

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра математической статистики

Информационный дайджест:

Наука, образование, конференции, путешествия.
8-15 сентября 2019 г.

Источник: XIV Казанская Международная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы – 2019» 7 – 12.09.2019.

13 сентября 2019 г.

подготовил А.В. Казанцев (ИВМиИТ, КМС)

Казанская конференция по теории функций: традиции, люди, доклады и перспективы.



В условиях быстро меняющихся технологий математика, которую называют фундаментальной, казалось бы, сохраняет свое мерное течение. Но это только на первый взгляд. «Жар холодных чисел» продолжает переплавлять идеи, страсти и судьбы в невидимых для обывателя пространствах функций, уравнений и предельных переходов. Как сделать их видимыми? Вот вопрос, к ответу на который мы хотели бы приблизиться, возвратившись к некоторым эпизодам только что закончившейся конференции по теории функций в КФУ.

*Светлой памяти выдающихся
отечественных математиков, стоявших
у истоков Казанских школ по теории функций, –
Петра Лаврентьевича Ульянова (1928 – 2008) и
Евгения Прокопьевича Долженко (1934 – 2019)*

I. Немного истории.

«Первая Казанская летняя школа по теории функций состоялась 26 лет назад», – этими словами начал свою речь на нынешней, XIV-й школе, открывший ее заведующий кафедрой математического анализа КФУ профессор Семен Рафаилович Насыров. – «У истоков нашей конференции стояли два выдающихся математика – академик Петр Лаврентьевич Ульянов и профессор Евгений Прокопьевич Долженко, которого не стало в январе этого года... Петр Лаврентьевич курировал весь спектр исследований, связанных с вещественными переменными, Евгений Прокопьевич – широкий круг вопросов, касающихся ТФКП, граничных свойств аналитических функций, разложения на простейшие дроби, полигармонических функций»...

Минутой молчания почтили присутствующие память своих учителей.

На приведенной выше заставочной фотографии П.Л. Ульянов (крайний слева) и Е.П. Долженко (крайний справа) слушают академика Сергея Михайловича Никольского (стоит в центре), рядом с ним за столом – С.Р. Насыров, который любезно предоставил данное фото – единственное из архива школы, где Ульянов и Долженко вместе – в распоряжение автора настоящего дайджеста. Семен Рафаилович сообщил, что фото делал Евгений Константинович Липачев, а конференция – 2001 года, в программном комитете которой, кроме С.Р. Насырова, были профессора Л.А. Аксентьев, А.М. Елизаров, Д.Х. Муштари, А.Н. Шерстнев и другие, а в оргкомитете работали С.Р. Миронова и Е.А. Турилова. Автор этих строк вспомнил, что также участвовал в той самой – V-ой – школе, и внес в ее культурную программу свой скромный вклад – дружескую рифмованную зарисовку. Вот она:

От рабочих лошадок Оргкомитета!

Когда мы всей гурьбой завалим в «Позис»

И школу-конференцию пройдем,

Мы будем вспоминать шипы и розы

И волжский необъятный водоем,

И комаров, и разных прочих шведов,

И мимо пролетят как страшный сон

Механики голодные к обеду

И ужин на одиннадцать персон!..

Серебряной легендой Никольский
Сверкнет нам, словно свежая гроза:
И грянет гром – неуловимый Коля
Откроет нам заветный кинозал!

«Все хорошо!» – нам скажет профессура,
А мы это по-своему пойдем
И вспомним про свою аспирантуру,
И в честь нее по маленькой... споем!

А. Казанцев, 30.06.2001

«Позис» – «Производственное объединение "Завод имени Серго"», на санаторно-профилакторных приволжских площадях которого разворачивались научные страсти. Это – предместье Зеленодольска, и, думаю, многие участники той школы сразу вспомнят профессора Сурена Аршаковича Григоряна, который тогда работал в Зеленодольском филиале Казанского университета и – по совместительству – в Оргкомитете конференции. В нынешней школе он тоже принимал участие.

«Механики голодные к обеду и ужин на одиннадцать персон». В один из солнечных летних дней приехала на конференцию группа хмурых механиков, по виду студентов-старшекурсников, каких-то неуловимо одинаковых, которые делали все плотно. Сначала они плотно позанимались в плотно заполненной ими аудитории, потом плотно поели в столовой, затем, уплотнившись в своем автобусе, уехали в Казань. Вечером за ужином выяснилось, что они съели одиннадцать наших порций, соответственно, одиннадцать наших участников остались голодными. Что это была за «диверсия», до сих пор остается загадкой. Но ощущение кошмара осталось у меня до сих пор – ведь «ответственным за столовую» назначили меня...

«Серебряной легендой...» Академик С.М. Никольский поражал остальных участников конференции сочетанием крайне преклонного возраста (тогда ему было 96 лет), остроты ума и глубины сосредоточенности, не говоря уже о поразительной памяти, позволявшей ему проникать в прошлое на десятилетия. Представьте, какие чувства испытывали слушатели, когда Сергей Михайлович рассказывал о своей жизни в Киеве в «Дни Турбиных» – в то самое время, когда в нем жили и умирали герои «Белой гвардии»! А как смутились некоторые наши старшие товарищи, когда он говорил о своих поездках в Казань в 20-е годы (XX века) и пытался сопоставить свои и их (!) представления о географии тогдашних казанских улиц... С.М. стригся «под ежика», и седина его в лучах летнего солнца ярко отливала серебром – надо сказать, гораздо ярче, чем у других седовласых. Отсюда и «легенда». От Никольского я впервые услышал о «наездах» на академика Н.Н. Лузина – легендарного основателя Московской математической школы. Разумеется, это предмет другого исследования, но меня поразило нежелание втягиваться в эти «наезды» со стороны некоторых (печально) известных тогдашних советских спецслужб.

«Неуловимый Коля» – местный киномеханик, у которого были ключи от всех наших аудиторий и который имел обыкновение исчезать перед началом каждого заседания. Поиск

Коли превращался в увлекательное состязание для ученой молодежи, но «старики» все-таки бурчали! В общем, «все хорошо», что хорошо кончается!

II. Несколько докладов XIV-й школы-конференции.



День открытия – президиум конференции. Слева направо: директор ИММ им. Н.И. Лобачевского Казанского университета Екатерина Александровна Турилова, профессор НГУ, зав. лаб. геометрического анализа ИМ СО РАН Сергей Константинович Водопьянов, член-корр. АН Республики Башкортостан Камиль Басирович Сабитов, зав. кафедрой математического анализа ИММ им. Н.И. Лобачевского Семен Рафаилович Насыров.



Профессору Валентину Ивановичу Жегалову – 85 лет! Поздравляем юбиляра!

Первый докладчик первого дня – профессор С.К. Водопьянов. *Отображения с ограниченным весовым (q,p) -искажением при минимальной регулярности и их свойства.*

Классическая лекция – начиная с условий Коши–Римана и заканчивая оригинальными результатами – модульными неравенствами для отображений (q, p) -шкалы.



«Пресс-релиз» доклада.

Известная импликация $|Df(x)|^n \leq KJ(x, f)$, $x \in \Omega$, $\Rightarrow \text{mod } f(\Gamma) \leq K' \text{mod } \Gamma$ для функций $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ с ограниченным искажением подвергается далеко идущему обобщению благодаря введению новой концепции квазиконформности f , нового понятия искажения K и новой конструкции модуля mod семейства кривых Γ . Базой такого обобщения является известный результат Полецкого 1970 г., а базовым стимулом – вопросы, поставленные в статье Tengvall 2014 г. В ряде задач модульные неравенства позволяют получить более тонкие результаты по сравнению с соответствующими емкостными.

В связи с задачей модификации класса допустимых деформаций для ослабления неравенства коэрцитивности Болла 1978 г. во время доклада возник разговор о деформациях, которые происходят в головном мозге. Краткость и спонтанность этого разговора, к сожалению, не позволили оценить степень аналогии между обеими деформациями. Тем не менее, докладчиком был построен пример функции запасенной энергии, а именно, $W_2(F) = \text{atr}(F^T F)^{3/2}$ поливыпуклой и коэрцитивной, но нарушающей условие Болла, для которой существует решение проблемы минимизации $I_2(\varphi_0) = \inf I_2(\varphi)$ в подходящем классе гомеоморфизмов φ , где $I_2(\varphi) = \int_{\Omega} W_2(D\varphi(x)) dx$.

Здесь $Df(x)$ – матрица Якоби отображения f и $J = \det D$.

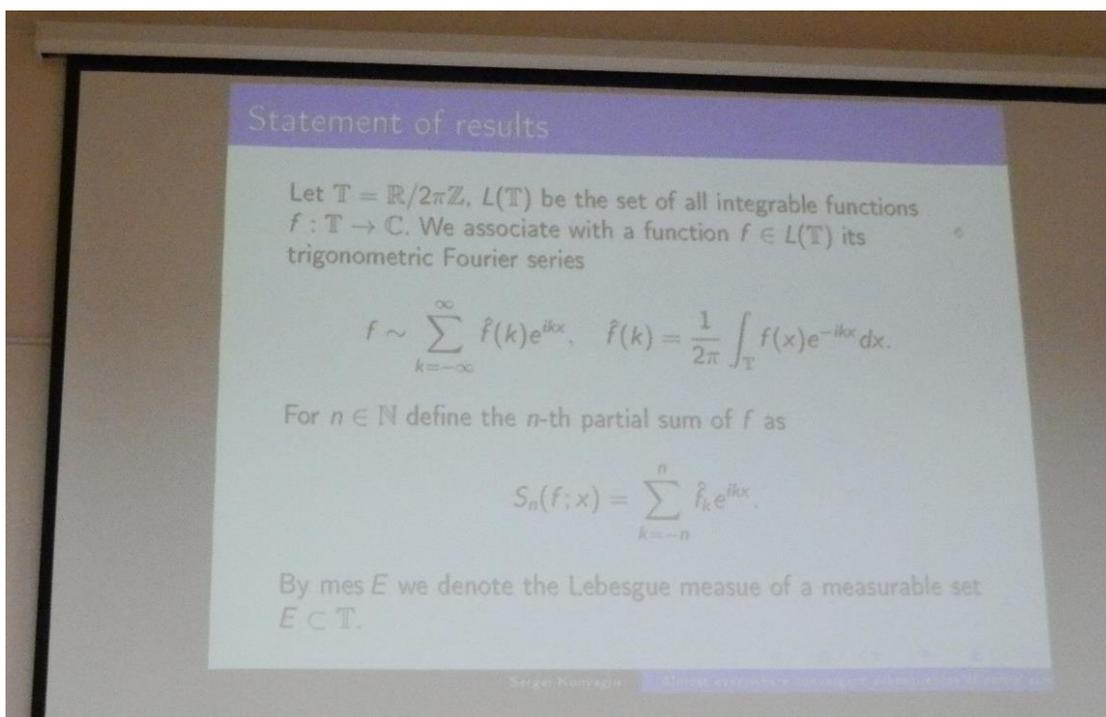
.....

Первый докладчик второго дня – академик РАН Сергей Владимирович Конягин. *О сходящихся подпоследовательностях последовательности частных сумм ряда Фурье.*



Интрига – в том, что тезисов этого доклада нет в материалах конференции. Тем не менее, удалось обойтись фотографиями лекции, которые приводятся ниже (листы 1 – 7).

Лист 1



Личн 2

Kolmogorov (1923) proved the existence of a function with almost everywhere divergent Fourier series. Soon he showed that Fourier series can diverge everywhere. Kolmogorov (1925) established the weak type estimates for the conjugate function. This implies the weak L -convergence of $S_n(f)$ to f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u > 0} u \operatorname{mes}\{x \in \mathbb{T} : |f(x) - S_n(f; x)| > u\} = 0$$

as $n \rightarrow \infty$. In particular, $S_n(f)$ converges to f in L_p , $0 < p < 1$, as $n \rightarrow \infty$. This implies the convergence of $S_n(f)$ to f in measure. Therefore, for any $f \in L(\mathbb{T})$ there exists an increasing sequence $\{n_j\}$ such that $S_{n_j}(f) \rightarrow f$ almost everywhere. The sequence $\{n_j\}$ must depend on f . Gosselin (1958) proved that for any $n_j \rightarrow \infty$ there exists $f \in L(\mathbb{T})$ such that $\{S_{n_j}(f)\}$ unboundedly diverges almost everywhere. Totik (1982) proved everywhere divergence for some function f .

Sergei Kenyagin Almost everywhere divergence of partial sums of Fourier series

Личн 3

Ul'yanov (1964) posed the following problem. Does there exist a sequence $\{N_j\}$ such that for any function $f \in L(\mathbb{T})$ there exists an almost everywhere convergent to f subsequence $\{S_{n_j}(f)\}$ of partial Fourier sums such that $\{n_j\}$ increases and $n_j < N_j$ for any j ? This is one of the central problems in the theory of trigonometric series. The speaker (2004) proved the following.

Theorem A

There exists a sequence $\{N_j\}$ such that for every function $f \in L(\mathbb{T})$ there is an increasing sequence $\{n_j\}$ satisfying the conditions: $n_j \leq N_j$ for infinitely many j and $S_{n_j}(f) \rightarrow f$ almost everywhere.

The analysis of the proof shows that it is possible to generalize this result.

