УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2018, Т. 160, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 762–770 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.955

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.С. Мокейчев, А.М. Сидоров

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В пространстве φ-распределений со значениями в банаховом пространстве рассмотрен процесс, описываемый задачей для дифференциального уравнения с частными производными. Приведены условия, при которых процесс является динамическим. Понятия φ-распределения и φ-решения были введены В.С. Мокейчевым как удобный инструмент для исследования разрешимости ряда дифференциальных уравнений с частными производными и некоторых математических моделей. Это позволило дать решение ряду задач, которые не имеют обобщенных решений – распределений Шварца. Кроме того, появилась возможность изложить теорию разрешимости без предположения о типе изучаемого дифференциального уравнения (эллиптический, гиперболический, параболический) и без предположения скалярности уравнения. Одним из главных достоинств пространства φ-распределений является то, что его элементы и только они разлагаются в ряды по заданной системе элементов φ.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, φ-распределение, φ-решение

Пусть математическая модель процесса $U(t,x)$ имеет вид

$$\sum_{j=0}^{M}\sum_{\alpha\in\Phi} C_{\alpha,j}(t)D_t^j D_x^\alpha U = f(t,x), \quad t\in[a,b), \quad x\in\Omega\subset R^n, \tag{1}$$

где Φ – конечное множество мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, компоненты которых α_j – целые неотрицательные числа, $C_{\alpha,j}(t)$ – линейные операторы, при каждом $t\in[a,b)$ отображающие некоторое банахово пространство B в себя и не зависящее от U, $D_t^j=\partial^j/\partial t^j$, $D_k=\partial/\partial x_k$, $k=1,\dots,n$, $D_x^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$; $f(t,x)$ не зависит от U; Ω – измеримое по Лебегу множество ненулевой меры.

Как обычно, процесс U называется динамическим, если каждое его состояние при $t>a$ определяется начальным состоянием, то есть

$$D_t^j U\Big|_{t=a} = g_j(x), \quad x\subset\Omega, \quad j=0,\dots,M-1. \tag{2}$$

Процесс U является динамическим тогда и только тогда, когда задача (1), (2) однозначно разрешима.

Выясним, когда процесс U является динамическим, то есть в каком пространстве задача (1), (2) однозначно разрешима.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных понятие решения – это ключевой момент. Как известно (см., например [1–3]), существуют дифференциальные уравнения в частных производных и математические модели, не имеющие ни классического, ни обобщённого решения. В [1] показано, что уравнение $\partial^2 U/\partial t^2 - c^2\partial^2 U/\partial x^2 = f(t,x))$, описывающее вынужденные 2π-периодические колебания струны, закрепленной на концах отрезка $[0,\pi]$, не имеет обобщённого решения, если c является числом Лиувилля. Это противоречит физике процесса.

Желание изложить теорию разрешимости без предположения о типе изучаемого дифференциального уравнения (эллиптического, гиперболического, параболического) и дать универсальное понятие решения привело к введению понятия φ_B-распределения со значениями в некотором банаховом пространстве B (φ-распределение – это φ_B-распределение, где $B = R^n$). Построению соответствующей теории посвящены работы [5–7]. Это позволило найти решения ряда математических моделей [8], не имеющих решения в пространстве обобщенных функций. Отметим, что эти распределения впервые были использованы в [9] для решения граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

С учетом вышесказанное будем искать решение задачи (1), (2) в пространстве φ_B-распределений. Приведем некоторые понятия теории φ_B-распределений. Подробно эта теория изложена в [10, 11]. Пусть K^n – множество n-мерных векторов $p = (p_1, \cdots, p_n)$ с целочисленными координатами, не обязательно совпадающее с Z^n, $|p| = |p_1| + \cdots + |p_n|$. Пусть $\varphi = \{\varphi_p, p \in K^n\}$ – система элементов, имеющая относительно некоторого скалярного произведения биортогональную систему $\varphi^* = \{\varphi_p^*, p \in K^n\}$.

