

Лемма 1. *Каковы бы ни были λ, $\mu \in \pi(U)$ имеет место равенство*

$$B_\lambda - B_\mu = (\lambda - \mu) B_\mu B_\lambda. \qquad (2.6)$$

Доказательство. Имеем

$$B_\lambda - B_\mu = U(I-\lambda U)^{-1} - (I-\mu U)^{-1}U.$$

Умножая это равенство справа на $I-\lambda U$, а затем слева на $I-\mu U$, получим

$$(I-\mu U)(B_\lambda - B_\mu)(I-\lambda U) = (I-\mu U)U - U(I-\lambda U) = (\lambda-\mu)U^2$$

и, следовательно,

$$B_\lambda - B_\mu = (\lambda-\mu)(I-\mu U)^{-1}U\cdot U(I-\lambda U)^{-1} = (\lambda-\mu)B_\mu B_\lambda. \ \square$$

Следствие 2. *Операторы B_λ и B_μ перестановочны, т. е. $B_\mu B_\lambda = B_\lambda B_\mu$.*

Аналогично доказывается, что для всех $\lambda,\ \mu \in \rho(U)$

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu.$$

Лемма 2. *Резольвента B_λ является непрерывной функцией параметра λ в каждой точке множества $\pi(U)$, т. е. если $\lambda_n \to \lambda_0$, $\lambda_n, \lambda_0 \in \pi(U)$, то $B_{\lambda_n} \to B_{\lambda_0}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что вещественная функция $\|B_\lambda\|$ непрерывна на $\pi(U)$. Если $U=0$, то $B_\lambda = 0$, и наше утверждение доказано. Если же $U \neq 0$, то $B_\lambda \neq 0$, ввиду чего можно доказывать непрерывность функции $1/\|B_\lambda\|$. Из равенства (2.6) получаем

$$|\|B_\lambda\| - \|B_\mu\|| \leqslant \|B_\lambda\| - \|B_\mu\| = |\lambda-\mu|\|B_\lambda B_\mu\| \leqslant |\lambda-\mu|\|B_\lambda\|\|B_\mu\|.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{\|B_\mu\|} - \frac{1}{\|B_\lambda\|}\right| \leqslant |\lambda-\mu|,$$

откуда вытекает требуемый результат. $\square$

Установим теперь непрерывность B_λ. Как легко показать, множество $\pi(U)$ открытое, а потому, если $\lambda_0 \in \pi(U)$, то найдется круг $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon$, целиком содержащийся в $\pi(U)$. Непрерывная функция $\|B_\lambda\|$ ограничена в этом круге; пусть, например,

$$\|B_\lambda\| \leqslant M \qquad (|\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon). \tag{2.7}$$

Согласно (2.6) и (2.7)

$$\|B_\lambda - B_{\lambda_0}\| \leqslant |\lambda-\lambda_0|\|B_{\lambda_0}\|\|B_\lambda\| \leqslant M^2|\lambda-\lambda_0| \qquad (|\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon). \ \square$$

Теорема 2. *Радиус сходимости ряда* (2.5) *равен расстоянию* r_0 *от точки* $\lambda = 0$ *до характеристического множества* $\chi(U)$.

Доказательство. Во-первых, так как в круге $|\lambda| < r$ ряд (2.5) сходится и, следовательно, при этих λ существует резольвента, то указанный круг содержится в множестве неособенных значений. Поэтому $r \leqslant r_0$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in X$ и произвольный функционал $f \in X^*$ и рассмотрим функцию φ комплексного переменного λ:

$$\varphi(\lambda) = f(B_\lambda(x)).$$

Докажем, что φ регулярна на множестве $\pi(U)$. Действительно, если $\lambda, \mu \in \pi(U)$, то в силу (2.6)

$$\frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} = \frac{f(B_\mu(x)) - f(B_\lambda(x))}{\mu - \lambda} = f(B_\lambda B_\mu(x)).$$

При $\mu \to \lambda$ правая часть имеет пределом $f(B_\lambda^2(x))$ (см лемму 2). Таким образом, существует непрерывная производная $\varphi'(\lambda) = f(B_\lambda^2(x))$. Разложим функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda_0 = 0$

$$\varphi(\lambda) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}\lambda + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n + \cdots \tag{2.8}$$

Этот ряд сходится в круге, не содержащим особых точек функции φ, и тем более в круге $|\lambda| < r_0$. Но в силу (2.5)

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(U^{n+1}(x))\lambda^n \qquad (|\lambda| < r). \tag{2.9}$$

При этом вследствие известной теоремы теории функций комплексного переменного ряды (2.8) и (2.9) тождественны, так что ряд (2.9) сходится при $|\lambda| < r_0$.

Возьмем произвольно $0 < \lambda_1 < r_0$. Из сходимости (2.9) при $\lambda = \lambda_1$ вытекает, что

$$\lambda_1^n f(U^{n+1}(x)) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

и, следовательно, ввиду произвольности f,

$$\lambda_1^n U^{n+1}(x) \to 0$$

в слабой топологии. Но слабо сходящаяся последовательность элементов ограничена:

$$\sup_n \|\lambda_1^n U^{n+1}(x)\| < \infty.$$

Так как это равенство выполнено для каждого $x \in X$, а пространство X полное, то по принципу равномерной ограниченности

$$\sup_n \|\lambda_1^n U^{n+1}\| = M < \infty. \tag{2.10}$$

Поэтому

$$\lambda_1 \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} \leqslant \lim_{n\to\infty} M^{1/n} = 1,$$

и

$$\lambda_1 \leqslant \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}} = r.$$

Так как λ_1 можно взять сколь угодно близким к r_0, то $r_0 \leqslant r$. Учитывая доказанное выше неравенство $r_0 \geqslant r$, получаем отсюда, что $r_0 = r$. $\square$

Замечание 1. Пусть λ_0 — неособенное значение оператора U. Подобно вышеприведенному справедливо разложение

$$B_\lambda = B_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) B_{\lambda_0}^2 + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^n B_{\lambda_0}^{n+1} + \cdots ,$$

имеющее место в круге $\|\lambda - \lambda_0\| < \rho_0$, где ρ_0 есть расстояние от точки λ_0 до характеристического множества, или, как в теореме 1,

$$\rho_0 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|B_{\lambda_0}^n\|}}.$$

Заменяея резольвенту B_λ резольвентой R_μ, получаем следующий результат.

Следствие 3. *Разложение*

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} U + \cdots + \frac{1}{\mu^{n+1}} U^n + \cdots \tag{2.11}$$

имеет место при $|\mu| > 1/r$, $1/r$ — радиус наименьшего круга с центром в начале координат, целиком содержащего спектр.

Замечание 2. Если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то $1/r = \|U\|$. Сопоставляя это с результатом следствия к теореме 1, приходим к интересному соотношению

$$\|U\| = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}.$$

Следствие 4. *Спектр $\sigma(U)$ непрерывного линейного оператора U в комплексном банаховом пространстве не пуст.*

Доказательство. Если $\sigma(U) = \emptyset$, то, учитывая соотношения между $\sigma(U)$ и $\chi(U)$ и то, что $0 \notin \chi(U)$, получаем, что множество $\pi(U)$ неособенных значений есть вся комплексная плоскость. Так как можно считать, что $U \neq 0$, то при любом λ оператор $B_\lambda \neq 0$. Пусть $y_0 = B_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$. Возьмем $f \in X^*$, $f(y_0) \neq 0$. Аналогично доказательству теоремы 2 получаем, что функция $\varphi(\lambda) = f(B_\lambda(x_0))$ регулярна на всей комплексной плоскости. Далее,

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant |f(B_\lambda(x_0))| \leqslant \|f\| \|B_\lambda\| \|x_0\|.$$

Так как $\sigma(U) = \emptyset$, то существует непрерывный U^{-1}, откуда аналогично лемме 2 получаем, что при $\lambda \to \infty \quad \|R_{1/\lambda}\| \to \|U^{-1}\|$.

$$\|B_\lambda(x_0\| \leqslant 1/|\lambda| \|R_{1\lambda}\| \|U\| \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Таким образом, $\varphi(\lambda)$ ограничена, откуда по теореме Лиувилля $\varphi(\lambda)$ есть тождественная постоянная, которая, очевидно, может быть только нулем. Однако $\varphi(\lambda_0) = f(y_0) \neq 0$, чем получено противоречие. $\square$

Отметим, что если определить спектр оператора U в вещественном случае аналогично случаю комплексного пространства X, то спектр мог бы оказаться пустым множеством.

Замечание 3. Сходимость ряда (в L_2) из теоремы 1, § 4, гл 7, следует из (2.3), (2.5) и теоремы 1 настоящего параграфа.

В теории интегральных уравнений часто под резольвентой понимают разрешающее ядро уравнения (см. [32], статья «Резольвента»). Например, для уравнения $\varphi(s) + \lambda \int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)dt = f(s)$ под резольвентой понимают функцию $\Gamma(s,t;\lambda)$ переменных s,t и параметра λ, при помощи которой решение указанного уравнения представляется в виде $\varphi(s) = f(s) + \lambda \int\limits_a^b \Gamma(s,t;\lambda) f(t)dt$. В этом смысле резольвента уравнения (5.2), § 5, гл. 7, есть функция $\Gamma(s,t;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n - \lambda}$.

§ 3. Проектирующие операторы

Материал этого параграфа взят целиком почти без изменений из [20]. Цель параграфа — выработать прочные навыки обращения с проекторами. Это необходимо и в практике числовых расчетов, и при чтении такого материала, как § 1, гл. 6. Все пространства, рассматриваемые ниже, гильбертовы.

1. Определение проектирующего оператора. Пусть G есть некоторое замкнутое подпространство H и пусть

$$F = H \ominus G,$$

так что

$$H = G \oplus F$$

есть ортогональная сумма подпространств G, F. Это означает, что каждый вектор $h \in H$ однозначно представим в виде

$$h = g + f,$$

где $g \in G$ $f \in F$, $(f, g) = 0$. Следует обратить внимание на отличие употребляемого знака $\oplus$ здесь и в § 1 гл. 6: мы требуем ортогональности компонентов разложения. Вектор g называется проекцией вектора h на G. Определенной во всем пространстве H оператор, который каждому вектору $h \in H$ относит его проекцию на подпространство G, называют *проектирующим оператором, оператором проектирования* (на G) или проектором и обозначают символом P или P_G, так что

$$g = Ph = P_G h.$$

Проектирующий оператор, очевидно, линеен. Кроме того, он ограничен и его норма равна единице. Действительно, так как

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2,$$

то

$$\|g\| \leq \|h\|, \tag{3.1}$$

т. е. $\|P\| \leqslant 1$. Но если $h \in G$, то $g = h$, так что в (3.1) знак равенства достигается, и поэтому $\|P\| = 1$.

2. Свойства проектирующих операторов. Из определения проектирования проектирующего оператора легко заключить, что

$$P^2 = P, \quad P^* = P.$$

Действительно, при любом $h \in H$ вектор $g = Ph$ уже принадлежит G и поэтому $Pg = g$, т. е. $P^2 h = Ph$; но это означает, что $P^2 = P$. Чтобы доказать, что P — самосопряженный оператор, возьмем два произвольных вектора $h_1, h_2 \in H$. Пусть

$$h_1 = g_1 + f_1, h_2 = g_2 + f_2.$$

В таком случае

$$(g_1, h_2) = (g_1, g_2) = (h_1, g_2)$$

т. е.

$$(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2)$$

для любых $h_1, h_2 \in H$. Но это означает, $P^* = P$. Из доказанных свойств вытекает, что проектирующий оператор P неотрицателен, т. е. $(Ph, h) \geqslant 0$. Действительно,

$$(Ph, h) = (P^2 h, h) = (Ph, P^* h) = (Ph, Ph) \geq 0.$$

Теорема 1. *Если P есть определенный всюду в H оператор, для которого при любых $h_1, h_2 \in H$*

$$1)(P^2 h_1, h_2) = (Ph_1, h_2),$$

$$2)(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2),$$

то существует подпространство $G \subseteq H$, оператором проектирования на которое является P.

