УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 2 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 191–203 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 512.583+539.142

ПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МАЛОНУКЛОННЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕАБЕЛЕВЫХ ПРАВИЛ СУПЕРОТБОРА

М.И. Кириллов, А.С. Никитин, А.С. Ситдиков

Казанский государственный энергетический университете, г. Казань, 420066, Россия

Аннотация

Как показал Р. Хааг, квантовую физическую систему можно описать дуальным путем. В качестве исходного объекта берется алгебра наблюдаемых и полугруппа (категория) ее эндоморфизмов. При этом смысл понятия дуальности сводится к существованию дуального объекта в компактной группе: в случае абелевой группы – это группа ее характеров (дуальность Понтрягина), а в случае неабелевой группы – это уже категория представлений данной группы (дуальность Таннаки – Крейна). С физической точки зрения дуальный объект описывает заряды (абелевы заряды в случае абелевой компактной группы и неабелевы – в случае неабелевой), а следовательно, суперотборную структуру физической системы.

В настоящей работе нами разработана модель для описания неабелевых изотопических зарядов нуклонных систем. При этом категория представлений компактной группы изотопических вращений описывает суперотборную структуру по изоспину, и каждое неприводимое представление индексируется одним из чисел $\{0;\ 1/2;\ 1;\ 3/2;\ 2;\ldots\}$. Мы показываем, что специальный проектирующий оператор, принадлежащий алгебре эндоморфизмов фиксированного объекта категории, позволяет с помощью проецирования на антисимметрическое подпространство получить связанное состояние нуклонов. Состояния таких нуклонов подчиняются парастатистике порядка два. Показано также, что сплетающие операторы объектов с вакуумным сектором соответствуют полям, переносящим изотопические заряды.

Ключевые слова: алгебра Кунца, тензорная моноидальная *-категория, дибарионная система, изоспин, правила суперотбора

Введение

В квантовой физике наряду с пространственно-временными симметриями большую роль играют так называемые внутренние симметрии – симметрии внутренних степеней свободы частицы [1, 2]. Пространственно-временные симметрии не связаны с характером взаимодействия между полями и наблюдаемыми величинами и порождают автоморфизмы алгебры наблюдаемых, определяя тем самым кинематические правила суперотбора (например, дихотомические правила суперотбора по унивалентности, суперотбор по массе, суперотбор по состояниям частиц и античастиц и т. д). Внутренние же симметрии связаны с характером взаимодействия и порождают динамические правила суперотбора, связанные с зарядами. Такие симметрии описываются с помощью компактных групп G глобальных калибровочных преобразований; в абелевом случае это могут быть электрический, барионный, лептонный и другие заряды, а в неабелевом – изоспин, цвет и другие «неабелевы» заряды [1]. В дальнейшем будем рассматривать неабелев случай.

Суперотборный оператор разбивает гильбертово пространство физических состояний на семейство ортогональных подпространств (то есть на суперотборные сектора), каждое из которых индексируется собственным значением данного оператора (другими словами, сектора индексируются значениями зарядов). Правила суперотбора запрещают любые переходы между этими секторами без изменения значений зарядов в них. В роли переносчиков зарядов выступают полевые операторы, поэтому переходы между суперотборными секторами могут осуществляться лишь при участии полей. В каждом из этих ортогональных подпространств реализуются классы эквивалентности неприводимых «физически интересных» представлений алгебр наблюдаемых [3, 4], поэтому можно сказать, что поля в данном контексте появляются автоматическим образом как сплетающие операторы неприводимых представлений алгебры наблюдаемых.

В работе [5] показано, что множество унитарно-эквивалентных классов представлений компактной группы G находится в однозначном соответствии с суперотборными секторами, а именно: они действуют в соответствующих подпространствах гильбертова пространства. Поэтому суперотборную структуру алгебры наблюдаемых можно описать с помощью компактной группы G. Этот факт, в свою очередь, приводит к глубокой математической проблеме – к проблеме двойственности компактных групп. Если в абелевом случае двойственным объектом группы является также группа – группа характеров исходной группы (двойственность Понтрягина), то в неабелевом случае это уже не так. Согласно пионерским работам Таннаки [6] и Крейна [7] и более поздним работам Делиня [8], Доплихера и Робертса [9] по обобщению их результатов, дуальным объектом к компактной группе G является уже не группа, а категория – категория представлений этой группы. Морфизмами категории служат сплетающие операторы представлений. Применительно к физическим задачам в теории суперотбора, эта категория непременно является симметрической тензорной C^*-категорией [5, 9, 10], причем она может быть и абстрактной. В такой категории, в общем, определены три алгебраические операции, являющиеся необходимыми элементами суперотборной структуры: операция сопряжения, перестановочная симметрия и композиция. Это позволяет строить суперотборную структуру на математическом фундаменте, где операции перехода к античастице, статистика сектора и сложение зарядов позволяют дать упомянутым математическим операциям ясную физическую интерпретацию.