Пусть при всех $m \in N$ и a_p, принадлежащих банахову пространству B, существует

$$\sum_{|p|\le m} a_p\varphi_p. \tag{3}$$

Множество всех элементов, представимых при некотором m в виде (3), обозначим через $L_\varphi(B)$. Аналогично определяется множество $L_{\varphi^*}(B)$.

Определение 1. Линейное отображение $U : L_{\varphi^*}(B) \to B$ называется φ_B-распределением.

Для φ_B-распределений обычным образом вводятся операции сложения и умножения на число. Полученное линейное пространство φ_B-распределений обозначается $D'_\varphi(B)$.

Определение 2. Последовательность (U_m) φ_B-распределений называется сходящейся к $U \in D'_\varphi(B)$, если $\lim\limits_{m\to\infty} \|U_m(\psi) - U(\psi)\| = 0$ при каждом $\psi \in L_{\varphi^*}(B)$, где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве B.

Определение 3. Коэффициентом Фурье $U \in D'_\varphi(B)$ по системе φ называется $U_p = U(\varphi_p^*)$, $p \in K^n$. Если U_p – числовой объект, то полагаем $U_p = \overline{U(\varphi_p^*)}$, где черта означает комплексное сопряжение. Ряд $\sum\limits_p U_p\varphi_p$ называется рядом Фурье φ_B- распределения U по системе φ.

В [10] доказано, что элементы $D'_\varphi(B)$ и только они разлагаются в ряды Фурье по данной системе элементов φ.

Перейдем теперь к задаче (1), (2). Пусть $\varphi = \{\exp((\mu + ip)x), p \in Z^n\}$, где $x \in \Omega$, i – мнимая единица, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ – произвольный вектор, не зависящий ни от x, ни от p. Тогда система $\varphi^* = \{(2\pi)^{-n}\exp((-\overline{\mu} + ip)x), p \in Z^n\}$ биортогональна к φ относительно скалярного произведения $(h_1,h_2) = \int\limits_0^{2\pi} h_1(x)\overline{h_2(x)}\,dx$, dx – мера Лебега.

Предположим, что для почти всех $t \in [a,b)$

$$U(t,x) = \sum_p U_p(t) \exp\left((\mu + ip)x\right),$$

$$f(t,x) = \sum_p f_p(t) \exp\left((\mu + ip)x\right),$$

$$g_j(x) = \sum_p g_{j,p}(t) \exp\left((\mu + ip)x\right)$$

есть разложения в ряд Фурье по системе φ φ_B-распределений $U(t,x)$, $f(t,x)$ и $g_j(x)$, $j = 0,\dots,M-1$; $U_p(t)$, $f_p(t)$ для почти всех t и $g_{j,p}$ принадлежат пространству B.

Определение 4. Функция $V(t) : [a,b) \to B$ называется абсолютно непрерывной, если существует функция $W(t) : [a,b) \to B$ такая, что $\|W(t)\| \in L^1_{loc}([a,b))$ и $V(t) = \int\limits_a^t W(s)\,ds$.

Определение 5. φ_B-распределение U называется решением задачи (1), (2), если коэффициенты Фурье $U_p(t)$ абсолютно непрерывны, в $D'_\varphi(B)$ выполняются равенства (2) и почти всюду равенство (1).

В связи с последним определением поясним, что понимается под $D_t^j D_x^\alpha U$ и $D_t^j\big|_{t=a}$. Поскольку функции $U_p^{(j)}(t)$, $j = 0,\dots,M-1$, абсолютно непрерывны, то в $D'_\varphi(B)$ сходятся ряды

$$\sum_p U_p^{(j)}(t)(\mu + ip)^\alpha \exp\left((\mu + ip)x\right) \tag{4}$$

и при $j = M$ ряд сходится почти всюду. Суммой ряда (4) является $D_t^j D_x^\alpha U$. Аналогичный смысл имеет $D_t^j\big|_{t=a}$. Ясно, что почти всюду в $D'_\varphi(B)$ сходится ряд

$$\sum_p \left(\sum_{j=0}^M \sum_{\alpha\in\Phi} (\mu + ip)^\alpha C_{\alpha,j}(t) U_p^{(j)}(t) \right) \exp((\mu + ip)x).$$

