

УДК 539.3

УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С.А. Давыдов, А.В. Земсков, Д.В. Тарлаковский

Аннотация

Рассматривается одномерная задача упругой диффузии для однокомпонентного полупространства. Используется локально равновесная геометрически линейная модель упругой диффузии, включающая в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнения массопереноса. Для построения решения применяются интегральные преобразования Фурье по пространственной координате и Лапласа по времени. Задача обращения трансформант Лапласа сводится к обращению рациональной функции, обратное преобразование Фурье осуществляется численно. Строится фундаментальное решение задачи. Рассмотрен пример для случая, когда диффузионный поток на границе постояен. Полученные результаты представляют собой теоретическую основу для анализа напряжённо-деформированного состояния в авиационных и космических конструкциях, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий.

Ключевые слова: упругая диффузия, нестационарные задачи, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, полупространство.

Введение

Механо-диффузия играет важную роль в различных областях науки и техники в связи с необходимостью более точного описания воздействия нагрузок на конструкции или их отдельные элементы. Это прежде всего актуально для корпусов авиадвигателей, фюзеляжей самолётов и ракет, для которых структурные изменения, связанные с внутренним переносом вещества под действием механической нагрузки, могут привести к катастрофическим последствиям. Знание законов, управляющих диффузией, позволяет предупреждать нежелательные изменения в авиаконструкциях, происходящие под влиянием нестационарных нагрузок различной физической природы.

Как показано в работах [1–5], процессы деформирования и диффузии в твердых телах взаимосвязаны. Экспериментально доказано и теоретически обосновано, что внедрение диффундирующего вещества в твердое тело порождает в нем внутренние напряжения, а неоднородное поле напряжений, вызванное внешними причинами, способно влиять на диффузионную кинетику переноса вещества. Несмотря на то что с диффузионными явлениями связаны многие процессы механического поведения материалов под нагрузкой, экспериментальные исследования в этой области осложнены тем фактом, что диффузия – процесс медленный (даже при достаточно высоких температурах), поэтому эксперименты могут быть довольно продолжительными по времени, что исключает возможность широкого варьирования параметров эксперимента. Это приводит к необходимости построения математических моделей связанных процессов и разработки методов их анализа.

В настоящее время процессы переноса в упругих средах изучены в основном в рамках геометрически линейной теории механодиффузии. Существуют также и нелинейные модели механодиффузии, но практически все задачи решаются либо в статической, либо в квазистатической постановках. В работах [7, 8] предложено решение нестационарной задачи упругой диффузии для однокомпонентного слоя. Ниже приводится решение нестационарной одномерной задачи упругой диффузии для однокомпонентного полупространства.

1. Постановка задачи

Рассматривается однородное полупространство, ограниченное сверху плоскостью $x = 0$. Предполагается, что физико-механические процессы в среде являются одномерными и описываются геометрически линейной моделью упругой диффузии без учёта температурных эффектов [3, 5–8]. Соответствующие уравнения имеют следующий вид (компоненты векторов и тензоров указаны в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, для которой $x_3 = x$)

$$C_{3333} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_{33} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad D_{33} g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Lambda_{3333} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (1)$$

а диффузионный поток в направлении оси Ox задаётся соотношением

$$J = \Lambda_{3333} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{33} g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \Lambda_{3333} = \frac{n_0 \alpha_{33} D_{33}}{RT_0}, \quad (2)$$

где t – время; u – перемещение в направлении оси Ox ; $\eta = n - n_0$ – приращение концентрации; n_0 – начальная концентрация вещества, n – текущая концентрация вещества; C_{3333} – соответствующая компонента тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; α_{33} – коэффициент, определяемый типом кристаллической решётки таким образом, что величина $\alpha_{33} \varepsilon_{33} n$ есть относительное объёмное изменение, выражающее зависимость объёма вещества от состава (концентрации исходного вещества); ε_{33} – компонента тензора деформации; D_{33} – коэффициент самодиффузии; g – термодинамический множитель Даркена; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура.

