

УДК 537.291

## ОСАЖДЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ

*Т.Ш. Зарипов*

### Аннотация

Решена задача о движении заряженных частиц под действием электростатической индукционной силы и кулоновского взаимодействия между ними внутри заземленной сферы на основе численного интегрирования лагранжевых уравнений. Исследована эффективность осаждения частиц при различных начальных концентрациях частиц. Проведено сравнение результатов численных расчетов с известными аналитическими решениями. Оценен относительный вклад в осаждение частиц индукционной силы и кулоновского взаимодействия.

**Ключевые слова:** заряженные частицы, осаждение, индукционная сила, кулоновская сила.

### Введение

Задачи осаждения заряженных аэрозольных частиц представляют значительный интерес для исследования ряда атмосферных явлений и процессов очистки запыленных воздушных сред [1–6].

Результаты теоретических исследований эффективности осаждения аэрозольных частиц приведены, например, в работах [1, 7–9]. В большинстве теоретических работ движение заряженных частиц моделировалось на основе расчета траекторий отдельных частиц (лагранжев метод) с учетом лишь электростатической индукционной силы. Строго говоря, такой подход оправдан только для одиночного заряда, но модель индукционной силы обычно применяется в предположении, что концентрация частиц достаточно мала, чтобы пренебречь их взаимным кулоновским влиянием. В случае же больших концентраций дисперсной фазы, когда пространственное распределение зарядов можно описать непрерывной функцией, совместно решаются уравнения переноса дисперсной фазы и уравнение для потенциала формируемого заряженными частицами электрического поля [10–12]. Лагранжев метод расчета движения заряженных капель в струе с учетом взаимного влияния применялся в [13–15].

В работе [16] были получены аналитические решения задачи осаждения заряженных частиц в замкнутом объеме (цилиндр, сфера) с учетом индукционной электростатической силы и на основе решения уравнений переноса частиц и Пуассона для электрического потенциала. Было показано, что при уменьшении концентрации частиц эффективность осаждения, полученная в рамках модели, учитывающей лишь индукционную силу, становится выше, чем при учете только кулоновского взаимодействия.

В настоящее время сохраняет актуальность задача определения границ применимости моделей, учитывающих взаимное влияние зарядов или пренебрегающих им. В [17, 18] утверждалось, что при типичных концентрациях заряженных частиц влияние индукционной силы пренебрежимо мало. В то же время в экспериментальной работе [19] показано, что измеряемые значения эффективности

осаждения заряженных частиц хорошо согласуются с результатами, полученными в приближении индукционной силы в [20]. Отметим также, что для малых концентраций непрерывная модель (эйлеров метод) не будет корректно описывать дискретное точечное распределение зарядов.

Для того чтобы дать ответ на вопрос о вкладе упомянутых сил в осаждение заряженных частиц, в настоящей работе предложена лагранжева модель движения заряженных аэрозольных частиц с учетом как кулоновского взаимодействия частиц, так и индукционной силы. Используемый подход позволяет корректно моделировать движение заряженных частиц как при малых, так и больших концентрациях дисперсной фазы. Одним из достоинств этого метода является то, что для постановки задачи достаточно задания начальных условий для движущихся частиц, в то время как при решении задачи в непрерывной постановке могут возникнуть сложности с определением граничных условий для электрического потенциала. Вместе с тем стоит отметить, что учет кулоновского взаимодействия на каждом шаге по времени при численном интегрировании уравнений движения частиц предъявляет значительные требования к вычислительным ресурсам.

Решена задача о движении заряженных частиц под действием электростатических сил в замкнутой области – внутри заземленной сферы. В рамках лагранжева подхода рассчитаны траектории частиц с учетом кулоновского взаимодействия и индукционной силы отдельной частицы и проведены исследования эффективности осаждения частиц на поверхности сферы при различной их концентрации.

