МОДУЛИ, БЛИЗКИЕ К ПРОЕКТИВНЫМ И ИНЪЕКТИВНЫМ: ПОДЪЕМ И ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ

Абызов А.Н., Туганбаев А.А.

Международная конференция
по алгебре, анализу и геометрии 2021

КВАЗИИНЪЕКТИВНЫЕ И КВАЗИПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

Johnson, Wong, 1961

Модуль M называется *квазиинъективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in Hom(K, M)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Johnson, Wong, 1961

Модуль M называется *квазиинъективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in Hom(K, M)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

$$(*) \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Теорема (Johnson, Wong, 1961)

Модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M является вполне инвариантным подмодулем в своей инъективной оболочке.

Теорема (Faith C., Utumi Y., 1964; Osofsky B.L., 1968)

Если M – квазиинъективный правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – самоинъективное справа регулярное кольцо и $J(S) = \{f \in S \mid Ker(f) \leq_e M\}$.

Теорема (Faith C., Utumi Y., 1964; Osofsky B.L., 1968)

Если M – квазиинъективный правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – самоинъективное справа регулярное кольцо и $J(S) = \{f \in S \mid Ker(f) \leq_e M\}$.

Теорема (Bumby, 1965)

Если M и N – квазиинъективные модули и существуют мономорфзмы, действующие из M в N и из N в M. Тогда $M \cong N$.

Модуль M называется *эндоморфизм-продолжаемым*, если для каждого его подмодуля K и каждого эндоморфизма $f \in Hom(K,K)$ существует эндоморфизм $f' \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ M \arrow[r, dotted, "f'"] & M \end{tikzcd}$$

Модуль M называется *эндоморфизм-продолжаемым,* если для каждого его подмодуля K и каждого эндоморфизма $f \in Hom(K,K)$ существует эндоморфизм $f' \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ M \arrow[r, dotted, "f'"] & M \end{tikzcd}$$

Теорема (Туганбаев А.А., 1998)

Для полуартинова модуля M следующие условия равносильны:
(1) M – эндоморфизм-продолжаемый модуль;
(2) M – квазиинъективный модуль.

Модуль M называется *квазипроективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in Hom(M, M/K)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

$(*)$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Модуль M называется *квазипроективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in Hom(M, M/K)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

$(*)$
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Теорема (Wu L. E., Jans J., 1967)

Пусть $\pi\colon P \to M$ – проективное накрытие модуля M, то модуль M квазипроективен в точности тогда, когда $\mathrm{Ker}(\pi)$ является вполне инвариантным подмодулем модуля P.

Теорема

Если M – квазипроективный правый модуль над совершенным справа кольцом, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – прямое произведение полных линейных колец,
$J(S) = \{f \in S \mid Im(f) << M\}$.

Теорема

Если M – квазипроективный правый модуль над совершенным справа кольцом, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – прямое произведение полных линейных колец,
$J(S) = \{f \in S \mid Im(f) << M\}$.

Теорема (Lee, Quynh, 2020)

Если M и N – квазипроективные правые модули над совершенным справа кольцом и существуют эпиморфизмы, действующие из M в N и из N в M. Тогда $M \cong N$.

Правый R-модуль M называется *эндоморфизм-поднимаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый эндоморфизм f модуля M/N может быть поднят до эндоморфизма f' модуля M.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/N \arrow[r, "f"] & M/N \end{tikzcd}$$

Правый R-модуль M называется *эндоморфизм-поднимаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый эндоморфизм f модуля M/N может быть поднят до эндоморфизма f' модуля M.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/N \arrow[r, "f"] & M/N \end{tikzcd}$$

Теорема (Туганбаев А.А., 1979)

Если R – совершенное справа кольцо, то для правого R-модуля M следующие условия равносильны:
(1) M – эндоморфизм-поднимаемый модуль;
(2) M – квазипроективный модуль.

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ МОДУЛИ

Модуль M называется CS-*модулем*, если каждый подмодуль модуля M существен в некотором в некотором прямом слагаемом M.

Модуль M называется CS-*модулем*, если каждый подмодуль модуля M существен в некотором в некотором прямом слагаемом M.

Модуль M называется C2-модулем (или прямо инъективными модулем), если каждый подмодуль модуля M, изоморфный некоторому прямому слагаемому модуля M, сам является прямым слагаемым модуля M.

Модуль M называется CS*-модулем*, если каждый подмодуль модуля M существен в некотором в некотором прямом слагаемом M.

Модуль М называется C2-модулем (или прямо инъективными модулем), если каждый подмодуль модуля М, изоморфный некоторому прямому слагаемому модуля М, сам является прямым слагаемым модуля М.

Модуль M называется $C3$-модулем, если для каждых прямых слагаемых M_1 и M_2 модуля M, для которых выполнено условие $M_1 \cap M_2 = 0$, сумма $M_1 + M_2$ является прямым слагаемым модуля M.

Модуль M называется *непрерывным*, если M – CS-модуль и $C2$-модуль.

Модуль M называется *непрерывным*, если M – CS-модуль и $C2$-модуль.

Модуль M называется *квазинепрерывным*, если M – CS-модуль и $C3$-модуль.

