УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 155, кн. 3 Физико-математические науки *2013*

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РОССБИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Свидлов

Аннотация

В работе даны обобщенные постановки первой и второй начально-краевых задач для уравнения Россби, доказана однозначная разрешимость этих задач. Для первой начально-краевой задачи построено приближенное решение, исследована его сходимость к обобщенному, приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: уравнение Россби, уравнение соболевского типа, уравнение планетарных волн.

Введение

В геофизической гидродинамике изучаются планетарные волны, возникновение и распространение которых обусловливается вращением Земли. Эволюция этих волн описывается уравнением Россби [1, § 43]

$$\Delta u_t + u_{x_1} = f.$$

Решение u уравнения Россби является функцией тока течения, то есть физическую скорость $v = (v_1, v_2)$ можно определить следующим образом: $v_1 = u_{x_2}$, $v_2 = u_{x_1}$. Кроме того, можно рассматривать и нелинейные варианты уравнения Россби, включив нелинейность в правую часть f подобно тому, как это сделано в работе [2].

Впервые планетарные волны были рассмотрены в работе К.-Г. Россби [3] в 1949 г. Этой тематике посвящен ряд работ (см. [4–8] и приведенную в них библиографию), в которых рассмотрены постановки некоторых задач для уравнения Россби.

В настоящей работе сформулирована обобщенная постановка первой начально-краевой задачи для уравнения Россби, построено приближенное решение, исследована его сходимость, приведены результаты численного эксперимента. Приведены также обобщенная постановка и теорема о разрешимости второй начально-краевой задачи.

1. Обобщенная постановка первой начально-краевой задачи

Будем считать, что область течения $Q \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, ∂Q – кусочно-гладкая поверхность, $u_0 \in H_0^1(Q)$, $T \in (0, +\infty]$, $f \in C\big([0, T); L_2(Q)\big)$.

Определение 1. Классическим решением первой начально-краевой задачи для уравнения Россби будем называть функцию $u \in C^1([0, +\infty); C^2(\overline{Q}))$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u_t + u_{x_1} = f \quad \text{при} \;\; 0 < t < T, \quad x \in Q, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

и граничному

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{3}$$

Определение 2. Функцию $u \in C^1\big([0,T); H_0^1(Q)\big)$ будем называть обобщенным решением первой начально-краевой задачи для уравнения Россби, если она удовлетворяет равенству (2) и при любом $t \in (0,T)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \big(\nabla u_t(x,t)\nabla h(x) - u_{x_1}(x,t)h(x)\big)\,dx = -\int\limits_Q f(x,t)h(x)\,dx \tag{4}$$

для любой функции $h \in H_0^1(Q)$.

Возможны варианты обобщенных постановок первой начально-кравой задачи для уравнения Россби с более слабыми требованиями на гладкость [9].

Связь между обобщенным и классическим решениями устанавливается следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть $u_0 \in C^2(\overline{Q})$. Функция $u \in C^1\left([0,T); C^2(\overline{Q})\right)$ является классическим решением тогда и только тогда, когда является обобщенным решением.*

Доказательство. Для $u \in C^1\left([0,T); C^2(\overline{Q})\right)$ при любых $h \in H_0^1(Q)$, $t \in (0,T)$ имеют место равенства

$$\int\limits_Q \left(\Delta u_t(x,t)h(x) + \nabla u_t(x,t)\nabla h(x)\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_Q \operatorname{div}(h(x)\nabla u_t(x,t))\,dx =$$

$$= \int\limits_{\partial Q} h(x)\frac{\partial}{\partial \nu}u_t(x,t)\,dx = 0.$$

Вычтем из равенства

$$\int\limits_Q \left(\Delta u_t(x,t)h(x) + \nabla u_t(x,t)\nabla h(x)\right)\,dx = 0$$

интегральное тождество (4), получим равенство

$$\int\limits_Q \big(\Delta u_t(x,t)h(x) + u_{x_1}(x,t)h(x)\big)\,dx = \int\limits_Q f(x,t)h(x)\,dx, \tag{5}$$

эквивалентное интегральному тождеству (4). С другой стороны, в силу произвольности $h \in H_0^1(Q)$ и $t \in (0,T)$ равенство (5) эквивалентно уравнению (1).

Заметим, что для функции u принадлежность пространству $C^1\left([0,T); H_0^1(Q)\right)$ и выполнение условия (3) равносильны; это завершает доказательство леммы. □

Докажем эквивалентность обобщенной постановки первой начально-краевой задачи для уравнения Россби задаче Коши (6) для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве $H_0^1(Q)$.

Лемма 2. *Функция* $u \in C^1\big([0,T); H_0^1(Q)\big)$ *удовлетворяет равенствам*

$$\begin{cases} u_t(t) = \Delta^{-1}\left(f(t) - \dfrac{\partial}{\partial x_1}u(t)\right) \quad \text{при всех} \ \ t \in [0,T), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда является обобщенным решением задачи (1)–(3).