В соответствии с вышесказанным настоящая статья построена следующим образом. В разд. 2 мы предлагаем простую алгебраическую модель для описания малонуклонных систем в изотопическом пространстве. В основе модели лежит категория тензорных степеней гильбертова пространства, базисом которого служат изометрии ψ_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям (5) и (6) и порождающие алгебру Кунца $\mathcal{O}_2$. В этих гильбертовых пространствах реализуются представления тензорных степеней группы $SU(2)$, индексируемые с помощью квантовых чисел изоспина $\{0; 1/2; 1; 3/2; \dots\}$; правило произведения объектов категории позволяет описать сложение изоспинов и получить соответствующие суперотборные сектора. В разд. 3 эта модель применяется для описания двухнуклонной системы и показывается, что изометрические сплетающие операторы (элементы алгебры Кунца), которые не инвариантны относительно действия группы G, позволяют получать из вакуумного сектора изотопические заряды секторов. Такие сплетающие операторы мы интерпретируем как полевые операторы, переносящие заряды между секторами. Среди изометрических операторов, сплетающих вакуумный сектор с остальными, есть оператор, остающийся поточечно фиксированным при действии группы G. В алгебре эндоморфизмов сектора есть проектор, который определяет подобъект, соответствующий антисимметричному подпространству (называемый специальным объектом), и который сплетается с вакуумом указанной изометрией. Поэтому сектор, соответствующий специальному объекту, имеет минимальное значение изоспинового квантового числа и тем самым позволяет находить устойчивые связанные состояния барионов без каких-либо дополнительных предположений. В разд. 4 кратко просуммированы полученные результаты.

Поскольку в работах по ядерной физике и физике элементарных частиц крайне редко используется теория категорий и тем более алгебры Кунца, в разд. 1 мы приводим основные положения теории симметрических тензорных C^*-категорий в форме, рассчитанной на читателя-физика, а также некоторые сведения по алгебрам Кунца.

1. Предварительные сведения о C^*-категориях

Дуальным объектом компактной группы G, играющей роль группы калибровочных преобразований, является симметрическая тензорная C^*-категория эндоморфизмов C^*-алгебры наблюдаемых вместе со сплетающими операторами ее объектов. Поэтому описание суперотборной структуры некоторой физической системы удобно произвести на языке теории симметрических тензорных C^*-категорий. Более детальная информация по теории категорий содержится в книге [11], а теория C^*-категорий в наиболее общем виде изложена в работах [9, 12]. Здесь мы приведем некоторые сведения по теории категорий в объеме, достаточном для понимания настоящей статьи.

Вообще говоря, категория в качестве своих объектов имеет определенные математические структуры (алгебры, группы, представления групп, топологические, линейные, гильбертовы пространства и т. д.), а в качестве своих морфизмов между объектами – отображения, сохраняющие заданную алгебраическую структуру. В настоящей работе мы используем, в частности, категорию гильбертовых пространств **hilb**, которая образует симметрическую тензорную C^*-категорию. Это означает следующее. Обозначим через $(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ множество морфизмов $t:\mathcal{H}\to\mathcal{H}'$ между гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$. Такое множество морфизмов (в данном случае множество операторов) образует банахово пространство, а их линейные комбинации и норма $\|.\|$ определяются естественным образом. В любой категории должна быть определена также и композиция морфизмов: если $s\in(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, $t\in(\mathcal{H}',\mathcal{H}'')$, то $t\circ s\in(\mathcal{H},\mathcal{H}'')$, причем $\|t\circ s\|\le\|t\|\|s\|$. Сопряжение $*$ на множестве морфизмов определяется как отображение в обратную сторону, то есть $t^*\in(\mathcal{H}',\mathcal{H})$, для которого справедливы соотношения $\|t^*\|=\|t\|$ и $\|t^*\circ t\|=$ $=\|t\|^2$. Множество морфизмов $t\in(\mathcal{H},\mathcal{H})$ образует C^*-алгебру, единицу в которой обозначим через $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$.

Тензорная структура вводится следующим образом. Если в категории для любых двух объектов определить операцию их тензорного произведения "$\otimes$", то есть определить третий элемент из этой же категории посредством $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'$ и где $\mathcal{H}\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{H}}=\mathbf{1}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{H}=\mathcal{H}$, то мы приходим к понятию тензорной C^*-категории. При этом операция тензорного произведения влечет тензорное произведение морфизмов: $\forall\, t\in(\mathcal{H},\mathcal{H}_1)$ и $\forall\, s\in(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3)$ $\exists\ t\otimes s\in(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_3)$. Отображение $t,s\to t\otimes s$ является ассоциативным и билинейным, кроме того, справедливы соотношения $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}\otimes t=t\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{H}}=t$ и $(t\otimes s)^*=t^*\otimes s^*$.

Тензорная категория называется симметрической, если в ней определена операция перестановочной симметрии. Другими словами, для любой пары объектов $\mathcal{H},\mathcal{H}'$ существует унитарный оператор $\vartheta(\mathcal{H},\mathcal{H}')\in(\mathcal{H}\mathcal{H}',\mathcal{H}'\mathcal{H})$ такой, что $\vartheta(\mathcal{H},\mathcal{H}')^*=\vartheta(\mathcal{H}',\mathcal{H})$. Операция перестановочной симметрии приводит к унитарным представлениям группы перестановок S_n в алгебре эндоморфизмов $(\mathcal{H}^n,\mathcal{H}^n)$ при любом $\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}^n=\underbrace{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}}_{n}$. Операция симметрии позволяет для любого объекта $\mathcal{H}$ определить гомоморфизм из групповой алгебры группы S_n в алгебру эндоморфизмов $\mathbf{end}\,(\mathcal{H}^n) = (\mathcal{H}^n, \mathcal{H}^n)$. В групповой алгебре есть проектор, соответствующий характеру группы S_n и определяемый знаком перестановок [9]. Образ этого проектора определяет подобъект для $\mathcal{H}^n$. Другими словами, любой проектор E в алгебре эндоморфизмов $\mathbf{end}(\mathcal{H})$ соответствует некоторому подобъекту H, если в множестве морфизмов $t \in (H, \mathcal{H})$ имеется изометрия. Если подобъект изоморфен единице, то он называется специальным (что является абстрактным обобщением понятия представления с единичным определителем) [9]. Обычно C^*-категории предполагаются замкнутыми относительно подобъектов. Если категория не удовлетворяет этому свойству, то ее пополняют до категории с таким свойством.