Лист 4

Theorem 1

For any increasing sequence $\{\tilde{n}_j\}$ of positive integers there exists a sequence $\{N_j\}$ such that for every function $f \in L(\mathbb{T})$ there is a subsequence $\{n_j\}$ of the sequence $\{\tilde{n}_j\}$ satisfying the conditions: $n_j \leq N_j$ for infinitely many j and $S_{n_j}(f) \rightarrow f$ almost everywhere.

Recall that a sequence $\{n_j\}$ is said to be lacunary if for some $\rho > 1$ we have

$$\inf_j n_{j+1}/n_j \geq \rho.$$

Taking $\tilde{n}_j = 2^j$ we get a lacunary sequence $\{n_j\}$ with desired property.

Лист 5

Define the tetration function

$$\exp^*(0) = 1, \quad \exp^*(j) = \exp(\exp^*(j-1)) \quad (j \geq 1).$$

In the case $\tilde{n}_j = 2^j$ it is possible to get a tower type upper estimate for N_j in Theorem 1:

$$N_j = \exp^*(j^{1+o(1)}).$$

It turns out that in this case we have a tower type lower estimate for N_j as well.

Theorem 2

There exists a function $f \in L(\mathbb{T})$ such that for any lacunary sequence $\{n_j\}$ with partial sums S_{n_j} converging on a set of positive measure for sufficiently large j the inequality

$$n_j > \exp^*[(\log \log j)^{1-o(1)}]$$

holds.

Sergei Konyagin Almost everywhere convergent subsequences of lacunary

Тetration function автор доклада определил как тетрацию, или башню из экспонент. «Без нее в теореме 1 не обойтись!» – указал он. – «А теорема 2 показывает, как построить такую башню».

Corollary 1

There exists a function $f \in L(\mathbb{T})$ such that for any sequence $\{n_j\}$ with $n_{j+1} \leq n_j^A$ for some positive A the partial sums S_{n_j} diverge almost everywhere.

Indeed, we can take a function f satisfying Theorem 2. Assume that $n_{j+1} \leq n_j^A$. Take a subsequence $\{n'_j\}$:

$$n'_{j+1} = \min\{n_\nu : n_\nu \geq 2n'_j\}.$$

Then $\{n'_j\}$ is a lacunary sequence satisfying $n'_j \leq C^{A^j}$, and $S_{n'_j}$ diverge almost everywhere.

Divergence almost everywhere in Corollary 1 cannot be replaced by everywhere divergence. It is easy to show that for every $f \in L(\mathbb{T})$ there is an increasing sequence $\{n_j\}$ such that $n_j/j \rightarrow 1$ as $j \rightarrow \infty$ and $S_{n_j}(f) \rightarrow f$ on a dense subset.

Actually we can prove a stronger version of Theorem 2.

Theorem 2'

Let Φ be a function $(0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ such that for some u_0 and some positive integer κ the function $\log \Phi(u) / \log u$ increases on $[u_0, +\infty)$ and the κ -fold iteration of Φ exceeds e^u for $u \in [u_0, +\infty)$. Then there exists a function $f \in L(\mathbb{T})$ such that for any sequence $\{n_j\}$ satisfying $n_{j+1} \geq n_j + \log \Phi(n_j)$ with partial sums S_{n_j} converging on a set of positive measure for sufficiently large j the inequality

$$n_j > \exp^* [(\log \log j)^{1-\alpha(1)}]$$

holds.

For example one can apply Theorem 2' to full squares n_j .

Далее объясняется идея доказательства теоремы 2 – текст был представлен докладчиком не полностью, поэтому здесь мы ограничимся вышеизложенным. Этого вполне достаточно для понимания изучаемой в докладе «природы вещей».

Второй докладчик второго дня – профессор Гомельского университета **Александр Павлович Старовойтов**. *Критерий единственности для многочленов Эрмита–Паде.*



Этого доклада также нет в сборнике тезисов. Вновь приводим цепочку фотографий:

Фото 1

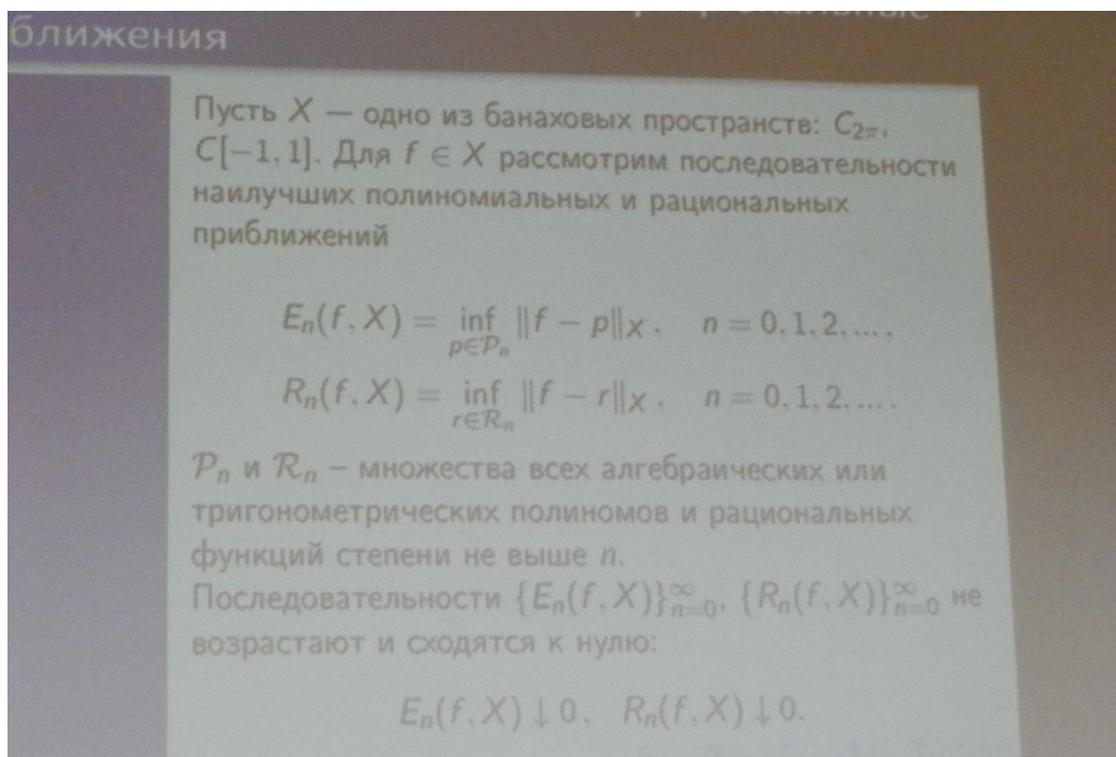


Фото 2

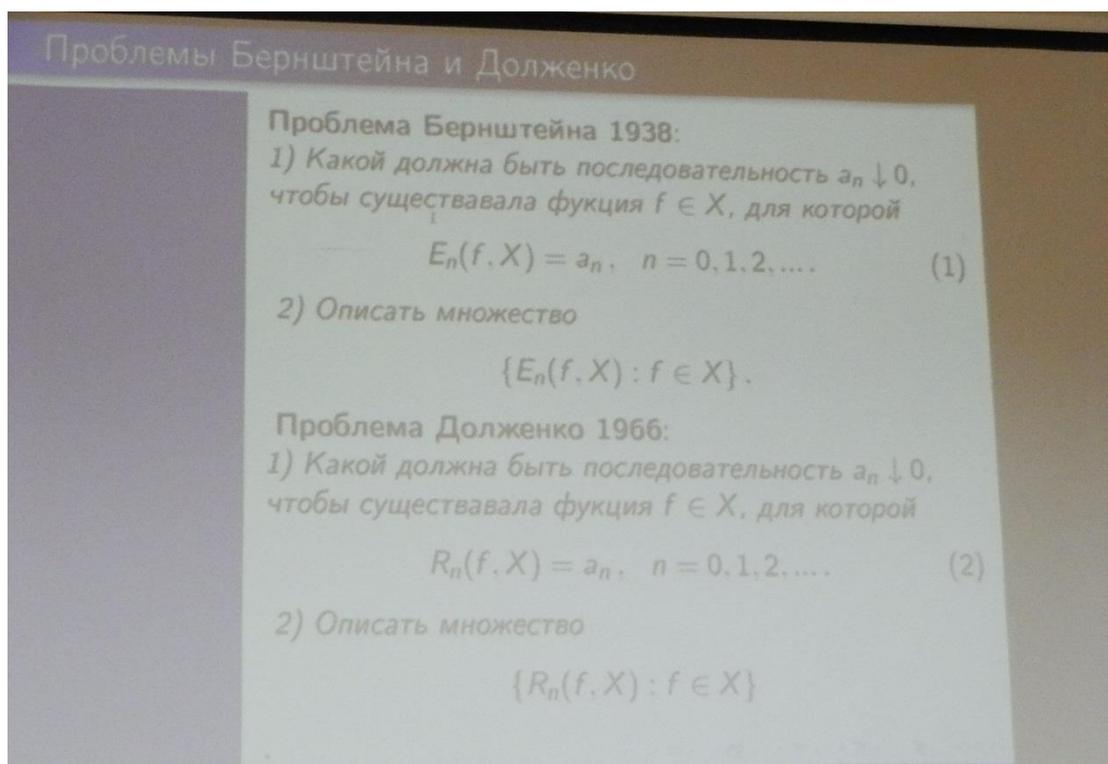


Фото 3

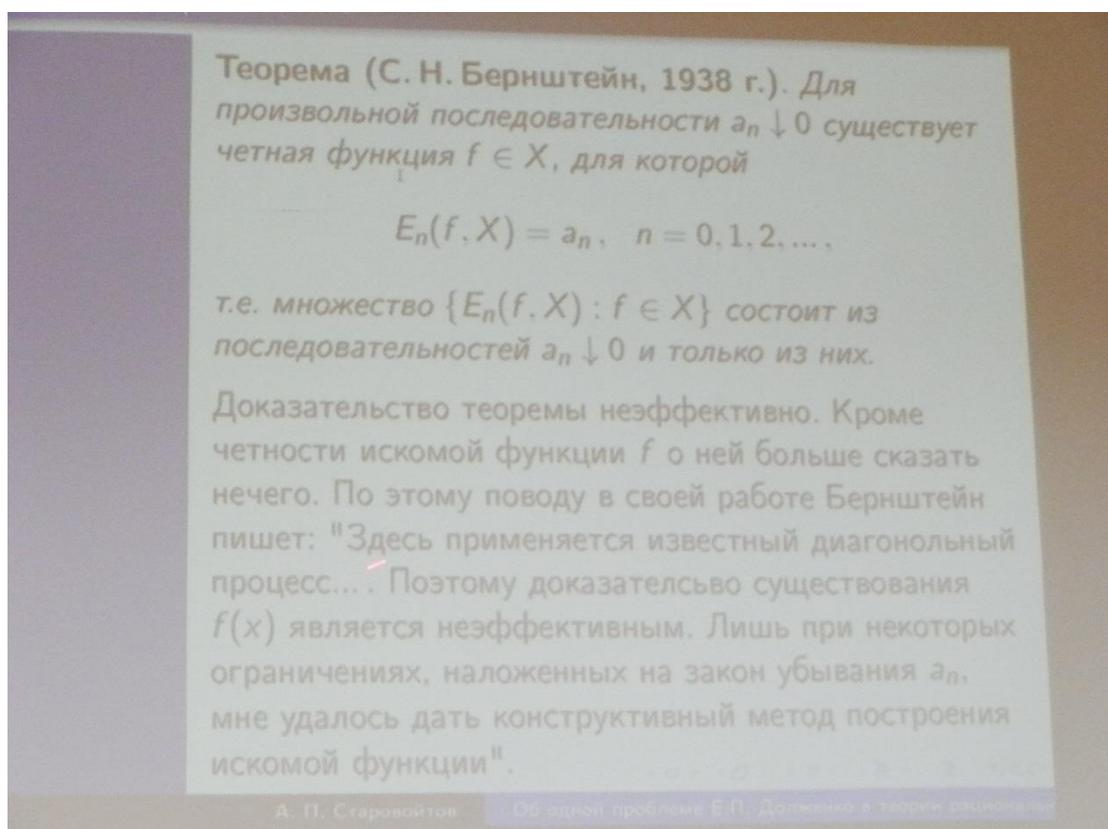


Фото 4

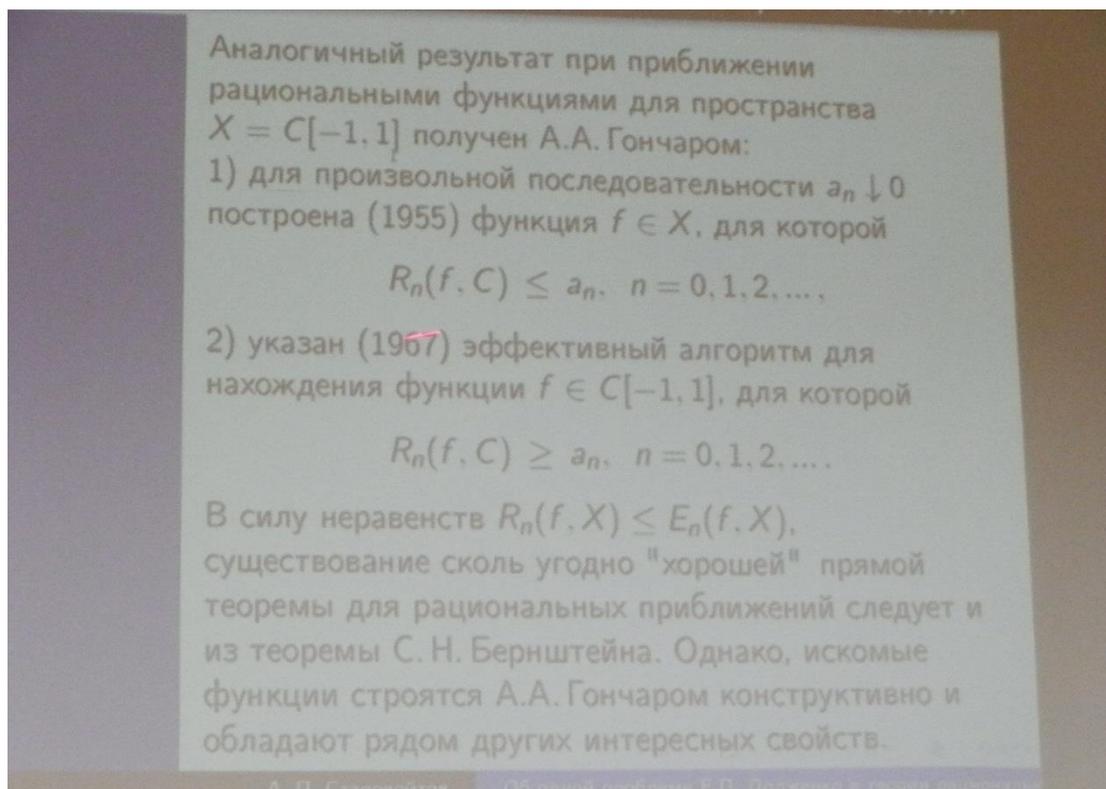


Фото 5

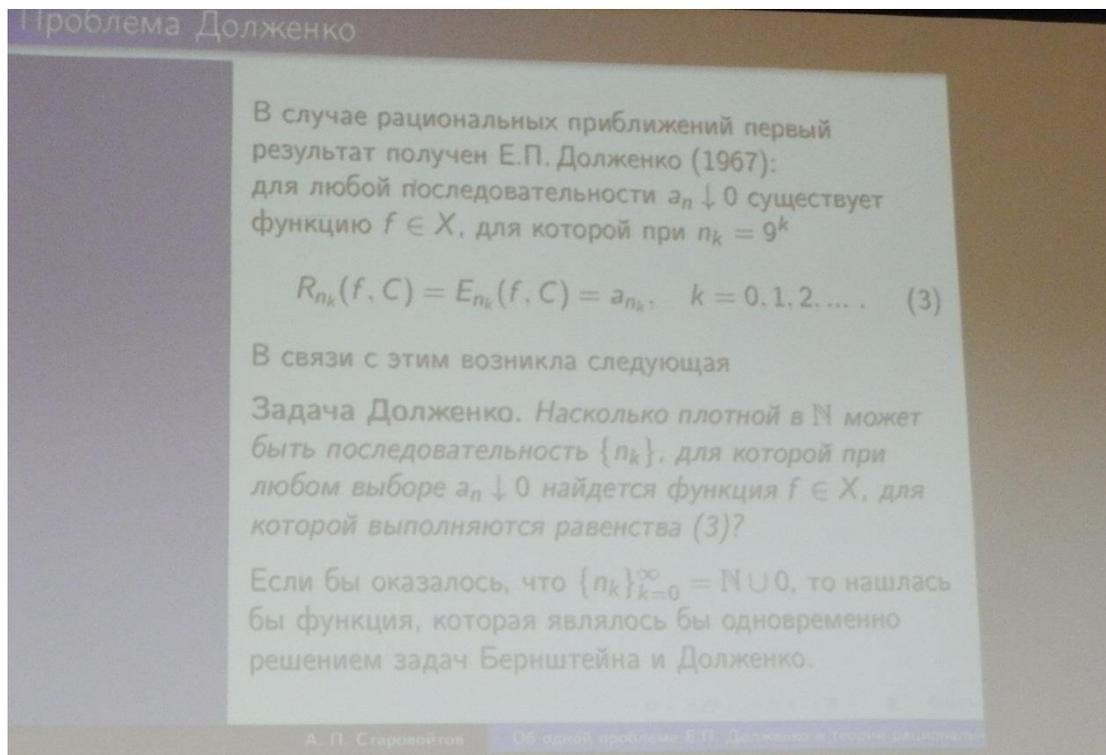


Фото 6

Возникла задача описания множества

$$F(X) = \{f \in X : R_n(f, X) = E_n(f, X), n = 0, 1, \dots\}$$

Усилиями В.М.Тихомирова (1967), А.Л. Левина (1971), Б. Боэма было установлено, что это множество состоит только из многочленов. В частности, в случае, когда $X = C[-1, 1]$, Б. Боэм показал, $F(X)$ совпадает с множеством

$$\{AT_n(x) + B\},$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлены Чебышёва. Стало ясно, что проблему Долженко нельзя решить опираясь только на теорему Бернштейна..

Фото 7

Долженко. Функция Веерштрасса

Искомые функции, для которой справедливо равенства (3), имеют вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_{\lambda_i} - a_{\lambda_{i+1}}) T_{\lambda_i}(x), \quad (4)$$
$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_{\lambda_i} - a_{\lambda_{i+1}}) \sin x P_{\lambda_i}(\cos x), \quad (5)$$

где $\lambda_i = 9^i$, а $P_n(x)$ — многочлены Чебышёва 2-го рода. Для этих функций

$$R_{9^k}(f, X) = E_{9^k}(f, X) = a_{9^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Функция $f(x)$ является аналогом функции Веерштрасса, не имеющей производной. Для неё многочленами наилучшего приближения являются частные суммы ряда (4).

