

УДК 539.3

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ  
В РАСЧЕТЕ ОСЕСИММЕТРИЧНО  
НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ  
НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ**

*Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев*

**Аннотация**

Получены соотношения между напряжениями и деформациями, приращениями напряжений и приращениями деформаций нелинейно упруго деформируемого тела на основе гипотез о пропорциональности компонент девиатора напряжений и девиатора деформаций и компонент девиатора приращений напряжений и девиатора приращений деформаций. Полученные соотношения реализованы в смешанной формулировке МКЭ для расчета осесимметрично нагруженных упруго нелинейно деформируемых оболочек вращения.

**Ключевые слова:** векторная аппроксимация, тензорная аппроксимация, векторное поле, тензорное поле, смешанная формулировка, вариационный принцип.

**Введение**

Теория нелинейного анализа оболочечных конструкций на сегодняшний день разработана достаточно полно [1–5]. Аналитические решения дифференциальных уравнений достигаются лишь в некоторых частных случаях, поэтому весьма важным и актуальным является получение численного решения. Самым распространенным среди численных методов является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий проведение расчетов прочности конструкций при любых жесткостных свойствах материала, законах изменения внешних нагрузок и различных видах закрепления.

МКЭ в расчетах оболочек используется в различных формулировках. В рамках метода перемещений [6–12] (неизвестными являются перемещения и их производные) разработано наибольшее количество конечных элементов, именно эти элементы используются в известных программных продуктах. При расчетах оболочек в криволинейных системах координат встает проблема учета смещения конечного элемента как твердого тела. В [6] отмечается возможность учета такого смещения на основе разложения вектора перемещений по ортам глобальной декартовой системы. В [8] для расчета оболочек в криволинейной системе координат в двумерной постановке предлагается решение проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела на основе аппроксимации перемещений как векторных полей. В МКЭ в формулировке метода перемещений удовлетворяется условие гладкости класса  $C^{(0)}$  (класс непрерывных функций) и не удовлетворяется требование гладкости класса  $C^{(1)}$  (непрерывные первые производные). Поэтому предпочтительными при необходимости удовлетворения требования гладкости класса  $C^{(1)}$  являются конечные элементы в смешанной формулировке [12–14] (неизвестными являются перемещения и деформации). Проблема учета смещения конечного элемента

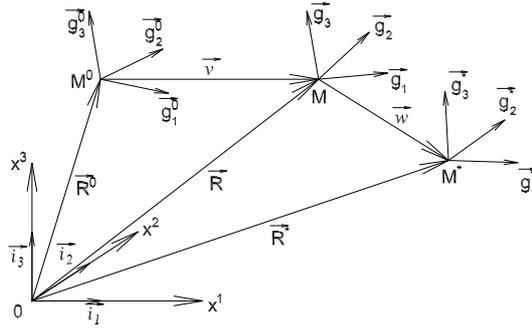


Рис. 1. Базисные векторы произвольной точки оболочки в различных состояниях

как твердого тела в криволинейной системе координат имеет место и при реализации смешанного МКЭ.

В настоящей работе решение этой проблемы предлагается с использованием аппроксимации искомых величин как векторно-тензорных полей.

### 1. Геометрия оболочки вращения

Срединная линия  $s$  оболочки вращения в декартовой системе координат  $xOz$  задается радиусом-вектором произвольной точки  $M^0$

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + z(x)\vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты декартовой системы координат (см. рис. 1).

Базисные векторы точки  $M^0$  определяются выражениями

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,s}^0 = x_{,s}\vec{i} + z_{,s}\vec{k}; \quad \vec{a}_3^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{j} = -z_{,s}\vec{i} + x_{,s}\vec{k}, \quad (1)$$

где  $s$  – координата точки  $M^0$  вдоль срединной линии.

Для точки  $M^{0t}$  (рис. 1), находящейся на расстоянии  $t$  от точки  $M^0$ , определим ее радиус-вектор в виде

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}_3^0. \quad (2)$$

Базисные векторы точки  $M^{0t}$  определяются дифференцированием (2) в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \vec{g}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [m] \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ 2 \times 2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [m]^{-1} \begin{Bmatrix} \vec{g}^0 \\ 2 \times 2 \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\{\vec{g}^0\}_{1 \times 2}^T = \{\vec{g}_1^0 \ \vec{g}_3^0\}$ .