### 1. Постановка задачи

Пусть в сфере радиуса  $R_0$  случайно и равномерно распределены  $n$  одноименно заряженных частиц с одинаковым зарядом  $q$ . На частицу  $i$  действуют кулоновские силы со стороны зарядов всех частиц, распределенных в объеме, а также со стороны индуцированных ими на поверхности сферы зарядов. Тогда уравнение движения  $i$ -й частицы может быть записано в виде

$$\frac{d\bar{R}_i}{dT} = b \left( \sum_{j=1(j \neq i)}^N \bar{F}_{ij} + \sum_{j=1(j \neq i)}^N \bar{F}_{ijj} + \bar{F}_{img} \right), \quad (1)$$

где  $\bar{R}_i$  – радиус-вектор, определяющий положение  $i$ -й частицы,  $\bar{F}_{ij}$  – вектор силы, с которой  $j$ -я частица действует на  $i$ -ю,  $\bar{F}_{ijj}$  – вектор кулоновской силы, с которой образ  $j$ -й частицы действует на  $i$ -ю,  $\bar{F}_{img}$  – индукционная сила, порожденная  $i$ -й частицей,  $b = (3\pi\mu d)^{-1}$  – подвижность частицы.

Для решения задачи об электрическом поле, создаваемом индуцированными зарядами, воспользуемся методом изображений [21] и запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d\bar{R}_i}{dT} = \frac{bq^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_j}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|^3} + \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{R_0}{|\bar{R}_j|} \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_{jj}}{|\bar{R}_i - \bar{R}_{jj}|^3} + \frac{R_0 \bar{R}_i}{|R_0^2 - \bar{R}_i^2|^2} \right), \quad (2)$$

где  $\bar{R}_{jj}$  – радиус-вектор образа заряда  $j$ -й частицы (рис. 1),  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость воздуха.

Перепишем уравнение (2) в безразмерной форме

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^3} + \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_{jj}}{|\bar{r}_j| |\bar{r}_i - \bar{r}_{jj}|^3} + \frac{\bar{r}_i}{|1 - \bar{r}_i^2|^2}, \quad (3)$$

где  $\bar{r} = \bar{R}/R_0$ ,  $t = T/T^*$ ,  $T^* = bq^2/(4\pi\epsilon_0 R_0^3)$ .

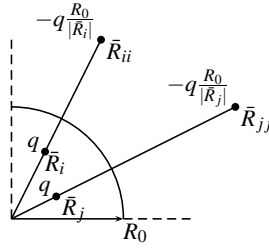


Рис. 1. Схема метода изображений

Учитывая, что  $\bar{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , запишем уравнение (3) в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{x_i - x_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^3} + \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{x_i - x_{jj}}{r_j |\bar{r}_i - \bar{r}_{jj}|^3} + \frac{x_i}{|1 - \bar{r}_i^2|^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{y_i - y_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^3} + \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{y_i - y_{jj}}{r_j |\bar{r}_i - \bar{r}_{jj}|^3} + \frac{y_i}{|1 - \bar{r}_i^2|^2}, \\ \frac{dz_i}{dt} &= \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{z_i - z_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|^3} + \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{z_i - z_{jj}}{r_j |\bar{r}_i - \bar{r}_{jj}|^3} + \frac{z_i}{|1 - \bar{r}_i^2|^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x = X/R_0$ ,  $y = Y/R_0$ ,  $z = Z/R_0$ ,  $|\bar{r}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ ,  $X, Y, Z$  – размерные декартовы координаты.

Решение задачи Коши для системы уравнений (4) с начальными условиями  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ , где  $(x_0, y_0, z_0)$  – произвольно выбранная точка внутри сферы, позволяет рассчитать траекторию движения заряженной частицы, смещающейся из первоначального положения в результате воздействия электростатической силы.

## 2. Метод решения

Для определения эффективности осаждения частиц  $E$  применяется метод статистического моделирования Монте-Карло: многократно рассчитываются траектории множества частиц с различным начальным распределением внутри сферы (рис. 2). Случайное распределение частиц в сфере задается следующим образом: в качестве координат  $(x_0, y_0, z_0)$  частиц выбираются три независимых последовательности случайных величин, равномерно распределенных в интервале  $(-1, 1)$ . Точки, попавшие за пределы сферы ( $|\bar{r}| \geq 1$ ), отбрасываются.