Для объектов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ категории определена также и их прямая сумма, то есть существует объект $\mathcal{H}$ такой, что для морфизмов (изометрий) $w_1 \in (\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ и $w_2 \in (\mathcal{H}_2, \mathcal{H})$ справедливо соотношение $w_1 \circ w_1^* + w_2 \circ w_2^* = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$. В этом случае полагают $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. По индукции определяется и прямая сумма произвольного числа объектов. Если же для объектов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ существует унитарный оператор в $t \in (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, то такие объекты называются эквивалентными. Обычно тензорные C^*-категории предполагаются замкнутыми также и относительно прямых сумм.

В рамках настоящей работы мы ограничиваемся специальным случаем описанной выше категории **hilb** – ее некоторой подкатегорией, порожденной тензорными степенями некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ конечной размерности d (мы ограничимся случаем $d = 2$). При этом объектами нашей категории будут r-значные тензорные степени $\mathcal{H}^r$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$, а морфизмами служат изометрии $w \in (\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^s)$, $r, s \in \mathbf{N}_0$. Моноидальная единица определяется как $\iota \in (\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^0)$, где $\mathcal{H}^0 = \mathbf{C}$.

Если $G \subseteq U(d)$ – некоторая компактная группа, то для любого $g \in G$ можно построить r-значные тензорные степени g^r, которые действуют унитарно в соответствующих пространствах $\mathcal{H}^r$ (где $U(d)$ – группа унитарных матриц размерности d). Такие унитарные операторы образуют представления данной группы в соответствующих пространствах $\mathcal{H}^r$ и тем самым формируют тензорную симметрическую C^*-категорию представлений $\mathbf{rep}\,\mathbf{G}$, изоморфную **hilb** [13, 14].

В соответствии с вышесказанным рассмотрим пространства G-инвариантных операторов

$$(\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^s)_G := \{t \in (\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^s)_G; \quad t = \widehat{g}(t) := g^s \circ t \circ (g^r)^*, g \in G\}. \tag{1}$$

Наличие специального объекта позволяет построить изометрические операторы $S \in (\iota, \mathcal{H}^d)_{SU(d)} \subseteq (\iota, \mathcal{H}^d)_G$. Здесь $SU(d)$ – группа d-мерных унитарных операторов с единичным определителем. В частности, при $G = SU(d)$ пространства $(\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^s)_{SU(d)}$ порождаются операторами $\vartheta(p)$, $p \in \mathbf{P}_\infty$, и $S \in (\iota, \mathcal{H})_{SU(d)}$ [13].

2. Модель

Как уже было сказано во введении, согласно теории суперотборных секторов (см. например, [1, 2]) гильбертово пространство $\mathcal{H}$ физических состояний разбивается на сумму ортогональных подпространств $\mathcal{H}_i$ (называемых суперотборными секторами), которые нумеруются собственными значениями суперотборного оператора. Те представления C^*-алгебры $\mathcal{A}$ квантовых наблюдаемых A, которые удовлетворяют критерию отбора

$$\pi|_{\mathcal{A}(\mathrm{R}'^3)} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathrm{R}'^3)}, \tag{2}$$

где $\cong$ означает унитарную эквивалентность, действуют в подпространствах $\mathcal{H}_i$, не «выталкивая» вектора состояний из этих подпространств. Здесь $\mathcal{A}(\mathrm{R}'^3)$ – коммутант алгебры $\mathcal{A}(V \subset \mathrm{R}^3)$. Другими словами, операторы наблюдаемых отображают соответствующие подпространства в себя. Представления, удовлетворяющие условию отбора (2), называются представлениями Доплихера – Хаага – Робертса (ДХР-представлениями) и обозначаются как $(\mathcal{H}_i, \pi_i)$. Среди всех возможных секторов $\mathcal{H}_i$ есть так называемый вакуумный сектор $\mathcal{H}_0 \equiv \mathbf{C}$, содержащий вакуумный вектор $|0>$, с которым связано невырожденное (единичной кратности) вакуумное представление π_0 алгебры $\mathcal{A}$. Такое вакуумное представление обозначим через $(\mathcal{H}_0, \pi_0)$.

Внутренняя симметрия данной физической системы задается калибровочной группой G, которая оставляет алгебру наблюдаемых $\mathcal{A}$ поточечно фиксированной, то есть G действует на наблюдаемые тривиальным образом.

В настоящей работе мы будем рассматривать случай неабелевой калибровочной группы $SU(2)$ изотопических вращений. При этом суперотборные сектора нумеруются изоспиновыми квантовыми числами $T = 0; 1/2; 1; 3/2; \ldots$ Каждое подпространство $\mathcal{H}_{TT_z}$ с фиксированным значением изоспина T, но с разными значениями его проекций $T_z = 2T+1$ связано с эквивалентными представлениями алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$.

Если только суперотборная структура задана, мы можем построить полевую алгебру, элементы которой (то есть полевые операторы) осуществляют переходы между секторами. Полевые операторы играют роль сплетающих операторов, которые переносят суперотборные заряды из одного сектора в другой [3, 4]. Элементы полевой алгебры калибровочно не инвариантны. Гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = \bigoplus_T \bigoplus_{T_z=-T}^{T} \mathcal{H}_{TT_z}, \tag{3}$$