Производные базисных векторов точки  $M^{0t}$  (1) с учетом (3) можно выразить через базисные векторы этой точки в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \vec{g}_{,s}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [m^t] \begin{Bmatrix} \vec{g}^0 \\ 2 \times 2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \vec{g}_{,t}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [n^t] \begin{Bmatrix} \vec{g}^0 \\ 2 \times 2 \end{Bmatrix}.$$

### 2. Перемещения и деформации

При реализации пошагового нагружения процесс деформирования представляется последовательностью трех равновесных состояний оболочки, каждое из которых характеризуется положением ее произвольной точки: исходным  $M^{0t}$ ; деформированным после  $j$  шагов нагружения  $M^t$  (вектор перемещения  $\vec{V}$ ) и соседним,

близким к деформированному, в результате  $(j+1)$ -го шага нагружения  $M^{0t^*}$  (вектор перемещения  $\vec{w}$ ) (рис. 1).

Суммарный вектор перемещения за  $j$  шагов нагружения точки  $M^{0t}$  определяется компонентами в ее локальном базисе

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} \vec{g}^0 \\ 1 \times 2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{v\} \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\begin{Bmatrix} \{v\} \\ 1 \times 2 \end{Bmatrix}^T = \{v^1 \ v^3\}$ .

Производные вектора  $\vec{V}$  находятся дифференцированием (4)

$$\vec{V}_{,s} = f_1^1 \vec{g}_1^0 + f_1^3 \vec{g}_3^0; \quad \vec{V}_{,t} = f_3^1 \vec{g}_1^0 + f_3^3 \vec{g}_3^0,$$

где  $f_1^1, f_1^3, f_3^1, f_3^3$  – функции компонент вектора  $\vec{V}$  и их производных.

В деформированном состоянии положение точки  $M^t$  оболочки задается радиусом-вектором

$$\vec{R}^t = \vec{R}^{0t} + \vec{V}.$$

Базисные векторы точки  $M^t$  записываются через базис точки  $M^{0t}$

$$\vec{g}_1 = \vec{R}_{,s}^t = \vec{g}_1^0 (1 + f_1^1) + \vec{g}_3^0 f_1^3; \quad \vec{g}_3 = \vec{R}_{,t}^t = \vec{g}_1^0 f_3^1 + \vec{g}_3^0 (1 + f_3^3). \quad (5)$$

В результате деформирования на  $(j+1)$ -м шаге нагружения вектор перемещения  $\vec{w}$  определяется компонентами в локальном базисе  $M^{0t}$

$$\vec{w} = \begin{Bmatrix} \vec{g}^0 \\ 1 \times 2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{w\} \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\begin{Bmatrix} \{w\} \\ 1 \times 2 \end{Bmatrix}^T = \{w^1 \ w^3\}$ .

Производные вектора (6) имеют вид

$$\vec{w}_{,s} = \alpha_1^1 \vec{g}_1^0 + \alpha_1^3 \vec{g}_3^0; \quad \vec{w}_{,t} = \alpha_3^1 \vec{g}_1^0 + \alpha_3^3 \vec{g}_3^0, \quad (7)$$

где  $\alpha_1^1, \alpha_1^3, \alpha_3^1, \alpha_3^3$  – функции компонент вектора  $\vec{w}$  и их производных.

На  $(j+1)$ -м шаге нагружения положение точки  $M^{t^*}$  задается радиусом-вектором в виде

$$\vec{R}^{t^*} = \vec{R}^t + \vec{w}. \quad (8)$$

Базисные векторы точки  $M^{t^*}$  находятся дифференцированием (8)

$$\vec{g}_1^* = \vec{g}_1 + \vec{w}_{,s}; \quad \vec{g}_3^* = \vec{g}_3 + \vec{w}_{,t}. \quad (9)$$

Приращения деформаций в результате  $(j+1)$ -го шага нагружения определяются как полуразности метрических тензоров [15]

$$\Delta \varepsilon_{ij} = (g_{ij}^* - g_{ij})/2 = (\vec{g}_i \cdot \vec{w}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \vec{w}_{,i} + \vec{w}_{,j} \cdot \vec{w}_{,i})/2 = \Delta \varepsilon_{ij}^n + \Delta \varepsilon_{ij}^h, \quad i, j = 1, 3.$$

Линейная и нелинейная части приращений деформаций  $\varepsilon_{ij}^n$  и  $\varepsilon_{ij}^h$  с учетом (9), (5) в матричной форме имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon^n \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [L] \\ 4 \times 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon^h \\ 1 \times 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{w}_{,\alpha} \vec{w}_{,\beta} \\ 1 \times 4 \end{Bmatrix},$$

где  $\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon^n \\ 1 \times 4 \end{Bmatrix}^T = \{\Delta \varepsilon_{11} \ \Delta \varepsilon_{22} \ \Delta \varepsilon_{33} \ 2\Delta \varepsilon_{13}\}$ ;  $\Delta \varepsilon_{22} = (r^* - r)/r$ ;  $r^*, r$  – радиусы вращения точек  $M^{t^*}$  и  $M^t$  оболочки соответственно;  $\begin{Bmatrix} \vec{w}_{,\alpha} \vec{w}_{,\beta} \\ 1 \times 4 \end{Bmatrix}^T = \{\vec{w}_{,1} \cdot \vec{w}_{,1} \ \vec{w}_{,2} \cdot \vec{w}_{,2} \ \vec{w}_{,3} \cdot \vec{w}_{,3} \ 2\vec{w}_{,1} \cdot \vec{w}_{,3}\}$ ;  $\begin{Bmatrix} [L] \\ 4 \times 2 \end{Bmatrix}$  – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