Доказательство. Оператор P ограничен. Проще всего убедиться в этом следующим образом:

$$||Ph||^2 = (Ph, Ph) = (P^2 h, h) = (Ph, h),$$

поэтому

$$||Ph||^2 \leqslant ||Ph|| ||h||,$$

следовательно,

$$||Ph|| \leqslant ||h||,$$

т. е. оператор P ограничен и его норма не больше единицы. Обозначим через G множество всех векторов $g \in H$, для которых $Pg = g$. Ясно, что G есть линейное многообразие. Докажем, что G замкнуто, т. е. является подпространством. Пусть $g_n \in G$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть $g_n \to g$. В таком случае $g_n = Pg_n$, значит,

$$Pg - g_n = Pg - Pg_n = P(g - g_n),$$

откуда $\|Pg - g_n\| \leqslant \|g - g_n\|$. Полагая здесь $n \to \infty$, будем иметь $||Pg - g|| \leqslant 0$ т. е. $Pg = g$, значит, $g \in G$, чем и доказано, что G замкнуто.

Обозначим через P_G оператор проектирования на G. Мы должны доказать, что $P_G = P$. При любом $h \in H$ вектор $Ph = g$ принадлежит G, так как $P(Ph) = Ph$. Пространству G принадлежит также

$P_G h$. Поэтому нам достаточно доказать, что $(Ph - P_G h, g') = 0$, или $(Ph, g') = (P_G h, g')$ при любом $g' \in G$. Но это следует из того, что

$$(Ph, g') = (h, Pg') = (h, g'),$$

$$(P_G, g') = (h, P_G g') = (h, g').$$

Завершая доказательство, заметим, что если P есть проектирующий оператор и G — подпространство, на которое он проектирует, то $I - P$, где I — тождественный оператор, есть также проектирующий оператор, причем $I - P$ проектирует H на $H \ominus G$. $\square$

3. Действия над проектирующими операторами. В настоящем пункте мы докажем несколько простых предложений относительно умножения, сложения и вычитания проектирующих операторов.

Теорема 2. *Произведение двух проектирующих операторов P_{G_1}, P_{G_2} является проектирующим в том и только в том случае, когда они перестановочны: $P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1}$, и если это условие выполнено, то $P_{G_1} P_{G_2} = P_G$, где $G = G_1 \cap G_2$.*

Доказательство. Если произведение $P_{G_1} P_{G_2}$ есть проектирующий оператор, то $P_{G_1} P_{G_2} = (P_{G_1} P_{G_2})^* = P_{G_2}^* P_{G_1}^* = P_{G_2} P_{G_1}$. Вектор $g = P_{G_1} P_{G_2} h = P_{G_2} P_{G_1} h$ в силу первого представления принадлежит G_1, а в силу второго он принадлежит G_2, т. е. он принадлежит пересечению $G_1 \cap G_2$ этих пространств, откуда следует, что $P_{G_1} P_{G_2} H \subseteq P_{G_1 \cap G_2} H$. Так как обратное включение очевидно, то в одну сторону теорема доказана.

Допустим теперь, что $P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1} = P$. Отсюда следует, что

$$P^2 = (P_{G_1} P_{G_2})^2 = P_{G_1} P_{G_2} P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_1} P_{G_1} P_{G_2} P_{G_2} = P_{G_1} P_{G_2} = P$$

и

$$P^* = (P_{G_1} P_{G_2})^* = P_{G_2}^* P_{G_1}^* = P_{G_2} P_{G_1} = P_{G_1} P_{G_2} = P.$$

Эти равенства показывают, что $P_{G_1} P_{G_2}$ удовлетворяет условиям теоремы п. 2 и поэтому является проектирующим оператором.

Следствие 1. *Два подпространства G_1, G_2 ортогональны в том и только в том случае, когда $P_{G1} P_{G2} = 0$.*

Теорема 3. *Сумма проектирующих операторов*

$$P_{G_1} + P_{G_2} + \ldots + P_{G_n} = Q$$

есть проектирующий оператор в том и только том случае, когда $P_{G_j} P_{G_r} = 0$, $j \neq r$, $j, r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, т . е. тогда и только тогда, *когда подпространства G_j, G_r попарно ортогональны, и в этом случае $Q = P_G$, где*

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n.$$

Доказательство. Если подпространство G_j попарно ортогональны, то $Q^2 = Q$, и значит, достаточность условия очевидна. Последняя часть утверждения теоремы также очевидна. Поэтому докажем необходимость условия. Пусть Q есть проектирующий оператор. Значит,

$$\|f\|^2 \geqslant (Qf, f) \geqslant (P_{G_j} f, f) + (P_{G_r}, f),$$

каковы бы ни были два различных индекса j, r. Из полученного неравенства вытекает, что $\|P_{G_j} f\|^2 + \|P_{G_r} f\|^2 \leqslant \|f\|^2$. Положим здесь $f = P_{G_r} h$. Это дает $\|P_{G_j} P_{G_r} h||^2 + \|P_{G_r} h\|^2 \leqslant \|P_{G_r} h\|^2$ и, значит,

$$||P_{Gj} P_{Gr} h|| = 0,$$

при любом $h \in H$, что и доказывает равенство $P_{Gj} P_{Gr} = 0$, т. е. ортогональность подпространств G_j, G_r. □

Теорема 4. *Разность двух проектирующих операторов*

$$P_{G_1} - P_{G_2} \tag{3.2}$$

будет проектирующим оператором тогда и только тогда, когда $G_2 \subseteq G_1$, и в этом случае $P_{G_1} - P_{G_2}$ есть оператор проектирования на $G_1 \ominus G_2$.

Доказательство. Пусть $P_G = P_{G_1} - P_{G_2}$ есть проектирующий оператор. Тогда сумма $P_G + P_{G_2} = P_{G_1}$ также является проектирующим оператором и, значит, по теореме 2 получаем, что $G \perp G_2$ и $G \oplus G_2 = G_1$. Отсюда следует, что $G_2 \subseteq G_1$ и $G = G_1 \ominus G_2$.

Обратно, пусть $G_2 \subseteq G_1$ и $G = G_1 \ominus G_2$. Тогда $G \perp G_2$ и $G \oplus G_2 = G_1$, поэтому $P_{G_1} = P_G + P_{G_2}$, т. е. $P_{G_1} - P_{G_2} = P_G$. □

Замечание 1. Соотношение $G_2 \subseteq G_1$ эквивалентно неравенству

$$\|P_{G_2} f\| \leqslant \|P_{G_1} f\| \quad \forall f \in H, \tag{3.3}$$

а также неравенству

$$P_{G_2} \leqslant P_{G_1}, \tag{3.4}$$

означающему, что оператор $P_{G_1} - P_{G_2}$ неотрицателен.

Доказательство. Прежде всего, эквивалентность неравенств (3.3) и (3.4) между собой следует из их одновременной эквивалентности неравенству $(P_{G_2} f, f) \leqslant (P_{G_1} f, f)$. Пусть теперь $G_2 \subseteq G_1$. Отсюда вытекает, что $P_{G2} = P_{G2} P_{G1}$. Поэтому при любом $f \in H$

$$\|P_{G_2} f\| = \|P_{G_2}(P_{G_1} f)\| \leqslant \|P_{G_1} f||,$$

следовательно, неравенство (3.3) доказано.

Обратно, пусть дано, что неравенство (3.3) имеет место для любого $f \in H$. Значит, если $P_{G_1}f = 0$, то и $P_{G_2}f = 0$. Другими словами, если $F_1 = H \ominus G_1$, $F_2 = H \ominus G_2$, то из включения $f \in F_1$ следует включение $f \in F_2$. Но это означает, что $F_1 \subseteq F_2$, а потому

$$G_2 = H \ominus F_2 \subseteq H \ominus F_1 = G_1. \ \square$$

4. Последовательности проектирующих операторов.

Теорема 5. *Если $\{P_r\}_1^\infty$ — бесконечная монотонная последовательность проектирующих операторов, то P_r при $r \to \infty$ сильно сходится к некоторому проектирующему оператору P.*

Доказательство. Пусть, например, последовательность $\{P_r\}_1^\infty$ неубывающая: $P_r \leqslant P_{r+1}$, $r = 1, 2, \ldots,$ Так как она ограничена, ибо $P_r \leqslant I$ при любом r, то существует в смысле сильной сходимости $\lim\limits_{r\to\infty} P_r = P$. Действительно, в этом можно убедиться при помощи соотношения $\|P_nf - P_mf\|^2 = ([P_n - P_m]f, f) = \|P_nf\|^2 - \|P_mf\|^2$, которое следует из того, что при $m < n$ разность $P_n - P_m$ являются проектирующим оператором. С другой стороны, при любом r и любых $f, g \in H$ имеем $(P_rf, P_rg) = (P_rf, g) = (f, P_rg)$. Поэтому в пределе $(Pf, Pg) = (Pf, g) = (f, Pg)$. Значит, $P = P^* = P^2$, чем и доказано, что P есть проектирующий оператор. $\square$

Следующая теорема относится к последовательности проекторов без предположения об их монотонности.

Теорема 6. *Если последовательность проектирующих операторов $\{P_r\}_1^\infty$ слабо сходится к некоторому проектирующему оператору P, то она сходится к нему сильно.*

Доказательство. По условию $(P_rh, h) \to (Ph, h)$ при любом $h \in H$. Значит, $\|P_rh\| \to \|Ph\|$, а так как при этом последовательность $\{P_rh\}_1^\infty$ слабо сходится к Ph, то она сходится и сильно. $\square$

5. Раствор двух линейных многообразий.

Определение 1. *Раствором двух линейных многообразий в H называется норма разности операторов, проектирующих в H на замыкания этих линейных многообразий.*

Раствор линейных многообразий M_1, M_2 обозначают символом $\theta(M_1, M_2)$. Таким образом, $\theta(M_1, M_2) = \|P_1 - P_2\| = \|P_2 - P_1\|$, где P_1, P_2 — операторы проектирования на замкнутые многообразия (подпространства) $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ соответственно.

Из данного определения раствора вытекает, что

$$\theta(M_1, M_2) = \theta(\overline{M}_1, \overline{M}_2) = \theta(H \ominus \overline{M}_1, H \ominus \overline{M}_2).$$

Возьмем тождество

$$(P_2 - P_1)h = P_2(I - P_1)h - (I - P_2)P_1 h, \quad h \in H,$$

откуда в силу ортогональности векторов $P_2(I - P_1)h$, $(I - P_2)P_1 h$ заключаем, что

$$\|(P_2 - P_1)h\|^2 = \|P_2(I - P_1)h\|^2 + \|(I - P_2)P_1 h\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|(I - P_1)h\|^2 + \|P_1 h\|^2 = \|h\|^2. \tag{3.5}$$

Это неравенство показывает, что раствор двух линейных многообразий не превосходит единицы: $\theta(M_1, M_2) \leqslant 1$. Раствор обязательно равняется единице, если одно из многообразий содержит отличный от нуля вектор, ортогональный к другому многообразию.

Теорема 7. *Если раствор линейных многообразий M_1, M_2 меньше единицы, то размерности этих линейных многообразий одинаковы:* $\dim M_2 = \dim M_1$.