Полагаем, что на поверхности полупространства заданы перемещения и диффузионные потоки

$$u|_{x=0} = f_1(t), \quad J|_{x=0} = f_2(t), \quad (3)$$

а начальные условия являются однородными

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Будем использовать следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены символом “ \sim ”, который в дальнейшем изложении опускается):

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{L}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad c^2 = \frac{C_{3333}}{\rho}, \quad \alpha = \frac{n_0 \alpha_{33}}{C_{3333}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{n_0}, \\ D &= \frac{D_{33} g}{cL}, \quad \Lambda = \frac{\Lambda_{3333}}{cLn_0}, \quad \tilde{J} = \frac{J}{cn_0}, \quad \tilde{f}_1(\tau) = \frac{f_1(\tau)}{L}, \quad \tilde{f}_2(\tau) = \frac{f_2(\tau)}{cn_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где L – характерный линейный размер.

Тогда начально-краевая задача (1)–(4) записывается так (здесь и далее штрихи обозначают производные по безразмерной координате, а точки – производные по безразмерному времени τ):

$$u'' = \ddot{u} + \alpha\eta', \quad D\eta'' = \dot{\eta} + \Lambda u'''; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_1(\tau), \quad (\Lambda u'' - D\eta')|_{x=0} = f_2(\tau); \\ u &= O(1), \quad (\Lambda u'' - D\eta') = O(1) \quad (x \rightarrow \infty); \end{aligned} \quad (7)$$

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \eta|_{\tau=0} = 0. \quad (8)$$

2. Интегральное представление решения

Пусть $G_{1k} = u$, $G_{2k} = \eta$ – функции Грина задачи (6)–(8), а именно, являются решениями двух задач ($k = 1, 2$ – номер задачи), включающих в себя уравнения (6), начальные условия (8) и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} G_{1k}|_{x=0} &= \delta_{1k}\delta(\tau), \quad (\Lambda G_{1k}'' - DG_{2k}')|_{x=0} = \delta_{2k}\delta(\tau), \\ G_{1k} &= O(1), \quad \Lambda G_{1k}'' - DG_{2k}' = O(1) \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера.

Тогда решение задачи (6)–(8) имеет вид (звездочка обозначает свертку по времени)

$$u = \sum_{k=1}^2 G_{1k}(x, \tau) * f_k(\tau), \quad \eta = \sum_{k=1}^2 G_{2k}(x, \tau) * f_k(\tau). \quad (9)$$

Применяя к задаче (6)–(8) преобразование Лапласа, получаем следующую краевую задачу:

$$s^2 u^L - u^{L''} + \alpha \eta^{L'} = 0, \quad s \eta^L - D \eta^{L''} + \Lambda u^{L'''} = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u^L|_{x=0} &= f_1^L, \quad (\Lambda u^{L''} - D \eta^{L'})|_{x=0} = f_2^L, \\ u^L &= O(1), \quad \Lambda u^{L''} - D \eta^{L'} = O(1) \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (11)$$

Представим её решение в виде двух слагаемых

$$u^L = U^L + \varphi, \quad \eta^L = H^L + \psi, \quad (12)$$

где φ и ψ – заданные функции. Тогда уравнения (10) преобразуются так:

$$s^2 U^L - U^{L''} + \alpha H^{L'} = g_1, \quad s H^L - D H^{L''} + \Lambda U^{L'''} = g_2, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(x, s) &= \varphi''(x, s) - \alpha \psi'(x, s) - s^2 \varphi(x, s), \\ g_2(x, s) &= D \psi''(x, s) - \Lambda \varphi'''(x, s) - s \psi(x, s). \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно, краевые условия (11) транспонируются следующим образом:

$$\begin{aligned} U^L|_{x=0} &= f_1^L(s) - \varphi(0, s), \\ (\Lambda U^{L''} - D H^{L'})|_{x=0} &= f_2^L(s) - \Lambda \varphi''(0, s) + D \psi'(0, s). \end{aligned}$$