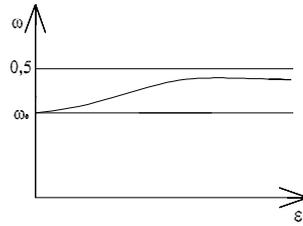


Рис. 2. График зависимости функции поперечной деформации  $\omega$  от интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$

### 3. Соотношения между деформациями и напряжениями

Из опыта на простое растяжение образца из данного материала определяются истинные напряжения  $\sigma_1 = N/F_d = \sigma$  ( $F_d$  – площадь образца в деформированном состоянии) и логарифмические деформации  $\varepsilon_1 = \ln(l_1/l_0) = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ln(h_0/h_1)$  ( $l_0, l_1, h_0, h_1$  – длина и размер квадратного поперечного сечения образца в исходном и деформированном состояниях соответственно). По этим данным строится диаграмма растяжения. Далее определяется функция поперечной деформации  $\omega = |\varepsilon_2|/|\varepsilon_1|$ .

Эмпирическим путем строятся зависимости

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \omega)\varepsilon; \quad \sigma_i = \sigma, \tag{10}$$

где  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформаций;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\Delta\varepsilon_i$  – приращение интенсивности деформаций, и строятся диаграмма деформирования и график зависимости функции поперечной деформации  $\omega$  от интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  (рис. 2).

По диаграммам растяжения и деформирования вычисляются следующие величины:

- $E_{cp} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \sigma/\varepsilon$  – секущий модуль диаграммы растяжения;
- $E_{xp} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \Delta\sigma/\Delta\varepsilon$  – хордовый модуль диаграммы растяжения;
- $E_{cd} = \operatorname{tg} \alpha_3 = \sigma_i/\varepsilon_i$  – секущий модуль диаграммы деформирования;
- $E_{xd} = \operatorname{tg} \alpha_4 = \Delta\sigma_i/\Delta\varepsilon_i$  – хордовый модуль диаграммы деформирования.

Между этими величинами выполняются зависимости

$$E_{cp} = \frac{2}{3}(1 + \omega)E_{cd}; \quad E_{xp} = \frac{2}{3}(1 + \omega)E_{xd}.$$

Первые инварианты тензоров напряжений  $P(\sigma)$  и деформаций  $P(\varepsilon)$  есть

$$P(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma; \quad P(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon(1 - 2\omega).$$

Они связаны формулой

$$P(\sigma) = \frac{E_{cp}}{1 - 2\omega} P(\varepsilon) = \frac{1 + \omega}{1 - 2\omega} E_{cd} P(\varepsilon).$$

Соотношения между первыми инвариантами тензоров приращений напряжений  $P(\Delta\sigma)$  и приращений деформаций  $P(\Delta\varepsilon)$  с использованием (10) запишутся как

$$P(\Delta\sigma) = \frac{E_{xp}}{1 - 2\omega} P(\Delta\varepsilon) = \frac{1 + \omega}{1 - 2\omega} E_{xd} P(\Delta\varepsilon). \tag{11}$$

Вторые инварианты девиаторов напряжений  $I_2(D_\sigma)$  и деформаций  $I_2(D_\varepsilon)$  определяются соотношениями [15]

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{\sigma^2}{3};$$

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] = \frac{(1 + \omega)^2}{3} \varepsilon^2.$$

Введем инвариантные величины (10) по формулам

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3}I_2(D_\varepsilon)} = \frac{1 + \omega}{\sqrt{3}} \varepsilon. \quad (12)$$

Напряженно-деформированное состояние нагруженного тела в точке  $M^t$  характеризуется тензорами напряжений и деформаций [15]

$$T_\sigma = \sigma_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = \sigma^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j; \quad T_\varepsilon = \varepsilon_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = \varepsilon^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j, \quad (13)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma^{ij}$  – ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений;  $\vec{g}_i$ ,  $\vec{g}^i$  – ковариантные и контравариантные векторы базиса в произвольной точке;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon^{ij}$  – ковариантные и контравариантные компоненты тензора деформаций.