Доказательство. Достаточно показать, что что из неравенства $\dim M_2 > \dim M_1$ вытекает существование в многообразии M_2 отличного от нуля вектора, ортогонального к многообразию M_1. С этой целью спроектируем $\overline{M}_1$ на $\overline{M}_2$. Мы получим подпространство $G = P_2\overline{M}_1$, размерность которого, очевидно, не превосходит размерности подпространства $\overline{M}_1$ и, следовательно, меньше, чем размерность подпространства $\overline{M}_2$. Поэтому в $\overline{M}_2 \ominus G$ существует отличный от нуля вектор. Такой вектор будет ортогональным всему подпространству $\overline{M}_1$. $\square$

Раствор двух линейных многообразий допускает второе определение:

$$\theta(M_1, M_2) = \max\{\sup_{\substack{f \in \overline{M}_2, \\ \|f\|=1}} \|(I - P_1)f\|, \sup_{\substack{g \in \overline{M}_1, \\ \|g\|=1}} \|(I - P_2)g\|\}. \tag{3.6}$$

Величина

$$\|(I - P_1)f\| = D[f, \overline{M}_1]$$

представляет собой расстояние точки f от многообразия $\overline{M}_1$.

Займемся доказательством формулы (3.6). Согласно первоначальному определению раствора и формуле (3.5)

$$\theta(M_1, M_2) = \sup_{h \in H} \frac{\|(P_2 - P_1)h\|}{\|h\|} =$$

$$= \sup_{h \in H} \frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)h\|^2 + \|(I-P_2)P_1h\|^2}}{\|h\|}. \tag{3.7}$$

Заставим вектор h пробегать не все пространство H, а лишь подпространство $\overline{M}_1$. Тогда стоящая в правой части верхняя грань либо не изменится, либо станет меньше, т. е.

$$\theta(M_1, M_2) \geqslant \sup_{h \in \bar{M}_1} \frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)h\|^2 + \|(I-P_2)P_1h\|^2}}{\|h\|} =$$

$$= \sup_{h \in \bar{M}_1} \frac{\|(I-P_2)h\|}{\|h\|} = \varrho_2.$$

Точно так же доказывается, что

$$\theta(M_1, M_2) \geqslant \sup_{h \in \bar{M}_1} \frac{\|(I-P_1)h\|}{\|h\|} = \varrho_1.$$

Остается доказать, что $\theta(M_1, M_2) \leqslant \max\{\varrho_1, \varrho_2\}$, С этой целью заметим, что по определению величины ϱ_2

$$\|(I-P_2)P_1h\|^2 \leqslant \varrho_2^2 \|P_1h\|^2, \tag{3.8}$$

с другой стороны,

$$\|P_2(I-P_1)h\|^2 = (P_2(I-P_1)h, P_2(I-P_1)h) = (P_2(I-P_1)h, (I-P_1)h) =$$

$$= ((I-P_1)P_2(I-P_1)h, (I-P_1)h) \leqslant \|(I-P_1)P_2(I-P_1)h\| \|(I-P_1)h\|$$

и, следовательно, по определению величины ϱ_1

$$\|P_2(I-P_1)h\|^2 \leqslant \varrho_1 \|P_2(I-P_1)h\| \|(I-P_1)h\|,$$

т. е.

$$\|P_2(I-P_1)h\| \leqslant \varrho_1 \|(I-P_1)h\|. \tag{3.9}$$

Сравнение (3.8) и (3.9) показывает, что

$$\|(I-P_2)P_1h\|^2 + \|P_2(I-P_1)h\|^2 \leqslant \varrho_2^2 \|P_1h\|^2 + \varrho_1^2 \|(I-P_1)h\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\varrho_1^2, \varrho_2^2\} [\|P_1h\|^2 + \|(I-P_1)h\|^2] = \|h\|^2 \max\{\varrho_1^2, \varrho_2^2\},$$

и формула (3.7) дает $\theta(M_1, M_2) \leqslant \max\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

Для изучения основных свойств проекторов в нормированных пространствах рекомендуются книги [33], [34].

§ 4. Емкость и энергия мер

Цель этого параграфа, во-первых, обсудить потенциалы в контексте физическом, рассмотреть их связь с такими понятиями как энергия, заряд и т. п.; во-вторых, показать первые шаги в абстрактную теорию потенциала как раздела теории меры. Вводится понятие «емкость» и значительно ослабляются условия первой главы на рассматриваемые потенциалы. Материал взят из книги [35]

Некоторые материальные объекты обладают тем свойством, что заряд свободно двигается по ним под действием внешнего электрического поля. Такие объекты называются *проводниками.*

Пусть B_1 — проводящее тело, окруженное проводящей поверхностью S_2, которая заземлена и в начальный момент времени не заряжена. Поместим полный заряд e на B_1 и посмотрим, что происходит.

Заряд на B_1 создает электрическое поле, которое заставляет двигаться заряды на S_2; при этом считается, что поверхность S_2, когда она не заряжена, содержит одинаковое число положительных и отрицательных зарядов. После того как заряды на B_1 и S_2 перераспределяются и установится равновесие (внешние силы, действующие на точечный заряд, равны нулю), мы получим электрическое поле F в R_3 с потенциалом φ. Замечено, что $F = 0$ внутри B_1, а на $S_1 = \partial B_1$ и S_2 устанавливается поверхностное непрерывное распределение зарядов с плотностями ω_1, ω_2. Так как

$$\varphi(x) = \int\limits_{S_1} \frac{\omega_1 ds}{|\zeta - x|} + \int\limits_{S_2} \frac{\omega_2 ds}{|\zeta - x|},$$

то из свойств потенциала простого слоя следует, что функция φ непрерывна в R^3; кроме того, так как поверхность S_2 заземлена,

$$\varphi = 0 \quad \text{на} \quad S_2. \tag{4.1}$$

Поскольку $F = -\operatorname{grad}\varphi = 0$ внутри B_1, функция φ постоянна на B_1 и, так как она непрерывна, существует такая постоянная V, что

$$\varphi = V \quad \text{на} \quad S_1, \tag{4.2}$$

причем V зависит от e.

Предложение 1. *V и e пропорциональны.*

Доказательство. Пусть e' — некоторый другой заряд на B_1, φ' — соответствующий ему потенциал и V' — значение функции φ' на S_2. Пусть Ω обозначает область, ограниченную поверхностями S_1

и S_2. Так как функции $(V'/V)\varphi$ и φ' гармонические в Ω, непрерывны в $\overline{\Omega}$, равны на S_2 и на S_1, то

$$\varphi' = (V'/V)\varphi \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{4.3}$$

Выбрав на S_1 нормаль, направленную внутрь области, имеем

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^- = 0 \quad \text{и} \quad S_1,$$

так как потенциал φ постоянен на B_1. Согласно результатам § 3, гл. 1 имеем

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^- = -4\pi\omega_1 \quad \text{на} \quad S_1.$$

Аналогичное соотношение верно для φ', и, следовательно,

$$-4\pi\omega_1' = \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right)^+ = \frac{V'}{V}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^+ = -4\pi\frac{V'}{V}\omega_1.$$

Таким образом, $\omega_1' = (V'/V)\omega_1$ и, следовательно,

$$e' = \int\limits_{S_1} \omega_1' ds = \frac{V'}{V}\int\limits_{S_1} \omega_1 ds = \frac{V'}{V}e,$$

откуда $V'/V = e'/e$. $\square$

Замечание 1. Из предыдущего следует, что

$$e = CV, \tag{4.4}$$

где C зависит только от B_1 и S_2. Число C называется *емкостью конденсатора*, образованного парой S_1 и S_2. Так как $\varphi = 0$ на S_2 и $\varphi = V$ на S_1, то V есть *разность потенциалов* между S_1 и S_2. Таким образом, на языке физики формула (4.4) говорит о том, что заряд e конденсатора равен произведению емкости конденсатора и разности потенциалов между его пластинами.

Фиксируем поверхность S_1 и заряд e на ней, а поверхность S_2 «устремим» к бесконечности. При каждом фиксированном положении поверхности S_2 мы будем получать потенциал φ со следующими свойствами:

(i) функция φ гармоническая между S_1 и S_2;
(ii) φ постоянна на S_1;
(iii) $\varphi = 0$ на S_2.

Примем без доказательства, что при $S_2 \to \infty$ функции φ стремятся к определенной предельной функции φ_∞ со следующими свойствами:

$$\varphi_\infty \quad \text{грамоническая везде вне} \quad S_1, \tag{4.5}$$

$$\varphi_\infty = 0 \quad \text{на бесконечности}, \tag{4.6}$$

$$\varphi_\infty \quad \text{постоянна на} \quad S_1, \tag{4.7}$$

При этом можно ожидать, что функция φ_∞ будет потенциалом некоторого распределения μ_∞ заряда e на S_1, т.е.

$$\varphi_\infty(x) = \int\limits_{S_1} \frac{d\mu_\infty(\zeta)}{|x-\zeta|}, \quad \int\limits_{S_1} d\mu_\infty(\zeta) = e. \tag{4.8}$$

Функцию φ_∞, обладающую свойствами (4.5)–(4.8), мы будем называть *равновесным потенциалом* для B_1, соответствующим заряду e, μ_∞ называется *равновесным распределением*. Возникла неклассическая задача (4.5)–(4.8) для его определения.

При исследовании задачи (4.5)–(4.8) мы отходим от классической схемы. 1. Решение представляется в виде потенциала простого слоя, который затем заменим объемным потенциалом, доказывая, что соответствующая мера (заряд) сосредоточена на границе. 2. Вместо плотностей потенциалов рассматриваются меры. 3. Условия на границу, фактически, не налагаются вследствие перехода к объемному потенциалу и мерам на борелевских множествах E^n. Тем не менее, граничные условия будут выполнены с точностью до множества емкости (и лебеговой меры) нуль. 4. Решение рассматривается как минимизирующее некоторый функционал — функционал энергии меры, к рассмотрению которого мы и приступаем.

Вся эта методика исследования задачи (4.5)–(4.8) млжет быть перенесена и на исследование других эллиптических уравнений и составляет содержание теории «Гармонический анализ».

Каждое распределение зарядов на B имеет некоторую потенциальную энергию, и естественно ожидать (с физической точки зрения) равновесие тогда, когда данное распределение зарядов имеет минимальную потенциальную энергию. Чтобы использовать эту «физическую» идею для доказательства существования равновесного потенциала, нам нужно математическое выражение для потенциальной энергии распределения зарядов μ. Мы выведем такое выражение сначала для конечной системы зарядов. Поместим в точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пространства R^3 заряды $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Так как эти заряды отталкиваются друг от друга, то нужно вообразить, что они «прибиты гвоздями» в соответствующих точках. Если «гвозди» вынуть, заряды разлетятся, производя некоторую работу. Суммарная работа, которую они способны произвести таким образом, называется *потенциальной энергией* этой системы зарядов. Для того, чтобы вычислить эту работу, предположим сначала, что заряды $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ фиксированы, а заряд e_n свободен. Тогда заряд e_n двигается к ∞ силой, создаваемой другими зарядами, которая равна $-e_n \operatorname{grad} U$, где

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{|x - x_i|}.$$

Пусть $x = x(s)$ — путь, пройденный зарядом e_n, причем $x(0) = x_n$, $x(\infty) = \infty$ и s обозначает длину дуги. Работа W, совершаемая в этом движении, определяется следующим образом:

$$W_n = \int\limits_0^\infty (-e_n \operatorname{grad} U) \cdot \frac{dx}{ds} = -\int\limits_0^\infty e_n \frac{dU}{ds} ds = e_n U(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i e_n}{|x_n - x_i|}.$$

Освобождая теперь заряд e_{n-1}, аналогичным образом вычисляем соответствующую работу:

$$W_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e_i e_{n-1}}{|x_{n-1} - x_i|}.$$

Суммарная работа W, когда все заряды свободны, а тем самым потенциальная энергия исходной системы, дается формулой

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i<j} \frac{e_i e_j}{|x_i - x_j|},$$

или

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{|x_i - x_j|}. \tag{4.9}$$

По аналогии с равенством (4.9) определим для каждой меры μ в R^3 *энергию меры* μ, обозначая ее $I(\mu)$, равенством

$$I(\mu) = \int \int \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x - y|}. \tag{4.10}$$

Мы опускаем множитель $1/2$ из равенства (4.9), всюду ниже, если не указана область интегрирования, то предполагается, что она совпадает со всем пространством.