Выберем функции φ и ψ таким образом, чтобы условия на границе $x = 0$ были нулевыми, а сами функции при $x \rightarrow \infty$ стремились к нулю. Для этого достаточно положить

$$\begin{aligned}\varphi(x, s) &= f_1^L(s) \exp(-x), \\ \Lambda\varphi''(x, s) - D\psi'(x, s) &= f_2^L(s) \exp(-x).\end{aligned}$$

Интегрируя второе равенство по x , получаем

$$\begin{aligned}\varphi(x, s) &= \bar{\varphi}(s) \exp(-x), \quad \bar{\varphi}(s) = f_1^L(s), \\ \psi(x, s) &= \bar{\psi}(s) \exp(-x), \quad \bar{\psi}(s) = \frac{1}{D} (f_2^L(s) - \Lambda f_1^L(s)).\end{aligned}\tag{15}$$

Из этих формул, в частности, вытекает, что

$$\begin{aligned}\varphi''(x, s) &= \varphi(x, s) = \bar{\varphi}(s) \exp(-x), \\ \varphi'''(x, s) &= \varphi'(x, s) = -\varphi(x, s) = -\bar{\varphi}(s) \exp(-x), \\ \psi''(x, s) &= \psi(x, s) = \bar{\psi}(s) \exp(-x), \\ \psi'(x, s) &= -\psi(x, s) = -\bar{\psi}(s) \exp(-x),\end{aligned}$$

и, следовательно, функции g_1 и g_2 в (14) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}g_1(x, s) &= [(1 - s^2) \bar{\varphi}(s) + \alpha \bar{\psi}(s)] \exp(-x), \\ g_2(x, s) &= [\Lambda \bar{\varphi}(s) + (D - s) \bar{\psi}(s)] \exp(-x).\end{aligned}\tag{16}$$

Таким образом, для функций U^L и H^L получаем задачу (13) с нулевыми граничными условиями

$$\begin{aligned}U^L|_{x=0} &= 0, \quad (\Lambda U^{L''} - DH^{L'})|_{x=0} = 0, \\ U^L &= O(1), \quad \Lambda U^{L''} - DH^{L'} = O(1) \quad (x \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Её решение будем искать с помощью преобразования Фурье по пространственной координате x (индекс “ F ” соответствует трансформанте):

$$U^L(x, s) = \int_0^\infty U^{FL}(\lambda, s) \sin \lambda x d\lambda, \quad H^L(x, s) = \int_0^\infty H^{FL}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda.\tag{17}$$

Аналогичным образом представляем функции g_1 и g_2 :

$$g_1(x, s) = \int_0^\infty g_1^F(\lambda, s) \sin \lambda x d\lambda, \quad g_2(x, s) = \int_0^\infty g_2^F(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda,$$

где с учётом (16) имеем

$$\begin{aligned}g_1^F(\lambda, s) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_1(x, s) \sin \lambda x dx = \frac{2\lambda}{\pi(1 + \lambda^2)} [(1 - s^2) \bar{\varphi}(s) + \alpha \bar{\psi}(s)], \\ g_2^F(\lambda, s) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_2(x, s) \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi(1 + \lambda^2)} [\Lambda \bar{\varphi}(s) + (D - s) \bar{\psi}(s)].\end{aligned}$$

В результате система уравнений для функций U^{FL} и H^{FL} запишется так:

$$\begin{aligned}(s^2 + \lambda^2) U^{FL} - \alpha \lambda H^{FL} &= g_1^F, \\ -\Lambda \lambda^3 U^{FL} + (s + D\lambda^2) H^{FL} &= g_2^F.\end{aligned}$$

Её решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}U^{FL}(\lambda, s) &= \frac{(D\lambda^2 + s)g_1^F + \alpha \lambda g_2^F}{(\lambda^2 + s^2)(D\lambda^2 + s) - \alpha \Lambda \lambda^4}, \\ H^{FL}(\lambda, s) &= \frac{\Lambda \lambda^3 g_1^F + (\lambda^2 + s^2)g_2^F}{(\lambda^2 + s^2)(D\lambda^2 + s) - \alpha \Lambda \lambda^4}.\end{aligned}$$