А. П. Старовойтов Об одной проблеме Б.П. Долженко в теории рациональных

Фото 8

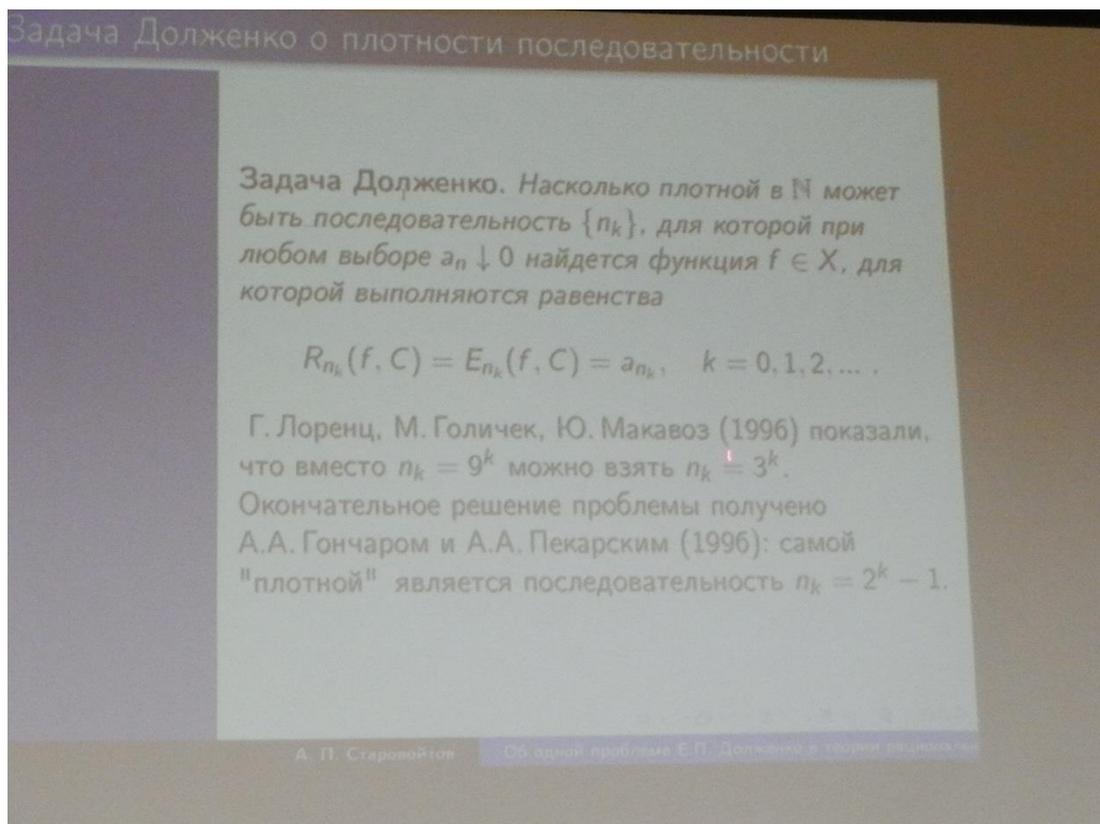


Фото 9

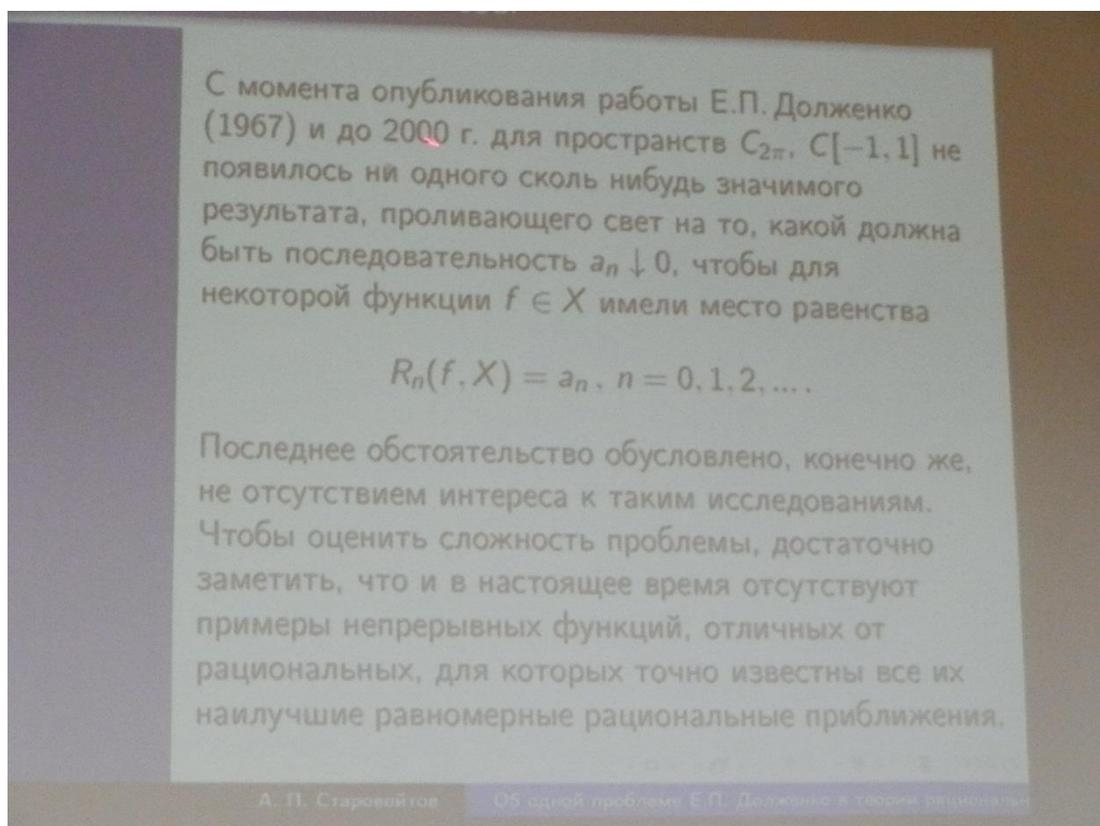


Фото 10

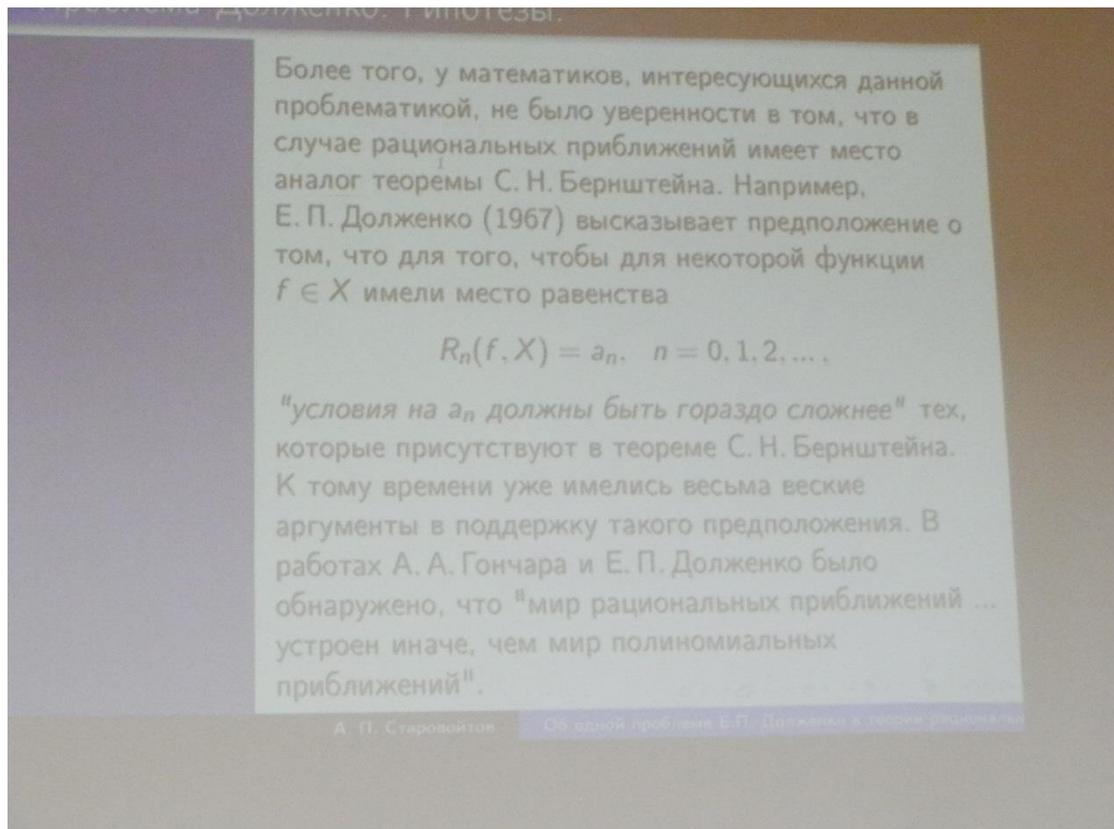


Фото 11

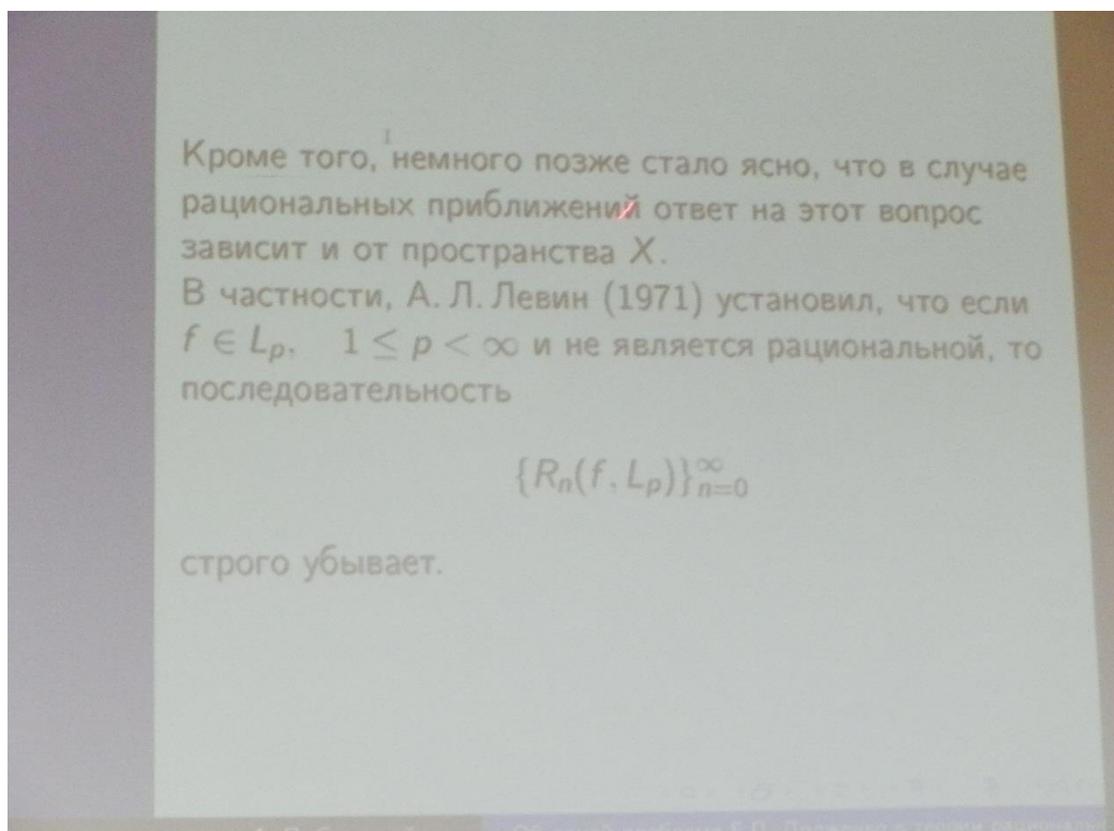


Фото 12

Рациональные (алгебраические) дроби
Чебышёва-Маркова:

$$\tau_n(x) = \cos \varphi_n(x) = \frac{P_n(x)}{\prod_{j=1}^n (1 - c_j x)},$$
$$\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin \varphi_n(x) = \frac{P_{n-1}^*(x)}{\prod_{j=1}^n (1 - c_j x)},$$

где

$$\varphi_n'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{1-c_k^2}}{1-c_k x}.$$

Фото 13

Алгебраические дроби Бернштейна

Алгебраические дроби наименее уклоняющиеся от нуля на всей числовой прямой впервые рассматривались С.Н. Бернштенем:

$$N_n(x) = \sin \Phi_n(x) = \frac{p_{n-1}(x)}{\sqrt{h_{2n}(x)}},$$

где

$$\Phi_n(y) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k - y),$$
$$h_{2n}(y) = \prod_{k=1}^n [(\alpha_k - y)^2 + \beta_k^2],$$

а

$$z_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0; k = 0, 1, 2, \dots, n$$