Для нахождения траекторий уравнения движения частиц (4) решаются методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Следует обратить внимание на то, что задачи для разных частиц не являются независимыми, так как силы, влияющие на частицу в каждый момент времени, зависят от текущего положения остальных частиц. По этой причине уравнения движения всех частиц решаются совместно.

Эффективность осаждения  $E$  на каждом временном шаге находится как отношение доли всех осевших к этому моменту частиц  $N$  к общему числу частиц  $N_0$ , находившихся внутри сферы в начальный момент времени,

$$E = N(t)/N_0.$$

Частица считается осевшей, когда она пересекает границу сферы ( $|\bar{r}_i| \geq 1$ ).

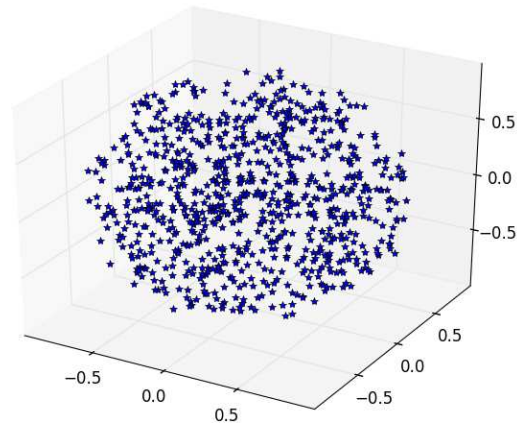
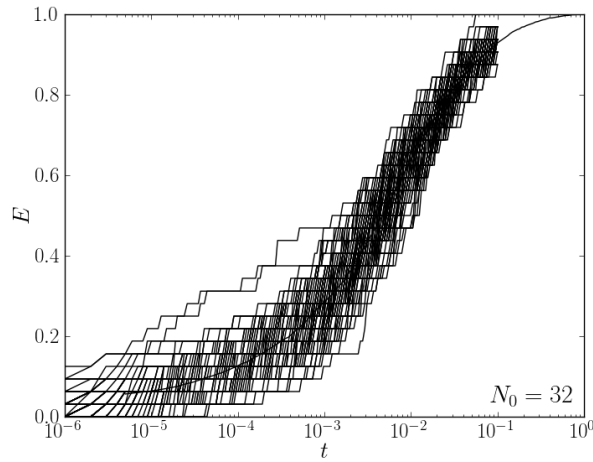


Рис. 2. Пример начального распределения частиц в сфере

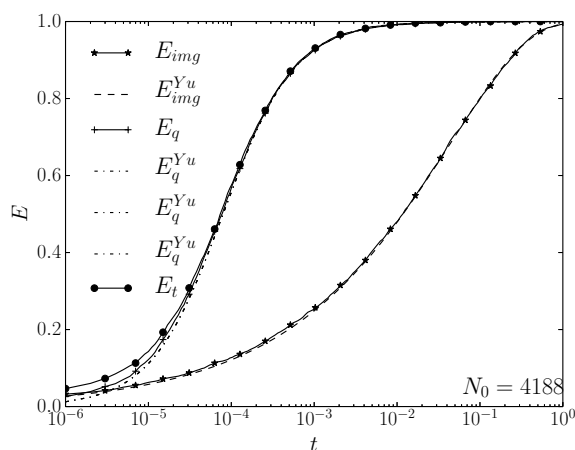
Рис. 3. Зависимость  $E(t)$  для разных начальных распределений частиц с фиксированным  $N_0$ 

Сложность поставленной вычислительной задачи в первую очередь обусловливается многократным совместным решением большого числа ( $3N_0$ ) уравнений с малым шагом по времени  $\Delta t \leq 10^{-6}$ . Требования к величине  $\Delta t$  диктуются высокими скоростями частиц в начальные моменты времени из-за сильного кулоновского взаимодействия, а также необходимостью как можно более точного определения момента пересечения частицей границы области.