Полученные выражения являются неправильными рациональными функциями параметра s . Для дальнейших вычислений удобно выделить в них целую часть. С учётом (15) имеем

$$\begin{aligned}U^{FL}(s) &= -\frac{2\lambda}{\pi(\lambda^2 + 1)}f_1^L + \frac{2\lambda(s + D\lambda^2 - \alpha\Lambda\lambda^2)}{\pi P_3}f_1^L + \frac{2\alpha\lambda}{\pi P_3}f_2^L, \\ H^{FL}(s) &= \frac{2\Lambda}{\pi D(\lambda^2 + 1)}f_1^L - \frac{2}{\pi D(\lambda^2 + 1)}f_2^L - \frac{2\Lambda\lambda^2 s^2}{\pi P_3}f_1^L + \frac{2(\lambda^2 + s^2)}{\pi P_3}f_2^L, \\ P_3(\lambda^2, s) &= (\lambda^2 + s^2)(D\lambda^2 + s) - \alpha\Lambda\lambda^4.\end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с (9) и (12) решение задачи (10), (11) имеет вид

$$\begin{aligned}u^{FL}(\lambda, s) &= G_{11}^{FL}(\lambda, s)f_1^L(s) + G_{12}^{FL}(\lambda, s)f_2^L(s), \\ \eta^{FL}(\lambda, s) &= G_{21}^{FL}(\lambda, s)f_1^L(s) + G_{22}^{FL}(\lambda, s)f_2^L(s),\end{aligned}\tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}G_{jk}^{FL}(\lambda, s) &= \frac{2P_{jk}(\lambda, s)}{\pi P_3(\lambda^2, s)}, \quad j = 1, 2, \\ P_{11}(\lambda, s) &= \lambda(s + D\lambda^2 - \alpha\Lambda\lambda^2), \quad P_{12}(\lambda, s) = \alpha\lambda, \\ P_{21}(\lambda, s) &= -\Lambda\lambda^2 s^2, \quad P_{22}(\lambda, s) = (\lambda^2 + s^2).\end{aligned}\tag{19}$$

3. Определение оригиналов функций влияния

Для нахождения оригиналов функций Грина в (19) необходимо выполнить обратные преобразования по Фурье и Лапласу. Так как они являются рациональными функциями параметра s , то переход в пространство оригиналов по Лапласу можно осуществить либо путём их разложения на элементарные дроби, либо с помощью вычетов. Для этого необходимо найти корни многочлена $P_3(\lambda^2, s)$. Пусть s_1 , s_2 и s_3 – корни многочлена $P_3(\lambda^2, s)$. В работах [7, 8] найдено, что два из них – комплексно сопряжённые с отрицательной действительной частью, третий – действительный отрицательный. Пусть для определённости $s_2 = \bar{s}_1$. Обозначим $s_1 = -\gamma + i\beta$, $\gamma > 0$ и $s_2 = \bar{s}_1$. Тогда с помощью второй теоремы разложения операционного исчисления после отделения действительной и мнимой частей находим

$$G_{jk}^F = e^{-\gamma\tau} (A_{jk1} \cos \beta\tau - A_{jk2} \sin \beta\tau) + A_{jk3} e^{s_3\tau},\tag{20}$$

где коэффициенты A_{jkl} , $j, k = 1, 2$, $l = 1, 2, 3$ являются функциями параметра λ и находятся по формулам (штрих означает производную по параметру "s")

$$A_{jk1} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \frac{P_{jk}(\lambda, s_1)}{P'(\lambda^2, s_1)}, \quad A_{jk2} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \frac{P_{jk}(\lambda, s_1)}{P'(\lambda^2, s_1)}, \quad A_{jk3} = \frac{2}{\pi} \frac{P_{jk}(\lambda, s_3)}{P'(\lambda^2, s_3)}.$$