А. П. Старовойтов Об одной проблеме Е.П. Додженки в теории рациональных

Фото 14

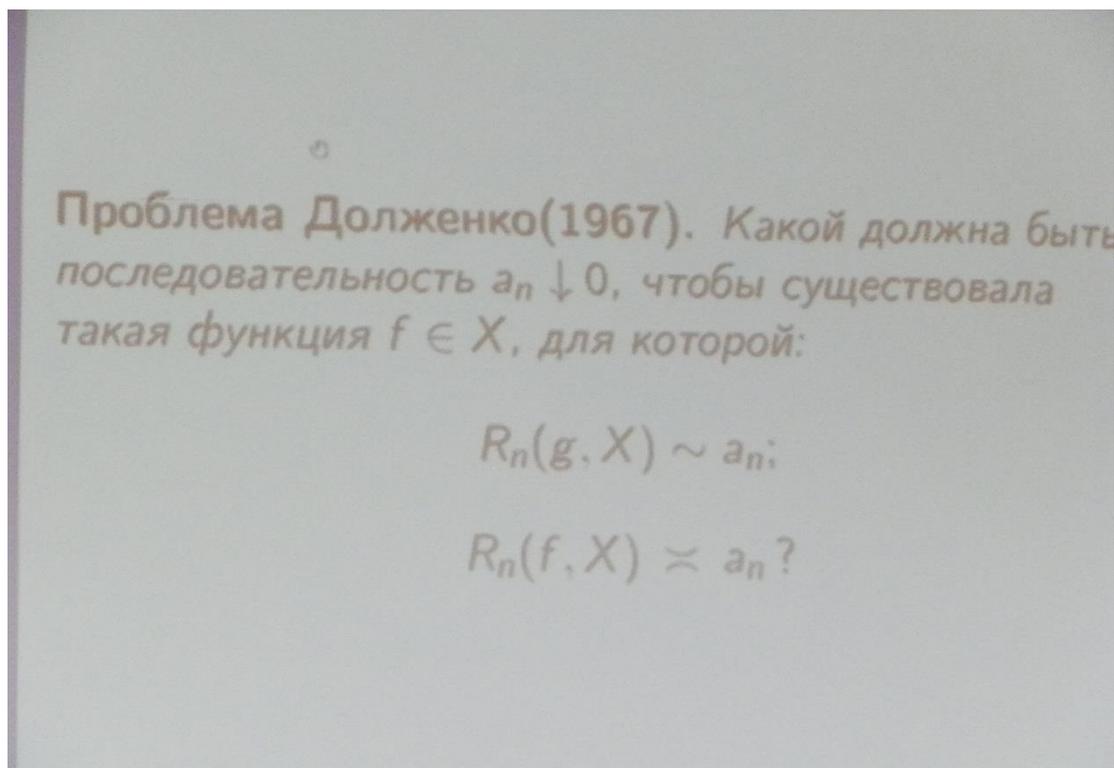


Фото 15

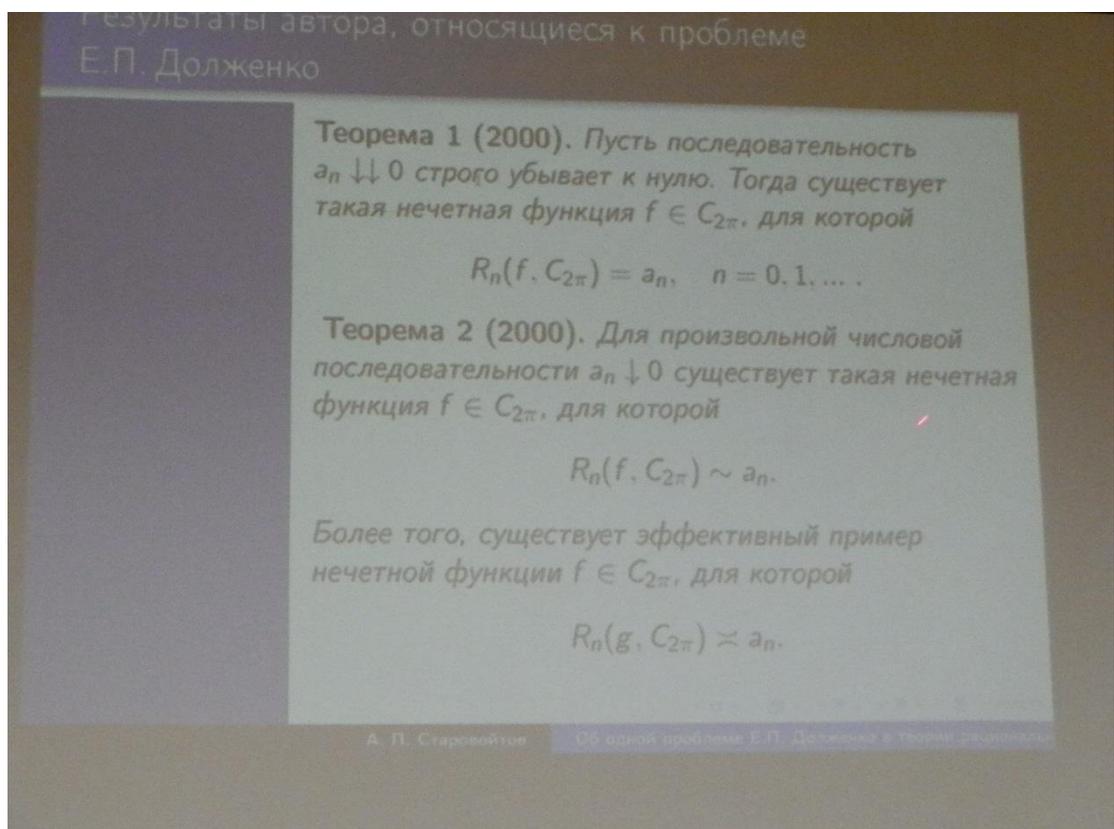


Фото 16

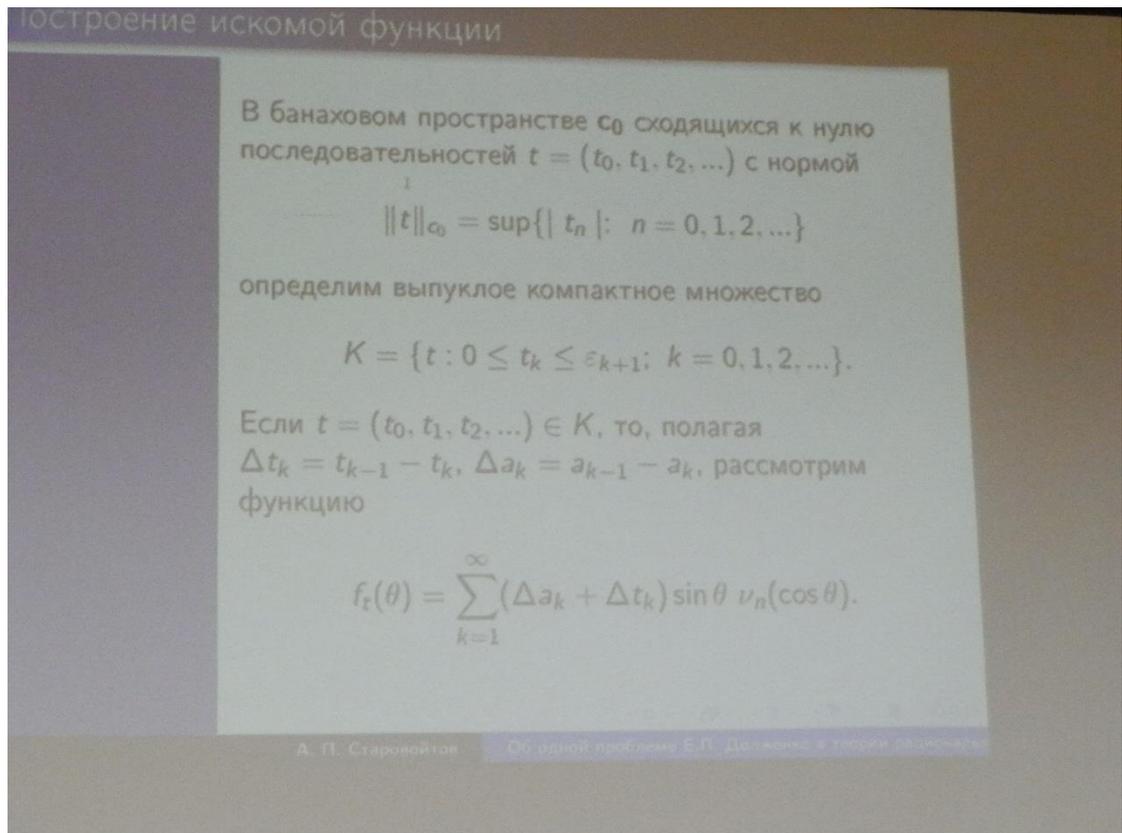


Фото 17 – пояснения на доске

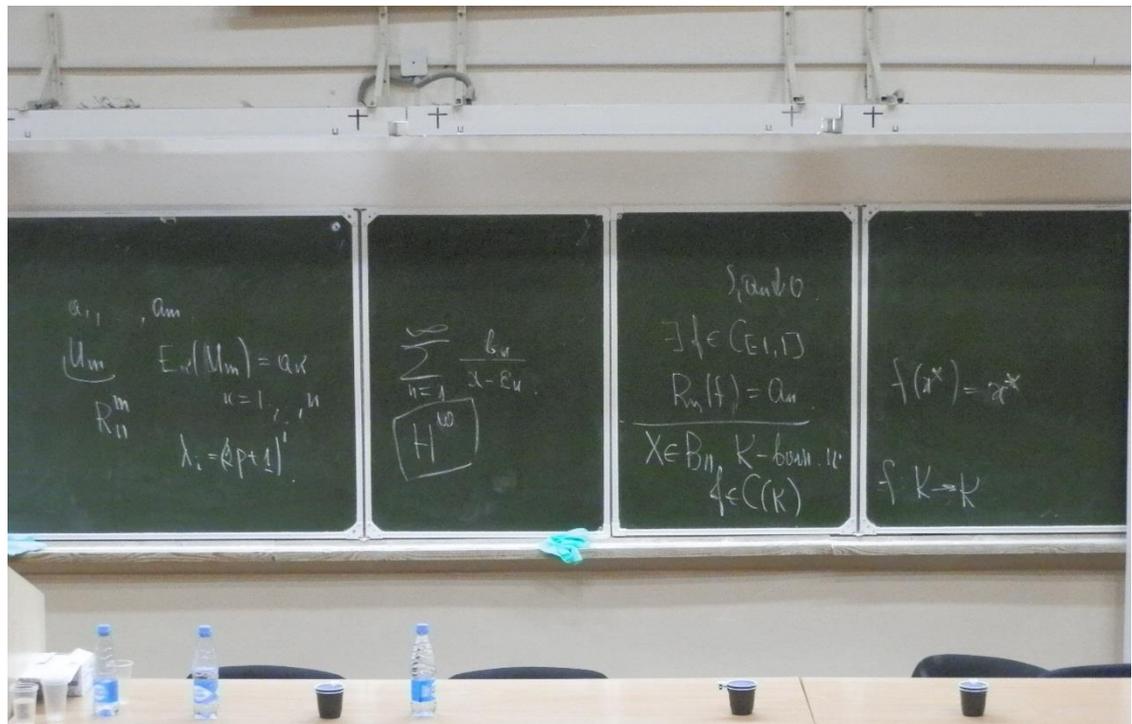


Фото 18

Конструирование искомого функции

Более подробно:

$$f_t(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)},$$

где

$$c_j = \frac{1 - \beta_j^2}{1 + \beta_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, k;$$

$$\beta_j = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_j}{5}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

а

$$\varepsilon_n = \min\{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n\}; \quad n = 1, 2, \dots$$

А. П. Старовойтов Об одной проблеме Е.П. Доджана в теории рациональных

Фото 19

Доказательство теорем 1, 2

Основные этапы доказательства:

- 1) при любом $t \in K$ функция f_t подчинена условиям:

$$a_n + t_n - \varepsilon_{n+1} \leq R_n(f_t, C_{2\pi}) \leq a_n + t_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$
- 2) Неравенства (6) означают, что отображение $\Pi : \mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_0$, определяемое равенством

$$\Pi(t) = \{a_n + t_n - R_n(f_t)\}_{n=0}^{\infty}$$
 действует из K в себя.
- 3) отображение $\Pi(t)$ непрерывно отображает выпуклый компакт на себя. По теореме Шаудера существует точка $t^* = (t_0^*, t_1^*, t_2^*, \dots) \in K$, для которой $\Pi(t^*) = t^*$, т.е.

$$R_n(f_{t^*}, C_{2\pi}) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

А. П. Старовойтов Об одной проблеме Е.П. Доджана в теории рациональных

Фото 20

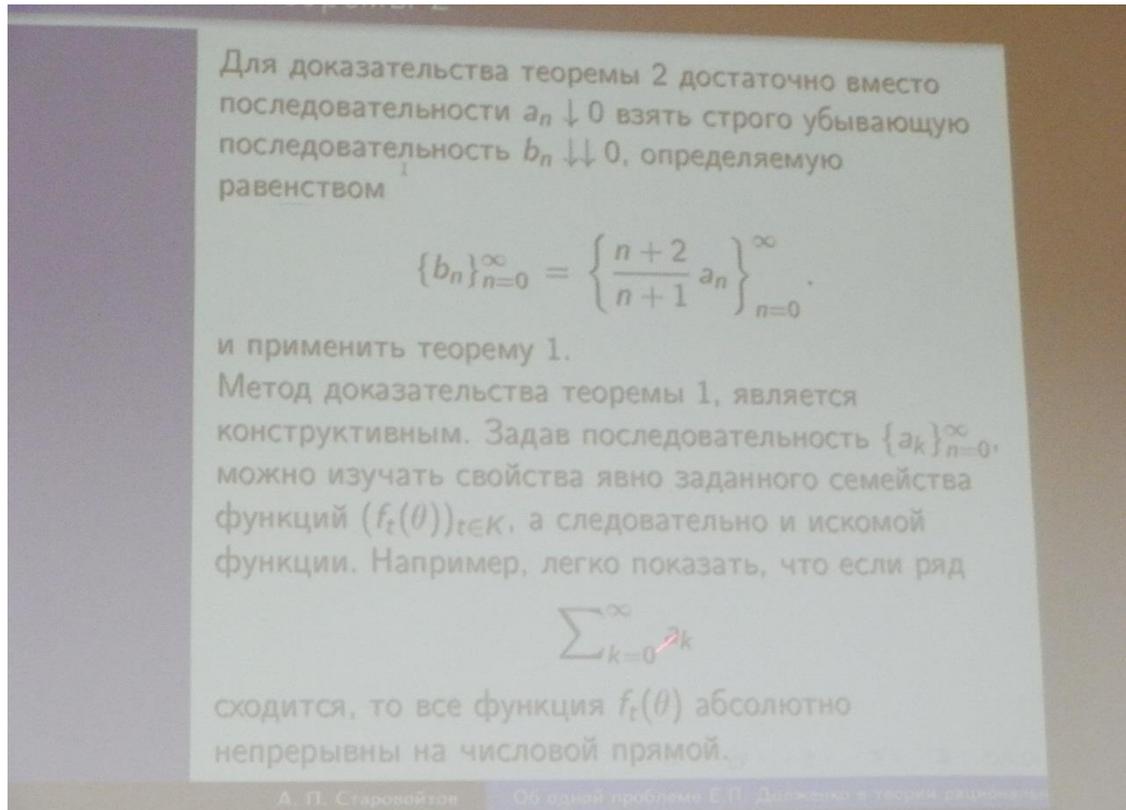
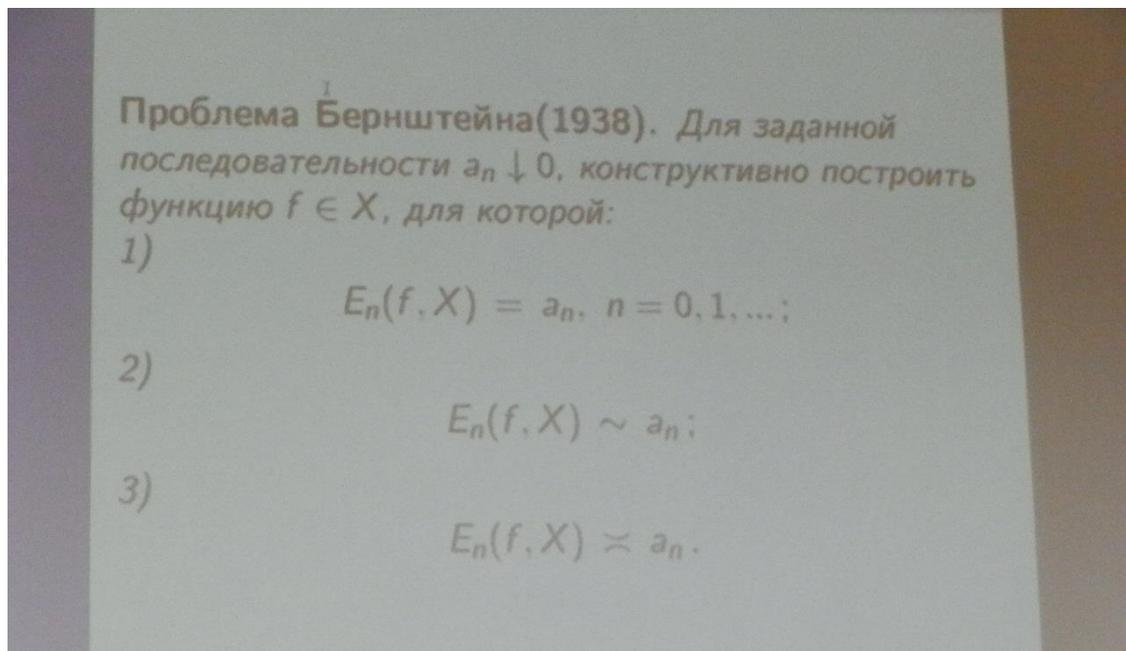


Фото 21



Вызывает сожаление тот факт, что энергетика доклада, его яркость, образность и харизматичность остались вне рамок фотографий и рукописных записей. Однако известный оптимизм внушает то обстоятельство, что организаторы школы снимали все пленарные доклады на видео.

Третий докладчик второго дня – профессор НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде **Вячеслав Васильевич Чистяков**, который представил доклад

В.В. Чистяков, С.А. Чистякова. *Аппроксимативная вариация функций и селекционные принципы.*



Конспект доклада.

Селекционный принцип (или принцип выбора) – это теорема, которая утверждает, что при определенных предположениях последовательность функций f_j , заданных на отрезке $I = [a, b]$, имеет поточечно сходящуюся на I подпоследовательность. Наиболее известные примеры – принципы выбора Хелли. Теория селекционных принципов развивалась в работах Муцелака, Орлича, Уотермана и других математиков. Полученные ими результаты сформировали представление о том, что принципы выбора Хелли и их обобщения (на I) являются теоремами компактности в классе регулярных функций $\text{Reg}(I)$ – функций, имеющих односторонние пределы во всех точках соответствующих полуотрезков $(a, b]$ и $[a, b)$.

При этом описания класса $\text{Reg}(I)$ не обязательно должны опираться на понятие ограниченности вариации того или иного типа. Они могут использовать, например, и модуль изменения функции в смысле Чантурия, что позволяет строить принципы выбора, которые можно применять и к нерегулярным функциям. Тем не менее, исследование класса $\text{Reg}(I)$ продолжает оставаться актуальным, что связано прежде всего с накоплением соответствий вида «описание $\text{Reg}(I) \leftrightarrow$ принцип выбора в \mathbf{R}^I », лежащих в основе построения новых селекций. Такой подход оказывается плодотворным при использовании аппроксимативной вариации $\{V_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon>0}$ функции $f \in M^I = \{f|f:I \rightarrow M\}$ в смысле Франьковой, где (M, d) – метрическое пространство; $\text{Reg}(I;M)$ – соответствующий класс регулярных функций.

С использованием отмеченного подхода устанавливается следующая

Теорема 1 (Авторы, 2017). Пусть $\{f_j\} \subset M^I$,

- замыкание $\{f_j(t) : j \in \mathbf{N}\}$ в M компактно $\forall t \in I$,
- $\limsup_{j \rightarrow \infty} V_\varepsilon(f_j) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Тогда $f_{j_k} \rightarrow f$ поточечно на I ($k \rightarrow \infty$), где $f \in \text{Reg}(I; M)$.

Эта теорема может быть применена к нерегулярным функциям, а второе условие в ней необходимо для равномерной сходимости. Однако это условие не является необходимым для поточечной сходимости, оно неустойчиво к замене метрики на M на (топологически) эквивалентную, и, вообще, в случае поточечной сходимости может не выполняться ни для какой из эквивалентных метрик.

Теорему 1 можно усилить при дополнительных свойствах M .