Тензорам напряжений и деформаций (13) соответствуют девиаторы напряжений  $D_\sigma$  и деформаций  $D_\varepsilon$  [15]

$$D_\sigma = S_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = S^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j; \quad D_\varepsilon = E_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j = E^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j,$$

где  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}P(\sigma)g_{ij}$ ,  $S^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3}P(\sigma)g^{ij}$  – ковариантные и контравариантные компоненты девиатора напряжений;  $E_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}P(\varepsilon)g_{ij}$ ,  $E^{ij} = \varepsilon^{ij} - \frac{1}{3}P(\varepsilon)g^{ij}$  – ковариантные и контравариантные компоненты девиатора деформаций;  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  – ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора;  $P(\sigma) = \sigma_{ij}g^{ij} = \sigma^{ij}g_{ij}$  – первый инвариант тензора напряжений;  $P(\varepsilon) = \varepsilon_{ij}g^{ij} = \varepsilon^{ij}g_{ij}$  – первый инвариант тензора деформаций.

Вторые инварианты девиаторов напряжений и деформаций имеют вид [15]

$$I_2(S) = S^{ij}S_{ij}; \quad I_2(E) = E^{ij}E_{ij}.$$

Зададим инвариантные величины (12) по формулам

$$\sigma_i = \sqrt{3S^{ij}S_{ij}}; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3}E^{ij}E_{ij}}. \quad (14)$$

Соотношения между напряжениями и деформациями, определяемые на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора напряжений компонентам девиатора деформаций, имеют вид

$$S_{ij} = \phi E_{ij}; \quad S^{ij} = \phi E^{ij}, \quad (15)$$

где  $\phi = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$  – функция пропорциональности, определяемая подстановкой (15) в (14), численное значение которой можно определить по построенной диаграмме деформирования.

С использованием значений функции  $\phi$  соотношения между напряжениями и деформациями (15) преобразуются согласно формуле

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2} E_{\text{сд}} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\omega}{1-2\omega} P(\varepsilon) g_{ij} \right).$$

Нахождение соотношений между компонентами тензора приращений напряжений и компонентами тензора приращений деформаций осуществляется с использованием гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций

$$\Delta S_{ij} = \psi \Delta E_{ij}; \quad \Delta S^{ij} = \psi \Delta E^{ij}, \quad (16)$$

где  $\Delta S_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \frac{1}{3} P(\Delta \sigma) g_{ij}$ ;  $\Delta S^{ij} = \Delta \sigma^{ij} - \frac{1}{3} P(\Delta \sigma) g^{ij}$  – ковариантные и контравариантные компоненты девиатора приращений напряжений;  $\Delta E_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} P(\Delta \varepsilon) g_{ij}$ ;  $\Delta E^{ij} = \Delta \varepsilon^{ij} - \frac{1}{3} P(\Delta \varepsilon) g^{ij}$  – ковариантные и контравариантные компоненты девиатора приращений деформаций;  $P(\Delta \sigma) = \Delta \sigma_{ij} g^{ij} = \Delta \sigma^{ij} g_{ij}$  – первый инвариант тензора приращений напряжений;  $P(\Delta \varepsilon) = \Delta \varepsilon_{ij} g^{ij} = \Delta \varepsilon^{ij} g_{ij}$  – первый инвариант тензора приращений деформаций.

Введем в рассмотрение инвариантные величины:  $\sigma_i^\Delta$  – интенсивность приращений напряжений и  $\varepsilon_i^\Delta$  – интенсивность приращений деформаций, которые задаются по формулам [15]

$$\sigma_i^\Delta = \sqrt{3 \Delta S^{ij} \Delta S_{ij}}; \quad \varepsilon_i^\Delta = \sqrt{\frac{4}{3} \Delta E^{ij} \Delta E_{ij}}. \quad (17)$$

С учетом выражений (16) и (17) вычисляется функция пропорциональности  $\psi = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i^\Delta}{\varepsilon_i^\Delta}$ .

При решении упруго нелинейной задачи считается, что справедливо равенство

$$\frac{\sigma_i^\Delta}{\varepsilon_i^\Delta} = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \varepsilon_i}. \quad (18)$$

На основе равенства (18) функцию  $\psi$  можно заменить хордовым модулем диаграммы деформирования при определении приращений напряжений на  $(j+1)$ -м шаге нагружения:

$$\psi = \frac{3}{2} E_{\text{хд}},$$

следовательно, выражения (16) запишутся как

$$\Delta S_{ij} = \frac{3}{2} E_{\text{хд}} \Delta E_{ij}; \quad \Delta S^{ij} = \frac{3}{2} E_{\text{хд}} \Delta E^{ij}. \quad (19)$$

Свойство аддитивности ковариантных компонент тензора приращений деформаций  $\Delta \varepsilon_{ij}$  влечет аддитивность ковариантных компонент девиатора приращений деформаций  $\Delta E_{ij}$ . Из первого выражения в (19) вытекает, что аддитивными должны быть и величины  $\Delta S_{ij}$ , а поэтому и ковариантные компоненты тензора приращений напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$ .