в котором действует полевая алгебра и которое представляет собой прямую сумму когерентных подпространств, нумеруемых собственными значениями оператора T, находится во взаимнооднозначном соответствии с неприводимыми представлениями группы $SU(2)$. Множество суперотборных секторов с математической точки зрения образует категорию $\mathbf{rep}\,\mathbf{DHR}(\mathcal{A})$ – категорию ДХР-представлений, удовлетворяющих условию (2). Эта категория, в свою очередь, изоморфна как категории локализованных эндоморфизмов $\mathbf{end}\,\mathcal{A}$ алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, так и категориям $\mathbf{hilb}$ и $\mathbf{rep}\,\mathbf{G}$. Такие эндоморфизмы локализованы в том смысле, что для любых $\rho \in \mathrm{obj}\,\mathbf{end}\,\mathcal{A}$ их действие в пространственноподобном дополнении некоторой области $\mathcal{O}$ сводится к тождественному преобразованию: $\rho(A) = A\ \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}')$. Категория $\mathbf{end}\,\mathcal{A}$ является симметрической тензорной C^*-категорией [5]. Однако в дальнейшем мы будем ограничиваться моноидальной подкатегорией $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{end}\,\mathcal{A}$, образованной тензорными степенями одного эндоморфизма, то есть подкатегорией с объектами

$$\mathrm{obj}\,\mathcal{T} = \{\iota, \rho, \rho\otimes\rho, \rho\otimes\rho\otimes\rho, \ldots\}, \tag{4}$$

где ι – тождественный эндоморфизм. Произведение объектов категории определяется как $\rho^r\rho^s = \rho^{r+s}$. Пространства морфизмов $t \in (\rho^r, \rho^s)$ этой категории порождают алгебру Доплихера – Робертса [9, 15].

Центральным элементом в такой модельной конструкции является построение C^*-алгебры скрещенного произведения $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{T}$ [10]. Эта алгебра содержит $\mathcal{A}$ в качестве подалгебры, остающейся поточечно фиксированной относительно действия компактной группы G, причем группа G является группой автоморфизмов скрещенного произведения. Другими словами, группа G оказывается замкнутой подгруппой группы $aut\,\mathcal{A} \bowtie \mathcal{T}$ согласно Галуа соответствию [14]. В случае алгебры $\mathcal{A}$ с тривиальным центром $\mathbf{C}I$ рассмотрение скрещенного произведения категории $\mathcal{T}$ с объектами вида (4) приводит к алгебре Кунца $\mathcal{O}_d$, где d – размерность ρ. Действие G при этом оказывается каноническим, а эндоморфизм ρ порождается фундаментальным мультиплетом (5), (6) (см. ниже). Поэтому C^*-динамическую систему $(\mathcal{A}, \rho)$ можно отождествить с C^*-динамической системой $(\mathcal{O}_G, \sigma_G)$, где $\mathcal{O}_G$ – поточечно фиксированная подалгебра алгебры $\mathcal{O}_d$ относительно действия G (на языке теории групп, G является стабилизатором $\mathcal{O}_G$ в $\mathcal{O}_d$), σ_G – сужение канонического эндоморфизма σ алгебры $\mathcal{O}_d$ к алгебре $\mathcal{O}_G$.

Выше было уже сказано об изоморфизме категорий **hilb** и **rep G**. В случае $G \subseteq SU(d)$ антисимметричная часть объекта $\mathcal{H} \in obj\,\mathbf{hilb}$, определяемая проектором из $\mathbf{end}\,(\mathcal{H})$, является специальным объектом (см. разд. 1), имеющим размерность d и $obj\,\mathbf{hilb} = \{\mathcal{H}^0, \mathcal{H}, \mathcal{H}^2, \ldots, \mathcal{H}^r, \ldots\}$. Это означает, что r-я тензорная степень представления $\pi^{1/2}$ действует как унитарный оператор в $\mathcal{H}^r$ и пространства G-инвариантных операторов $(\mathcal{H}^r, \mathcal{H}^s)_{SU(d)}$, как уже было сказано в конце разд. 1, порождаются операторами $\vartheta(p) = \sum\limits_{i_1 i_2 \ldots i_n} \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_n} \psi^*_{i_{p(n)}} \cdots \psi^*_{i_{p(1)}}$, $p \in \mathbf{P}_\infty$ и $S \in (\iota, \mathcal{H}^d)_{SU(d)}$, где $S = 1/\sqrt{d!} \sum\limits_{p \in \mathbf{P}_d} \operatorname{sign}(p) \psi_{p(1)} \cdots \psi_{p(d)}$ [10, 13].

Построим теперь моноидальную категорию $\mathbf{rep(G)}$ тензорных степеней неприводимого представления $\pi^{1/2}$ компактной группы $SU(2)$, объекты которой суть

$$\mathrm{Obj}\,\mathbf{rep(G)} = \{\iota, \pi^{1/2}, (\pi^{1/2})^{\otimes 2}, (\pi^{1/2})^{\otimes 3}, \ldots, (\pi^{1/2})^{\otimes r}, \ldots, (\pi^{1/2})^{\otimes s}, \ldots\},$$

где $\pi^{1/2} \otimes \pi^{1/2} \equiv (\pi^{1/2})^{\otimes 2}, \ldots;\ r, s \in \mathbf{N}_0$. Морфизмы в этой категории – сплетающие операторы таких представлений. В физическом плане бинарная операция тензорного произведения "$\otimes$" в категории соответствует векторному сложению изоспинов.