Конечно, для некоторых мер $I(\mu) = +\infty$. Как было сказано выше, мы ожидаем, что равновесным распределением на B будет распределение $\bar{\mu}$ с $\int\limits_B d\bar{\mu} = e$, которое минимизирует $I(\mu)$, т. е. такое, что

$$I(\bar{\mu}) \leqslant I(\mu) \tag{4.11}$$

для всех μ на B, для которых $\int\limits_B d\mu = e$.

Перед нами стоят две задачи: сначала доказать существование меры $\bar{\mu}$ на B, удовлетворяющей условию (4.11), а затем показать, что потенциал $U^{\bar{\mu}} = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|}$ обладает свойствами (4.5)–(4.8).

Для $n \geqslant 3$ и меры μ на R^n положим по определению

$$I(\mu) = \int\int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}, \quad U^{\mu} = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}. \tag{4.12}$$

Очевидно, что

$$I(\mu) = \int U^{\mu}(x)d\mu(x), \tag{4.13}$$

и для того, чтобы мера μ имела конечную энергию, достаточно, чтобы:

1) мера μ имела компактный носитель,

2) потенциал U^{μ} был ограничен на R^n.

Теорема 1. *Пусть $\mu = pdx$ есть мера Лебега — Стильтьеса, где $p \in C_0^2(R^3)$, $U = U^{\mu}$. Тогда*

$$I(\mu) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2\right\}dx. \tag{4.14}$$

Замечание 2. В равенстве (4.14) мы допускаем, что функция p меняет знак, т. е. μ — не обязательно положительная мера.

Доказательство теоремы 1. Фиксируем достаточно большое R. Из первой формулы Грина, примененной в области $|x| < R$, имеем

$$\int\limits_{|x|=R} U\frac{\partial U}{\partial r}ds = \int\limits_{|x|<R} \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} U dx + \int\limits_{|x|<R} U\Delta U dx. \tag{4.15}$$

При $R \to \infty$ правая часть в равенстве (4.15) стремится (напомним, что $\Delta U = -4\pi p$) к

$$\int\limits_{R^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx - 4\pi \int\limits_{R^3} U p dx.$$

Так как

$$\left| \int\limits_{|x|=R} U \frac{\partial U}{\partial r} dS \right| = O\left(\frac{1}{R}\right) O\left(\frac{1}{R^2}\right) 4\pi R^2,$$

то из сказанного выше с учетом (4.13) получаем при $R \to \infty$ равенство

$$0 = \int\limits_{R^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx - 4\pi I(\mu). \ \square$$

Теорема 2. *Пусть E — компактное множество в R^n. Среди всех вероятностных мер на E найдется мера с минимальной энергией, т. е. существует мера $\bar{\mu}$ на E с $\bar{\mu}(E) = 1$, такая, что*

$$I(\bar{\mu}) \leqslant I(\mu) \tag{4.16}$$

для всех мер μ на E с $\mu(E) = 1$.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть E — компактное множество в R^n и $\{\mu_n\}$ — последовательность вероятностных мер, слабо сходящаяся на E к мере $\bar{\mu}$. Тогда последовательность произведений мер $\{\mu_n \times \mu_n\}$ на $E \times E$ сходится к мере $\bar{\mu} \times \bar{\mu}$.*

Доказательство. Ясно, что если $f, g \in C(E)$, то $f(x)g(y)$ принадлежит $C(E \times E)$. Следовательно,

$$\int f(x)g(y)d(\mu_n \times \mu_n) = \int f d\mu_n \int g d\mu_n \to \int f d\bar{\mu} \int g d\bar{\mu}.$$

Таким образом,

$$\int F d(\mu_n \times \mu_n) \to \int F d(\overline{\mu} \times \overline{\mu}), \tag{4.17}$$

когда F есть конечная сумма функций вида $f_i(x)g_i(y)$, где f_i, $g_i \in C(E)$. По теореме Вейерштрасса о приближениях непрерывных функций на $E \times E$ полиномами такие суммы плотны в $C(E \times E)$;

следовательно, соотношение (4.17) имеет место для всех F, принадлежащих $C(E\times E)$. $\square$

Для компактного множества F в R^n обозначим через $P(F)$ множество всех вероятностных мер на F.

Доказательство теоремы 2. Положим,

$$\gamma = \inf_{\mu\in P(E)} I(\mu),$$

и пусть $\{\mu_n\}\subset P(E)$ — последовательность мер такая, что $I(\mu_n)\to\gamma$. Применяя, например, теорему Прохорова (см. [12], с. 41), заключаем, что существует подпоследовательность, которую мы опять обозначим через $\{\mu_n\}$, слабо сходящаяся к мере $\bar\mu\in P(E)$.

Мы утверждаем, что $I(\bar\mu_n)=\gamma$. Действительно, так как последовательность $\{\mu_n\}$ слабо сходится на E к $\bar\mu$, то по лемме 1 последовательность $\mu_n\times\mu_n$ слабо сходится на $E\times E$ к $\bar\mu\times\bar\mu$, т. е.

$$\int\limits_{E\times E} K(x,y)d\mu_n(x)d\mu_n(y)\to\int\limits_{E\times E} K(x,y)d\overline{\mu}(x)d\overline{\mu}(y)$$

для любой функции $K\in C(E\times E)$. Положим

$$K_j(t)=\begin{cases} 1/t, & t>1/j,\\ j, & 0\leqslant t\leqslant 1/t.\end{cases}$$

Поскольку $K_j(|x-y|)\in C(E\times E)$, если для каждой меры μ мы положим

$$I_j(\mu)=\int\limits_{E\times E} K_j(|x-y|)d\mu(x)d\mu(y),$$

то при фиксированном j имеем $I_j(\mu_n)\to I_j(\bar\mu)$ при $n\to\infty$. Кроме того, $I_j(\mu)\leqslant I(\mu)$ для всех μ и, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} I_j(\mu_n)\leqslant\lim_{n\to\infty} I(\mu_n),\quad I_j(\bar\mu)\leqslant\gamma,$$

т. е.

$$\int\limits_{E\times E} K_j(|x-y|)d(\bar\mu\times\overline{\mu})\leqslant\gamma. \tag{4.18}$$

Так как при $j\to\infty$ функции $K_j(|x-y|)$ в каждой точке (x,y), монотонно возрастая, стремится к $1/|x-y|$, то по теореме о монотонной сходимости в силу неравенства (4.18) имеем

$$\int\limits_{E\times E}\frac{1}{|x-y|}d(\bar\mu\times\bar\mu)\leqslant\gamma,$$

т. е. $I(\bar{\mu}) \leqslant \gamma$. Таким образом, $I(\bar{\mu}) = \gamma$. $\square$

Как и в случае конденсатора, равновесный потенциал, который мы представляем через потенциал простого слоя

$$U(\mu)(x) = \int\limits_{\partial B} \frac{d\mu_\infty(\zeta)}{|x-\zeta|},$$

где плотность определяется борелевской мерой μ_∞ на ∂B, принимает постоянное значение V_∞ на B, пропорциональное заряду e на B: $e = C_\infty V_\infty$. Постоянная C_∞, таким образом, равна величине заряда на B, который при равновесном распределении (следуя электростатическим законам мы распределяем заряд на ∂B) порождает потенциал на $S = \partial B$, равный единице (потенциал бесконечно удаленной точки принимается равным нулю). Величина C_∞ называется емкостью B. Если выбрать меру μ_0 на ∂B так, что $U(\mu_0)(x) \equiv 1$ на B, то емкость B равна $\mu_0(\partial B)$. Отсюда легко следует эквивалентное определение: емкостью ограниченного борелевского множества $E \subset R^n$ называется $\sup \mu(E)$, где верхняя грань берется по всем мерам μ с $\operatorname{spt} \subseteq E$ такими, что $U^\mu \leqslant 1$ на E.

Далее покажем, что вероятностная мера $\bar{\mu}$ на компактном (это единственное условие) множестве E с минимальной энергией γ дает равновесное распределение $U(\bar{\mu}/\gamma)$: $\bar{\mu}$ сосредоточена на ∂E, $U(\bar{\mu}) = \gamma$ на $\operatorname{int} E$, $U(\bar{\mu}) < \gamma$ на множестве емкости нуль. Таким образом, для емкости E выполняется равенство $C(E) = 1/\gamma$.

Теорема 3. *Пусть E — компактное множество в R^n, $\bar{\mu}$ — вероятностная мера на E с минимальной энергией $I(\bar{\mu}) = \gamma$. Тогда $U^{\bar{\mu}} = \gamma$ на E, кроме, может быть, подмножества E емкости нуль. Кроме того, $U^{\bar{\mu}} \leqslant \gamma$ всюду в R^n. Для меры $\mu_E = \bar{\mu}/\gamma$ имеем $U^{\mu_E} = 1$ на $E \setminus \partial E$, $C(E) = 1/\gamma$.*

Доказательство. Определим число (возможно, равное $+\infty$)

$$[\alpha, \beta] = \int \frac{d\alpha(x) d\beta(y)}{|x-y|^{n-2}},$$

на векторном пространстве знакоопределнных мер (каждая такая мера представляется разностью положительных мер) α, β. Форма $[\cdot, \cdot]$ обладает свойствами скалярного произведения.

Множество $P(E)$ вероятностных мер на E выпукло в этом пространстве. Мера $\bar{\mu}$ с минимальной энергией принадлежит $P(E)$ и имеет минимальную в $P(E)$ норму: $\|\mu\|^2 = I(\bar{\mu}) = \gamma$. Кроме того, если τ — другая мера из $P(E)$ с конечной энергией, то $[\bar{\mu}, \tau] \geqslant [\bar{\mu}, \bar{\mu}] = \gamma$.

Действительно, мера $\mu_\delta = (1-\delta)\bar{\mu}+\delta\tau$, $0<\delta<1$, принадлежит $P(E)$, и потому $I(\mu_\delta) \geqslant \gamma$. Это эквивалентно тому, что

$$\gamma \leqslant [(1-\delta)\bar{\mu}+\delta\tau, (1-\delta)\bar{\mu}+\delta\tau] = \gamma - 2\delta\gamma + 2\delta[\bar{\mu},\tau] + O(\delta^2),$$

$$0 \leqslant 2\delta([\bar{\mu},\tau]-\gamma) + O(\delta^2).$$

Из последнего неравенства и следует утверждаемое.

Пусть $T = \{x \in E : U^{\bar{\mu}}(x) < \gamma\}$. Предположим, что $C(T) > 0$. Тогда существует $\tau \in P(E)$, $\operatorname{spt}\tau \subset T$, потенциал U^τ ограничен, и, значит, $I(\tau) < 0$. Как только что было доказано, $\int U^{\bar{\mu}} d\tau \geqslant \gamma$, но, с другой стороны, $\int U^{\bar{\mu}} d\tau < \gamma \int d\tau = \gamma$. Полученное противоречие показывает, что $C(T) = 0$.