Для преобразования (19) используется зависимость между первыми инвариантами тензоров приращений напряжений и деформаций в виде (11):

$$\Delta \sigma_{ij} = \frac{3}{2} E_{\text{хд}} \left( \Delta \varepsilon_{ij} + \frac{\omega}{1-2\omega} P(\Delta \varepsilon) g_{ij} \right).$$

Из вышеизложенных соотношений следуют матричные зависимости

$$\{\sigma\} = [D_0] \{\varepsilon\}; \quad \{\Delta\sigma\} = [D] \{\Delta\varepsilon\},$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{13}\}$ ;  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{13}\}$ ;

$[D_0]$ ,  $[D]$  – матрицы податливости материала;

$$\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma^{11} \Delta\sigma^{22} \Delta\sigma^{33} \Delta\sigma^{13}\}; \quad \{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11} \Delta\varepsilon_{22} \Delta\varepsilon_{33} 2\Delta\varepsilon_{13}\}.$$

#### 4. Матрица деформирования конечного элемента на шаге нагружения

Дискретный элемент выбирается в форме кольца с поперечным сечением в виде произвольного четырехугольника с узлами  $i, j, k, l$ . Узловыми неизвестными конечного элемента принимаются приращения перемещений и приращения деформаций. Глобальные координаты  $s, t$  четырехугольника выражаются через его узловые значения билинейными соотношениями

$$s = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{s_y\}; \quad t = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{t_y\}, \quad (20)$$

где  $\{s_y\}^T = \{s^i s^j s^k s^l\}$ ;  $\{t_y\}^T = \{t^i t^j t^k t^l\}$  – строки узловых значений координат.

Дифференцированием (20) определяются производные глобальных координат в локальной системе  $s, \xi, s, \eta, t, \xi, t, \eta$  и производные локальных координат в глобальной системе  $\xi, s, \xi, t, \eta, s, \eta, t$  [13].

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через векторы перемещений узловых точек также билинейными соотношениями [13]

$$\vec{w} = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{\vec{w}_y\}, \quad (21)$$

где  $\{\vec{w}_y\}^T = \{\vec{w}^i \vec{w}^j \vec{w}^k \vec{w}^l\}$ .

Производные вектора (21) имеют вид

$$\vec{w}_{,s} = \{\phi_{,s}\}^T \{\vec{w}_y\}; \quad \vec{w}_{,t} = \{\phi_{,t}\}^T \{\vec{w}_y\}. \quad (22)$$

Вектор перемещения узловой точки конечного элемента есть

$$\vec{w}^\omega = w^{1\omega} \vec{g}_1^{0\omega} + w^{3\omega} \vec{g}_3^{0\omega}, \quad \omega = i, j, k, l. \quad (23)$$

Базисные векторы узловой точки  $\omega$  выражаются через базисные векторы внутренней точки конечного элемента по формуле

$$\{\vec{g}^{0\omega}\}_{2 \times 1} = [n^\omega] \{\vec{g}^0\}. \quad (24)$$

С учетом (23) и (24) зависимости (21) и (22) примут вид

$$\vec{w} = \{\vec{g}^0\}_{1 \times 2}^T \left[ \phi_1(\xi, \eta) [n^i]_{2 \times 2}^T \phi_2(\xi, \eta) [n^j]_{2 \times 2}^T \phi_3(\xi, \eta) [n^k]_{2 \times 2}^T \phi_4(\xi, \eta) [n^l]_{2 \times 2}^T \right] \{w_y\}_{8 \times 1}; \quad (25)$$

$$\vec{w}_{,s} = \{\vec{g}^0\}_{1 \times 2}^T \left[ \phi_{1,s}(\xi, \eta) [n^i]_{2 \times 2}^T \phi_{2,s}(\xi, \eta) [n^j]_{2 \times 2}^T \phi_{3,s}(\xi, \eta) [n^k]_{2 \times 2}^T \phi_{4,s}(\xi, \eta) [n^l]_{2 \times 2}^T \right] \{w_y\}_{8 \times 1}; \quad (26)$$

$$\vec{w}_{,t} = \{\vec{g}^0\}_{1 \times 2}^T \left[ \phi_{1,t}(\xi, \eta) [n^i]_{2 \times 2}^T \phi_{2,t}(\xi, \eta) [n^j]_{2 \times 2}^T \phi_{3,t}(\xi, \eta) [n^k]_{2 \times 2}^T \phi_{4,t}(\xi, \eta) [n^l]_{2 \times 2}^T \right] \{w_y\}_{8 \times 1},$$

где  $\{w_y\}_{1 \times 8}^T = \{w^{1i} w^{3i} w^{1j} w^{3j} w^{1k} w^{3k} w^{1l} w^{3l}\}$ ;  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  – функции, являющиеся элементами аппроксимирующей матрицы  $\{\phi(\xi, \eta)\}^T$ .