1) von Neumann J. Continuous geometry// Proc. Natl. Acad. Sci., 22. - 1936. - P. 92-100.
2) von Neumann J. Examples of continuous geometries// Proc. Natl. Acad. Sci., 22. - 1936. - P. 101-108.
3) von Neumann J. On regular rings// Proc. Natl. Acad. Sci., 22. - 1936. - P. 707-713.
4) Utumi Y. On continuous regular rings// Can. Math. Bull., 4. - 1961. - P. 63-69.
5) Utumi Y. On continuous rings and self-injective rings// Trans. Am. Math. Soc., 118.-1965.- P. 158-173.
6) Jeremy L. Sur les modules et anneaux quasi-continus// C. R. Acad. Sci. Paris, 273. - 1971. - P. 80-83.
7) Jeremy L. Modules et anneaux quasi-continus// Can. Math. Bull., 17. - 1974. - P. 217-228.
8) Mohammed S., Bouhy T. Continuous modules// Arab. J. Sci. Eng., 2. - 1977. -P. 107-122.
9) Takeuchi T. On direct modules// Hokkaido Math. J., 1. - 1972. - P. 168-177.

Теорема (Jeremy L., 1974)

Пусть M – правый R-модуль и $\iota : M \to E$ – инъективная оболочка модуля M. Для модуля M следующие условия равносильны:
1) M – квазинепрерывный модуль;
2) M – идемпотентно-инвариантный модуль, т.е. для каждого идемпотентного эндоморфизма $e \in End(E)$ выполнено включение $e(M) \subseteq M$;
3) M – идемпотентно-продолжаемый модуль, т.е. для каждого подмодуля N модуля M каждый эндоморфизм f модуля N может быть продолжен до эндоморфизма f' модуля M.

Теорема (Muller, Rizvi, 1983)

Если M и N – непрерывные правые R-модули и существуют мономорфизмы, действующие из M в N и из N в M. Тогда $M \cong N$.

Теорема (Muller, Rizvi, 1983)

Если M и N – непрерывные правые R-модули и существуют мономорфизмы, действующие из M в N и из N в M. Тогда $M \cong N$.

Теорема (Mohamed and Bouhy, 1977)

Если M – непрерывный правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – непрерывное справа кольцо и $J(S) = \{f \in S \mid Ker(f) \leq_e M\}$.

Теорема (Camillo, Khurano, Lam, Nicholson, Zhou, J. Algebra, 2006)

Если M – непрерывный модуль, то $End(M)$ – чистое кольцо.

Кольцо называется чистым, если каждый его элемент представим в виде суммы обратимого элемента и идемпотента.

Теорема (Camillo, Khurano, Lam, Nicholson, Zhou, J. Algebra, 2006)

Если M – непрерывный модуль, то $End(M)$ – чистое кольцо.

Кольцо называется чистым, если каждый его элемент представим в виде суммы обратимого элемента и идемпотента.

Теорема (Nicholson W.K., Varadarajan K., Proc. Amer. Math. Soc., 1998)

Если V – векторное пространство над телом T, то $End(V)$ – чистое кольцо.

Diesl, Nil clean rings, J.Algebra, 2013

Кольцо называется ниль-чистым, если каждый его элемент является суммой нильпотентного элемента и идемпотента.

Diesl, Nil clean rings, J.Algebra, 2013

Кольцо называется ниль-чистым, если каждый его элемент является суммой нильпотентного элемента и идемпотента.

Теорема (Breaz S., Calugareanu G., Danchev P., Micu T., Nil-clean matrix rings, Linear Algebra Appl, 2013)

Для поля P следующие условия равносильны:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(P)$ является ниль-чистым;
2) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(P)$ является ниль-чистым;
3) $P = F_2$.

Diesl, Nil clean rings, J.Algebra, 2013

Кольцо называется ниль-чистым, если каждый его элемент является суммой нильпотентного элемента и идемпотента.

Теорема (Breaz S., Calugareanu G., Danchev P., Micu T., Nil-clean matrix rings, Linear Algebra Appl, 2013)

Для поля P следующие условия равносильны:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(P)$ является ниль-чистым;
2) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(P)$ является ниль-чистым;
3) $P = F_2$.

Теорема (Ster, J., Linear Algebra Appl., 2018)

Для любого $n \in \mathbb{N}$ в кольце $M_n(F_2)$ каждая матрица представима в виде $A = E + N$, где $E^2 = E$ и $N^4 = 0$.

Пусть q – натуральное число и $q > 1$. Элемент r из кольца R называется q-потентным, если выполнено равенство $r^q = r$. Кольцо R называется q-ниль-чистым, если каждый элемент из R представим в виде суммы q-потента и нильпотента.

Теорема (А., М., 2017)

Пусть p – простое число, k – целое число ≥ 1, $q = p^k$ и P – поле. Тогда следующие условия равносильны:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(P)$ является q - ниль - чистым;
2) для некоторого $m \in \mathbb{N}$ кольцо $M_m(P)$ является q - ниль - чистым;
3) P – конечное поле и $|P| - 1$ делит $q - 1$.

Теорема (А., М., 2017)

Пусть p – простое число, k – целое число ≥ 1, $q = p^k$ и P – поле. Тогда следующие условия равносильны:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ кольцо $M_n(P)$ является q - ниль - чистым;
2) для некоторого $m \in \mathbb{N}$ кольцо $M_m(P)$ является q - ниль - чистым;
3) P – конечное поле и $|P| - 1$ делит $q - 1$.