Далее последовательно доказываем следующие предложения.

Предложение 2. *Если мера μ в R^n имеет компактный носитель E, то*

$$\sup_{R^n} U^\mu \leqslant 2 \sup_E U^\mu. \tag{4.19}$$

Нетрудное доказательство опускаем.

Предложение 3. *Пусть S — борелевское множество в R^n и $C(S) = 0$. Тогда для любой борелевской меры α на R^n с $I(\alpha) < \infty$ имеем $\alpha(S) = 0$.*

Действительно, положим

$$E_n = \{x \in S : U^\alpha(x) < n\}, \quad E_\infty = \{x \in S : U^\alpha(x) = \infty\}.$$

По условию $\alpha(E_\infty) = 0$. Если $\alpha(E_n) = 0$ для всех n, то $\alpha(S) = 0$. Иначе существует n такое, что $\alpha(E_n) > 0$. Выберем $F_n \subset E_n$, $\alpha(F_n) > 0$, F_n компактно. Пусть α' — сужение меры α на F_n. Таким образом, $\operatorname{spt}\alpha' \subseteq E_n$, $\alpha' \leqslant \alpha$, $U^{\alpha'} \leqslant U^\alpha \leqslant n$ на $\operatorname{spt}\alpha'$. По предложению 2 $U^{\alpha'} \leqslant 2n$. Так как $\operatorname{spt}\alpha' \subseteq S$, заключаем, что $C(S) > 0$. Полученное противоречие доказывает наше предложение.

Предложение 4. *Потенциал U^μ, где μ — борелевская мера на R^n полунепрерывен снизу.*

Для доказательства аппроксимируем функцию $1/t$ функциями

$$K_j(t) = \begin{cases} 1/t, & t > 1/j; \\ j, & t \leqslant 1/j. \end{cases}$$

Тогда $u_j(x) = \int K_j(|x-y|)d\mu(y) \to U^\mu(x)$ для любого x. Отсюда следует, что $u_j(x_0) > \alpha$ при $j > j_0$, если $U^\mu(x_0) > \alpha$. Далее следует воспользоваться непрерывностью u_j в точке x_0 и тем, что $U^\mu \geqslant u_j$.

Продолжаем доказательство теоремы 3. Утверждаем, что $U^{\bar\mu} = \gamma$ п. в. по мере $\bar\mu$ на E. По-прежнему, если $T = \{x \in E : U^{\bar\mu} < \gamma\}$, то $C(T) = 0$. По предложению 2 имеем $\bar\mu(T) = 0$. Таким образом,

$$\gamma = \int\limits_E U^{\bar\mu} d\bar\mu = \int\limits_{E \backslash T} U^{\bar\mu} d\bar\mu, \quad \int\limits_{E \backslash T} d\bar\mu = 1, \quad \int\limits_{E \backslash T} (U^{\bar\mu} - \gamma) d\bar\mu = 0,$$

но $U^{\bar\mu} - \gamma \geqslant 0$ на $E \setminus T$, значит, $U^{\bar\mu} = \gamma$ п. в. по $\bar\mu$.

Предположим, что точка $x_0 \in \operatorname{spt}\bar\mu$ такая, что $U^{\bar\mu}(x_0) > \gamma$. Тогда по предложению 4 существует открытое множество $O(x_0)$, в котором $U^{\bar\mu} > \gamma$, и $\bar\mu(O(x_0)) > 0$. Получается, что $U^{\bar\mu}$ не равно γ почти всюду. Таким образом, $U^{\bar\mu} \leqslant \gamma$ на $\operatorname{spt}\bar\mu$. Из неравенства $\sup\limits_{R^n} U^\mu \leqslant \sup\limits_E U^\mu$, где E — компактный носитель μ, которое усиливает неравенство предложения 1, и доказательство которого не приводим, следует, что $U^{\bar\mu} \leqslant \gamma$ всюду. □

Теорема 4. *Пусть $\widetilde{E}$ — множество элементов E, на котором $U^{\bar\mu} < \gamma$. $\widetilde{E} \subset \partial E$; мера $\bar\mu$ сосредоточена на ∂E, $U^{\bar\mu} = \gamma$ на $\operatorname{int} E$, т. е. во внутренних точках E.*

Доказательство. Проведем рассуждения для трехмерного пространства. Фиксируем открытый шар $B \subset \operatorname{int} E$. Как и ранее из $C(\widetilde{E}) = 0$ следует, что по мере Лебега $dx(\widetilde{E}) = 0$. Поэтому и $U^{\bar\mu} = \gamma$ в B п. в. Пусть $f \in C_0^2(B)$. Тогда

$$\gamma \int\limits_B \Delta f dx = \int\limits_B U^{\bar\mu}(x) \Delta f dx = \int d\bar\mu(\zeta) \int\limits_B \frac{\Delta f(x)}{|x - \zeta|} dx = -4\pi \int\limits_B f(\zeta) d\bar\mu(\zeta).$$

По второй формуле Грина имеем

$$\int\limits_B (1 \cdot \Delta f - f \Delta 1) dx = \int\limits_{\partial B} \left(1 \cdot \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial 1}{\partial n}\right) ds,$$

откуда следует, что $\int\limits_B \Delta f dx = 0$, поэтому и $\int\limits_B f(\zeta) d\bar\mu(\zeta) = 0$. В силу произвольности $f \in C_0^2(B)$ имеем $\bar\mu(B) = 0$, т. е. $\operatorname{spt}\bar\mu \subseteq \partial E$. В свою очередь, отсюда следует непрерывность $U^{\bar\mu}$ на множестве $\operatorname{int} E$ и равенство $U^{\bar\mu} = \gamma$ на $\operatorname{int} E$. □

Теорема 5. *Если $x_0 \in E \setminus \widetilde{E}$, то потенциал $U^{\bar\mu}$ непрерывен в точке x_0.*

Доказательство. Если $x_0 \in E \setminus \widetilde{E}$, то $U^{\bar\mu}(x_0) = \gamma$. В силу доказанной полунепрерывности $U^{\bar\mu}(x) > \gamma - \varepsilon$ для всех точек x из некоторой окрестности $O(x_0)$ при заданном $\varepsilon > 0$. Всюду в $O(x_0)$ выполнено неравенство $U^{\bar{\mu}} \leqslant \gamma$, так что $|U^{\bar{\mu}}(x) - U^{\bar{\mu}}(x_0)| \leqslant \varepsilon$ при $x \in O(x_0)$. $\square$

Замечание 3. Упоминаемый в § 1 гл. 5 потенциал Робена есть рассматриваемый в настоящем параграфе потенциал $U(\bar{\mu})$. Свойства емкости (без доказательств): 1. Если E_1, E_2 — борелевские множества и $E_1 \subset E_2$, то $C(E_1) \leqslant C(E_2)$. 2. Если E — борелевское множество, то $C(E) = \sup C(F) = \inf C(O))$, где верхняя грань берется по всем компактным $F \subset E$, а нижняя грань по всем открытым $O \supseteq E$. 3. Если E_1, E_2 — борелевские множества, то $C(E_1 \cup E_2) \leqslant C(E_1) + C(E_2)$. 4. Емкость компактного множества равна емкости его границы. Таким образом емкость не аддитивна на непересекающихся множествах. В теории эллиптических уравнений второго порядка емкость играет важную роль (см. [36]).

§ 5. Дополнительные сведения из математического анализа

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная на R^n функция. Тогда существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций, которая на любом замкнутом ограниченном множестве M равномерно сходится к $f(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим усредняющее ядро

$$h_\delta(x) = \begin{cases} ce^{\dfrac{-\delta^2}{\delta^2 - |x|^2}}, \ |x| \leqslant \delta, \\ 0, |x| \geqslant \delta. \end{cases}$$

Выбираем константу c таким образом, чтобы

$$\int\limits_{R^n} h_\delta(x)dx = 1.$$

Легко доказать, что

$$h_\delta(x) \in C^\infty(R^n) \equiv D(R^n),$$

т. е. является бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем. По $h_\delta(x)$ построим функцию $f_\delta(x)$:

$$f_\delta(x) = f(x) * h_\delta(x) = \int\limits_{R^n} f(x-y)h_\delta(y)dy =$$

$$= \int\limits_{R^n} f(y)h_\delta(x-y)dy = \int\limits_{|y-x|\leqslant\delta} f(y)ce^{-\frac{\delta^2}{\delta^2-|x-y|^2}}dy.$$

Интеграл непрерывно зависит от x, как от параметра и подынтегральная функция бесконечно дифференцируема по этому параметру: $f_\delta(x) \in C^\infty(R^n)$. Оценим разность

$$|f(x) - f_\delta(x)| = \left| \int\limits_{|y-x|<\delta} f(x)h_\delta(|x-y|)\,dy - \int\limits_{|y-x|<\delta} f(y)h_\delta(|y-x|)dy \right|.$$

Учли, что $\int\limits_{|y-x|<\delta} h_\delta(|y-x|)dy = 1$ в силу выбора c. Итак,

$$|f(x) - f_\delta(x)| = \left| \int\limits_{|y-x|<\delta} (f(x) - f(y))h_\delta(|x-y|)dy \right|.$$

Имеем $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1$: если $|y-x| < \delta_1$, то $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in \overline{M}_{\delta_2}$, поскольку из непрерывности f следует, что она равномерно непрерывна на любом замкнутом ограниченном множестве. Здесь M_{δ_2} есть δ_2-окрестность множества M, т. е. $M_{\delta_2} = \{x : x \in R^n,\ r(x, M) < \delta_2\}$, Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получаем для $x \in M$:

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}_n} h_\delta(|x-y|)\,dy = \varepsilon.$$

Выбирая $\varepsilon_n \to 0$ и находя соответствующие δ_n, получаем $f_{\delta_n}(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in M,\ n \to \infty$. $\square$

Отметим некоторые свойства функции $f_\delta(x)$.

1. Если функция $f(x)$ имеет компактный носитель, то функция $f_\delta(x)$ тоже имеет компактный носитель.

   Действительно, пусть $\operatorname{spt} f \subseteq B_R(0)$, тогда из определения $f_\delta(x)$ следует, что $f_\delta(x) = 0$ вне $R_{R+\delta}(0)$.

2. Если $f(x) = \mathrm{const}$, то $f_\delta(x) = \mathrm{const}$.

3. Если $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, то $0 \leqslant f_\delta \leqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть F — замкнутое ограниченное множество $F \subseteq R^n, U \supset F$, U — открытая ограниченная область, содержащая F, тогда существует бесконечно дифференцируемая функция φ, которая обладает свойствами:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \ x \in F, \\ 0, \ x \in R^n \setminus U, \\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \textit{ для всех } x. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим ε-окрестность множества F:

$$F_\varepsilon = \left\{ \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x) \right\}.$$

Существует ε такое, что $F_\varepsilon \subseteq U$. В самом деле, множество $\Phi = R^n \setminus U$ замкнуто, так как U открыто. Если возьмем ε равным $\min\limits_{x \in F, y \in \Phi} r(x, y)$, то $B_\varepsilon(x) \subset U$, при $x \in F$. Далее, берем

$$F_1 = \overline{F}_{\varepsilon/3}, \quad F_{\frac{2}{3}\varepsilon} \subseteq F_\varepsilon \subseteq U, \quad \overline{F}_{\frac{2}{3}\varepsilon} \subseteq F_\varepsilon.$$

Пусть $\rho(x) = \min\limits_{y \in U_1} |x - y|$, где $U_1 = R^n - F_{\frac{2}{3}\varepsilon}$. Положим $\mu = \min\limits_{x \in F_1} \rho(x)$. Ясно, что $\mu > 0$, так как $|x - y| \geqslant \varepsilon/3$, при $y \subset U_1, x \in F_1$. Отметим, что $\rho(x)$ — непрерывная функция. Определим новую функцию

$$f(x) = \min \left\{ \frac{\rho(x)}{\mu}, 1 \right\}.$$

Она также непрерывна, причем:

1) если $x \in F_1 \Rightarrow f(x) = 1$ (тогда $\rho(x) \geqslant \mu \Rightarrow \frac{\rho(x)}{\mu} \geqslant 1$);

2) $f(x) = 0$, если $x \in U_1$.