Итак, задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешима каждая задача

$$\sum_{j=0}^M \sum_{\alpha\in\Phi} (\mu + ip)^\alpha C_{\alpha,j}(t) U_p^{(j)}(t) = f_p(t), \quad t \in [a,b), \tag{5}$$

$$U_p^{(j)}(a) = g_{j,p}, \quad j = 0,\dots,M-1, \quad p \in Z^n. \tag{6}$$

Положим $Q_{p,j}(t) = \sum\limits_{\alpha\in\Phi} (\mu + ip)^\alpha C_{\alpha,j}(t)$. Очевидно, что при каждом $t \in [a,b)$ $Q_{p,j}(t) : B \to B$ линейные операторы.

Теорема. *Пусть при некотором μ операторы $Q_{p,M}(t)$ при всех $p \in Z^n$ имеют обратные, $\left\|(Q_{p,M}(t))^{-1} Q_{p,j}(t)\right\| \le C(t)$, где $C(t) \in L^1_{loc}([a,b))$ и $\left\|(Q_{p,M}(t))^{-1} f_p(t)\right\| \in L^1_{loc}([a,b))$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в пространстве $D'_\varphi(B)$, где $\varphi = \{\exp\left((\mu + ip)x\right),\ p \in Z^n\}$.*

Доказательство. Как следует из вышеизложенного, достаточно доказать однозначную разрешимость задач (5), (6). Перепишем равенство (5) в виде

$$U_p^{(M)}(t)+\sum_{j=0}^{M-1}F_{p,j}(t)U_p^{(j)}(t)=h_p(t),\quad t\in[a,b),\tag{7}$$

где $F_{p,j}(t)=(\mu+ip)^{\alpha}\left(Q_{p,M}(t)\right)^{-1}Q_{p,j}(t),\ h_p(t)=\left(Q_{p,M}(t)\right)^{-1}f_p(t)$.

Каждая из задач (7), (6) имеет вид

$$V^{(M)}(t)+\sum_{j=0}^{M-1}F_j(t)V^{(j)}(t)=g(t),\quad t\in[a,b),\tag{8}$$

$$V^{(j)}(a)=y_j,\quad j=0,\ldots,M-1,\tag{9}$$

где $F_j(t):B\to B$ – линейные непрерывные операторы и $\|g(t)\|\in L^1_{loc}\left([a,b)\right)$.

Докажем однозначную разрешимость задачи (8), (9) на произвольном отрезке $[a,b_1]\subset[a,b)$. Пусть $\{V_k(t)\}$ – последовательность, задаваемая формулами

$$V_k^{(M)}(t)=g(t)-\sum_{j=0}^{M-1}F_j(t)V_{k-1}^{(j)}(t),\quad V_k^{(j)}(a)=y_j,\quad k\in N,$$

$$V_0(t)=\sum_{j=0}^{M-1}\frac{(t-a)^j}{j!}y_j,\quad j=0,\ldots,M-1,\quad t\in[a,b_1].$$

Зафиксируем $t\in[a,b_1]$ и докажем, что для некоторой постоянной T_1 и всех $k\geq 2$ выполняются неравенства

$$\left\|V_k^{(j)}(t)-V_{k-1}^{(j)}(t)\right\|\leq\frac{T_1^{k-1}}{(k-1)!}\left(\int\limits_a^t C(s)ds\right)^{k-1},\quad j=0,\ldots,M-1.\tag{10}$$