Следует отметить существенное влияние случайного начального распределения частиц на скорость оседания. Различие вычисленных значений  $E(t)$  для отдельных численных экспериментов при малых  $N_0$  особенно велико. Примеры вида зависимостей  $E(t)$ , полученных в серии независимых численных экспериментов при  $N_0 = 32$ , приведены на рис. 3. Для получения итоговых зависимостей эффективности осаждения от времени проводится осреднение по числу экспериментов.

### 3. Результаты и их обсуждение

Как уже было отмечено, в работе [16] приведены решения задач осаждения заряженных частиц внутри сферы в предположении малости концентраций и при учете кулоновского взаимодействия. При малых концентрациях частиц полагается

Рис. 4. Зависимость  $E(t)$  для  $N = 4188$ 

допустимым в качестве электростатической силы учитывать только индукционную силу, действующую на отдельную заряженную частицу. В этом случае уравнение (2) с учетом сферической симметрии сведется к

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{r_i}{|1 - r_i^2|^2}. \quad (5)$$

Пусть  $r_c$  – координата частиц такая, что все частицы с  $r > r_c$  оседают на сфере. Тогда интегрирование (5) от координаты  $r_c$  оседающей частицы до границы  $r = 1$  сферы дает выражение для времени  $t_c$ , достаточного для достижения частицей границы:

$$t = -\frac{3}{4} - \ln r_c + r_c^2 - \frac{r_c^4}{4}. \quad (6)$$

Уравнение (6) позволяет выразить зависимость  $r_c$  от времени  $t$ . Эффективность осаждения как функция времени может быть записана в виде

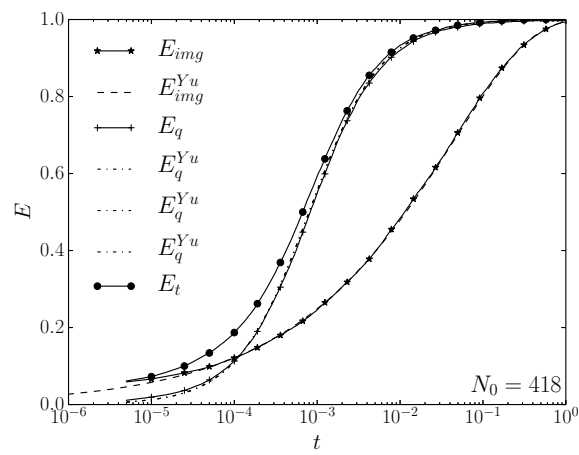
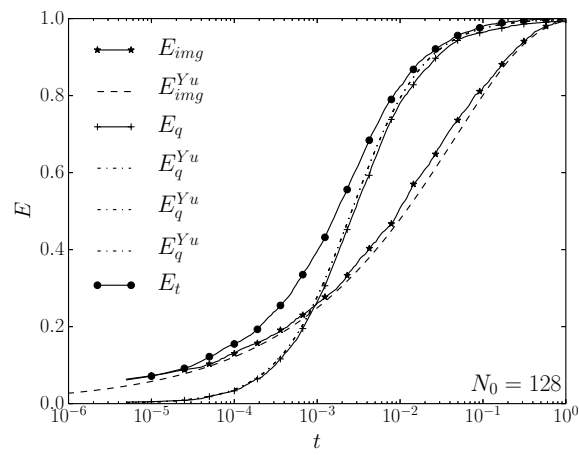
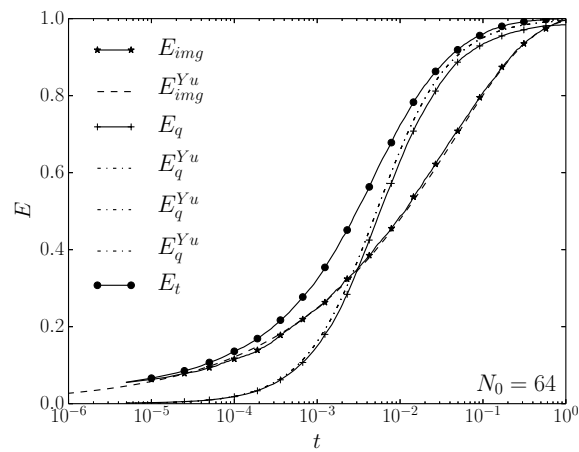
$$E_{img}^{Yu}(r_c(t)) = 1 - r_c^3(t). \quad (7)$$