Теорема (Breaz, J., Linear Algebra Appl., 2018)

Если q – степень нечетного простого числа, то для любого $n \in \mathbb{N}$ в кольце $M_n(F_q)$ каждая матрица представима в виде $A = E + N$, где $E^q = E$ и $N^3 = 0$.

Теорема (А., Тапкин Д.Т., Сиб. матем. журн., 2021)

Пусть $q > 1$ – целое нечетное число и R – целостное кольцо, не изоморфное полю $\mathbb{F}_3$. Тогда следующие условия равносильны:

(1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из кольца $M_n(R)$ представима в виде суммы идемпотентной матрицы и q-потентной матрицы;

(2) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из кольца $M_n(R)$ представима в виде суммы идемпотентной матрицы и q-потентной матрицы;

(3) для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из кольца $M_n(R)$ представима в виде суммы нильпотентной матрицы и q-потентной матрицы;

(4) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из кольца $M_n(R)$ представима в виде суммы нильпотентной матрицы и q-потентной матрицы;

(5) R является конечным полем и $\mid R \mid -1 \;\mid q-1$.

Теорема (А., Тапкин Д.Т., Linear Algebra and its Applications, 2021)

Let R be an integral domain. The following are equivalent:

(1) Every matrix in $M_n(R)$ is the sum of two tripotents for all $n \in \mathbb{N}$.

(2) There exists a positive integer n such that every matrix in $M_n(R)$ is the sum of two tripotents.

(3) Every matrix in $M_n(R)$ is the sum of an idempotent and a 5-potent for all $n \in \mathbb{N}$.

(4) There exists a positive integer n such that every matrix in $M_n(R)$ is the sum of an idempotent and a 5-potent.

(5) R isomorphic to $\mathbb{F}_2$, or $\mathbb{F}_3$, or $\mathbb{F}_5$.

Теорема (А., Тапкин Д.Т., 2021)

Let R be a commutative ring with $2 \in U(R)$. The following are equivalent:

(1) Every matrix in $M_n(R)$ is the sum of two tripotents for all $n \in \mathbb{N}$.

(2) There exists a positive integer n such that every matrix in $M_n(R)$ is the sum of two tripotents.

(3) Every matrix in $M_n(R)$ is the sum of an idempotent and a 5-potent for all $n \in \mathbb{N}$.

(4) There exists a positive integer n such that every matrix in $M_n(R)$ is the sum of an idempotent and a 5-potent.

(5) R has the identity $x^5 = x$.

Модуль M называется модулем со свойством подъема, если для каждого подмодуля N модуля M существует такое прямое слагаемое N' модуля N, что N/N' – малый подмодуль модуля M/N.

Модуль M называется модулем со свойством подъема, если для каждого подмодуля N модуля M существует такое прямое слагаемое N' модуля N, что N/N' – малый подмодуль модуля M/N.

Модуль M называется прямо проективным (или D2-модулем), если каждый подмодуль модуля M, фактор-модуль по которому изоморфен некоторому прямому слагаемому модуля M, сам является прямым слагаемым модуля M.

Модуль M называется модулем со свойством подъема, если для каждого подмодуля N модуля M существует такое прямое слагаемое N' модуля N, что N/N' – малый подмодуль модуля M/N.

Модуль M называется прямо проективным (или D2-модулем), если каждый подмодуль модуля M, фактор-модуль по которому изоморфен некоторому прямому слагаемому модуля M, сам является прямым слагаемым модуля M.

Модуль M называется $D3$-модулем, если для каждых прямых слагаемых M_1 и M_2 модуля M, для которых выполнено условие $M_1 + M_2 = M$, пересечение $M_1 \cap M_2$ является прямым слагаемым модуля M.

Oshiro K., 1983

Модуль M называется *квазидискретным*, если M – модуль со свойством подъема и $D3$-модуль.

Oshiro K., 1983

Модуль M называется *квазидискретным*, если M – модуль со свойством подъема и $D3$-модуль.

Mohamed S., Singh S., 1977

Модуль M называется *дискретным*, если M – модуль со свойством подъема и $D2$-модуль.

Теорема (Mohamed S., Miiller, B. J., Singh, S. 1985; Tuganbaev A.A., 2021)

Для модуля M следующие условия равносильны:
1) M – квазидискретный модуль;
2) каждый подмодуль модуля M обладает аддитивным дополнением в M и M – идемпотентно-поднимаемый модуль, т.е. для каждого подмодуля N модуля M каждый идемпотентный эндоморфизм f фактор-модуля M/N может быть поднят до (идемпотентного) эндоморфизма f' модуля M.
Если модуль M обладает проективной оболочкой $f : P \to M$, то предыдущие пункты эквивалентны условию
3) M – идемпотентно-коинвариантный модуль, т.е. для каждого идемпотентного эндоморфизма $e \in End(P)$ выполнено включение $e(Ker(M)) \subseteq Ker(M)$.

Теорема (Kasch, 1982; Zelmanowitz, 1997)

Если M – дискретный правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – прямое произведение полных линейных колец, $J(S) = \{f \in S \mid Im(f) << M\}$.

Теорема (Kasch, 1982; Zelmanowitz, 1997)

Если M – дискретный правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – прямое произведение полных линейных колец, $J(S) = \{f \in S \mid Im(f) << M\}$.