Здесь $\Delta^{-1} : L_2(Q) \to H_0^1(Q)$ – оператор, который ставит в соответствие правой части ψ обобщенное решение φ задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \psi \ \text{в} \ Q, \\ \varphi|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

то есть $\Delta^{-1}\varphi = \psi$ тогда и только тогда, когда для любого $h \in H_0^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \nabla\varphi(x)\nabla h(x)\,dx = -\int\limits_Q \psi(x)h(x)\,dx. \tag{8}$$

Известно, что оператор Δ^{-1} является непрерывным [10].

Доказательство леммы 2 основывается на сопоставлении тождеств (8) и (4).

Из леммы 2 следует

Теорема 1. *Для любых* $u_0 \in H_0^1(Q)$ *и* $f \in C\big([0,T); L_2(Q)\big)$ *обобщенное решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно. При этом оно имеет вид*

$$u(t) = \exp\left(-t\Delta^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(u_0 + \int\limits_0^t \exp\left(\tau\Delta^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Delta^{-1}f(\tau)\,d\tau\right). \tag{9}$$

Доказательство. Задача Коши (6) имеет единственное решение для любых $u_0 \in H_0^1(Q)$ и $f \in C\big([0,T); L_2(Q)\big)$, это решение имеет вид (9) [11, гл. VII, § 31]. Следовательно, по лемме 2 существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3), при этом оно имеет вид (9). Доказательство теоремы завершено. □

2. Приближенное решение

Для простоты изложения далее будем полагать $f = 0$, $T < +\infty$. Рассмотрим оператор $A : H_0^1(Q) \to H_0^1(Q)$, определенный равенством $A = -\Delta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$. Этот оператор является непрерывным. Заметим, что при $f = 0$ из равенства (9) следует равенство

$$u(t) = \exp(tA)\,u_0. \tag{10}$$

Определение 3. Пусть $p, N \in \mathbb{N}$, $\tau = T/N$, $\varepsilon > 0$. Назовем (p,τ,ε)-приближенным решением первой начально-краевой задачи последовательность функций $\{u^i\}_{i=0}^N$, $u^i \in H^1(Q)$, определенную следующим образом:

$$u^0 = u_0,$$

$$u^i = v_0^i + \tau v_1^i + \frac{\tau^2}{2!}v_2^i + \dots + \frac{\tau^p}{p!}v_p^i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где $v_0^i = u^{i-1}$, функции $v_k^i \in H^1(Q)$ для всех $k = 1, 2, \dots, p$ удовлетворяют неравенству

$$\left\|v_k^i - Av_{k-1}^i\right\|_{H_0^1(Q)} < \varepsilon.$$

Сходимость приближенного решения к обобщенному решению задачи (1)–(3) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть u – обобщенное решение первой начально-краевой задачи для уравнения Россби, а $\{u^i\}_{i=1}^N$ – ее (p,τ,ε)-приближенное решение. Тогда для всех $i=1,2,\dots,N$ имеют место неравенства*

$$\left\|u^i - u(i\tau)\right\|_{H_0^1(Q)} \le \frac{1}{P(\tau)}\left(\varepsilon S(\tau) + K\tau^p\right)\left((1+\tau P(\tau))^i - 1\right), \tag{11}$$

где константа K и полиномы $P(\tau)$, $S(\tau)$ определены следующим образом:

$$K = \|A\|^{p+1} \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^1(Q)} \exp\left(\|A\|\,T\right), \tag{12}$$

$$P(\tau) = \sum_{k=0}^{p-1} \|A\|^k \frac{\tau^k}{k!}, \quad S(\tau) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{j=0}^{k} \|A\|^j\right)\frac{\tau^k}{(k+1)!}.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $b>0$, $m>0$, $\{a_i\}_{i=0}^N$ – множество неотрицательных действительных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$a_0 = 0,$$

$$a_i \le (1+b)a_{i-1} + m, \quad i=1,2,\dots,N.$$

Тогда для $i=0,1,\dots,N$ имеет место неравенство

$$a_i \le \frac{m}{b}\left((1+b)^i - 1\right). \tag{13}$$

Доказательство. Доказательство будем вести по индукции. Очевидно, что для $i=0$ неравенство (13) выполняется. Предположим, что оно выполняется для некоторого $i-1$. Тогда

$$a_i \le (1+b)\frac{m}{b}\left((1+b)^{i-1} - 1\right) + m = \frac{m}{b}\left((1+b)^i - 1\right),$$