Пусть $T_0=\max\limits_{j=0,\ldots,M-1}\max\limits_{s\in[a,t]}\left\|V_1^{(j)}(s)-V_0^{(j)}(s)\right\|$,

$$T_1=\max_{j=0,\ldots,M-1}\left\{M(b_1-a)^{M-j-1},T_0M(b_1-a)^{M-j-1}\right\}.$$

Имеем

$$\left\|V_2^{(M-1)}(t)-V_1^{(M-1)}(t)\right\|\leq\sum_{j=0}^{M-1}\int\limits_a^t\|F_j(s)\|\cdot\left\|V_1^{(j)}(s)-V_0^{(j)}(s)\right\|ds\leq$$

$$\leq T_0M\int\limits_a^t C(s)\,ds\leq T_1\int\limits_a^t C(s)\,ds,$$

$$\left\|V_2^{(M-2)}(t)-V_1^{(M-2)}(t)\right\|\leq\int\limits_a^t\left\|V_2^{(M-2)}(s)-V_1^{(M-2)}(s)\right\|ds\leq$$

$$\leq T_0M(b_1-a)\int\limits_a^t C(s)\,ds\leq T_1\int\limits_a^t C(s)\,ds$$

и так далее.

В итоге получим

$$\left\|V_2^{(j)}(t)-V_1^{(j)}(t)\right\| \leq$$
$$\leq T_o M(b_1-a)^{M-j-1}\int\limits_a^t C(s)\,ds \leq T_1\int\limits_a^t C(s)\,ds, \quad j=0,\ldots,M-1.$$

Пусть неравенство (10) верно при $k\leq m$. Тогда

$$\left\|V_{m+1}^{(M-1)}(t)-V_m^{(M-1)}(t)\right\| \leq \sum_{j=0}^{M-1}\int\limits_a^t \|F_j(s)\|\cdot\left\|V_m^{(j)}(s)-V_{m-1}^{(j)}(s)\right\| ds \leq$$
$$\leq \frac{M\cdot T_1^{m-1}}{(m-1)!}\int\limits_a^t C(s)\left(\int\limits_a^s C(y)\,dy\right)^{m-1} ds =$$
$$= \frac{M\cdot T_1^{m-1}}{(m-1)!m}\left(\int\limits_a^t C(s)\,ds\right)^m \leq \frac{T_1^m}{m!}\left(\int\limits_a^t C(s)\,ds\right)^m,$$

то есть

$$\left\|V_{m+1}^{(M-1)}(t)-V_m^{(M-1)}(t)\right\| \leq \frac{T_1^m}{m!}\left(\int\limits_a^t C(s)\,ds\right)^m.$$

Используя последнее неравенство, легко получить, что

$$\left\|V_{m+1}^{(j)}(t)-V_m^{(j)}(t)\right\| \leq \frac{T_1^m}{m!}\left(\int\limits_a^t C(s)\,ds\right)^m, \quad j=0,\ldots,M-1.$$

Значит, неравенство (10) верно для $k=m+1$. При $k>r$ с помощью неравенства (10) получаем

$$\left\|V_k^{(M-1)}(t)-V_r^{(M-1)}(t)\right\| \leq \sum_{p=r+1}^{k}\left\|V_p^{(M-1)}(t)-V_{p-1}^{(M-1)}(t)\right\| \leq$$
$$\leq \sum_{p=r+1}^{k}\frac{T_1^{p-1}}{(p-1)!}\left(\int\limits_a^t C(s)\,ds\right)^{s-1} \leq$$
$$\leq \frac{T_1^r}{r!}\left(\int\limits_a^t C(s)\,ds\right)^{r-1}\cdot\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\left(T_1\int\limits_a^t C(s)\,ds\right)^q \to 0 \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