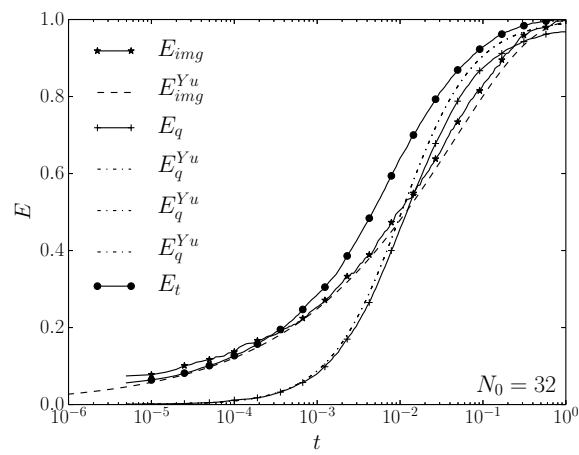
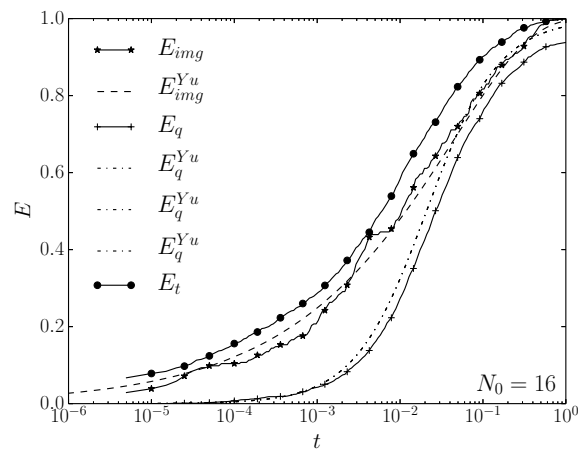
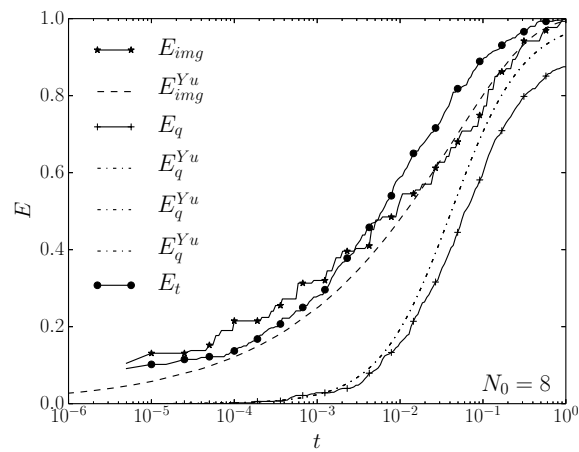
С другой стороны, на основе решения уравнения Пуассона для потенциала электрического поля в [16] получено выражение для эффективности

$$E_q^{Yu}(t) = \frac{n_0 R_0^3}{1 + n_0 R_0^3 t} \quad (8)$$

где  $n_0$  – концентрация частиц в начальный момент времени. Отметим, что безразмерное время в формуле (8) такое же, что и в (4). Число  $N_0$  частиц в безразмерном объеме связано с концентрацией  $n_0$  частиц по формуле  $N_0 = 4\pi n_0 R_0^3 / 3$ .