Теорема (Camillo, Khurano, Lam, Nicholson, Zhou, 2006)

Если M – дискретный модуль, то $End(M)$ – чистое кольцо.

Теорема (Kasch, 1982; Zelmanowitz, 1997)

Если M – дискретный правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – прямое произведение полных линейных колец, $J(S) = \{f \in S \mid Im(f) << M\}$.

Теорема (Camillo, Khurano, Lam, Nicholson, Zhou, 2006)

Если M – дискретный модуль, то $End(M)$ – чистое кольцо.

Теорема (Dehghani, Rizvi, 2021)

Если M и N – дискретные правые R-модули и существуют эпиморфизмы, действующие из M в N и из N в M. Тогда $M \cong N$.

1) Adnan Tercan, Canan C. Yucel, Module Theory, Extending Modules and Generalizations (Frontiers in Mathematics) 1st ed. 2016 Edition, Kindle Edition, Springer, 2016
2) N.V. Dung, D.V. Huynh, P.F. Smith, Wisbauer, R. Extending Modules, Pitman Research Notes 313 (Longman 1994)
3) Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R.: Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory. Birkhauser Verlag, Basel (2006)
4) Mohamed, H.S., Muller, B.J. Continuous and Discrete Modules. LondonMath. Soc. Lecture Note Series, Cambridge Univ. Press., 147 (1990)
5) Baba Y., Oshiro K. Classical Artinian rings and related topics (WS, 2009)

АВТОМОРФИЗМ-ИНВАРИАНТНЫЕ И АВТОМОРФИЗМ-КОИНВАРИАНТНЫЕ МОДУЛИ

Jain S. K., Singh S., 1967

Модуль M называется *псевдоинъективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого мономорфизма $f \in Hom(K, M)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Lee, Zhou, J. Algebra and Appl., 2012

Модуль M называется *автоморфизм-инвариантным*, если $f(M) \subseteq M$ для каждого $f \in Aut(E(M))$

Lee, Zhou, J. Algebra and Appl., 2012

Модуль M называется *автоморфизм-инвариантным*, если $f(M) \subseteq M$ для каждого $f \in Aut(E(M))$

Теорема (S. E. Dickson, K. R. Fuller, 1969)

Пусть R – конечномерная алгебра над полем P. Если $\mid P \mid > 2$, то для правого неразложимого правого R-модуля следующие условия равносильны:
1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
2) M – квазиинъективный модуль.

Lee, Zhou, J. Algebra and Appl., 2012

Модуль M называется *автоморфизм-инвариантным*, если $f(M) \subseteq M$ для каждого $f \in Aut(E(M))$

Теорема (S. E. Dickson, K. R. Fuller, 1969)

Пусть R – конечномерная алгебра над полем P. Если $\mid P \mid > 2$, то для правого неразложимого правого R-модуля следующие условия равносильны:
1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
2) M – квазиинъективный модуль.

Теорема (Lee, Zhou, J. Algebra and Appl.,2012)

Пусть M – R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:
1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
2) каждый изоморфизм между существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма (автоморфизма) модуля M.

Проблема (Lee, Zhou, J. Algebra and Appl.,2012)

Каждый ли автоморфизм-инвариантный модуль является псевдоинъективным?

Проблема (Lee, Zhou, J. Algebra and Appl.,2012)

Каждый ли автоморфизм-инвариантный модуль является псевдоинъективным?

Проблема (S.Singh, A.K.Srivastava, 2012)

Каждый ли автоморфизм-инвариантный модуль является C2-модулем?

Проблема (Lee, Zhou, J. Algebra and Appl.,2012)

Каждый ли автоморфизм-инвариантный модуль является псевдоинъективным?

Проблема (S.Singh, A.K.Srivastava, 2012)

Каждый ли автоморфизм-инвариантный модуль является C2-модулем?

Теорема (N. Er, S. Singh, A.K. Srivastava, J. Algebra, 2013)

Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M – псевдоинъективный модуль.

Теорема (N. Er, S. Singh, A.K. Srivastava, J. Algebra, 2013)

Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M – псевдоинъективный модуль.

Теорема (P. A. Guil Asensio, A. K. Srivastava, J. Algebra, 2013)

Пусть M – автоморфизм-инвариантный модуль и $S = End(M)$. Тогда
1) $J(S) = \{f \in S \mid Ker(f) \leq_e M\}$;
2) кольцо S является полурегулярным и чистым;
3) имеет место разложение $M = A \oplus B$, где A – квазиинъективный модуль и B – модуль, свободный от квадратов.

Теорема (N. Er, S. Singh, A.K. Srivastava, J. Algebra, 2013)

Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M – псевдоинъективный модуль.

Теорема (P. A. Guil Asensio, A. K. Srivastava, J. Algebra, 2013)

Пусть M – автоморфизм-инвариантный модуль и $S = End(M)$. Тогда
1) $J(S) = \{f \in S \mid Ker(f) \leq_e M\}$;
2) кольцо S является полурегулярным и чистым;
3) имеет место разложение $M = A \oplus B$, где A – квазиинъективный модуль и B – модуль, свободный от квадратов.

Теорема (Lee, Quynh, Com. Algebra, 2020)

Если M и N – автоморфизм-инвариантные модули над совершенным справа кольцом и существуют эпиморфизмы, действующие из M в N и из N в M. Тогда $M \cong N$.