Для обращения изображений Фурье необходимо сначала найти свёртки (9) с функциями (20), после чего найти оригиналы изображений Фурье по формулам (17). Интегралы, стоящие в (17), будем находить численно. Для этого удобно преобразовать их в интегралы по конечному промежутку с помощью представлений

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u^F(\lambda, t) \sin \lambda x d\lambda = \int_0^a u^F(\lambda, t) \sin \lambda x d\lambda + \int_a^{\infty} u^F(\lambda, t) \sin \lambda x d\lambda,$$

$$\eta(x, t) = \int_0^{\infty} \eta^F(\lambda, t) \cos \lambda x d\lambda = \int_0^a \eta^F(\lambda, t) \cos \lambda x d\lambda + \int_a^{\infty} \eta^F(\lambda, t) \cos \lambda x d\lambda,$$

где a – любая промежуточная точка (при расчётах полагается $a = 1$).

Вычисление первых интегралов осуществляется с помощью формулы Симпсона. Вторые интегралы с помощью замены переменных $\lambda = a^2 / (a - \nu)$ переводятся в интегралы также по конечному промежутку $[0, a]$, после чего находятся методом Филона интегрирования быстро осциллирующих функций [9].

4. Примеры

Полагаем, что материал полупространства – алюминий, имеющий следующие характеристики [10]:

$$\rho = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad C_{3333} = 1.255 \cdot 10^{12} \text{ Н/м}^2, \quad T_0 = 773 \text{ К},$$

$$D_{33} = 0.483 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2/\text{с}, \quad L = 1 \text{ м}.$$

В качестве расчётного примера рассмотрим случай, когда поверхность полупространства зафиксирована и на ней задан диффузионный поток в виде функции Хевисайда, что соответствует следующим правым частям равенств (5):

$$D = 1.03 \cdot 10^{-20}, \quad \alpha = 10^{-6}, \quad \Lambda = 2.01 \cdot 10^{-20}$$

и правым частям равенств (7):

$$f_1(\tau) \equiv 0, \quad f_2(\tau) = H(\tau).$$

Тогда, вычисляя интегралы в (7), получаем, что образы Фурье для перемещения и приращения концентрации определяются равенствами

$$u^F = -\frac{A_{123}}{s_3} (1 - e^{s_3 \tau}) +$$

$$+ \frac{1}{|s_1|^2} [(\beta A_{121} + \gamma A_{122}) e^{-\gamma \tau} \sin \beta \tau + (\beta A_{122} - \gamma A_{121}) (e^{-\gamma \tau} \cos \beta \tau - 1)],$$

$$\eta^F = -\frac{A_{223}}{s_3} (1 - e^{s_3 \tau}) +$$

$$+ \frac{1}{|s_1|^2} [(\beta A_{221} + \gamma A_{222}) e^{-\gamma \tau} \sin \beta \tau + (\beta A_{222} - \gamma A_{221}) (e^{-\gamma \tau} \cos \beta \tau - 1)].$$

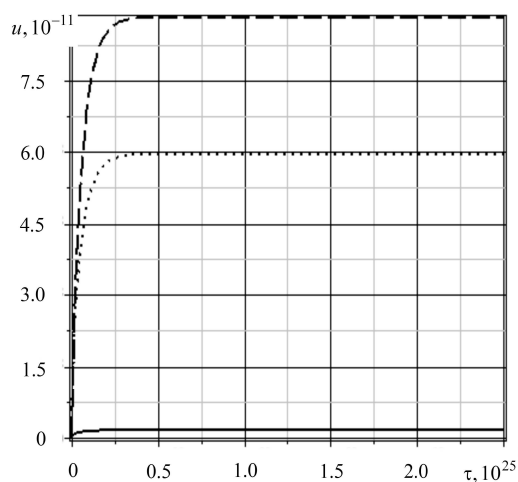


Рис. 1. Зависимость перемещений от времени: сплошная линия соответствует $x = 1$, линия с точками – $x = 3$, пунктирная – $x = 10$