Приравнивая правые части (6) и (25), (7) и (26), получим матричные выражения компонент вектора перемещения и их производных

$$\begin{aligned} w^1 &= \{z_1\} \{w_y\}; & w^3 &= \{z_2\} w_y; & w_{,s}^1 &= \{z_3\} \{w_y\}; & w_{,s}^3 &= \{z_4\} \{w_y\}; \\ w_{,t}^1 &= \{z_5\} \{w_y\}; & w_{,t}^3 &= \{z_6\} \{w_y\}. \end{aligned} \quad (27)$$

С использованием (27) можно сформировать матричные соотношения

$$\begin{Bmatrix} w \\ \Delta \varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] \\ [L] [A] \\ [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_y\} \\ \{w_y\} \\ \{w_y\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B] \\ [L] [A] \\ [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_y\} \\ \{w_y\} \\ \{w_y\} \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

При скалярной аппроксимации каждая компонента вектора перемещения на шаге нагружения аппроксимируется через узловые значения только этой же компоненты выражениями

$$w^1 = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{w_y^1\}; \quad w^3 = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{w_y^3\}.$$

Тензоры приращений деформаций внутренней и узловых точек конечного элемента определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\varepsilon} &= \Delta \varepsilon_{11} \vec{g}^1 \vec{g}^1 + \Delta \varepsilon_{22} \vec{g}^2 \vec{g}^2 + \Delta \varepsilon_{33} \vec{g}^3 \vec{g}^3 + 2\Delta \varepsilon_{13} \vec{g}^1 \vec{g}^3 = \{\Delta \varepsilon\}^T \{\vec{g}\} = \{\vec{g}\}^T \{\Delta \varepsilon\}; \\ \Delta \tilde{\varepsilon}^\omega &= \{\Delta \varepsilon^\omega\}^T \{\vec{g}^\omega\} = \{\vec{g}^\omega\}^T \{\Delta \varepsilon^\omega\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Тензоры деформаций внутренней точки выражаются через тензоры деформаций узловых точек [13]

$$\tilde{\varepsilon} = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{\tilde{\varepsilon}_y^\omega\}; \quad \Delta \tilde{\varepsilon} = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{\Delta \tilde{\varepsilon}_y^\omega\}, \quad (30)$$

где  $\{\tilde{\varepsilon}_y^\omega\}^T = \{\tilde{\varepsilon}^i \tilde{\varepsilon}^j \tilde{\varepsilon}^k \tilde{\varepsilon}^l\}$ ;  $\{\Delta \tilde{\varepsilon}_y^\omega\}^T = \{\Delta \tilde{\varepsilon}^i \Delta \tilde{\varepsilon}^j \Delta \tilde{\varepsilon}^k \Delta \tilde{\varepsilon}^l\}$ .

Базисные векторы узловой точки  $\omega$  выражаются через базисные векторы внутренней точки конечного элемента зависимостью

$$\{\vec{g}^\omega\} = [z^\omega] \{\vec{g}\}, \quad (31)$$

где  $\{\vec{g}\}^T = \{\vec{g}^1 \vec{g}^2 \vec{g}^3\}$ .

С учетом (31) диадные произведения базисных векторов узловой точки  $\{\vec{g}^\omega\}^T = \{\vec{g}^{1\omega} \vec{g}^{1\omega} \vec{g}^{2\omega} \vec{g}^{2\omega} \vec{g}^{3\omega} \vec{g}^{3\omega} \vec{g}^{1\omega} \vec{g}^{3\omega}\}$  могут быть выражены через диадные произведения внутренней точки конечного элемента матричной зависимостью

$$\{\vec{g}^\omega\} = [N] \{\vec{g}\}. \quad (32)$$

С использованием (32) выражение (30) примет вид

$$\Delta \tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \vec{g} \\ \Delta \varepsilon_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 [N^i]^T & \phi_2 [N^j]^T & \phi_3 [N^k]^T & \phi_4 [N^l]^T \\ 4 \times 4 & 4 \times 4 & 4 \times 4 & 4 \times 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_y \\ \vec{g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{g} \\ \Delta \varepsilon_y \end{Bmatrix}^T [G] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_y \\ \vec{g} \end{Bmatrix}, \quad (33)$$

где  $\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_y \\ \vec{g} \end{Bmatrix}^T = \{\Delta \varepsilon_{11}^i \Delta \varepsilon_{11}^j \Delta \varepsilon_{11}^k \Delta \varepsilon_{11}^l \dots 2\Delta \varepsilon_{13}^i 2\Delta \varepsilon_{13}^j 2\Delta \varepsilon_{13}^k 2\Delta \varepsilon_{13}^l\}$  – матрица-строка узловых приращений деформаций.