Теорема 2 (Авторы, 2018). Пусть $(M, \|\cdot\|)$ – рефлексивное банахово пространство, двойственное к которому $(M^*, \|\cdot\|^*)$ сепарабельно. Пусть последовательность $\{f_j\} \subset M^I$ такова, что

- $\sup_{j \in \mathbf{N}} \|f_j(t_0)\| \leq C_0$ для некоторых $t_0 \in I$ и $C_0 \geq 0$;
- $\limsup_{j \rightarrow \infty} V_\varepsilon(f_j) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Тогда $f_{j_k}(t) \rightarrow f(t)$ слабо в M ($k \rightarrow \infty$) при любом $t_0 \in I$, где $f \in \text{Reg}(I; M)$.

Все представленные выше в докладе принципы выбора (в той или иной мере) базируются на принципе выбора Хелли для монотонных функций. Принципиально иной подход к селекционным принципам представил Шрейдер в 1972 г. в связи с применениями к дифференциальным уравнениям. В отличие от упомянутых принципов теорема Шрейдера базируется на теореме Рамсея из формальной логики. Применение теоремы Шрейдера в контексте аппроксимативных вариаций позволяет получить следующий результат.

Теорема 3 (Авторы, 2019). Пусть $(M, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство и $\{f_j\} \subset M^I$ удовлетворяет условиям:

- замыкание $\{f_j(t) : j \in \mathbf{N}\}$ в M компактно $\forall t \in I$;
- $\limsup_{j,k \rightarrow \infty} V_\varepsilon(f_j - f_k) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Тогда $\{f_j\}$ содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Все представленные выше результаты можно иллюстрировать примерами, которые показывают их точность (и в некоторых случаях неулучшаемость).

Составитель настоящего дайджеста выражает глубокую благодарность авторам доклада за предоставленную ими возможность воспользоваться его электронной версией.

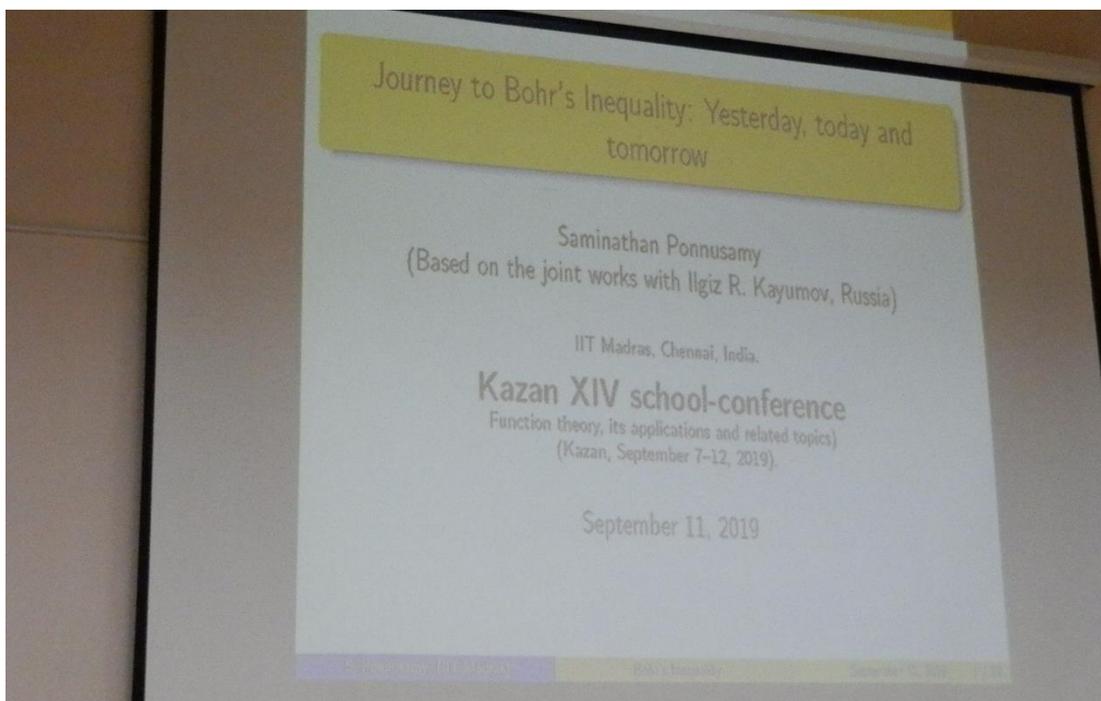
.....

Первый докладчик пятого, последнего дня – **Саминатан Поннусами** (Индийский технологический институт Мадраса). *Путешествие к неравенству Бора: вчера, сегодня, завтра*. Доклад основан на совместных работах с профессором И.Р. Каюмовым (КФУ).



Представим последовательность лекционных снимков. Будем называть их слайдами.

Слайд 1



Слайд 2

Let $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and

$$\mathcal{B} = \{f : f \text{ analytic in } \mathbb{D} \text{ and } |f(z)| \leq 1 \text{ in } \mathbb{D}\}.$$

Definition of Bohr radius for \mathcal{B}

The Bohr radius $r_{\mathcal{B}}$ for the family \mathcal{B} of functions $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is the supremum of all number in $(0, 1)$ such that we have

$$M_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1 \text{ for all } r \leq r_{\mathcal{B}}$$

and that there exists an $f_0 \in \mathcal{B}$ such that $M_{f_0}(r) > 1$ for each $r \in (r_{\mathcal{B}}, 1)$.

Note: It is not at all clear at the outset that $r_{\mathcal{B}}$ is positive. Harald Bohr studied the problem of computing $r_{\mathcal{B}}$ in 1914, and he showed originally that $r_{\mathcal{B}} \geq 1/6$.

Complex Analysis (Ilia Bakas) Bohr's Inequality September 11, 2019 2 / 28

Слайд 3

Bohr wrote the following in his note (or, to be more precise, Hardy wrote on Bohr's behalf): "I have learnt recently that Messrs. M. Riesz, Schur, and Wiener, whose attention had been drawn to the subject by my theorem, have succeeded in solving this problem completely. Their solutions show that $r_{\mathcal{B}} = 1/3$. Mr. Wiener has very kindly given me permission to reproduce here his very simple and elegant proof of this result."

Bohr's Theorem

For $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$, $M_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1$ for $r \leq 1/3$. The radius $1/3$ is best possible, as $\varphi(z) = (\alpha - z)/(1 - \alpha z)$ with $\alpha \rightarrow 1^-$ shows.

It is also true but less widely known that $M_f(1/3) = 1$ iff f is a constant function.

H. BOHR, A theorem concerning power series, *Proc. London Math. Soc.* 13(2) (1914), 1-5.

Complex Analysis (Ilia Bakas) Bohr's Inequality September 11, 2019 3 / 28

Слайд 4

Coefficient Inequality for the class \mathcal{B}

$$\mathcal{B} := \mathcal{S}(\varphi) = \left\{ f : f \text{ analytic in } \mathbb{D} \text{ and } f(z) \prec \varphi(z) = \frac{a_0 - z}{1 - \bar{a}_0 z}, z \in \mathbb{D} \right\}.$$

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$. Then $|a_n| \leq 1 - |a_0|^2$ for $n \geq 1$.

Proof. Given that f is subordinate to φ which is convex in \mathbb{D} and hence $|a_n| \leq |\varphi'(0)| = 1 - |a_0|^2$ for $n \geq 1$.
 Finally, for $r \leq 1/3$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n &\leq (1 - |a_0|^2) \sum_{n=1}^{\infty} r^n = (1 - |a_0|)(1 + |a_0|) \frac{r}{1-r} \\ &\leq (1 - |a_0|) \frac{2r}{1-r} \\ &\leq 1 - |a_0| = \text{dist}(f(0), \partial\mathbb{D}). \end{aligned}$$

Lect 10: Schwarz (17.10.2023)
Bohr's Inequality
September 11, 2023 4 / 20

Слайд 5

For $0 < \alpha < 1$, consider $\varphi(z) = (\alpha - z)/(1 - \alpha z)$. It follows that

$$M_{\varphi}(r) = 1 + \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha r} [r(1 + 2\alpha) - 1], \quad r \in [0, 1]$$

and thus, $M_{\varphi}(r) > 1$ if and only if $r > 1/(1 + 2\alpha)$. Since α can be chosen arbitrarily close to 1, the Bohr radius for the family \mathcal{B} cannot be bigger than $1/3$.

Again, let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be analytic in \mathbb{D} . Then, it is possible that $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$. One would like to know the biggest $r < 1$, for which $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$. Define $\|f\|_{\infty} = \sup_{|z| < 1} |f(z)|$, and assume that $\|f\|_{\infty} = 1$.

Слайд 6

Then, for any $0 < r < 1$, we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| \leq \|f\|_2 (1-r^2)^{-1/2} \leq \|f\|_{\infty} (1-r^2)^{-1/2}.$$

This gives an upper bound of the growth of $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$. Bombieri-Bourgain (2004) constructed a_n , and by a delicate analysis of exponential sums, proved that when $r \rightarrow 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| \geq (1-r^2)^{-1/2} - \left(c \log \frac{1}{1-r} \right)^{3/2+\epsilon}$$

where $c = c(\epsilon)$ depends on ϵ .

▣ E. BOMBIERI AND J. BOURGAIN, A remark on Bohrs inequality, *IMRN International Mathematics Research Notices*, 80 (2004), 4307–4330.

September 11, 2013

Слайд 7

Let \mathcal{P}_n denote the class of complex polynomials $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k(p) z^k$ of degree at most n . Guadarrama [1] considered in particular the class \mathcal{P}_n and the Bohr radius R_n for this class is defined to be

$$R_n := \sup_{0 < r < 1} \left\{ r : \sum_{k=0}^n |a_k(p)| r^k \leq \|p\|_{\mathbb{D}} \text{ for all } p \in \mathcal{P}_n \right\}.$$

It is known that

$$\frac{1}{3} + \frac{c_1}{3n^{1/3}} < R_n < \frac{1}{3} + \frac{c_2 \log n}{n}$$

for large values of n and absolute positive constants c_1 and c_2 . Another approach for estimating R_n was due to Popescu [2].

▣ Z. GUADARRAMA, Bohr's radius for polynomials in one complex variable, *Comput. Methods Funct. Theory* 5 (2005) 143–151.

▣ G. POPESCU, Multivariable Bohr inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* 359(11) (2007), 5283–5317.

September 11, 2013

Слайд 8

Let $T_k = T_k(A_1(F), \dots, A_k(F))$ denote the sequence of $(k+1) \times (k+1)$ Toeplitz matrices associated with the function $F(z) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(F)z^k$, namely, the first row is $(1 \ A_1 \ \dots \ A_k)$, the second is $(\overline{A_1} \ 1 \ \dots \ A_k)$, ... and the $(k+1)$ -th row is $(\overline{A_k} \ \overline{A_{k-1}} \ \dots \ 1)$

Theorem (Fournier 2008)

R_n is equal, for each $n \geq 1$, to the smallest root in $(0, 1)$ of the equation

$$\det T_n(r, -r^2, r^3, \dots, (-1)^{n-1}r^n) = 0,$$

Further, the equality $\sum_{k=0}^n |a_k(\rho)| R_n^k = \|\rho\|_{\mathbb{D}}$ holds only for constant polynomials ρ .

September 11, 2013 1 / 28

Слайд 9

There has been a revival in the study of Bohr type radii in a variety of contexts due mainly to papers of Aizenberg, Boas, Khavinson and many others.

Interestingly, Dixon [1] drew attention to applications of Bohr phenomena to operator theory showing that Bohrs Theorem is useful in the characterization of Banach algebras that satisfy von Neumanns inequality. Paulsen et al. [2] continue this line of research.

[1] P. G. DIXON, Banach Algebras satisfying the Von Neuman inequality, *Bull. Lond. Math. Soc.* 27 (1995), 359-362.

[2] V. PAULSEN, G. PAUPESCU AND D. SINGH, On Bohr's inequality, *Proc. Lond. Math. Soc.* III Ser. 85(2) (2002), 493-512

September 11, 2013 1 / 28

Слайд 10

The Bohr inequality was examined over a century ago by H. Bohr in 1914. It is still a source of inspiration for further studies due to the discovery of generalizations to domains in \mathbb{C}^n and to more abstract settings. It is interesting to consider this subject because of the fact that the solution to certain extremal problems involves either disk automorphisms or a finite Blaschke product of order two, and that there are many open problems in this area.

- Harald August Bohr (1887–1951) was a professor at the University of Copenhagen, and younger brother of Niels Bohr.
- His interest was on Dirichlet series, and he developed the theory of almost periodic functions.
- He was a member of the Danish national football team who was instrumental in winning a silver medal at the 1908 Summer Olympics.