В качестве ортонормированного базиса гильбертова пространства $\mathcal{H}_{TT_z}$, где действуют неприводимые представления $\pi^{1/2}$, выберем мультиплет ψ_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющий соотношениям

$$\psi_i^* \psi_j = \delta_{ij} I, \tag{5}$$

$$\sum_i \psi_i \psi_i^* = I. \tag{6}$$

При этом элементы ψ_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющие соотношениям (5) и (6), порождают *-алгебру ${}^0\mathcal{O}_2$, пополнение которой по C^* норме образует алгебру Кунца $\mathcal{O}_2$. Линейная оболочка $\mathrm{Lin}\,\psi_i{}_{i=1}^{d=2}$ данного мультиплета образует d-мерное (в данном случае двумерное) гильбертово пространство $\mathcal{H}_{TT_z}$ со скалярным произведением,определяемым как $(\psi, \psi')I = \psi^* \psi'$, где $\psi,\, \psi' \in \mathcal{H}_{TT_z}$. Такое гильбертово пространство назовем каноническим. Его тензорные степени $\mathcal{H}^r_{TT_z}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, образуют подкатегорию **hilb**, где морфизмы – сплетающие операторы. Объекты **hilb** образуют G-модули, в которых действуют непрерывные унитарные представления (то есть $\mathrm{Obj}\,\mathbf{rep(G)}$) группы G. Морфизмами в этом случае являются G-модульные гомоморфизмы $(\mathcal{H}^r_{TT_z}, \mathcal{H}^s_{TT_z})_G$ вида (1). Эта конструкция позволяет нам определить подалгебру ${}^0\mathcal{O}_G \subset {}^0\mathcal{O}_d$ алгебры Кунца ${}^0\mathcal{O}_d$ – алгебру наблюдаемых следующим образом. Поскольку индуктивный предел последовательности

$$(\mathcal{H}^r_{TT_z}, \mathcal{H}^{r+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathcal{H}^{r+1}_{TT_z}, \mathcal{H}^{r+1+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} \cdots \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathcal{H}^{r+n}_{TT_z}, \mathcal{H}^{r+n+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} \cdots,$$

где $(\mathcal{H}^r_{TT_z}, \mathcal{H}^{r+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathcal{H}^{r+1}_{TT_z}, \mathcal{H}^{r+1+k}_{TT_z})_G$ – инъективное отображение морфизмов, определяет при фиксированном k некоторое банахово пространство ${}^0\mathcal{O}^k_G$, то, суммируя по всем $k \in \mathbb{Z}$, получаем $\mathbf{Z}$-градуированную C^*-алгебру ${}^0\mathcal{O}_G = \overset{0}{\bigoplus\limits_{k \in \mathbf{Z}}} \mathcal{O}^k_G$, в которой действует эндоморфизм σ_G [13] (см. также [10]). Замыкание этой алгебры ${}^0\bar{\mathcal{O}}_G$ приводит к подалгебре $\mathcal{O}_G$ алгебры Кунца.

Действие элемента

$$\left[\pi^l(g)\right](\psi_1,\psi_2) = f(\alpha\psi_1+\gamma\psi_2, \beta\psi_1+\delta\psi_2), \quad g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in G = SU(2)$$

на эти базисные вектора ψ_1 и ψ_2 при $l = 1/2$ определено стандартным образом:

$$\pi^{1/2}\psi_1 = \alpha\psi_1+\gamma\psi_2, \quad \pi^{1/2}\psi_2 = \beta\psi_1+\delta\psi_2,$$

где α, β, γ, δ – матричные элементы фундаментального представления группы $SU(2)$. Образуя из базисных элементов ψ_1 и ψ_2 антисимметричный тензор

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1) \tag{7}$$

и симметричные тензоры

$$e_2 = \psi_1^2, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1), \quad e_4 = \psi_2^2, \tag{8}$$

образующие ортонормированный базис в тензорном квадрате $\mathcal{H}^2_{TT_z}$ размерности 4, порожденном линейной оболочкой $\mathrm{Lin}\,\psi_i\psi_j{}_{i,j=1}^{d=2}$, получим матрицу представления, которая представляет собой прямую сумму тривиального ($l=0$) и трехмерного векторного ($l=1$) представлений:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 0 & 2\alpha\gamma & \alpha\delta+\beta\gamma & 2\delta\beta \\ 0 & \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2\end{pmatrix} = 1 \bigoplus \begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta+\beta\gamma & 2\delta\beta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2\end{pmatrix}.$$

При этом (7), (8) соответствуют равновероятным поляризованным состояниям двух нуклонов, изначально не поляризованных по изоспину, то есть отвечают за состояния pp, nn, np и pn, где p – состояние протона, n – нейтрона.

3. Дибарионная система

В последнее время внимание специалистов привлекают дибарионные (двухнуклонные) системы в связи с обнаружением в них новых эффектов при промежуточных и высоких энергиях, которые можно интерпретировать как проявление дибарионных резонансов. Простая двухнуклонная модель, наряду со многими моделями (кварковых мешков [16], кварковых струн [17]), также предсказывает наличие слабосвязанных систем и резонансов. Однако детальный анализ современного состояния в этой области и подробный обзор литературы в цель настоящей работы не входит, поэтому мы ограничиваемся указанием на работы [18] (теоретическая), [19] (экспериментальная) и процитированную в них литературу. Таким вопросам будет посвящена отдельная работа, где анализ резонансов будет проводиться на основе предложенной модели. Отметим также, что в научной среде интенсивно обсуждается проблема существования в легких ядрах (в основном во вращающихся) наряду с обычными куперовскими парами (монопольное изовекторное спаривание с изоспином $T=1$) также и изовекторных нуклонных пар в P-состояниях с $T=0$ (см. например, [20] и процитированную там литературу).

Здесь же будем рассматривать двухнуклонную систему с точки зрения нашей алгебраической модели, уделяя большое внимание правилам суперотбора по изоспину. Это связано с тем, что каждой двухнуклонной комбинации могут быть приписаны определенные значения спина, четности, заряда и изоспина, который при нашем подходе является сохраняющимся суперотборным зарядом. Поэтому данная модель может позволить рассматривать малонуклонные системы и их резонансы с точки зрения абсолютно сохраняющихся величин, учитываемых в строгих рамках алгебраического подхода к квантовой физике.