Теорема (T. K. Lee, Y. Zhou, Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls, J. Algebra Appl., 2013)

Если 2 – обратимый элемент в кольце, то всякий автоморфизм-инвариантный правый R-модуль является квазиинъективным.

Теорема (T. K. Lee, Y. Zhou, Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls, J. Algebra Appl., 2013)

Если 2 – обратимый элемент в кольце, то всякий автоморфизм-инвариантный правый R-модуль является квазиинъективным.

Теорема (Туганбаев А.А., 2013)

Пусть A – ограниченное наследственное нетерово первичное кольцо и M – A-модуль. Равносильны условия:

1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
2) M – квазиинъективный модуль;
3) либо M – квазиинъективный сингулярный модуль, либо M – инъективный модуль, не являющийся сингулярным.

Теорема

Пусть R – коммутативное артиново кольцо. Модуль M является автоморфизм- инвариантным в точности тогда, когда M – квазиинъективный модуль.

Pedro A. Guil Asensio, A. K. Srivastava, T. C. Quynh Additive unit structure of endomorphism rings and invariance of modules, Bulletin of Math. Sciences, 2017.

Модуль M называется *(строго) автоморфизм-продолжаемым*, если для каждого его подмодуля K и каждого автоморфизма $f \in Hom(K,K)$ существует (автоморфизм) эндоморфизм $f' \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ M \arrow[r, dotted, "f'"] & M \end{tikzcd}$$

A. A. Tuganbaev, "Automorphism-extendable modules", Discrete Math. Appl., 25:5 (2015), 305-309
A. A. Tuganbaev, "Automorphism-invariant semi-Artinian modules", Journal of Algebra and Its Applications, 16:2 (2017), 1750029 , 5 pp.
А. А. Туганбаев, "Автоморфизмы подмодулей и их продолжения", Дискрет. матем., 25:1 (2013), 144-151

Теорема (Туганбаев А.А., 2015)

Пусть A – инвариантная наследственная нетерова область, Q – тело частных области A и M – правый A-модуль. Равносильны условия:

1) M – автоморфизм-продолжаемый модуль;
2) M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль;
3) M – эндоморфизм-продолжаемый модуль;
4) либо M – квазиинъективный сингулярный модуль, либо M – инъективный модуль, не являющийся сингулярным, либо $M = X \oplus Y$, где X – инъективный сингулярный модуль и модуль Y изоморфен ненулевому подмодулю в Q_A.

Теорема (Туганбаев А.А., 1998)

Для полуартинова модуля M следующие условия равносильны:

1) M – эндоморфизм-продолжаемый модуль;
2) M – квазиинъективный модуль.

Теорема (Туганбаев А.А., 1998)

Для полуартинова модуля M следующие условия равносильны:

1) M – эндоморфизм-продолжаемый модуль;
2) M – квазиинъективный модуль.

Теорема (Туганбаев А.А., J. Algebra and Appl., 2017)

Для полуартинова модуля M следующие условия равносильны:

1) M – автоморфизм-продолжаемый модуль;
2) M – строго автоморфизм-продолжаемый модуль;
3) M – автоморфизм-инвариантный модуль.

L. Ganesan, N. Vanaja, 2007

Модуль M называется *псевдопроективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого эпиморфизма $f \in Hom(M, M/K)$ существует гомоморфизм $g \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

(*)
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

S. Singh, A. K. Srivastava, 2012

Модуль M называется *автоморфизм-коинвариантным*, если для каждых его малых подмодулей K_1, K_2 и каждого малого эпиморфизма $f \in Hom(M/K_1, M/K_2)$ существует гомоморфизм $f' \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/K_1 \arrow[r, "f"] & M/K_2 \end{tikzcd}$$

S. Singh, A. K. Srivastava, 2012

Модуль M называется *автоморфизм-коинвариантным*, если для каждых его малых подмодулей K_1, K_2 и каждого малого эпиморфизма $f \in Hom(M/K_1, M/K_2)$ существует гомоморфизм $f' \in End(M)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/K_1 \arrow[r, "f"] & M/K_2 \end{tikzcd}$$

Теорема (S. Singh, A. K. Srivastava, 2012)

Пусть $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Тогда M – автоморфизм-коинвариантный модуль в точности тогда, когда $f(Ker(\pi)) \leq Ker(\pi)$ для каждого $f \in Aut(P)$.

Теорема (P. Guil Asensio, A.Srivastava, D. Keskin, B. Kalebogaz, 2016)

Пусть R – (полу)совершенное справа кольцо. Тогда (конечно порожденный) правый R-модуль M является автоморфизм-коинвариантным тогда, когда M – псевдопроективный модуль.

Теорема (P. Guil Asensio, A.Srivastava, D. Keskin, B. Kalebogaz, 2016)

Пусть R – (полу)совершенное справа кольцо. Тогда (конечно порожденный) правый R-модуль M является автоморфизм-коинвариантным тогда, когда M – псевдопроективный модуль.

А. Н. Абызов, Ч. К. Куинь, Д. Д. Тай, Дуально автоморфизм-инвариантные модули над совершенными кольцами, Сиб. матем. журн., 58:5 (2017), 959-971;
И. Куратоми, Разложения дуально автоморфизм-инвариантных модулей над полусовершенными кольцами, Сиб. матем. журн., 60:3 (2019), 630-639.