Complex Analysis (D. P. Boas) Bohr's Inequality September 11, 2008 10 / 20

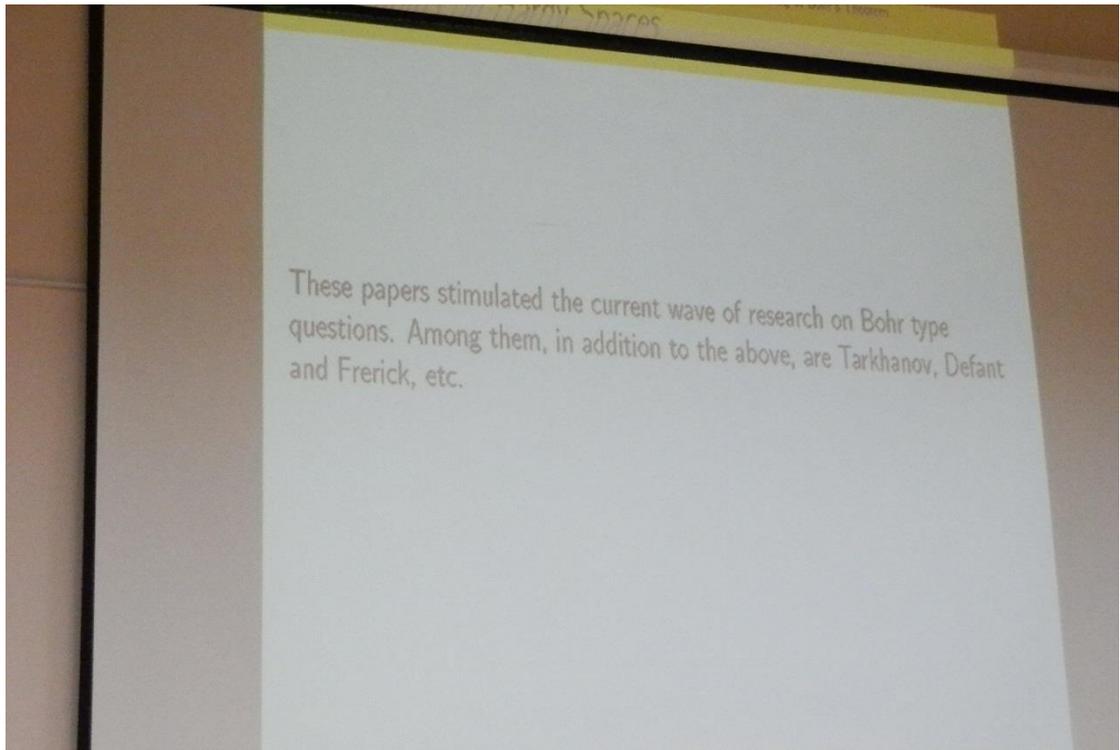
Слайд 11

H.P. Boas and D. Khavinson generalized Bohr's Theorem to several complex variables. For subsequent developments in the multidimensional analog of Bohr's Theorem, see [2, 3, 4].

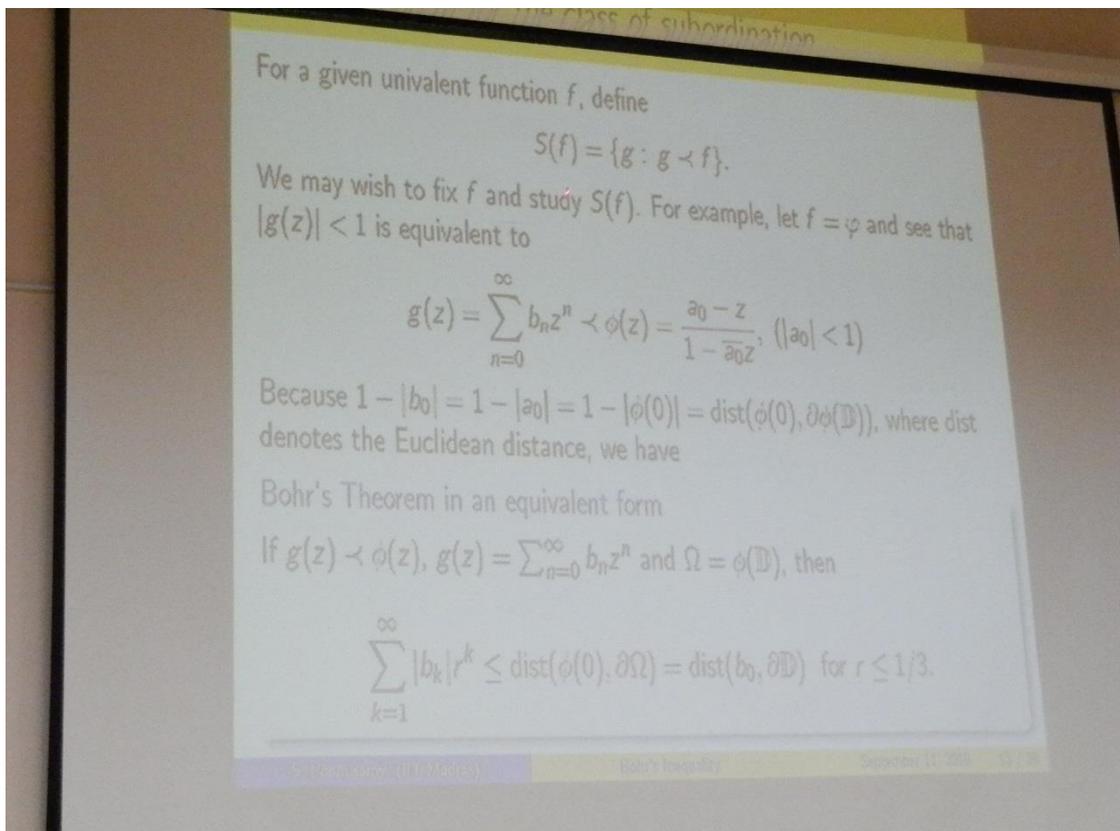
- H. P. BOAS AND D. KHAVINSON, Bohr's power series theorem in several variables, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125(10) (1997), 2975–2979.
- L. AIZENBERG, A. AYTUNA, P. DJAKOV, An abstract approach to Bohr's phenomenon, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128(9) (2000), 2611–2619.
- L. AIZENBERG, Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128(4) (2000), 1147–1155.
- L. AIZENBERG, A. AYTUNA, P. DJAKOV, Generalization of a theorem of Bohr for bases in spaces of holomorphic functions of several complex variables, *J. Math. Anal. Appl.* 258(2) (2001), 429–447.

Complex Analysis (D. P. Boas) Bohr's Inequality September 11, 2008 11 / 20

Слайд 12



Слайд 13



Слайд 14

??

Question

Assume that $g(z) \prec f(z)$ and $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, where f is univalent and takes \mathbb{D} onto a simply connected domain $\Omega = f(\mathbb{D})$. Will there be a positive Bohr radius r_f satisfying

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| r^k \leq \text{dist}(f(0), \partial\Omega) \text{ for } r \leq r_f?$$

Set $r_S(f) = \sup\{r_f : f \text{ is univalent in } \mathbb{D}\}$.

Y. ABU-MUHANNA, Bohr's phenomenon in subordination and bounded harmonic classes, *Complex Var. Elliptic Equ.* 55(11)(2010), 1071-1078.

Calculus of Variations
Bohr's Inequality
September 11, 2019
14 / 20

Слайд 15

Theorem for the class of subordination

Theorem of Y. Abu-Muhanna

If f is univalent in \mathbb{D} , then $r_S(f) = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157$. The sharpness of $r_S(f)$ is shown by the Koebe function $f(z) = z/(1-z)^2$.

Proof. Let $g(z) \prec f(z)$, where f is univalent in \mathbb{D} with $\Omega = f(\mathbb{D})$. Then

$$|b_n| \leq n|f'(0)| \text{ and } \frac{1}{4}|f'(0)| \leq \text{dist}(f(0), \partial\Omega) \leq |f'(0)|.$$

It follows that $|b_n| \leq 4n \text{dist}(f(0), \partial\Omega)$ and thus,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq \text{dist}(f(0), \partial\Omega) \frac{4r}{(1-r)^2} \leq \text{dist}(f(0), \partial\Omega)$$

provided $4r \leq (1-r)^2$, that is, for $r \leq 3 - 2\sqrt{2}$. When $f(z) = z/(1-z)^2$, we obtain $\text{dist}(f(0), \partial\Omega) = 1/4$ and a simple calculation gives sharpness.

Calculus of Variations
Bohr's Inequality
September 11, 2019
15 / 20

Слайд 16

If $\Omega = f(\mathbb{D})$ is convex, then $r_f = 1/3$ which can also be obtained from the last relation. This result includes the classical case $\Omega = \mathbb{D}$. That is

Corollary
If f is univalent and convex in \mathbb{D} , then $r_{S(f)} = 1/3$.

Corollary: BT for half-plane mappings
If $f(z)$ is analytic in \mathbb{D} satisfying $\operatorname{Re} f(z) < 1$ in \mathbb{D} and $f(0) = a_0$ is positive, then $M_f(r) \leq 1$ for $0 \leq r \leq 1/3$.

Слайд 17

?? ??

In recent years there have been a number of other studies of what we may call the "Bohr phenomenon" or "Bohr inequality".

Problem of R. M. Ali, R. W. Barnard, and A. Yu. Solynin, 2016
Find the Bohr radius for the class of odd functions f satisfying $|f(z)| \leq 1$ for all $z \in \mathbb{D}$.

R. M. ALI, R. W. BARNARD, AND A. YU. SOLYNIN, A note on the Bohr's phenomenon for power series, *J. Math. Anal. Appl.* 499(1) (2017), 154–167.

R. M. ALI, Y. ABU-MUHAMMA, AND S. POXNUSAMY, On the Bohr inequality, In "Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis" (Edited by N.K. Govil et al.), Springer Optimization and Its Applications 117 (2016), 265–295.

September 11, 2018 17 / 28

Слайд 18

Corollary (Kayumov and Ponnusamy)
 If $f(z)$ is odd analytic in \mathbb{D} and $|f(z)| \leq 1$ in \mathbb{D} , then

$$M_f(r) \leq 1 \text{ for } r \leq r^* = 0.789991\dots$$

The extremal function has the form $z(z^2 - a)/(1 - az^2)$.

- 1 I. R. KAYUMOV AND S. PONNUSAMY, Bohr inequality for odd analytic functions, *Comput. Methods Funct. Theory* 17(2017), 679–688.
- 2 I. R. KAYUMOV AND S. PONNUSAMY, Bohr's inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions, *J. Math. Anal. and Appl.*, 465 (2018), 857–871.

September 11, 2019 18 / 20

Слайд 19

version of the Bohr theorem in four different formulations. We now recall here only one of them.

Theorem 1 of Kayumov and Ponnusamy
 Suppose that $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ is analytic in \mathbb{D} , $|f(z)| \leq 1$ in \mathbb{D} and S_r denotes the area of the image of the subdisk $|z| < r$ under the mapping f . Then

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{16}{9} \left(\frac{S_r}{\pi} \right) \leq 1 \text{ for } r \leq \frac{1}{3}$$

and the numbers $1/3$ and $16/9$ cannot be improved. Moreover,

$$|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{9}{8} \left(\frac{S_r}{\pi} \right) \leq 1 \text{ for } r \leq \frac{1}{2}$$

and the constants $1/2$ and $9/8$ cannot be improved.

September 11, 2019 19 / 20

?? ?? ??

More general problem

Let $\rho \in (1, 2)$. Find the Bohr radius r_ρ with $M_\rho^f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^\rho r^k$. in place of $M_f(r)$.

In 2000, Djakov and Ramanujan formulated the following Conjecture

$$r_\rho = \inf_{a \in [0,1]} \frac{1 - a^\rho}{a^\rho(1 - a^\rho) + (1 - a^2)^\rho}$$

📖 P. B. DJAKOV, AND M. S. RAMANUJAN, A remark on Bohrs theorem and its generalizations. *J. Anal.* 8 (2000), 65–77.
📖 I. R. KAYUMOV AND S. PONNUSAMY, Improved version of Bohr's inequality. *Comptes Rendus Mathematique* 356(3) (2018), 272–277.

S. Djakov and M. Ramanujan
Bohr's Inequality
September 11, 2018 30 / 28

Corollary: The Djakov-Ramanujan conjecture is true.

Problem: Is it true that

$$M_1(r) - \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{1/2} \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow 1?$$

Bombieri and Bourgain (2004) obtained the following result:

$$M_1(r) = \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{1/2} + O\left(\ln^{3/2+c} \frac{1}{1-r}\right) \text{ as } r \rightarrow 1. \quad (4)$$

Remark: (3) is an easy consequence of (4)

📖 E. BOMBIERI AND J. BOURGAIN, A remark on Bohrs inequality. *IMRN International Mathematics Research Notices*, 30(2004), 4307–4330.

- We say that $f = u + iv$ is (planar) harmonic on a simply connected domain Ω iff $f \in C^2(\Omega)$ and $\Delta f = 0$, where $\Delta f = 4f_{z\bar{z}}$.
- Every harmonic function f in the unit disk \mathbb{D} has the canonical decomposition

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n z^n} := h(z) + \overline{g(z)}$$

where $f(0) = h(0)$ and $g(0) = 0$.

In 1984, Clunie and Sheil-Small [1] proposed coefficient conjecture for univalent harmonic mappings.

 J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 9 (1984), 3–25.

September 11, 2019 34 / 39

Question

What can be said about Bohr's radius for bounded harmonic function $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n z^n}$ in \mathbb{D} ?

Non-sharp result of Abu-Muhanna

Suppose that $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k z^k}$ is harmonic in \mathbb{D} and $|f(z)| < 1$ in \mathbb{D} . If $a_0 = 0$, then, for $r \leq 1/3$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) r^k \leq \frac{2}{\pi} \approx 0.63662$$

 I. R. KAYUMOV AND S. PONNUSAMY, Bohr's inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions, J. Math. Anal. and Appl., 465(2018), 857–871.