Как известно, изоспин нуклона имеет значение $T = 1/2$ и протон и нейтрон составляют зарядовый дублет с противоположными значениями его проекции (см. например, [21]). Поэтому система из двух нуклонов может иметь изоспин либо $T = 0$, либо $T = 1$. Такую же схему связи имеет и обычный спин. Поэтому гильбертово пространство состояний (3) для двухнуклонной системы состоит из прямой суммы двух подпространств, одно из которых представляет собой антисимметрическую часть с базисом (7), а другое – симметрическую с базисом (8).

Используя (7), (8), введем операторы проектирования для двухнуклонных состояний: SS^* на антисимметрическое и KK^*, LL^*, MM^* на симметрическое подпространства, где $S = 1/\sqrt{2}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1)$, $K = 1/\sqrt{2}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1)$, $L = \psi_1^2$, $M = \psi_2^2$.

Нетрудно видеть, что проектор SS^* оставляет неизменным нейтрон-протонное антисимметричное состояние, обращая в нуль все остальные; проектор LL^* оставляет неизменным двухнейтронное состояние, обращая в нуль остальные; проектор KK^* не меняет симметричное нейтрон-протонное состояние, обращая в нуль все остальные, и, наконец, проектор MM^* оставляет неизменным двухпротонное состояние, обращая в нуль все остальные. Оператор MM^* может быть рассмотрен и как оператор двух обычных электрических зарядов. Сами изометрические операторы S, K, L, M осуществляют связь между вакуумным гильбертовым пространством $\mathcal{H}^0 \equiv \mathbf{C}$ и двухнуклонным пространством состояний $\mathcal{H}^2$, причем не инвариантные относительно действия группы $SU(2)$ операторы K, L, M порождают из вакуума изотопический заряд $T = 1$ и поэтому имеют смысл полевых операторов, а G-инвариантный оператор $S = 1/\sqrt{2!}\sum\limits_{p\in\mathbf{P}_2}\mathrm{sign}(p)\psi_{p(1)}\psi_{p(2)} = 1/\sqrt{2}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1)$, при $d = 2$ (см. разд. 2) отвечает за нулевое значение изотопического заряда и соответствует наблюдаемому дейтрону.

Таким образом, тензорная часть ядерного взаимодействия, которая сильно зависит от взаимной ориентации спинов нуклонов, имеет большую интенсивность при минимальном изоспине. Согласно нашей модели связанное состояние образуют лишь те состояния, которые получаются при действии оператора S. Отметим также, что согласно экспериментальным данным дейтрон в основном состоянии является четным спиновым триплетом (то есть $s = 1$) и имеет отличный от нуля квадрупольный момент. Это означает, что основное состояние дейтрона, обладающее сферической симметрией, имеет малую примесь $^3D_1$-состояния, и существование такой смеси показывает, что нуклон-нуклонные силы содержат тензорное взаимодействие.

Переход же под действием полевого оператора из состояния с $T = 0$ в состояние с $T = 1$ соответствует переходу к симметрическим подпространствам (8), что приводит уже к нестабильным двухнуклонным состояниям. Дело в том, что в секторе с $T = 1$ двухнуклонная система реализовалась бы тогда в соответствующих подсекторах T_z, $z = 1, 0, -1$, как система с абелевыми зарядами 2, 1, 0. Поэтому комбинации таких двухнуклонных состояний не соответствуют реализуемому на эксперименте состоянию, то есть динейтрон, дипротон и нейтрон-протон, соответствующие изоспину $T = 1$, связанного состояния не образуют. В то же время уместно было бы заметить, что дейтрон является простейшим ядром, способным на фотоядерную реакцию. Этому способствует малость его энергии связи (чуть больше 2 МэВ) по сравнению с глубиной потенциальной ямы. Поэтому дейтрон допускает фоторасщепление [22], поглощая при этом гамма-кванты с энергиями больше 2 МэВ, распадаясь на протон и нейтрон. Эта реакция идет без образования составного ядра (поскольку дейтрон не имеет возбужденных состояний).

Наконец, заметим также, что предварительный анализ согласно данной модели показал, что трехнуклонная система может образовать устойчивое состояние, отвечающее минимальному изоспину системы $T = 1/2$. Это отвечает состоянию с одним протоном и двумя нейтронами (ядро трития) и состоянию с одним нейтроном и двумя протонами (гелий-3), которые подчиняются согласно схемам Юнга параферми-статистике порядка два. Остальные: трехпротонная (^{3}Li)и трехнейтронная – системы не могут образовать устойчивые соединения в основном состоянии.

Заключение

В работе рассмотрена двухнуклонная система в рамках предложенной простой алгебраической модели и показано, что физически реализуемое состояние соответствует сектору с минимальным (в данном случае нулевым) значением изоспина. Такое состояние двух нуклонов строится с помощью изометрического G-инвариантного оператора S, сплетающего пространство вакуумного состояния $\mathcal{H}^0_{TT_z}$ с пространством двухнуклонных состояний $\mathcal{H}^2_{TT_z}$, в котором реализуются стабильные связанные состояния двух нуклонов. Проектор, построенный с помощью S, является проектирующим оператором на антисимметричное подпространство (называемое специальным объектом) связанных двухнуклонных состояний.

Построены также изометрические полевые операторы, являющиеся переносчиками изотопического заряда, сплетающие вакуумный сектор с сектором $T = 1$. Соответствующие проекторы, составленные из этих изометрических операторов, являются проектирующими операторами на симметрические подпространства $\mathcal{H}^2_{TT_z}$ и приводят к несвязанным двухнуклонным состояниям.

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору С.А. Григоряну за обсуждение отдельных вопросов и интерес к данной работе.