Теорема (А., Куинь, 2019)

Пусть R – совершенное справа кольцо и M – автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль. Тогда

$$M = P' \oplus (\oplus_{i=1}^{n} Q_i),$$

где P' – квазипроективный модуль, $\mathrm{End}_R(\oplus_{i=1}^{n} Q_i / J(\oplus_{i=1}^{n} Q_i))$ – конечное булево кольцо, $\oplus_{i=1}^{n} Q_i$ – циклический модуль, у которого каждый ненулевой гомоморфный образ не является квадратом, и для каждого $1 \leq i \leq n$ модуль Q_i является нелокальным и неразложимым.

Правый R-модуль M называется *(строго) автоморфизм-поднимаемым*, если для каждого подмодуля N модуля M каждый автоморфизм f модуля M/N может быть поднят до эндоморфизма (автоморфизма) f' модуля M.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
M/N \arrow[r, "f"] & M/N
\end{tikzcd}
$$

Теорема (Мишина А.П., 1972)

Пусть M – периодическая абелева группа. Тогда следующие условия равносильны:

1) M – эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
2) M – строго автоморфизм-поднимаемая абелева группа;
3) имеет место разложение $M = (\oplus_{p \in I} \mathbb{Z}_{p^\infty}) \oplus (\oplus_{p \in I'} (\oplus \mathbb{Z}_{p^{m_p}}))$, где I, I' – множества простых чисел, пересечение которых пусто.

Теорема (Туганбаев А.А., 2020)

Пусть M – сингулярный модуль над ограниченным наследственным нетеровым первичным кольцом R. Тогда следующие условия равносильны:

1) M – эндоморфизм-поднимаемый модуль;
2) M – автоморфизм-поднимаемый модуль;
3) M – строго автоморфизм-поднимаемый модуль;
4) каждая примарная компонента модуля M является либо неразложимым инъективным модулем, либо проективным модулем над фактор-кольцом кольца R по аннулятору этой примарной компоненты.

Теорема (Туганбаев А.А., 1979)

Пусть R – совершенное справа кольцо. Тогда для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – эндоморфизм-поднимаемый модуль.
2) M – квазипроективный модуль.

Теорема (Туганбаев А.А., 1979)

Пусть R – совершенное справа кольцо. Тогда для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – эндоморфизм-поднимаемый модуль.
2) M – квазипроективный модуль.

Теорема (А., Куинь, Com. Algebra, 2018)

Пусть R – совершенное справа кольцо. Тогда для правого R-модуля M следующие условия равносильны:

1) M – строго автоморфизм-поднимаемый модуль.
2) M – автоморфизм-коинвариантный модуль.

Теорема (А., Куинь, Сиб. матем. журн., 2017)

Пусть R – совершенное справа кольцо, M – автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Если P – прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то M – квазипроективный модуль.

Теорема (А., Куинь, Сиб. матем. журн., 2017)

Пусть R – совершенное справа кольцо, M – автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Если P – прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то M – квазипроективный модуль.

Теорема (А., Куинь, Сиб. матем. журн., 2017)

Пусть R – нормальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый автоморфизм- коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.

Теорема (А., Куинь, Сиб. матем. журн., 2017)

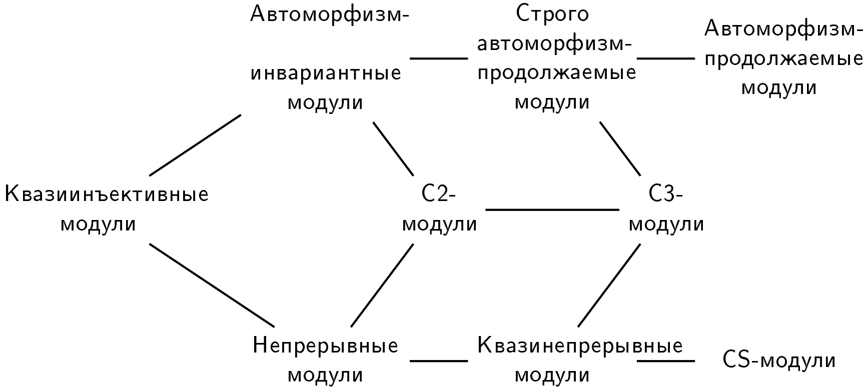
Пусть R – совершенное справа кольцо, M – автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль и $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Если P – прямая сумма попарно изоморфных локальных модулей, то M – квазипроективный модуль.

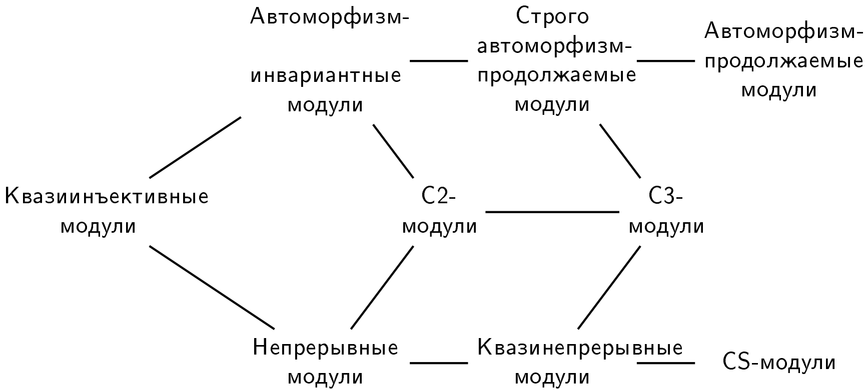
Теорема (А., Куинь, Сиб. матем. журн., 2017)

Пусть R – нормальное совершенное справа кольцо. Тогда каждый автоморфизм- коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.