Приравнивая правые части (29) и (33), получим матричное выражение

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \tilde{\varepsilon}^\omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G] \\ [N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_y \\ \vec{g} \end{Bmatrix}. \quad (34)$$

При скалярной аппроксимации матрица  $[G]$  имеет вид

$$[G]_{4 \times 16} = \begin{bmatrix} \{\phi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\phi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\phi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{\phi\}^T \end{bmatrix}$$

Функционал Лагранжа, выражающий равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения, можно записать в виде [14]

$$\Pi_L = \int_V \left[ \{\sigma\}^T + \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \right] [\{\Delta\varepsilon^n\} + \{\Delta\varepsilon^h\}] dV - \int_S \{w\}^T \left[ \{p\} + \frac{1}{2} \{\Delta p\} \right] dS, \quad (35)$$

где  $V$  – объем деформируемого тела;  $S$  – площадь поверхности с заданной внешней нагрузкой;  $\{p\}^T = \{p_1 \ p_2\}$ ;  $\{\Delta p\}^T = \{\Delta p_1 \ \Delta p_2\}$  – векторы нагрузок после  $j$ -го и  $(j+1)$ -го шагов соответственно.

Заменим выражение действительной работы внутренних сил в (35) разностью их возможной и дополнительной работ [14]

$$\frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\sigma\}^T [L] \{w\} - \frac{1}{2} \Phi(\sigma) = \{\Delta\varepsilon\}^T [D] [L] \{w\} - \frac{1}{2} \{\Delta\varepsilon^n\}^T [D] \{\Delta\varepsilon^n\}.$$

Тогда функционал (35) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi_L = & \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}^T [D] [L] \{w\} dV + \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon^h\} dV - \\ & - \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}^T [D] \{\Delta\varepsilon^n\} dV - \frac{1}{2} \int_S \{w\}^T \{\Delta p\} dS - \\ & - \int_S \{w\}^T \{p\} dS + \int_V \{\Delta\varepsilon^n\}^T \{\sigma\} dV. \end{aligned} \quad (36)$$

Для отдельного конечного элемента на шаге нагружения функционал (36), с учетом (34) и (28), определяется по формуле

$$\begin{aligned} \Pi_{LE} \equiv & \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 16}^T \int_V [G]_{16 \times 4}^T [D]_{4 \times 4 \times 4 \times 8} [B] dV \{w_y\}_{8 \times 1} + \{w_y\}_{1 \times 8}^T [K_n]_{8 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 16}^T \int_V [G]_{16 \times 4}^T [D]_{4 \times 4 \times 4 \times 16} [G] dV \{\Delta\varepsilon_y\}_{16 \times 1} - \frac{1}{2} \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]_{8 \times 2}^T \{\Delta p\}_{2 \times 1} dS - \\ & - \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]_{8 \times 2}^T \{p\}_{2 \times 1} dS + \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_V [B]_{8 \times 4 \times 4 \times 1} \{\sigma\} dV, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\{K_n\}_{8 \times 8}$  – матрица от нелинейной части приращения деформаций.

Выполняя варьирование функционала (37) по узловым неизвестным  $\{\Delta\varepsilon_y\}^T$  и  $\{w_y\}^T$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{LE}}{\partial \{\Delta\varepsilon_y\}^T} \equiv - [H]_{16 \times 16} \{\Delta\varepsilon_y\}_{16 \times 1} + [Q]_{16 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} = 0; \\ \frac{\partial \Pi_{LE}}{\partial \{w_y\}^T} \equiv [Q]_{8 \times 16}^T \{\Delta\varepsilon_y\}_{16 \times 1} + [K_n]_{16 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} + \{f\} = 0, \end{cases} \quad (38)$$

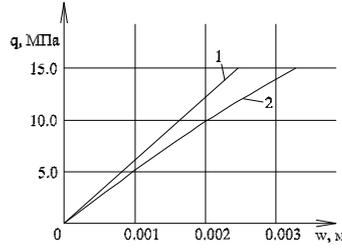


Рис. 3. Зависимость нормального перемещения от интенсивности давления

где

$$\begin{aligned}
 [Q]_{16 \times 8} &= \int_V [G]_{16 \times 4}^T [D]_{4 \times 4} [B]_{4 \times 8} dV; & [H]_{16 \times 16} &= \int_V [G]_{16 \times 4}^T [D]_{4 \times 4} [G]_{4 \times 16} dV; \\
 \{f\}_{8 \times 1} &= \int_S [A]_{8 \times 2}^T \{\Delta p\}_{2 \times 1} dS - \int_V [B]_{8 \times 4}^T \{\sigma\}_{4 \times 1} dV + \int_S [A]_{8 \times 2}^T \{p\}_{2 \times 1} dS.
 \end{aligned}$$