то есть неравенство (13) имеет место и для i. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2. Используя формулу (10) и определение (p,τ,ε)-приближенного решения, представим разность $u^i - u(i\tau)$ в виде

$$u^i - u(i\tau) = \sum_{k=0}^{p}\frac{\tau^k}{k!}\left(v_k^i - A^k u((i-1)\tau)\right) - \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{k!}A^k u((i-1)\tau).$$

Теперь, пользуясь неравенством треугольника, получим неравенство

$$\left\|u^i - u(i\tau)\right\|_{H_0^1(Q)} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{p}\frac{\tau^k}{k!}\left\|v_k^i - A^k u((i-1)\tau)\right\|_{H_0^1(Q)} + \left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\tau^k}{k!}A^k u((i-1)\tau)\right\|_{H_0^1(Q)}. \tag{14}$$

Последнее слагаемое в правой части неравенства (14) оценим следующим образом:

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} A^k u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq K\tau^{p+1},$$

где K определено формулой (12). Для оценки остальных слагаемых в правой части неравенства (14) докажем справедливость неравенства

$$\left\| v_k^i - A^k u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} \|A\|^j + k \|A\|^k \left\| u^{i-1} - u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \tag{15}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, p$. При $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\left\| v_1^i - Au((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \left\| v_1^i - Au^{i-1} \right\|_{H_0^1(Q)} + \left\| Au^{i-1} - Au((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon + \|A\| \left\| u^{i-1} - u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)}, \end{aligned}$$

то есть неравенство (15) выполняется. Предположим, что для некоторого $k < p$ неравенство (15) выполнено, тогда оно выполнено и для $k+1$, так как

$$\begin{aligned} &\left\| v_{k+1}^i - A^{k+1} u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \left\| v_{k+1}^i - Av_k^i \right\|_{H_0^1(Q)} + \left\| Av_k^i - A^{k+1} u^{i-1} \right\|_{H_0^1(Q)} + \\ &+ \left\| A^{k+1} u^{i-1} - A^{k+1} u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon + \|A\| \left\| v_k^i - A^k u^{i-1} \right\|_{H_0^1(Q)} + \|A\|^{k+1} \left\| u^{i-1} - u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq \\ &\leq \varepsilon + \|A\| \left(\varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} \|A\|^j + k \|A\|^k \left\| u^{i-1} - u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \right) + \\ &+ \|A\|^{k+1} \left\| u^{i-1} - u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} = \\ &= \varepsilon \sum_{j=0}^{k} \|A\|^j + (k+1) \|A\|^{k+1} \left\| u^{i-1} - u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)}. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (15) имеет место для всех $k = \overline{1, 2, \ldots, p}$.

С помощью неравенства (15) преобразуем неравенство (14) к виду

$$\left\| u^i - u(i\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq (1 + \tau P(\tau)) \left\| u^{i-1} - u((i-1)\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} + \varepsilon\tau S(\tau) + K\tau^{p+1}. \tag{16}$$

Применяя лемму 3, из неравенства (16) получим оценку (11). Доказательство теоремы завершено. □

Следствие из теоремы 2. *Обозначим*

$$C_1 = \frac{\sup\limits_{\tau \in [0,T]} S(\tau)}{\inf\limits_{\tau \in [0,T]} P(\tau)}, \quad C_2 = \frac{K}{\inf\limits_{\tau \in [0,T]} P(\tau)}, \quad C_3 = \sup_{\tau \in [0,T]} P(\tau).$$

Тогда из неравенства (11) *следует выполнение неравенства*

$$\left\| u^i - u(i\tau) \right\|_{H_0^1(Q)} \leq (C_1 \varepsilon + C_2 \tau^p) \exp(C_3 T) \tag{17}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, N$.