Слайд 24

Bohr radius of harmonic case

Suppose that $f = h + \bar{g}$ is such that $|g'(z)| \leq k|h'(z)|$, where $k = \frac{K-1}{K+1}$, $K \geq 1$ so that $k \in [0, 1)$ and where h is a bounded function in \mathbb{D} . Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \leq \|h\|_{\infty} \text{ for } r \leq \frac{K+1}{5K+1}.$$

The constant $(K+1)/(5K+1)$ is sharp.

S. Ponnusamy (IT Madras) Bohr's Inequality September 11, 2019 26 / 28

Слайд 25

Bohr radius of harmonic case: Another Version

Suppose that either $f = h + g$ or $f = h + \bar{g}$, where $h(0) = g(0) = 0$, h and g are bounded. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \leq \max\{\|h\|_{\infty}, \|g\|_{\infty}\} \text{ for } r \leq \sqrt{\frac{7}{32}}.$$

This number $\sqrt{7/32}$ is sharp.

I. R. KAYUMOV, S. PONNUSAMY AND N. SHAKIROV, Bohr radius for locally univalent harmonic mappings, Math. Nachr. 291(2018), 1757-1768.

S. Ponnusamy (IT Madras) Bohr's Inequality September 11, 2019 27 / 28

Слайд 26

one can give a more flexible definition of the Bohr radius in the case of harmonic functions $f = h + g$ of the unit disk \mathbb{D} , where $g(0) = 0$. For $p \geq 1$, we say that r_p is the p -Bohr radius for the harmonic function $f = h + \bar{g}$ if r_p is the largest value such that

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p)^{1/p} r^k \leq 1 \text{ for } |z| = r \leq r_p.$$

Theorem of Kayumov and Ponnusamy

Let $f = h + \bar{g}$ be a harmonic mapping in \mathbb{D} such that $|f(z)| \leq 1$ in \mathbb{D} . Then for any $p \geq 1$ and $r < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p)^{1/p} r^k \leq \max\{2^{(1/p)-1/2}, 1\} \sqrt{1-|a_0|^2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

The case $p = 1$ shows that for $r \leq 1/3$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) r^k \leq \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

September 11, 2019 27 / 30

Слайд 27

Theorem

Let $f \in \mathcal{B}$, $f_0(z) = f(z) - a_0$, and $\|f_0\|_r = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r} \right) \|f_0\|_r \leq 1 \text{ for } r \leq \frac{1}{2+|a_0|}$$

and the numbers $\frac{1}{2+|a_0|}$ and $\frac{1}{1+|a_0|}$ cannot be improved. Moreover,

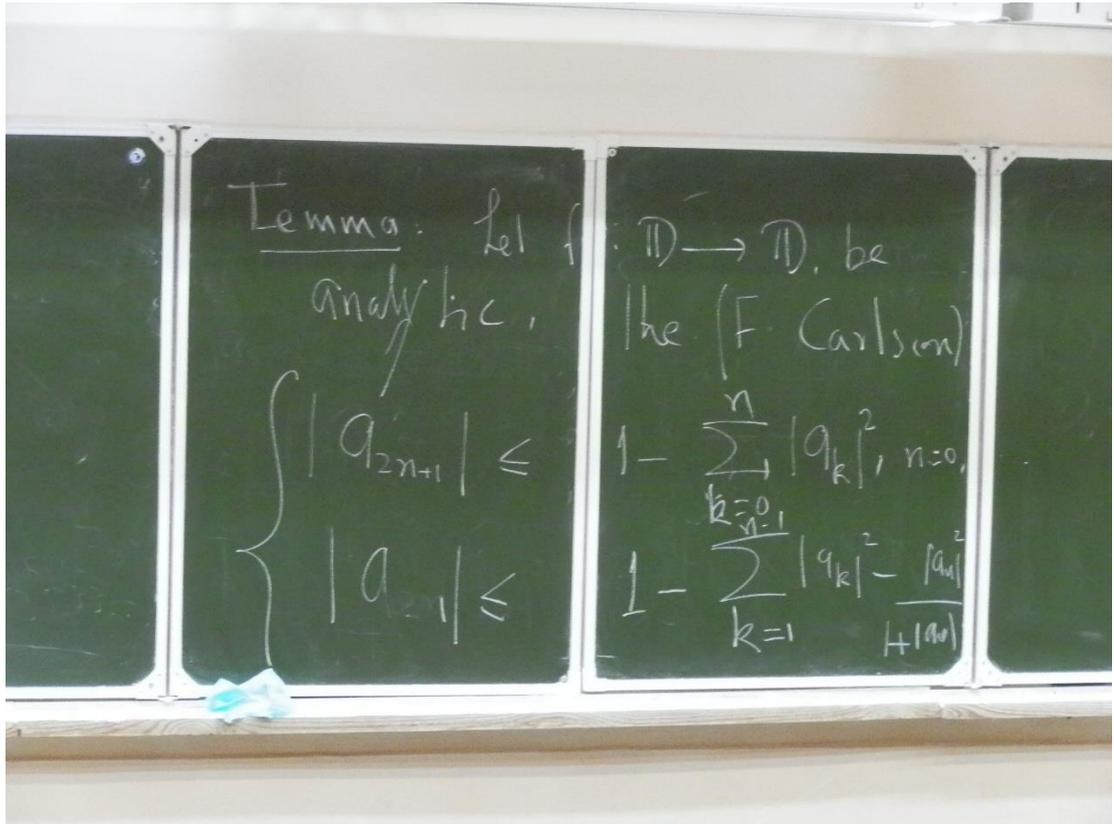
$$|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r} \right) \|f_0\|_r \leq 1 \text{ for } r \leq \frac{1}{2}$$

and the numbers $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{1+|a_0|}$ cannot be improved.

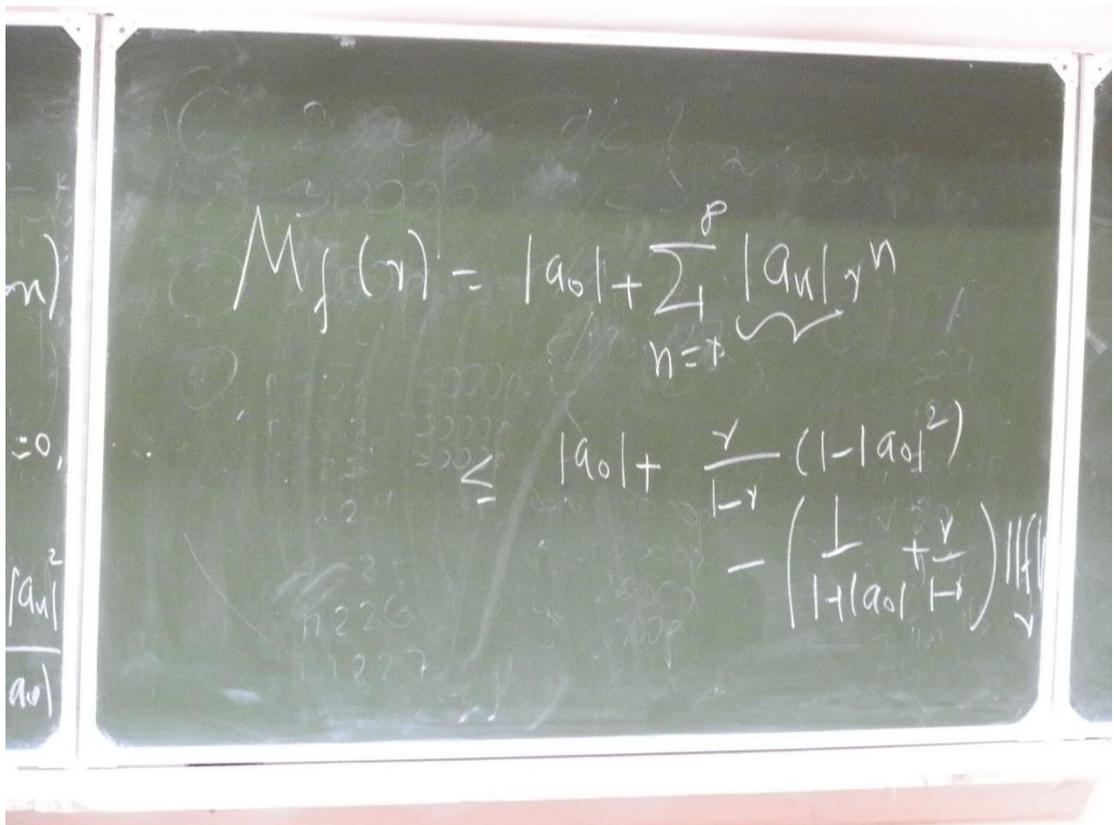
□ S. PONNUSAMY, R. VIJAYAKUMAR AND K.-J. WIRTHS,
Refinement of the classical Bohr inequality, Preprint

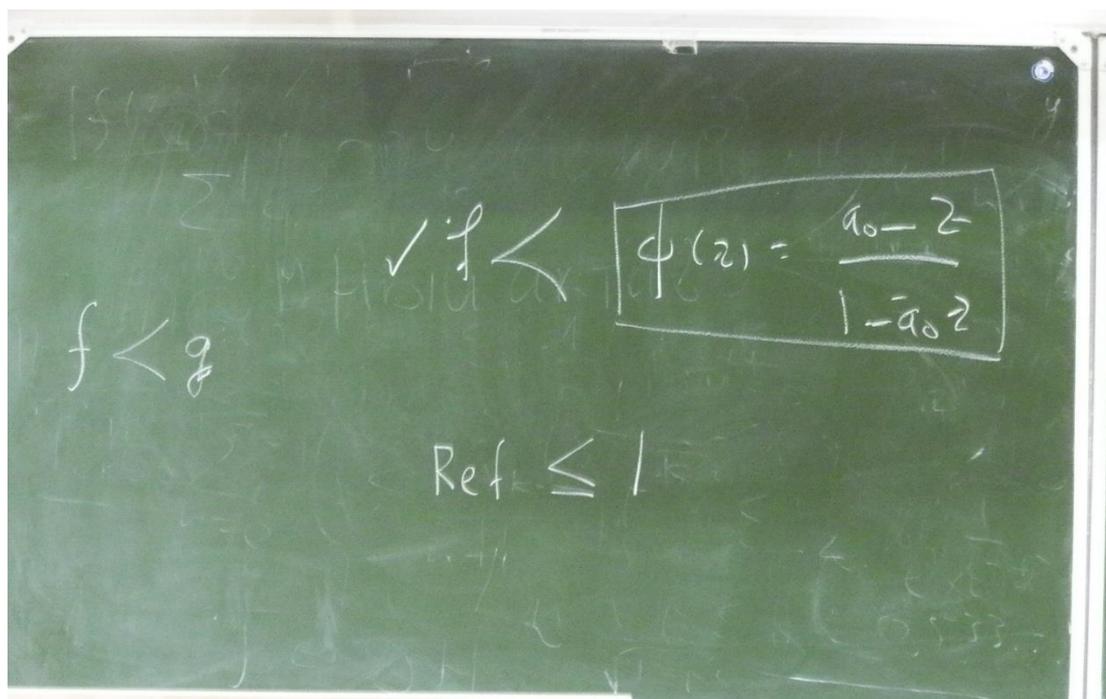
September 11, 2019 28 / 30

Слайд 28



Слайд 29





III. Калейдоскоп.

11 сентября 2019 г. состоялось закрытие XIV Международной Казанской школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». География научного форума охватывала Республику Беларусь (Гомель), Индию (Ченнай), Российскую Федерацию и Таджикистан (Душанбе).

Россию представляли:

Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Севастополь, Самара, Брянск, Саратов, Обнинск, Волгоград, Владимир, Набережные Челны, Уфа, Петрозаводск, Курск, Ростов, Воронеж, Елабуга, Архангельск, Ижевск и наша Казань.

Было сделано свыше 50 докладов, отражающих широкий спектр актуальных направлений научных исследований в области вещественной и комплексной теории функций, дифференциальных и интегральных уравнений, а также функционального анализа

Ряды Фурье, квазиконформные отображения, эллиптические и гиперболические уравнения, неравенства Бора, Харди и Реллиха, аппроксимации, однородные пространства и операторные функции – вот далеко не полный перечень тем, которым были посвящены доклады школы-конференции.

Культурная программа включала в себя посещение музеев, выставочных центров и экскурсии, самой главной из которых стало путешествие в Свияжск 9 сентября.

На прощание перелистаем еще раз некоторые «запечатленные мгновения».















Автор-составитель настоящего дайджеста благодарит всех, кто помогал ему его составлять, а также приносит извинения всем, чьи фото по каким-то причинам не попали в фотогалерею.

Вместо послесловия...

...один маленький стишок из еще более дальней дали – из 1995 года, с Кордона. Судя по всему, это II-ая.

П.Л. Ульянову

Какой бы ни была тематика,
Но проблематика проста –
Спасет Россию математика,
А значит, просто красота.

Отсюда – начинаем заново!
Нам указывает перст судьбы,
Как и Петру, как и Ульянову,
Поднять Россию на дыбы!

А. Казанцев, 17.06.1995

.....