Результаты расчетов эффективности осаждения частиц внутри сферического объема при различных числах  $N$  приведены на рис. 4–10. Для фиксированного  $N_0$  расчеты эффективности осаждения проводились многократно, чтобы обеспечить необходимое число опытов для метода Монте-Карло. Было получено три варианта зависимости  $E(t)$ :  $E_{img}$ ,  $E_q$ ,  $E_t$ . Функция  $E_{img}$  получена с учетом только индукционной силы для одиночной частицы (отброшены первые два слагаемых в правой части (4)). Зависимость  $E_q(t)$  – эффективность осаждения с учетом кулоновского взаимодействия между частицами при пренебрежении индукционными

Рис. 5. Зависимость  $E(t)$  для  $N = 418$ Рис. 6. Зависимость  $E(t)$  для  $N = 128$ Рис. 7. Зависимость  $E(t)$  для  $N = 64$

Рис. 8. Зависимость  $E(t)$  для  $N = 32$ Рис. 9. Зависимость  $E(t)$  для  $N = 16$ Рис. 10. Зависимость  $E(t)$  для  $N = 8$

силами (отброшены второе и третье слагаемые в (4)). Функция  $E_t$  соответствует расчету по полной модели, когда учитываются кулоновское взаимодействие между частицами, индукционная сила для самой частицы и для всех остальных частиц, то есть учтены все слагаемые в уравнениях (4). Для сравнения приведены также теоретические кривые  $E_{img}^{Yu}(t)$  и  $E_q^{Yu}(t)$  полученные по формулам (7) и (8) из [16].

Как было отмечено выше, вклад трех рассматриваемых сил в осаждение частиц зависит от их количества. Приведенные на рис. 4–10 результаты расчетов демонстрируют это различие. При  $N_0 = 4188$  влияние индукционной силы в осаждение сказывается в короткий начальный момент времени до  $t \sim 10^{-5}$ , когда величины  $E_{img}$  и  $E_t$  оказываются немного выше кривой  $E_q$ . При больших временах кривые  $E_q$  и  $E_t$  практически совпадают, потому что осаждение частиц полностью обеспечивается кулоновским взаимодействием между всеми частицами. В [17] было показано, что вклад индукционной силы становится пренебрежимо малым, когда количество частиц стремится к бесконечности. Отметим также практическое совпадение кривых  $E_{img}$ ,  $E_{img}^{Yu}(t)$  и  $E_q$ ,  $E_q^{Yu}(t)$ , соответствующих численной модели и аналитическому решению.

С уменьшением  $N_0$  время начального этапа, когда основным механизмом осаждения является действие индукционных сил, увеличивается ( $N_0 = 418, 128, 64$ ). Кривая  $E_{img}$  сближается с  $E_t$ , в то время как  $E_q$  отдаляется от нее. Видно, что существуют интервалы времен, когда  $E_t$  оказывается выше как кривой  $E_{img}$ , так и  $E_q$  ( $10^{-5} < t < 10^{-2}$  для  $N_0 = 418$ ,  $10^{-5} < t < 1$  для  $N_0 = 128$  и  $N_0 = 64$ ). Это свидетельствует о том, что осаждение заряженных частиц не описывается полностью ни одним из рассматриваемых механизмов в отдельности. Таким образом, для достоверного расчета эффективности осаждения для указанного диапазона  $N_0$  необходимо учитывать как кулоновское взаимодействие частиц, так и индукционную силу. Согласие результатов численной модели и аналитических решений (7), (8) сохраняется.

С дальнейшим уменьшением числа частиц внутри сферы ( $N_0 = 32, 16, 8$ ) влияние кулоновского взаимодействия на осаждение уменьшается, а роль индукционной силы растет. Для  $N_0 = 16$  и  $N_0 = 8$  кривые  $E_{img}$  оказываются выше  $E_q$  во всем диапазоне изменения  $t$ . Эффективность осаждения, рассчитанная на основе одиночной индукционной силы, становится при этом достаточно близкой к кривой  $E_t$ , оставаясь ниже ее. Таким образом, даже при малых  $N_0$  осаждение частиц не описывается полностью в рамках модели одиночной индукционной силы. Кулоновское взаимодействие продолжает оказывать воздействие на осаждение, то есть расчеты осаждения заряженных аэрозольных частиц с учетом только одиночной индукционной силы, проводимые для случая малых концентраций, дают заниженные значения коэффициентов осаждения.