Теорема (А., Куинь, Сиб. матем. журн., 2017)

Пусть R – совершенное справа кольцо, у которого каждый гомоморфный образ не изоморфен кольцу вида $M_n(\mathbb{Z}_2)$. Тогда каждый автоморфизм-коинвариантный правый R-модуль является квазипроективным.


Автоморфизм-инвариантные модули
Строго автоморфизм-продолжаемые модули
Автоморфизм-продолжаемые модули
Квазиинъективные модули
C2-модули
C3-модули
Непрерывные модули
Квазинепрерывные модули
CS-модули



1) Askar Tuganbaev, Arithmetical Rings and Endomorphisms, Walter de Gruyter, Berlin-Boston, 2019, 175 pp.;

2) Ashish Srivastava, Askar Tuganbaev, Pedro Guil Asensio, Invariance of Modules under Automorphisms of their Envelopes and Covers, Cambridge University Press, Cambridge, 2021 , 226 pp.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl., 2020)

Let R be a right bounded hereditary noetherian prime ring. Then the following conditions are equivalent for a torsion right R-module M:

1) M is nilpotent-invariant.
2) M is quasi-injective.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl., 2020)

Let R be a right bounded hereditary noetherian prime ring. Then the following conditions are equivalent for a torsion right R-module M:

1) M is nilpotent-invariant.
2) M is quasi-injective.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl., 2020)

Let M be a right module over a semiprimary ring R. Then the following conditions are equivalent :

1) M is a nilpotent-invariant module.
2) All nilpotent endomorphisms of submodules of M extend to nilpotent endomorphisms of M.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl., 2020)

Let M be a right module over a semiprimary ring R. Then the following conditions are equivalent :

1) M is a nilpotent-coinvariant module.
2) All nilpotent endomorphisms of factors of M lift to nilpotent endomorphisms of M.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl., 2020)

Let M be a right module over a semiprimary ring R. Then the following conditions are equivalent :

1) M is a nilpotent-coinvariant module.
2) All nilpotent endomorphisms of factors of M lift to nilpotent endomorphisms of M.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl., 2020)

Let R be a right invariant right perfect ring. The following conditions are equivalent for a finitely generated right R-module M:

1) M is an automorphism-coinvariant module.
2) M is a nilpotent-coinvariant module.
3) M is a quasi-projective module.

Santa-Clara, 1998

Модуль M называется *существенно-инъективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(K, M)$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq^e K$, существует гомоморфизм $g \in \mathrm{End}(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M \\ & & \Big\downarrow f & \swarrow g & \\ & & M & & \end{array}$$

Существенно-инъективные и мало-проективные модули

Модуль M называется *мало-проективным*, если для каждого его подмодуля K и каждого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(M, M/K)$, у которого $Im(f) << M/K$, существует гомоморфизм $g \in \mathrm{End}(M)$, для которого коммутативна диаграмма $(*)$

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl.,2019)

Следующие условия равносильны для модуля M:

1) M – существенно-инъективный модуль;
2) для каждого $f \in \mathrm{End}(E(M))$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq^e E(M)$, $f(M) \leq M$;
3) $f(M) \leq M$ для каждого $f \in J(\mathrm{End}(E(M)))$.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl.,2019)

Следующие условия равносильны для модуля M:

1) M – существенно-инъективный модуль;
2) для каждого $f \in \mathrm{End}(E(M))$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq^e E(M)$, $f(M) \leq M$;
3) $f(M) \leq M$ для каждого $f \in J(\mathrm{End}(E(M)))$.

Теорема (А., Куинь, J. Algebra and Appl., 2019)

Пусть $\pi : P \to M$ – проективная оболочка модуля M. Следующие условия равносильны для модуля M:

1) 1) M – мало-проективный модуль;
2) для каждого $f \in \mathrm{End}(P)$, у которого $Im(f) << P$, $f(\mathrm{Ker}(\pi)) \leq \mathrm{Ker}(\pi)$;
3) $f(\mathrm{Ker}(\pi)) \leq \mathrm{Ker}(\pi)$ для каждого $f \in J(\mathrm{End}(P))$.

ОБОЛОЧКИ, НАКРЫТИЯ И МОДУЛИ, БЛИЗКИЕ К ПРОЕКТИВНЫМ

Пусть R – кольцо и Ω – некоторый класс правых R-модулей, который замкнут относительно изоморфных образов и прямых слагаемых. Гомоморфизм $g : M \to E(M)$ правых R-модулей называется Ω-*оболочкой* правого R-модуля M, если:
1) $E(M) \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E(M) \\ E' & \end{tikzcd} \quad ,$$

где $E' \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & E(M) \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ E' & \end{tikzcd} \quad ;$$

2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & E(M) \arrow[dl, "h"'] \\ E(M) & \end{tikzcd}$$

следует, что h – автоморфизм.