Литература

1. *Haag R.* Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.–392 p.
2. *Хоружий С.С.* Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
3. *Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.* Local observables and particle statistics. I // Commun. Math. Phys. – 1971. – V. 23, No 3. – P. 199–230.
4. *Doplicher S., Haag R., Roberts J.E.* Local observables and particle statistics. II // Commun. Math. Phys. – 1974. – V. 35, No 1. – P. 49–85.
5. *Doplicher S., Roberts J.E.* Why there is field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics // Commun. Math. Phys. – 1990. – V. 131, No 1. – P. 51–107.
6. *Tannaka T.* Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen // Tohoku Math. J. – 1939. – V. 45. – P. 1–12.
7. *Krein M.G.* A principle of duality for a bicompact group and a square block-algebra // Dokl. Akad. Nauk. SSSR. – 1949. – V. 69.– P. 725–728.
8. *Deligne P.* Categories tannakiennes // The Grothendieck Festschrift: A Collect. Artic. in Honor of the 60th Birthday of A. Grothendieck. – Boston: Birkhauser, 1990. – V. II. – P. 111–195.

9. *Doplicher S., Roberts J.E.* A new duality theory for compact groups // Invent. Math. – 1989. – V. 98, No 1. – P. 157–218.

10. *Doplicher S., Roberts J.E.* Endomorphisms of C^*-algebras, cross products and duality for compact groups // Ann. Math. – 1989. – V. 130, No 1. – P. 75–119.

11. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. – М.: Наука, 2004. – 349 с.

12. *Ghez P., Lima R., Roberts J.E.* W^*-categories // Pac. J. Math. – 1985. – V. 120, No 1. – P. 79–109.

13. *Doplicher S., Roberts J.E.* Duals of compact Lie groups realized in the Cuntz algebras and their actions on C^*-algebras // J. Funct. Anal. – 1987. – V. 74, No 1. – P. 96–120. – doi: 10.1016/0022-1236(87)90040-1.

14. *Doplicher S., Roberts J.E.* Compact group actions on C^*-algebras // J. Oper. Theory. – 1988. – V. 19, No 2. – P. 283–305.

15. *Vasselli E.* Continuous fields of C^*-algebras arising from extensions of tensor C^*-categories // J. Funct. Anal. – 2003. – V. 199, No 1. – P. 122–152. – doi: 10.1016/S0022-1236(02)00093-9.

16. *Боголюбов П.Н., Дорохов А.Е.* Современное состояние модели кварковых мешков // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1987. – Т. 18, Вып. 5 – С. 917–959.

17. *Намбу Й.* Почему нет свободных кварков // Усп. физ. наук. – 1978. – Т. 124, Вып. 1. – С. 147–169.

18. *Platonova M.N., Kukulin V.I.* Hidden dibarions in one- and two-pion production in NN collisions // Nucl. Phys. A. – 2016. – V. 946. – P. 117–157. – doi: 10.1016/j.nuclphysa.2015.11.009.

19. *Komarov V., Tsirkov D., Azaryan T., Bagdasarian Z., Dymov S., Gebel R., Gou B., Kacharava A., Khoukaz A., Kulikov A., Kurbatov V., Lorentz B., Macharashvili G., Mchedlishvili D., Merzliakov S., Mikirtytchiants S., Ohm H., Papenbrock M., Rathmann F., Serdyuk V., Shmakova V., Stroher H., Trusov S., Uzikov Yu., Valdau Yu.* Evidence for excitation of two resonance states in the isovector two baryon system with a mass of 2.2 GeV$/c^2$ // Phys. Rev. C. – 2016. – V. 93. – Art. 065206, P. 1–8. – doi: 10.1103/PhysRevC.93.065206.

20. *Ситдиков А.С., Никитин А.С., Хамзин А.А.* Ротационные свойства ядер с $N \approx Z$ при наличии нейтрон-протонных корреляций // Ядерная физика. – 2008. – Т. 71. – С. 262–272.

21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том III. Квантовая механика. (Нерелятивистская теория). – М.: Наука, 1989. – 768 с.

22. *Берестецкий В.Б„ Лифшиц Е.М., Питаевский Е.П.* Теоретическая физика. Т. IV: Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1989. – 720 с.

Поступила в редакцию
29.03.17

Кириллов Михаил Игоревич, аспирант кафедры «Высшая математика»

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *kirillov_math@mail.ru*

Никитин Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика»

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *drnikitin@rambler.ru*

Ситдиков Айрат Салимович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика»

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *airat_vm@rambler.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 2, pp. 191–203

A Simple Algebraic Model for Few-Nucleon Systems in the Presence of Non-Abelian Superselection Rules

M.I. Kirillov, *A.S. Nikitin*, *A.S. Sitdikov*

Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia
E-mail: **kirillov_math@mail.ru*, ***drnikitin@rambler.ru*, ****airat_vm@rambler.ru*

Received March 29, 2017

Abstract

Traditionally, the dynamics of a quantum physical system is described on the basis of the field models, where the fundamental role is played by the algebra of quantized fields and its automorphisms (forming a compact group). However, despite this imporant role of quantized fields, the fields are unobservable quantities.

As shown by R. Haag, a quantum physical system can also be described in a dual way, where the algebra of observables and the semigroup (category) of its endomorphisms are taken as the initial object. Both approaches should provide practically the same information about the physical system, but the second approach is more natural, because it is based only on the experimentally observed information. In this case, the concept of duality reduces to the existence of a dual object to a compact group: in the case of the Abelian group, this is a group of its characters (Pontryagin duality); in the case of the non-Abelian group, this is the category of representations of the given group (Tannaka–Krein duality). From the physical point of view, the dual object describes charges (Abelian charges in the case of the Abelian compact group and non-Abelian ones in the case of the non-Abelian group) and, hence, the superselected structure of the physical system.