Таким образом, при каждом $t\in[a,b_1]$ последовательность $\left\{V_k^{(M-1)}(t)\right\}$ фундаментальна в банаховом пространстве B. Поэтому существует функция $W(t)$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|V_k^{(M-1)}(t)-W(t)\right\|=0$ при каждом $t\in[a,b_1]$. Обозначим через $V(t)$ функцию, удовлетворяющую условиям

$$V^{(M-1)}(t)=W(t), \quad V^{(j)}(a)=y_j, \quad j=0,\ldots,M-1.$$

Тогда из равенств

$$V_k^{(M-1)}(t) - y_{M-1} + \sum_{j=0}^{M-1} \int_a^t F_j(s) V_{k-1}^{(j)}(s)\, ds = \int_a^t g(s)\, ds$$

следует, что

$$V^{(M-1)}(t) - y_{M-1} + \sum_{j=0}^{M-1} \int_a^t F_j(s) V^{(j)}(s)\, ds = \int_a^t g(s)\, ds.$$

Это означает, что $V^{(M-1)}(t)$ абсолютно непрерывна и является φ_B-решением задачи (8), (9).

Мы доказали, что при каждом p задача (5), (6) имеет решение. Докажем его единственность.

Пусть $U_1(t)$ и $U_2(t)$ – решения задачи, положим $G(t) = U_1(t) - U_2(t)$. Тогда

$$G^{(M-1)}(t) + \sum_{j=0}^{M-1} \int_a^t F_j(s) G^{(j)}(s) ds = 0, \quad G^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, \ldots, M-1.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве неравенства (10), получим, что для некоторой постоянной T_2 справедливо неравенство

$$\left\| G^{(M-1)}(t) \right\| \le \frac{T_2^k}{k!} \left(\int_a^t C(s)\, ds \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поэтому $G^{(M-1)}(t) = 0$ для всех $t \in [a, b_1]$. Отсюда и из равенства $G^{(j)}(a) = 0$ следует, что $G(t) = 0$ для всех $t \in [a, b_1]$. В силу произвольности b_1 имеем, что $G(t) = 0$ для $t \in [a, b)$. □

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.13556.2019/13.1.

Литература

1. *Мокейчев В.С., Мокейчев А.В.* Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. I // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 1. – С. 25–35.
2. *Мокейчев В.С., Мокейчев А.В.* Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. II // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 7. – С. 30–41.
3. *Мокейчев В.С., Мокейчев А.В.* Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. III // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 11. – С. 50–59.
4. *Егоров Ю.В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.
5. *Mokeichev V.S., Sidorov A.M.* On an expansion in the series by given system of elements // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – Вып. 25. – С. 163–167.

6. *Мокейчев В.С., Сидоров А.М.* Псевдодифференциальные уравнения на торе // Материалы 18-й междунар. Сарат. зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения». – Саратов: Научн. книга, 2016. – С. 193.

7. *Мокейчев В.С., Сидоров А.М.* Корректно разрешимые задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Материалы 13-й междунар.й Казан. летней науч. шк.-конф. «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, Изд-во АН РТ, 2017. – С. 264–265.

8. *Мокейчев В.С., Сидоров А.М.* О понятии φ-решений линейных задач (на примере колебаний струны) // Тез. докл. 10-й Сарат. зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения». – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. – С. 94–95.

9. *Мокейчев В.С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 4. – С. 103–107.

10. *Мокейчев В.С.* О разложении в ряды по заданной системе элементов // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2011. – Вып. 7. – С. 144–152.

11. *Мокейчев В.С.* Пространство, элементы которого и только они разлагаются в ряды Фурье по заданной системе элементов // Евразийское научное объединение. – 2016. – Т. 1, № 10. – С. 24–31.