Берем f_δ, усредняющую функцию f из теоремы 1. Функция $f_\delta \in C^\infty$, и если $\delta < \varepsilon/3$, то

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \in R^n \setminus U, \\ 0 \leqslant f_\delta(x) \leqslant 1, & \text{в противном случае.} \ \square \end{cases}$$

Пусть евклидово пространство R^n, покрыто открытыми множествами $U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$ так, что $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} U_i = R^n$. Пусть каждая точка $x \in R^n$, обладает окрестностью, с которой пересекается только конечное число множеств из $\{U_i\}$, такое покрытие называют локально-конечным.

Определение 1. *Разложением единицы, соответствующим локально-конечному открытому покрытию $\{U_i\}$, называют совокупность бесконечно дифференцируемых функций $e_i(x), i = 1, 2, \ldots,$ обладающих свойствами:*

1. $0 \leqslant e_i(x) \leqslant 1, \forall i.$

2. *spt* $e_i(x) \subseteq U_i$, *или другими словами* $e_i(x) = 0$, *если* $x \notin U_i$.

3.
$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i(x) = 1. \tag{5.1}$$

При фиксированном x в (5.1) только конечное число слагаемых отлично от нуля, так как покрытие $\{U_i\}$ локально-конечное.

Теорема 3 (разложение единицы). *Разложение единицы существует.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ — локально-конечное открытое покрытие. Построим новое покрытие открытыми множествами $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ такими, что
$$\overline{V}_i \subset U_i. \tag{5.2}$$
Пусть построили открытые множества $V_1, \ldots, V_m$, удовлетворяющие (5.2), такие, что

$$V_1 \cup \ldots \cup V_m \cup \bigcup_{i=m}^{+\infty} U_i = R^n.$$

Рассмотрим $Q_m = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_m \cup U_{m+1} \cup \ldots$ Множество Q_m открытое, как объединение открытых множеств. Поэтому замкнуто $F_m = R^n \backslash Q_m$, $F_m \subset U_m$. Так как R^n — нормированное топологическое пространство, то найдется открытое множество V_{m+1} (см. [12], с. 116) такое, что
$$F_m \subset V_{m+1} \subset \overline{V}_{m+1} \subset U_m.$$
Последовательность $V_1, \ldots, V_m, V_{m+1}, U_{m+1}$ покрывает R^n. Множество V_1 строится так же, как и V_{m+1} на шаге индукции.

Таким образом, существует покрытие с нужным свойством (5.2). Покрытие $\{V_i\}$ тоже будет локально-конечным. К паре $(\overline{V}_i, U_i)$ применим предыдущую теорему:

$$\exists h_i(x) \in C^{\infty};\ h_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{V}_i, \\ 0, & x \notin U_i. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x). \tag{5.3}$$

Определяющая ее сумма при фиксированном x конечна, так как x принадлежит конечному числу U_i, далее существует i такое, что $x \in \ V_i$, а потому $h(x) \geqslant 1$. Положим $e_i(x) = (h_i(x)/h(x)) \in C^\infty$. Тогда имеет место равенство

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(x). \ \square \tag{5.4}$$

Следствие 1. *Пусть дополнительно покрытие $\{U_i\}$ обладает свойством, что каждый шар $B_R(0)$ пересекается только с конечным числом U_i. Тогда всякая бесконечно дифференцируемая функция φ с компактным носителем представима в виде конечной суммы:*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x), \ \operatorname{spt}\varphi_i \subseteq U_i. \tag{5.5}$$

Доказательство. Возьмем разложение единицы, соответствующее покрытию U_i:

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(x), \ \text{тогда } \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(x)\varphi(x).$$

В последней сумме конечное число слагаемых, так как существует такое $R > 0$, что $\operatorname{spt}\varphi \subseteq B_R(0)$ и пересекается с конечным числом U_i. Обозначим $\varphi_i(x) = e_i(x)\varphi(x)$. Тогда функция φ представима в виде конечной суммы (5.5). $\square$

§ 6. Введение в теорию обобщенных функций

1. Пространства основных и обобщенных функций. Даны евклидово пространство $E_n = \{(x_1, x_1, \ldots, x_n)\}$ и область $\Omega \subseteq E_n$. Определим множество $D(\Omega)$ как множество всех бесконечно дифференцируемых функций φ, носитель каждой из которых $\operatorname{spt}\varphi$ компактен и лежит в Ω; $\varphi \in D(\Omega)$ эквивалентно условиям: $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{spt}\varphi$ — ограниченное множество, и $\operatorname{spt}\varphi \subseteq \Omega$. Элементы $D(\Omega)$ называются основными функциями.

Пример основной функции, когда $\Omega = E_n$:

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{h^2}{h^2-|x|^2}}, & |x| \leqslant h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

Множество $D(\Omega)$ превращается в линейное пространство, если определить операции сложения двух функций и умножения функции на число обычным образом. В этом линейном пространстве определим понятие сходимости последовательности его элементов.

Будем говорить, что последовательность основных функций φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ сходится к основной функции φ, если:

1. все $\operatorname{spt}\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, лежат в одном компактном множестве подмножества Ω;

2. функции φ_n и их производные любого порядка сходятся равномерно к функции φ и ее соответствующим производным:

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi, \ n \to \infty; \quad \forall\alpha \ D^\alpha\varphi_n \rightrightarrows \varphi, n \to \infty,$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ \alpha_i \in N; \quad D^\alpha\varphi = \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi.$$

Обозначим через $D'(\Omega)$ множество линейных непрерывных функционалов, определенных на $D(\Omega)$. То, что $f \in D'(\Omega)$ эквивалентно следующему: 1) $f : D(\Omega) \to R$, 2) $f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2)$, 3) f непрерывен, т. е., если $\varphi, \varphi_n \in D(\Omega)$ и $\varphi_n \to \varphi$, то $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$.

Элементы $D'(\Omega)$ называются обобщенными функциями, и они образуют линейное пространство с естественно определенными операциями сложения и умножения на число. Значение функционала f на φ обозначается, помимо привычного обозначения $f(\varphi)$, еще как $\langle f, \varphi\rangle$, (f, φ), $\int f\varphi$.

На $D'(\Omega)$ определяют слабую топологию, т. е. топологию поточечной сходимости.

Определение 1. *Последовательность обобщенных функций* f_1, $f_2, \ldots, f_n, \ldots$ *сходится к* f, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\varphi) = f(\varphi)$ $\forall\varphi \in D(\Omega)$.

Пример. Пусть $\Omega \subseteq E_n$, $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$, т. е. $\left|\int\limits_K f(x)dx\right| < \infty$ для любого компактного множества $K \subseteq \Omega$. Для основной функции φ с носителем $\operatorname{spt}\varphi = K \subseteq \Omega$ рассмотрим интеграл

$$\left|\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int\limits_K f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant C\int\limits_K |f(x)|dx < \infty.$$

Таким образом, f определяет линейный функционал над $D(\Omega)$, который, как легко видеть, непрерывен. Получаемые через локально-суммируемые функции f обобщенные отождествляются с последними и носят название регулярных.

Пример не регулярной (сингулярной) обобщенной функции. Рассмотрим соответствие $\varphi(x) \to \varphi(a)$, где $\varphi \in D(\Omega)$, $a \in \Omega$. Это соответствие линейно и непрерывно, поскольку при $\varphi_n \to \varphi$, очевидно, $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$, значит, оно определяет обобщенную функцию, обозначаемую как $\delta(x-a)$: $\langle \delta(x-a), \varphi(x) \rangle = \varphi(a)$.

Эта обобщенная функция (δ-функция Дирака) не является регулярной. Если взять вышеприведенные основные функции φ_h, то для локально-суммируемой функции f со свойством

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_h(x)dx = \varphi_h(0), \text{ считаем, что } 0 \in \Omega,\ h > 0,$$

имели бы слева предел равный нулю при $h \to 0$, а справа предел равен e^{-1}, что невозможно.

2. Дополнительные операции над обобщенными функциями (иначе: распределениями).

1. Пусть $f \in D'(\Omega)$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Можно определить обобщенную функцию ψf как функционал, действующий по правилу:

$$\langle \psi f, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Линейность и непрерывность этого функционала легко проверяются.

2. Дифференцирование обобщенной функции. Пусть $f \in D'(\Omega)$. Определим $\partial f/\partial x_i$ как функционал, действующий следующим образом:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

В общем случае производная $D^\alpha f$ определяется через равенство

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle,\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Таким образом, по определению обобщенные функции имеют производные любого порядка.

Пример. Рассмотрим функцию Хевисайда на E_1:

$$H(x) = \begin{cases} 1,\ x \geqslant 0, \\ 0,\ x < 0. \end{cases}$$

Эта локально суммируемая функция определяет регулярное распределение. Вычислим его производную

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int\limits_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Итак, $H'(x) = \delta(x)$.

3. Прямое произведение и свертка обобщенных функций.

Даны обобщенные функции $f, g \in D'(\Omega)$ и основная функция $\varphi(x, y)$ на декартовом произведении $\Omega \times \Omega = \Omega^2$, т. е. $\varphi \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ и $\operatorname{spt} \varphi$ — компактное множество.

Прямым произведением обобщенных функций f и g называется функционал, $f \times g$, определяемый правилом:

$$\langle f \times g, \varphi(x, y) \rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x, y) \rangle_y \rangle_x,$$

где g рассматривается как функционал, действующий на $\varphi(x, y)$ как функцию от y при фиксированном x; f действует на получающуюся функцию от x. Обозначения $\langle g, \cdot \rangle_y$, $\langle f, \cdot \rangle_x$ подсказывают, по каким переменным «работают» g и f.

То, что функционал $f \times g$ корректно определен, следует из того, что функция $\psi(x) = \langle g, \varphi(x, y) \rangle_y$ есть основная. Для доказательства последнего утверждения предположим ради простоты обозначений, что $\Omega \subseteq E_1$. Схема рассуждений в общем случае останется такой же. Исследуем разностное отношение

$$\frac{\langle g, \varphi(x + \Delta x, y) \rangle_y - \langle g, \varphi(x, y) \rangle_y}{\Delta x} = \\ = \left\langle g, \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} \right\rangle_y. \quad (6.1)$$

Имеет место поточечная, а на компактном множестве $\overline{(\operatorname{spt} \varphi)_\delta}$ и равномерная, сходимость по x

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} \rightrightarrows \varphi'_x(x, y) \quad \text{при } \Delta x \to 0.$$

Здесь $\overline{(\operatorname{spt} \varphi)_\delta}$ — замыкание δ-окрестности $(\operatorname{spt} \varphi)_\delta$, положительное δ берется таким, что $\overline{(\operatorname{spt} \varphi)_\delta} \subseteq \Omega$, $\Delta x < \delta$. Переходя к пределу в равенстве (6.1), получим существование производной ψ'_x. Существование других производных исследуется аналогично. Докажем, что ψ имеет компактный носитель. По условию $\varphi \in D(\Omega^2)$, и, следовательно, $\exists R$, что $\varphi(x,y) = 0$, если $|(x,y)| > R$. Отсюда следует, что если $|x| > R$, то $\varphi(x,y)$ — нулевая функция от y и потому $\langle g, \varphi(x,y)\rangle = \psi(x) = 0$. Итак, ψ — основная функция, и применение f к ψ обосновано. Доказательство непрерывности функционала $f \times g$ мы опускаем (см., например, [37], с. 66).