We have developed a model for describing non-Abelian isotopic charges of nucleon systems. The category of representations of the compact isotopic rotation group describes the superselected structure by isospin, and each irreducible representation is indexed by one of the numbers $\{0;\ 1/2;\ 1;\ 3/2;\ 2;\ \dots\}$. It has been shown that a special projection operator belonging to the algebra of endomorphisms of a fixed object of the category allows to obtain a bound state of nucleons by projecting onto antisymmetric subspace. The states of such nucleons obey parastatistics of the order 2. It has been also demonstrated that the intertwining operators of objects with a vacuum sector correspond to the fields carrying isotopic charges.

Since the model takes into account the conservation of isospin, it is also applicable to the study of resonances, which are under heated discussions at the present time.

Keywords: Cuntz algebra, tensor monoidal C^*-category, dibaryon system, isospin, superselection rules

Acknowledgments. We are grateful to S.A. Grigoryan, Professor, for discussion of certain problems and his interest in our research.

References

1. Haag R. Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1996. 392 p. (In Russian)
2. Khoruzhii S.S. Introduction to Quantum Field Theory. Moscow, Nauka, 1986. 304 p. (In Russian)
3. Doplicher S., Haag R., Roberts J.E. Local observables and particle statistics. I. *Commun. Math. Phys.*, 1971, vol. 23, no. 3, pp. 199–230.
4. Doplicher S., Haag R., Roberts J.E. Local observables and particle statistics. II. *Commun. Math. Phys.*, 1974, vol. 35, no. 1, pp. 49–85.
5. Doplicher S., Roberts J.E. Why there is field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics. *Commun. Math. Phys.*, 1990, vol. 131, no. 1, pp. 51–107.
6. Tannaka T. Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen. *Tohoku Math. J.*, 1939, vol. 45, pp. 1–12.
7. Krein M.G. A principle of duality for a bicompact group and a square block-algebra. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1949, vol. 69, pp. 725–728.
8. Deligne P.Categories tannakiennes. *The Grothendieck Festschr.: A Collect. Artic. in Honor of the 60th Birthday of A. Grothendieck.* Boston, Birkhauser, 1990, vol. II, pp. 111–195.
9. Doplicher S., Roberts J.E. A new duality theory for compact groups. *Invent. Math.*, 1989, vol. 98, no. 1, pp. 157–218.
10. Doplicher S., Roberts J.E. Endomorphisms of C^*-algebras, cross products and duality for compact groups. *Ann. Math.*, 1989, vol. 130, no. 1, pp. 75–119.
11. Mac Lane S. Categories of the Working Mathematician. New York, Springer, 1978. 317 p. doi: 10.1007/978-1-4757-4721-8.
12. Ghez P., Lima R., Roberts J.E. W^*-categories. *Pac. J. Math.*, 1985, vol. 120, no. 1, pp. 79–109.
13. Doplicher S., Roberts J.E. Duals of compact Lie groups realized in the Cuntz algebras and their actions on C^*-algebras. *J. Funct. Anal.*, 1987, vol. 74, no. 1, pp. 96–120. doi: 10.1016/0022-1236(87)90040-1.
14. Doplicher S., Roberts J.E. Compact group actions on C^*-algebras. *J. Oper. Theory*, 1988, vol. 19, no. 2, pp. 283–305.
15. Vasselli E. Continuous fields of C^*-algebras arising from extensions of tensor C^*-categories. *J. Funct. Anal.*, 2003, vol. 199, no. 1, pp. 122–152. doi: 10.1016/S0022-1236(02)00093-9.
16. Bogolyubov P.N., Dorokhov A.E. The current state of quark bag model. *Fiz. Elem. Chastits At. Yadra*, 1987, vol. 18, no. 5, pp. 917–959. (In Russian)
17. Yoichiro N. Why there are no free quarks?. *Usp. Fiz. Nauk*, 1978, vol. 124, no. 1, pp. 147–169.
18. Platonova M.N., Kukulin V.I. Hidden dibarions in one- and two-pion production in NN collisions. *Nucl. Phys. A*, 2016, vol. 946, pp. 117–157. doi: 10.1016/j.nuclphysa.2015.11.009.

19. Komarov V., Tsirkov D., Azaryan T., Bagdasarian Z., Dymov S., Gebel R., Gou B., Kacharava A., Khoukaz A., Kulikov A., Kurbatov V., Lorentz B., Macharashvili G., Mchedlishvili D., Merzliakov S., Mikirtytchiants S., Ohm H., Papenbrock M., Rathmann F., Serdyuk V., Shmakova V., Stroher H., Trusov S., Uzikov Yu., Valdau Yu. Evidence for excitation of two resonance states in the isovector two baryon system with a mass of 2.2 GeV/c^2. *Phys. Rev. C.*, 2016, vol. 93, art. 065206, pp. 1–8. doi: 10.1103/PhysRevC.93.065206.

20. Sitdikov A.S., Nikitin A.S., Khamzin A.A. Rotational properties of $N \approx Z$ nuclei at the presence of neutron-proton correlations. *Yad. Fiz.*, 2008, vol. 71, pp. 262–272. (In Russian)

21. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics. Vol. III: Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory). Pergamon Press, 1977. 677 p.

22. Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii E.P. Course of Theoretical Physics. Vol. IV: Quantum Electrodynamics. Butterworth-Heinemann, 1982. 652 p.

⟨ ***Для цитирования***: *Кириллов М.И., Никитин А.С., Ситдиков А.С.* Простая алгебраическая модель для малонуклонных систем при наличии неабелевых правил суперотбора // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 191–203. ⟩

⟨ ***For citation***: Kirillov M.I., Nikitin A.S., Sitdikov A.S. A simple algebraic model for few-nucleon systems in the presence of non-abelian superselection rules. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 191–203. (In Russian) ⟩