Кривые для  $N_0 = 8$  получены осреднением результатов 1200 расчетов с разным начальным распределением частиц. Из рис. 9–10 видно, что кривые  $E_{img}$  и  $E_q$ , начинают заметно отличаться от теоретических кривых  $E_{img}^{Yu}(t)$  и  $E_q^{Yu}(t)$  при малых  $N_0$ . Точность описания осаждения частиц на основе численной реализации метода Монте-Карло для различных случайных начальных распределений частиц падает для малых  $N_0$ , так как при этом пространственное распределение электрических зарядов хуже описывается непрерывной функцией. Следует отметить, что кривые  $E_q$  эффективности осаждения под действием кулоновского расталкивания частиц сглаживаются и приближаются к теоретической кривой  $E_q^{Yu}(t)$  при меньшем числе расчетов Монте-Карло, чем кривые  $E_{img}$  к  $E_{img}^{Yu}(t)$ .

Рассмотренные значения  $N_0$  для сферы с  $R_0 = 500$  мкм (характерный размер ячейки в пористых упаковках аэрозольных фильтров) соответствуют концентрациям частиц  $n_0$ , представленным в табл. 1.



Табл. 1

Концентрация частиц  $n_0$ 

$N_0$	8	16	32	64	128	418	4188
$n_0, \text{см}^{-3}$	$1.53 \cdot 10^4$	$3.06 \cdot 10^4$	$6.11 \cdot 10^4$	$1.22 \cdot 10^5$	$2.44 \cdot 10^5$	$7.98 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^6$

### Заключение

Предложена математическая модель движения заряженных аэрозольных частиц в замкнутом сферическом объеме с учетом как кулоновского взаимодействия, так и индукционных сил. Проведены численные расчеты эффективности осаждения как функции времени по различным моделям: полной модели с учетом индукционных сил и кулоновского взаимодействия частиц, модели одиночной индукционной силы и модели, учитывающая только кулоновское взаимодействие. Показано, что в области больших концентраций частиц эффективность осаждения определяется кулоновским взаимодействием частиц, влияние индукционного осаждения сказывается лишь на малых начальных временах. В области промежуточных концентраций частиц оба механизма заметно сказываются на эффективности осаждения. При этом эффективность осаждения, найденная по полной модели с учетом обоих механизмов, оказывается выше, чем в случае модели, учитывающей только один из механизмов. Это говорит о том, что при промежуточных концентрациях осаждение заряженных частиц следует рассчитывать с учетом как кулоновского взаимодействия, так и индукционных сил. В области малых концентраций частиц в объеме эффективность осаждения удовлетворительно описывается в рамках модели одиночной индукционной силы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00333, 12-07-00007).

### Summary

*T.Sh. Zaripov.* Deposition of Charged Aerosol Particles under the Action of Image and Space Charge Forces.

The problem of 3D motion of charged particles under the action of space charge and image electrostatic forces inside a grounded sphere is solved using the Lagrangian method. The efficiency of particle deposition on the sphere is studied for various initial particle concentrations. The numerical results are compared with the known analytical solutions. The relative contribution of space charge and image forces to particle deposition is discussed.