Теорема 1. *Прямое произведение обобщенных функций коммутативно и ассоциативно, т. е., если $f, g, h \in D'(\Omega)$, то*

1. $f \times g = g \times f$,
2. $(f \times g) \times h = f \times (g \times h$.

Доказательство. Возьмем основную функцию $\varphi(x,y)$ следующего вида: $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, где $\varphi_i \in D(\Omega)$, $i = 1, 2$. Имеем

$$\langle f \times g, \varphi\rangle = \langle f, \langle g, \varphi\rangle_y\rangle_x = \langle f, \varphi_1(x)\langle g, \varphi_2(y)\rangle_y\rangle_x = \\ = \langle f, \varphi_1(x)\rangle_x \langle g, \varphi_2(y)\rangle_y. \quad (6.2)$$

Аналогично получаем, что $\langle g \times f, \varphi(x,y)\rangle =< g, \varphi_2(y)\rangle_y \langle f, \varphi_1(x)\rangle_x$. Следует подчеркнуть, что a priori среди аргументов функции φ выделены и закреплены переменные для f (обозначены x) и для g (обозначены y). Итак, на функциях вида $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ имеем $f \times g = g \times f$.

Если дана произвольная основная функция $\varphi(x,y)$, то можно подобрать функции вида $\varphi_\varepsilon(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(x)\psi_i(y)$ такие, что верно:

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \to \varphi(x,y) \text{ в } D \text{ при } \varepsilon \to 0. \quad (6.3)$$

Действительно, если, например, основная функция φ обращается в нуль вне квадрата $Q = \{|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant a\}$, то, пользуясь теоремой Вейерштрасса из теории приближения функций, построим многочлен $P_n(x,y)$, который на квадрате $2Q$ отличается от φ меньше, чем на $1/n$ вместе с производными до порядка n. Пусть, далее, $v(x)$ — основная функция, равная единице при $|x| \leqslant a$ и равная нулю при $|x| \geqslant 2a$. Тогда функции $\varphi_{1/n}(x,y) = P_n(x,y)v(x)v(y)$ при $n \to \infty$ стремятся к $\varphi(x,y)$ в D. Из (6.3) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle f \times g, \varphi_\varepsilon\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle g \times f, \varphi_\varepsilon\rangle, \text{ т. е. } \langle f \times g, \varphi\rangle = \langle g \times f, \varphi\rangle.$$

Коммутативность прямого произведения доказана.

Второе свойство доказывается аналогично, т. е. сначала доказывается ассоциативность на функциях вида $\varphi(x,y,z) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$, а потом для любой функции φ, при помощи аппроксимации ее функциями указанного вида и соответствующего предельного перехода. $\square$

Определение 2. *Пусть f, g — обычные числовые функции, определенные на $(-\infty, +\infty)$. Сверткой $f * g$ называется функция*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy,\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Предполагается, что интегралы существуют и определяют локально-суммируемую функцию от x.

Если $f \in L^p(R)$, $g \in L^q(r)$, $1/p + 1/q < 2$, $p, q \geqslant 1$, то согласно неравенству Юнга (§ 6, гл. 2) $f * g \in L^{r'}(R)$, где r' определяется условиями $1/r' + 1/r = 1$, $1/r = 2 - 1/p - 1/q$. Из неравенства же Юнга можно вывести, что если $f, g \in L_{\mathrm{loc}}(R)$, то $f * g$ определяет обобщенную функцию:

$$\varphi \to \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x-y)g(y)dydx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x-y)dx\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y+z)g(z)dzdy.$$

Полученные соотношения можно записать в виде

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f, \langle g, \varphi(y+z)\rangle_z\rangle_y = \langle f \times g, \varphi(y+z)\rangle.$$

Таким образом, свертка двух суммируемых функций f и g действует как прямое произведение $f \times g$ на функцию $\varphi(y+z)$ двух переменных y и z. Последняя может не обладать компактным носителем. Тем не менее, определим свертку обобщенных функций f и g в общем случае правилом:

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x,\ \varphi \in D(R^n), \tag{6.4}$$

предполагая, что правую часть равенства (6.4) можно корректно определить. Рассмотрим такую возможность.

Дадим следующие определения. Обобщенная функция f равна нулю в точке $a \in \Omega$, если существует окрестность $V_a \subseteq \Omega$ точки a такая, что если $\operatorname{spt}\varphi \subseteq V_a$, то $\langle f, \varphi\rangle = 0$. Дополнение к множеству точек, в которых $f = 0$, называется носителем обобщенной функции и обозначается через $\operatorname{spt} f$.

Предполагая, что $\operatorname{spt} g$ компактен, т. е., что $\operatorname{spt} g \subseteq B_R(0)$ для некоторого $R > 0$, рассмотрим правую часть (6.4), а именно

$\langle f, \langle g, \varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x$. Пусть $\operatorname{spt}\varphi \subseteq B_a(0)$. Тогда $\operatorname{spt}_y \varphi(x+y) \subseteq B_a(x)$. Поэтому, если $|x| > R + a$, $y \in \operatorname{spt}_y \varphi(x+y)$, то $|y| \geqslant |x| - |x-y| > R + a - a = R$, следовательно, $\langle g, \varphi(x+y)\rangle_y = 0$. Таким образом, $\langle g, \varphi(x+y)\rangle_y$ имеет как функция x компактный носитель, и к ней применим функционал f. Итак, в случае, когда g имеет компактный носитель, правая часть (6.4) корректно определена. Это же верно, если $\operatorname{spt} f$ компактен.

Пример. Носитель $\delta(x)$ есть множество $\{0\}$.

Следующие свойства легко доказываются.

1) Свертка коммутативна и ассоциативна:

$$f * g = g * f, \ (f * g) * h = f * (g * h), \ f, g, h \in D'.$$

Это свойство следует из соответствующих свойств для прямого произведения.

2) В определении свертки δ-функция играет роль единицы, т. е. $\delta * f = f$. Действительно, если $\varphi \in D$, $f \in D'$, то

$$(\delta * f, \varphi) = \langle \delta_x, \langle f_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f_y \langle \delta_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f, \varphi(y)\rangle.$$

3) Для производной D^α, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, имеют место равенства $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g$. Действительно,

$$\langle D^\alpha(f*g), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f*g, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \langle g, D^\alpha\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x = \\ = \langle f, \langle D^\alpha g, \varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x = f * D^\alpha g.$$

К примеру, $(\delta * f)'_x = \delta' * f = \delta * f'_x = f'(0)$, $f = f(x)$.

4) Свертка непрерывна относительно своих сомножителей. Элементарное доказательство опускаем.

4. Фундаментальное решение дифференциального уравнения.

Пусть L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$Lu(x) = a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n u(x), \ x \in R, \tag{6.5}$$

или вида

$$Lu(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \equiv \Delta u(x), \ x \in R^n. \tag{6.6}$$

Фундаментальным решением для оператора L назовем обобщенную функцию $\gamma(x) \in D'(R^n)$ ($n = 1$ в случае (6.5)) такую, что $L\gamma(x) = \delta(x)$.

Для фундаментального решения $\gamma(x)$ и произвольной обобщенной функции $f(x)$ функция $u(x) = \gamma(x) * f(x)$ является обобщенным решением уравнения $Lu(x) = f(x)$. Действительно,

$$Lu(x) = a_0(\gamma^{(n)}*f)+a_1(\gamma^{(n-1)}*f)+\dots+a_n(\gamma*f) = L\gamma*f = \delta*f = f(x).$$

§ 7. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций

В этом параграфе дается определение преобразования Фурье и кратко излагаются его свойства.

1. Пусть $\varphi(x)$ — функция одной переменной. Предполагается, что она определена на всей вещественной оси и существует интеграл $\int\limits_R |\varphi(x)|dx$. Преобразованием Фурье будем называть следующую функцию:

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_R \varphi(x)e^{-i\sigma x}dx. \tag{7.1}$$

Заметим, что оно определено для всех σ. Действительно,

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_R |\varphi(x)|dx < \infty. \tag{7.2}$$

Теорема 1. *Функция $\psi(\delta)$ непрерывна, ограничена и $\psi(\sigma) \to 0$ при $|\sigma| \to \infty$.*

Доказательство. Ограниченность следует из формулы (7.2). Пусть

$$\varphi(x) = \chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1, & x \in [a,b], \\ 0, & x \in R - [a,b], \end{cases}.$$

$$F[\chi_{ab}] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b e^{-ix\sigma}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-ix\sigma}}{-i\sigma}\right)\Bigg|_a^b = -\frac{1}{2i\pi\sigma}(e^{-i\sigma b} - e^{-i\sigma a}).$$

Эта функция непрерывна по σ. Непосредственно проверяется, что $F[\chi_{ab}] \to 0$ при $\sigma \to \infty$. Далее, рассмотрим ступенчатую функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{[a_i,b_i]}\alpha_i \Rightarrow F[\varphi] = \sum_{i=1}^{k} \alpha F[\chi_{[a_i,b_i]}].$$

Для нее утверждение тоже верно. Известно, что если $\varphi \in L_1(-\infty, +\infty)$, то к этой функции можно приблизиться по метрике $L_1(-\infty, +\infty)$ функциями указанного вида, т. е. существует последовательность $\varphi_n \to \varphi$ по норме в L_1. Пусть $\psi_n = F[\varphi_n], \psi = F[\varphi]$. Тогда $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ равномерно в силу (7.2). Поскольку равномерный предел непрерывных функций есть непрерывная функция, то ψ непрерывна и $\psi(\sigma) \to 0$ на бесконечности. $\square$

Теорема 2. *Пусть φ — суммируемая функция на прямой, и пусть для всех x существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} \right| < \infty$$

(*условие Дини*). *Пусть $\psi(\sigma) = F[\varphi]$, тогда φ через ψ выражается следующим образом:*

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma. \tag{7.3}$$

Формула (7.3) есть формула обращения для преобразования Фурье.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\varphi_N(x) =$

$$= \int\limits_{-N}^{N} \psi(\sigma) e^{ix\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \int\limits_{-N}^{N} e^{ix\sigma - it\sigma} d\sigma dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \frac{1}{i(x-t)} \left(e^{i(x-t)N} - e^{i(x-t)(-N)} \right) dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{x-t} \sin(x-t) N dt.$$

Сделаем замену переменной $x - t = \tau,\ dt = -d\tau$:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x-\tau)}{\tau} \sin(\tau N) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} \frac{\varphi(x-\tau)}{\tau} \sin(\tau N) d\tau + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\tau|>N} \frac{\varphi(x-\tau)}{\tau} \sin(\tau N) d\tau.$$

$$|\varphi_N(x) - \varphi(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x-\tau) - \varphi(x)}{\tau} \sin(\tau N) d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{|\tau|\leqslant N} \frac{\varphi(x-\tau) - \varphi(x)}{\tau} \sin(\tau N) d\tau\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{|\tau|> N} \frac{\varphi(x-\tau) - \varphi(x)}{\tau} \sin(\tau N) d\tau\right|.$$

Слагаемое

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{|\tau|> N} \frac{\varphi(x-\tau) - \varphi(x)}{\tau} \sin(\tau N) d\tau\right| \leqslant \varepsilon,$$

если N достаточно велико. В этом можно убедиться, разбивая интеграл на два и применяя для оценок теоремы о среднем.