Поступила в редакцию
24.03.18

Мокейчев Валерий Степанович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Valery.Mokeychev@kpfu.ru*

Сидоров Анатолий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Anatoly.Sidorov@kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI**
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 4, pp. 762–770

A Dynamical Process of Several Variables

*V.S. Mokeichev**, *A.M. Sidorov***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **Valery.Mokeychev@kpfu.ru*, ***Anatoly.Sidorov@kpfu.ru*

Received March 24, 2018

Abstract

In the space of φ-distributions with values belonging to a Banach space, the process described by the problem of partial differential equation has been considered. Conditions under which the process is dynamic have been given. The notion of φ-distributions and φ-solutions has been introduced by V.S. Mokeichev as a tool for studying the solvability of some partial differential equations and mathematical models. Thus, it is possible to solve certain problems without any generalized solution (Schwartz distribution). Furthermore, an opportunity to explain the theory of solvability without assumptions on the type of the investigated partial differential equation (elliptic, parabolic, hyperbolic) and on whether the equation is scalar. One of principal advantages of the space of φ-distributions is that its elements and only they expand in the series by a given system of elements φ.

Keywords: partial differential equation, φ-distribution, φ-solution

Acknowledgments. The research was funded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities (project no. 1.13556.2019/13.1).

References

1. Mokeichev V.S., Mokeichev A.V. A new approach to the theory of linear problems for the systems of partial differential equations. I. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1999, no. 1, pp. 25–35. (In Russian)
2. Mokeichev V.S., Mokeichev A.V. A new approach to the theory of linear problems for the systems of partial differential equations. II. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1999, no. 7, pp. 30–41. (In Russian)
3. Mokeichev V.S., Mokeichev A.V. A new approach to the theory of linear problems for the systems of partial differential equations. III. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1999, no. 11, pp. 50–59. (In Russian)
4. Egorov Yu.V. *Lineinye differentsial'ye uravneniya glavnogo tipa* [Linear Differential Equations of Principal Type]. Moscow, Nauka, 1984. 360 p. (In Russian)
5. Mokeichev V.S., Sidorov A.M. On an expansion in the series by given system of elements. *Issled. Prikl. Mat. Inf.*, 2004, no. 25, pp. 163–167. (In Russian)
6. Mokeichev V.S., Sidorov A.M. A pseudodifferential operator on a torus. *Materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shk. "Sovremennye problemy theorii fuktsii i ikh prilozhenia"*

[Proc. 18th Sarat. Int. Winter Math. Sch. "Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications"]. Saratov, Nauchn. Kniga, 2016, p. 193. (In Russian)

7. Mokeichev V.S., Sidorov A.M. Correctly solvable problems in linear partial differential equations. *Materialy 13-i mezhdunar. Kazan. letnei nauch. shk.-konf. Theoriya funktsii, eye prilozhenia i smezhnye voprosy* [Proc. 13th Int. Kazan. Summer Sch.–Conf. "The Theory of Functions, Its Applications and Related Questions" (Kazan, August 21–27, 2017)]. Kazan, Izd. Kazan. Mat. O-va., Izd. Akad. Nauk RT, 2017, pp. 264–265. (In Russian)

8. Mokeichev V.S., Sidorov A.M. On the notion of φ solutions of linear problems (using the example of string oscillations). *Tezisy dokl. 10-i Saratovskoi zimnei shk. "Sovremennye problemy theorii funktsii i ikh prilozhenia"* [Proc. 10th Sarat. Winter Math. Sch. "Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications"]. Saratov, Izd. Sarat. Univ., 2000, pp. 94–95. (In Russian)

9. Mokeichev V.S. Boundary-value problems for partial differential equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1975, no. 4, pp. 103–107. (In Russian)

10. Mokeichev V.S. On expansion into series by a given system of elements. *Issled. Prikl. Mat. Inf.*, Kazan, 2011, no. 7, pp. 144–152. (In Russian)

11. Mokeichev V.S. A space with the only elements characterized by Fourier-series expansion by a given system of elements. *Evrraz. Nauchn. Ob"edinenie*, 2016, vol. 1, no. 10, pp. 24–31. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования***: *Мокейчев В.С., Сидоров А.М.* Динамический процесс нескольких переменных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 762–770. ⟩

⟨ ***For citation***: Mokeichev V.S., Sidorov A.M. A dynamical process of several variables. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 762–770. (In Russian) ⟩