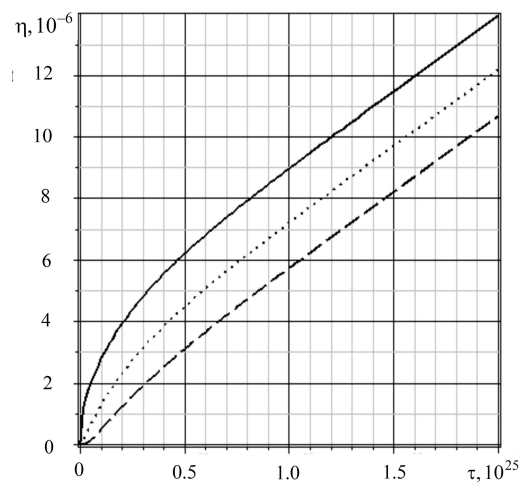


Рис. 2. Зависимость приращения концентрации от времени: сплошная линия соответствует $x = 1$, линия с точками – $x = 3$, пунктирная – $x = 10$.

Оригиналы этих выражений находятся численно с помощью метода Филона. Результаты вычислений по этим формулам продемонстрированы в виде графиков на рис. 1, 2. На рис. 1 показана зависимость перемещений от времени, на рис. 2 – зависимость изменения концентрации от времени: $x = 1$ – сплошная линия, $x = 3$ – точечная линия, $x = 10$ – пунктирная линия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-01161-а) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

Summary

S.A. Davydov, A.V. Zemskov, D.V. Tarlakovskii. An Elastic Half Space under the Action of One-Dimensional Time-Dependent Diffusion Perturbations.

The paper deals with a one-dimensional problem of elastic diffusion for a single-component half space. We use a locally static geometrically linear model of elastic diffusion, which contains mass transfer equations and a coupled system of the motion equations of an elastic body. To build the solution, we apply the integral Fourier and Laplace transforms. The problem of inversion of the Laplace transforms reduces to the inversion of rational functions; the inverse Fourier transform is performed numerically. A fundamental solution to the problem is developed. We consider the case when the diffusion flux at the boundary is constant. The obtained results provide a theoretical framework for the analysis of the stress-strain state in aeronautical and space structures working in the conditions of multifactorial external influences.

Keywords: elastic diffusion, time-dependent problems, Fourier transform, Laplace transform, half space.

Литература

1. Данков П.Д., Чураев П.В. Эффект деформации поверхностного слоя металла при окислении // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 73, № 6. – С. 1221–1125.
2. Кубашевский О., Гопкинс Б. Окисление металлов и сплавов / Пер. с англ. В.А. Алексеева. – М.: Металлургия, 1965. – 428 с.
3. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
4. Князева А.Г. Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах. – Томск: Том. гос. ун-т, 1996. – 146 с.
5. Подстригач Я.С., Павлина В.С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в компонентном твёрдом растворе // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – № 4. – С. 383–389.
6. Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Линейная модель связанной термоупругости с учётом диффузии для неоднородных анизотропных сред // Материалы XVII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО «ТР-принт», 2011. – Т. 2. – С. 96–106.
7. Афанасьева О.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Приближённое решение трёхмерной задачи об упругой диффузии для ортотропного слоя // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной природы. – Львов: Ин-т прикл. проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2012. – С. 12–16.
8. Гачкевич А.Р., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, Вып. 4, Ч. 1. – С. 52–59.
9. Грантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 204 с.
10. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И.К. Киикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.

Поступила в редакцию
03.12.13

Давыдов Сергей Андреевич – студент кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

E-mail: *xenon_93@inbox.ru*

Земсков Андрей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическое моделирование», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

E-mail: *azemskov1975@mail.ru*

Тарлаковский Дмитрий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний, НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: *tdvhome@mail.ru*