Гомоморфизм $g : E(M) \to M$ правых R-модулей называется Ω-*накрытием* правого R-модуля M, если:
1) $E(M) \in \Omega$ и любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} E(M) \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"] \end{tikzcd} ,$$

где $E(M) \in \Omega$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} E(M) \arrow[r, "g"] & M \\ & E' \arrow[u, "g'"] \arrow[ul, dotted, "h"] \end{tikzcd} ;$$

2) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} E(M) \arrow[r, "g"] & M \\ & E(M) \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

следует, что h – автоморфизм.
Если Ω – класс проективных (соотв., инъективных) правых R-модулей, то Ω-накрытие (соотв., Ω-оболочка) правого R-модуля M называется *проекивной оболочкой* (соотв., инъективной оболочкой) модуля M.

Теорема (Ософски, 1968)

Если M – квазиинъективным правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – самоинъективное справа кольцо и $J(S) = \{f \in S \mid Ker(f) \leq_e M\}$.

Теорема (Kasch)

Если M – проективный правый модуль над совершенным справа кольцом, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо, $S/J(S)$ – самоинъективное справа кольцо.

Теорема (Huisgen-Zimmermann, Zimmermann, 1978)

Если M – чисто инъективный правый модуль, то $S = End(M)$ – полурегулярное кольцо и $S/J(S)$ – самоинъективное справа кольцо.

Пусть $u : M \to E(M)$ – Ω-оболочка модуля M и $S = \mathrm{End}(E(M))$. Тогда определен кольцевой гомоморфизм

$$\Phi : \mathrm{End}(M) \to S/J(S),$$

действующий по правилу $\Phi(f) = f' + J(S)$, где $f' : X \to X$ – гомоморфизм, для которого выполнено равенство $f'u = uf$. Ядро гомоморфизма Φ будем обозначать через $\Delta(M)$.
Несложно заметить, что если Ω – класс инъективных правых R-модулей, то $\Delta(M) = \{f \in \mathrm{End}(M) \mid \mathrm{Ker}(f) \leq_e M\}$.

В следующих утверждениях предполагается, что все рассматриваемые Ω-облочки $u : M \to E(M)$ являются мономорфизмами правых модулей и кольца эндоморфизмов модулей из Ω являются полурегулярными, у которых фактор по радикалу Джекобсона является самоинъективными справа.

Модуль M называется *Ω-автоморфизм (соотв., Ω-идемпотентно) инвариантным* , если существует такая Ω-оболочка $u : M \to E(M)$, что для каждого автоморфизма (соотв., идемпотента) $g \in \mathrm{End}(E(M))$ существует эндоморфизм $f : M \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, dotted, "f"'] & E(M) \arrow[d, "g"'] \\ M \arrow[r, "u"] & E(M) \end{tikzcd}$$

Теорема (Guil Asensio, D. Keskin, A. K. Srivastava, Israel Journal of Mathematics, 2015)

Пусть M – Ω-автоморфизм-инвариантный модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:

a) $\mathrm{End}(M)$ – полурегулярное кольцо;
b) M – заменяемый модуль;
c) $\mathrm{End}(M)$ – чистое кольцо;
d) если кольцо $\mathrm{End}(M)$ не имеет гомоморфных образов, изоморфных полю $\mathbb{F}_2$, то M – Ω-эндоморфизм инвариантный модуль.

Пусть $u : M \to E(M)$ – Ω-оболочка модуля M. Модуль M называется Ω-*непрерывным*, если выполнены следующие условия:

1) M – Ω-идемпотентно инвариантный модуль;
2) если для идемпотентов $e_1, e_2 \in \mathrm{End}(E(M))$, $e'_1, e'_2 \in \mathrm{End}(M)$ выполнены равенства $ue'_i = e_i u (i = 1, 2)$, для гомоморфизмов α, α' коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} e'_1(M) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "u"'] & e'_2(M) \arrow[d, "u"'] \\ e_1(E(M)) \arrow[r, "\alpha"] & e_2(E(M)) \end{tikzcd}$$

и α является изоморфизмом, то α' – изоморфизм.

Теорема (А., Куинь, Туганбаев А.А., Сиб. матем. журн.,2019)

Если M – Ω-непрерывный модуль, то кольцо $\mathrm{End}(M)$ является полурегулярным и $J(\mathrm{End}(M)) = \Delta(M)$.

Теорема

Если M – Ω-идемпотентно инвариантный модуль, то модуль M является Ω-непрерывный в точности тогда, когда $\Delta(M) = J(\mathrm{End}(M))$ и $\mathrm{End}(M)/\Delta(M)$ – регулярное кольцо.

Теорема

Если M – Ω-непрерывный модуль, то кольцо $\mathrm{End}(M)$ является чистым.

Теорема

Пусть M – правый R-модуль. Имеют место следующие утверждения:

1) если M – непрерывный модуль, то
   a) $\mathrm{End}(M)$ – полурегулярное кольцо;
   b) M – конечно заменяемый модуль;
   c) $\mathrm{End}(M)$ – чистое кольцо;
2) если M – дискретный модуль и R – совершенное справа кольцо, то
   a) $\mathrm{End}(M)$ – полурегулярное кольцо;
   b) M – конечно заменяемый модуль;
   c) $\mathrm{End}(M)$ – чистое кольцо;
3) если M – конечно порожденный дискретный модуль и R – полусовершенное кольцо, то
   a) $\mathrm{End}(M)$ – полурегулярное кольцо;
   b) M – конечно заменяемый модуль;
   c) $\mathrm{End}(M)$ – чистое кольцо.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