**Keywords:** charged aerosol particles, deposition, image force, space charge force.

### Литература

1. Левин Л.М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 268 с.
2. Reist P.C. Aerosol Science and Technology. – N. Y.: McGraw-Hill, 1993. – 379 p.
3. Fuks N.A. The Mechanics of Aerosols. – N. Y.: Macmillan, 1964. – 422 p.
4. Adamiak K. Numerical models in simulating wire-plate electrostatic precipitators: A review // J. Electrostat. – 2013. – V. 71, No 4. – P. 673–680.
5. Jaworek A., Krupa A., Sobczyk A.T., Marchewicz A., Szudyga M., Antes T., Balachandran W., Di Natale F., Carotenuto C. Submicron particles removal by charged sprays. Fundamentals // J. Electrostat. – 2013. – V. 71, No 3. – P. 345–350.

6. *Wei W., Gu Z., Wang S., Fukuda T., Kase K., Ju J., Yamagata Y., Tajima Y.* Numerical simulation of nanoparticle pattern fabricated by electrostatic spray deposition // *Particuology*. – 2013. – V. 11, No 1. – P. 20–24.
7. *Nielsen K.A., Hill J.C.* Capture of particles on spheres by inertial and electrical forces // *Ind. Eng. Chem. Fundamen.* – 1976. – V. 15, No 3. – P. 157–163.
8. *Nielsen K.A., Hill J.C.* Collection of inertialess particles on spheres with electrical forces // *Ind. Eng. Chem. Fundamen.* – 1976. – V. 15, No 3. – P. 149–156.
9. *Zimmels Y., Kojevnikova S.* Use of electric image forces for collection of aerosols by arrays of drops // *Aerosol Sci. Tech.* – 2002. – V. 36, No 6. – P. 697–713.
10. *Kasper G.* Electrostatic dispersion of homopolar charged aerosols // *J. Colloid Interf. Sci.* – 1981. – V. 81, No 1. – P. 32–40.
11. *Alonso M., Alguacil F.J.* Penetration of aerosol undergoing combined electrostatic dispersion and diffusion in a cylindrical tube // *J. Aerosol Sci.* – 2007. – V. 38, No 5. – P. 481–493.
12. *Зарипов Т.Ш.* Моделирование осаждения заряженных аэрозольных частиц при обтекании периодического ряда цилиндров // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. – 2012. – Т. 154, кн. 1.– P. 114–121.
13. *Gañán-Calvo A.M., Lasheras J.C., Dávila J., Barrero A.* The electrostatic spray emitted from an electrified conical meniscus // *J. Aerosol Sci.* – 1994. – V. 25, No 6. – P. 1121–1142.
14. *Griffoll J., Rosell-Llompart J.* Efficient Lagrangian simulation of electrospray droplets dynamics // *J. Aerosol Sci.* – 2012. – V. 47. – P. 78–93.
15. *Yang W., Lojewski B., Wei Y., Deng W.* Interactions and deposition patterns of multiplexed electrosprays // *J. Aerosol Sci.* – 2012. – V. 46. – P. 20–33.
16. *Yu C.P.* Precipitation of unipolarly charged particles in cylindrical and spherical vessels // *J. Aerosol Sci.* – 1977. – V. 8, No 4. – P. 237–241.
17. *Vauge C.* On the concept of “image-force” // *J. Aerosol Sci.* – 2002. – V. 33, No 5. – P. 829–832.
18. *Mayya Y.S., Sapra B.K.* Image forces on a collection of charged particles near conducting surfaces // *J. Aerosol Sci.* – 2002. – V. 33, No 5. – P. 817–828.
19. *Chang K.-N., Chen Y.-K., Huang S.-H., Chen C.-W., Lai C.-Y., Chen C.-C.* Penetration of charged particles through metallic tubes // *J. Aerosol Sci.* – 2012. – V. 48. – P. 10–17.
20. *Chen Y.K., Yu C.P.* Particle Deposition from Duct Flows by Combined Mechanisms // *Aerosol Sci. Tech.* – 1993. – V. 19, No 3. – P. 389–395.
21. *Jackson J.D.* *Classical Electrodynamics*. – Wiley, 1998. – 833 p.

Поступила в редакцию  
19.06.13

---

**Зарипов Тимур Шамилевич** – младший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [zaript@gmail.com](mailto:zaript@gmail.com)