Для оценки другого слагаемого применим утверждение, что если f суммируема на интервале $(-\delta, \delta)$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x) \sin(\lambda x) dx = 0.$$

Это утверждение вначале докажем для случая $f = \chi_{[c,d]}$, $[c, d] \in [-\delta, \delta]$. Тогда

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x) \sin(\lambda x) dx = \int\limits_{c}^{d} \sin(\lambda x) dx = -\left.\frac{cos(\lambda x)}{\lambda}\right|_{c}^{d} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. В общем случае используем предельный переход к f посредством ступенчатых функций.

Из сказанного следует, что

$$\lim_{N\to 0} \varphi_N(x) = \varphi(x),$$

и поэтому теорема доказана. $\square$

Отметим, что, как следует из доказательства, интеграл в (7.3) понимается в смысле главного значения.

Теорема 3. *Пусть функция φ и ее первая производная абсолютно суммируемые. Тогда*

$$F[\varphi'] = (i\sigma)F[\varphi]. \tag{7.4}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F[\varphi'] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\,\varphi(\sigma)e^{-ix\sigma}\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\sigma)(-i\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma.$$

Учитывая тот факт, что $\varphi(x), \varphi'(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$, который влечет $\varphi(x) \to 0$, мы приходим к формуле (7.4). $\square$

Установим еще ряд свойств преобразования Фурье.

Пусть $\varphi \in L_1(-\infty, +\infty)$, кроме того, $x\varphi \in L_1(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ix\sigma}dx,$$

отсюда

$$\psi'_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)\varphi(x)e^{-ix\sigma}dx,$$

поскольку полученный интеграл существует и равномерно сходится по σ ($|e^{-ix\sigma}| = 1$). Следовательно,

$$F(x\varphi) = \left(i\frac{d}{d\sigma}\right)\psi(\sigma).$$

Рассуждая по аналогии, можем заключить, что для полинома $P_n(x)$ выполняется

$$F[P_n(x)\varphi] = P_n\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)F[\varphi]. \tag{7.5}$$

Введем пространство S_x — пространство функций, которые удовлетворяют неравенству $|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq}$ для всех x, C_{kq} — константа, $k, q = 0, 1, 2, \ldots$ В частности, можно показать, что $\varphi(x) = O(1/x^2)$. Рассмотрим чему равно преобразование Фурье

$$F(x^p\varphi^{(l)}) = \left(i\frac{d}{d\sigma}\right)^p F(\varphi^{(l)}) = \left(i\frac{d}{d\sigma}\right)^p (i\sigma)^l F(\varphi).$$

Мы заключаем, что $\left|\dfrac{d^p}{d\sigma^p}[\sigma^l\psi(\sigma)]\right| \leqslant C$. Отсюда получаем, что преобразование Фурье взаимнооднозначно отображает S_x на S_σ, или просто S на S — пространство быстроубывающих функций. Параметр x в обозначении S_x несущественен и введен для удобства в связи с преобразованием Фурье.

Рассмотрим свертку абсолютно интегрируемых функций φ_1, φ_2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(x-t)dt \equiv (\varphi_1 * \varphi_2)(x).$$

Пусть $\psi_1(\sigma) = F(\varphi_1)$, $\psi_2(\sigma) = F(\varphi_2)$.

$$\psi_1(\sigma)\psi_2(\sigma) = \int\limits_{\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)e^{-ix\sigma}dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(y)e^{-iy\sigma}dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(y)e^{-i(x+y)\sigma}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(y)e^{-i(x+y)\sigma}dx.$$

Сделаем замену переменных во вложенном интеграле: $x + y = t$, $dx = dt$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t-y)\varphi_2(y)e^{-it\sigma}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt(e^{-it\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t-y)\varphi_2(y)dy) = F(\varphi_1 * \varphi_2).$$

Таким образом, справедлива формула

$$\Psi_1(\sigma)\Psi_2(\sigma) = F(\varphi_1 * \varphi_2). \tag{7.6}$$

2. Преобразование Фурье функций класса L_2.

а) Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in S_x$.

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L_2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(\sigma)e^{ix\sigma}d\sigma\overline{\varphi_2(x)}dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(\sigma)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_2(x)}e^{ix\sigma}dx\right)d\sigma.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(\sigma)\overline{\Psi_2(\sigma)}d\sigma,$$

что эквивалентно

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}(\psi_1, \psi_2).$$

Следовательно, $2\pi\|\varphi\|^2_{L_2} = \|\psi\|^2_{L_2}$.

б) Пусть $\varphi \in L_2$ и $\varphi(x) = 0$, когда $x \notin [-a, a]$. Из теории функций действительной переменной известен следующий факт: существует последовательность функций $\varphi_n(x) \in S_x$ такая, что $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ по метрике L_2, $\operatorname{spt}\varphi_n \subseteq [-a, a]$. Рассмотрим

$$\int\limits_{\infty}^{+\infty} |\varphi - \varphi_n|(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} |\varphi - \varphi_n|(x)dx \leqslant$$

(используем неравенство Гельдера)

$$\leqslant \left(\int\limits_{-a}^{+a} dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-a}^{+a} |\varphi - \varphi_n|^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{2a}\|\varphi - \varphi_n\|_{L_2} \to 0.$$

Следовательно, $|\varphi - \varphi_n| \in L_1(-\infty, +\infty)$. Используя свойства преобразования Фурье, получаем, что $F(\varphi_n)$ равномерно стремится к функции ψ — преобразованию Фурье функции $\varphi(x)$.

Рассмотрим $\varphi_n - \varphi_m$, $n > m$.

$$F(\varphi_n) - F(\varphi_m) \equiv \psi_n(\sigma) - \psi_m(\sigma).$$

Используем, что

$$2\pi\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2} = \|\psi_n - \psi_m\|_{L_2}$$

для $\varphi_n, \varphi_m \in S_x$, значит ψ_n фундаментальна в L_2. Как известно, L_2 — полное пространство, поэтому $\widetilde{\psi} : \psi_n \to \widetilde{\psi}$ по метрике L_2.

Итак, мы имеем два факта: $\psi_n \to \widetilde{\psi}$ в L_2, и $\psi_n \to \psi = F(\varphi)$ равномерно. Отсюда следует, что $F(\varphi) = \widetilde{\psi} \in L_2$ и $2\pi\|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2$.

в) Пусть $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Построим $\varphi_N(x) = \varphi(x)$ при $|x| \leqslant N$, $\varphi_n(x) = 0$, в противном случае. Положим

$$\psi_N = F(\varphi_N) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x)e^{-ix\sigma}dx.$$

Выше доказано, что $2\pi\|\varphi_N\|^2_{L_2} = \|\psi_N\|^2_{L_2}$. Имеем:

$$2\pi\|\varphi_N - \varphi_M\|_{L_2} = \|\psi_N - \psi_M\|_{L_2}.$$

Функции $\varphi_N \to \varphi$ в метрике L_2, следовательно ψ_N фундаментальна в L_2. Поэтому существует функция $\psi = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x)e^{-ix\sigma}d\sigma$, которая и объявляется преобразованием Фурье функции φ из пространства $L_2(-\infty, \infty)$.

3. Преобразование Фурье обобщенных функций многих переменных. Все, установленное выше для преобразования Фурье функции одной переменной, очевидным образом переносится на преобразование интегрируемой функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных ($\varphi \in L_1(R^n)$, или $\varphi \in L_2(R^n)$). Само преобразование определяется формулой ($\varphi \in L_1(R^n)$):

$$\psi(\sigma) = \int\limits_{R^n} e^{-i(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \cdots + x_n\sigma_n)}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\cdots x_n,$$

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Если мы перепишем эту формулу:

$$\psi(\sigma) = \int\limits_{R^n} e^{-ix\cdot\sigma}\varphi(x)dx,$$

то очевидным образом переписываются и все формулы, доказанные для случая одной переменной, только числовой множитель 2π заменяется на $(2\pi)^n$ с учетом размерности пространства.

Перейдем теперь к распределениям. Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция и $g(\sigma)$ — ее преобразование Фурье. Тогда для основной функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье $\psi(\sigma)$ имеет место соотношение ($x \in R$)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)e^{ix\sigma}}dxd\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma,$$

т. е.

$$2\pi(f, \varphi) = (g, \psi). \tag{7.7}$$

Если $\varphi \in D(R)$, то $\psi \in Z(R)$, где Z — пространство всех целых функций $\psi(s)$, удовлетворяющих неравенствам $|s|^q \leqslant e^{a|\tau|}$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, $s = \sigma + i\tau$ (см [38], с. 177). Следуя (7.7), дадим определение.

Функционал g, определенный на пространстве $Z(R)$, называется преобразованием Фурье функционала f, действующего в D, $g = F[f]$, если выполняется (7.7), где $\psi \in Z(R)$, $\varphi \in D(R)$.

Для преобразования Фурье F обобщенных функций сохраняются уже известные формулы для обычного преобразования Фурье: если

P — полином, то

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F[f] = F[P(ix)f], \quad F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\right] = P(-is)F[f].$$

Подробное изложение свойств преобразования Фурье обобщенных функций можно найти в [38], гл. II.

Литература

Основная литература

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб.: Лань, 2002.

2. Васильева А.Б.,Тихонов Н.А. Интегральные уравнения, М.: Физматлит, 2002.

3. Kress R. Linear Integral Equationes, Springer-Verlag, 1999.

4. Chirst M. Lectures on singular integral operators, Published by the AMS, 1990.

Дополнительная литература

5. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992.

6. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и диффернциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

7. Курант Р. Уравнения с частными производными, М.: Мир, 1984.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М.: Физматлит, 2003.

9. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Части 1, 2. М.: Наука, 1972.

10. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных, М.: Высшая школа, 1977.

11. Либ Э., Лосс М.. Анализ, Новосибирск: Научная книга, 1998.

12. Шагидуллин Р.Р. Топологические методы в механике сплошной среды, Казань: Изд-во КГУ, 2009.

13. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства М.: Мир, 1967.

14. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во ИЛ, 1962.

15. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений, М.: Мир, 1979.

16. Эванс Л.К. Уравнение с частными производными, Новосибирск, Научная книга, 2003.

17. Przeworska-Rolewicz D., Rolewiez S. Equations in linear spaces, Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers, 1968.

18. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, М.: Наука, 1968.

19. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, М.: Физматлит, 1963.

20. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.: Наука, 1966.

21. Халмош П. Теория меры, М.: ИЛ, 1953.

22. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2, М.: Физматлит, 2003.

23. Пич А. Ядерный локально выпуклые пространства, М.: Мир, 1967.

24. Берже М. Геометрия, т. 2, М.: Мир, 1084.

25. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов, М.: Мир, 1987.

26. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.

27. Амензаде Ю. А. Теория упругости, М: Высшая школа, 1976.

28. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977.

29. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости М.: Наука, 1981.

30. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения, в сб. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 27, М.: ВИНИТИ, 1988, с. 131–228.

31. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ, М.: Наука, 1977.

32. Математическая энциклопедия, т. т. 1–5. М.: Советская энциклопедия, 1977–1985.

33. Дэй М.М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.

34. Одинец В.П., Якубсон М.Я. Пректоры и базисы в нормированных пространствах. М.: УРСС, 2004.

35. Уэрмер Дж. Теория потенциала. М.: Мир, 1980.

36. Kenig C. E. Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems. AMS Regional Conference Series in Mathematics, №83, 1994.

37. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

38. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. т. 1. М.: Изд-во физ.-мат. литературы. 1958.