Систему (38) можно представить в традиционной конечно-элементной форме

$$[k]_{24 \times 24} \{Z_y\}_{24 \times 1} = \{F\}_{24 \times 1},$$

где  $[k]_{24 \times 24} = \begin{bmatrix} [H]_{16 \times 16} & [Q]_{16 \times 8} \\ [Q]^T_{8 \times 16} & [K_n]_{8 \times 8} \end{bmatrix}$  – матрица деформирования конечного элемента;

$\{Z_y\}_{1 \times 24}^T = \{\{\Delta \varepsilon_y\}_{1 \times 16}^T \{w_y\}_{1 \times 8}\}^T$  – вектор узловых неизвестных конечного элемента;

$\{F\}_{1 \times 24}^T = \{\{0\}_{1 \times 16}^T \{f\}_{1 \times 8}^T\}$  – вектор узловых усилий конечного элемента на шаге нагружения.

Для формирования матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [16].

### 5. Пример расчета

Рассматривалось напряженно-деформированное состояние усеченной сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления интенсивности  $q$ . Принимались следующие исходные данные: радиус внутренней поверхности  $R = 0.25$  м, толщина стенки оболочки  $t = 0.002$  м, расстояние от центра оболочки до плоскости усечения  $l = 0.2$  м, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Материал оболочки нелинейно упругий, диаграмма деформирования его описывается зависимостью  $\sigma_i = a\varepsilon_i^2 + b\varepsilon_i$ , где  $a = -1839743.5897$  МПа,  $b = 115384.6154$  МПа.

На рис. 3 показана зависимость нормального перемещения  $w$  точки внутренней поверхности оболочки, расположенной на оси симметрии, от интенсивности давления  $q$  (кривая 2). Прямая 1 показывает решение упруго-линейной задачи.

При перемещении, превышающем почти в 2 раза толщину оболочки, условие равновесия по напряжениям выполнялось с точностью  $\approx 2\%$ . Полученные результаты свидетельствуют о корректности разработанного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-41-02346-р\_поволжье\_a).

### Summary

*N.A. Gureeva, Yu.V. Klotchkov, A.P. Nikolaev.* The Defining Relations for Nonlinear Elastic Bodies and Their Implementation in the Calculation of the Rotation Shells Subjected to Axisymmetric Loading Based on the Mixed FEM.

The relations between stresses and strains, stress and strain increments of a deformable body with nonlinear elastic properties were obtained on the basis of the hypotheses about the proportionality of the components of stress and strain deviators, as well as the components of stress and strain increment deviators. The obtained relations were implemented in a mixed version of the finite element method to calculate the nonlinear elastic deformable rotation shells subjected to axisymmetric loading.

**Keywords:** vector approximation, tensor approximation, vector field, tensor field, mixed formulation, variational principle.

### Литература

1. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
2. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
3. *Галимов К.З., Паймушин В.Н.* Теория оболочек сложной геометрии. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1985. – 164 с.
4. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
5. *Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н., Нух Н.М.* Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии. – Казань: ИММ КНЦ РАН, 1993. – 206 с.
6. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
7. *Скопинский В.Н.* Напряжения в пересекающихся оболочках. – М.: Физматлит, 2008. – 400 с.
8. *Николаев А.П., Клочков Ю. В., Киселев А.П., Гуреева Н.А.* Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек. – Волгоград: Волгогр. гос. аграр. ун-т, 2012. – 264 с.
9. *Оден Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
10. *Агапов В.П., Васильев А.В., Соснин А.В.* Разработка и реализация восьмиузлового конечного элемента для расчета массивных конструкций с учетом пластических деформаций // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 4. – С. 71–73.
11. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – Київ: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
12. *Батэ К.-Ю.* Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1022 с.
13. *Гуреева Н.А.* Использование аппроксимации тензорных полей в МКЭ при расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения // Изв. вузов. Строительство. – 2009. – № 2. – С. 17–23.
14. *Гуреева Н.А., Аръков Д.П.* Реализация деформационной теории пластичности в расчетах плосконапряженных пластин на основе МКЭ в смешанной формулировке // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. – 2011. – № 2. – С. 12–15.
15. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. – Т. 1, 2. – 536 с.

16. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

Поступила в редакцию  
19.12.14

---

**Гуреева Наталья Анатольевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Волгоградский государственный аграрный университет, г. Волгоград, Россия.

E-mail: *natalya-gureeva@yandex.ru*

**Клочков Юрий Васильевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», Волгоградский государственный аграрный университет, г. Волгоград, Россия.

E-mail: *Klotchkov@bk.ru*

**Николаев Анатолий Петрович** – доктор технических наук, профессор кафедры «Лесное и водное хозяйство», Волгоградский государственный аграрный университет, г. Волгоград, Россия.

E-mail: *anpetr40@yandex.ru*