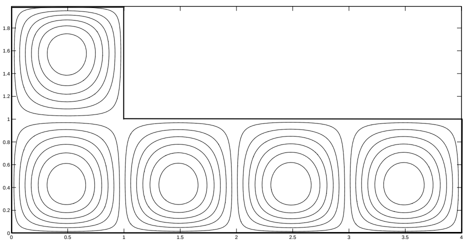

Рис. 1. $t = 0$

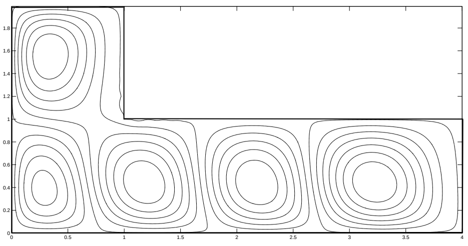

Рис. 2. $t = 6$

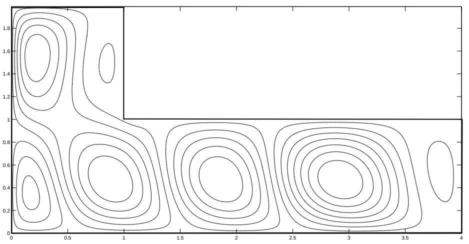

Рис. 3. $t = 12$

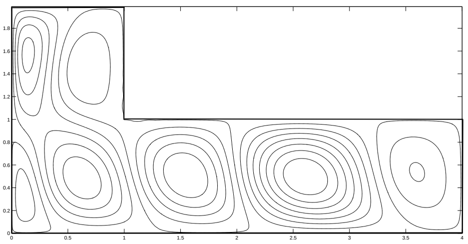

Рис. 4. $t = 18$

3. Результаты численного эксперимента

Наибольшую сложность при построении приближенного решения, особенно в областях сложной конфигурации, представляет нахождение функций v_k^i, которое сводится к численному решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона (7). Для этого использовался метод точечных потенциалов [12, 13].

Опишем результаты двух численных экспериментов. В первом (тестовом) случае задача решалась в квадрате $Q = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$,

$$u_0(x) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\cos(x_1\pi\sqrt{2}),$$

$$u(x,t) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\cos\left(x_1\pi\sqrt{2} + \frac{t\sqrt{2}}{4\pi}\right).$$

Сравнение аналитического решения с численным решением подтвердило теоретические результаты о сходимости, изложенные в п. 3.

Во втором случае задача решалась в Г-образной области,

$$u_0(x) = x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2)\sin(\pi x_1).$$

На рис. 1–4 приведены результаты расчетов (линии уровня функции u) при $t = 0$, 6, 12 и 18 соответственно. Наблюдалось смещение вихревых пятен в западном направлении, а также образование и исчезновение вихревых пятен на восточной и западной границах соответственно.

4. Вторая начально-краевая задача

Обозначим $L_2^c(Q) = \{v \in L_2(Q) : (v,1)_{L_2(Q)} = 0\}$, $H_c^1(Q) = L_2^c(Q) \cap H^1(Q)$.

Определение 4. Обобщенным решением второй начально-краевой задачи

$$\Delta u_t + u_{x_1} = 0, \quad T > t > 0, \tag{18}$$

$$u(0) = u_0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u\bigg|_{\partial Q} = 0 \tag{20}$$

будем называть функцию $u \in C^1\big([0,T); H_c^1(Q)\big)$, удовлетворяющую равенству (19) и для любого $t \in (0,T)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \big(\nabla u_t(x,t)\nabla h(x) - u_{x_1}(x,t)h(x)\big)\,dx = 0$$

при любой функции $h \in H^1(Q)$.

Разрешимость обобщенной постановки второй начально-краевой задачи для уравнения Россби устанавливается следующей теоремой (см. [15]).

Теорема 3. *Пусть в области Q выполняется неравенство Пуанкаре* [14, гл. 3, § 6]. *Обобщенное решение задачи* (18)–(20) *существует тогда и только тогда, когда $u_0 \in H_c^1(Q)$ такова, что $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_0, h\right)_{L_2(Q)} = 0$ для любой $h \in L_2(Q)$, зависящей только от переменной x_1. Причем решение единственно и имеет вид*

$$u(t) = \exp\left(-t\Delta_2^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u_0. \tag{21}$$

Здесь $\Delta_2^{-1} : L_2^c(Q) \to H_c^1(Q)$ – оператор, который ставит в соответствие правой части ψ обобщенное решение φ задачи Неймана для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \psi \quad \text{в} \quad Q, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\bigg|_{\partial Q} = 0. \end{cases}$$

Автор выражает глубокую признательность А.Э. Бирюку, М.И. Дроботенко и В.В. Кожевникову за плодотворные обсуждения результатов работы.

Summary

A.A. Svidlov. Solving the Linear Rossby Equation in a Finite Domain.

We state a generalized formulation for the first and the second initial-boundary value problems for the Rossby equation and prove the unique solvability of these problems. For the first initial-boundary value problem, the approximate solution is constructed. The convergence rate to the generalized solution is studied. The results of the numerical experiments are discussed.

Keywords: Rossby equation, Sobolev-type equations, planetary wave equation.

Литература

1. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 335 с.

2. *Biryuk A.* Lower bounds for derivatives of solutions for nonlinear Schrödinger equations // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. – 2009. – V. 139, No 2. – P. 237–251.

3. *Rossby C.-G.* On the dispersion of planetary waves in a barotropic atmosphere // Tellus. – 1949. – V. 1, No 1. – P. 54–58.

4. *Успенский С.В., Демиденко Г.В.* О поведении при $t \to \infty$ решений некоторых задач гидродинамики // Докл. РАН. – 1985. – Т. 280, № 5. – С. 1072–1075.

5. *Тикиляйнен А.А.* Об одной задаче, связанной с теорией планетарных волн // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1988. – Т. 28, № 4. – С. 534–548.

6. *Огородников И.Е.* Стабилизация решения уравнения планетарных волн в неограниченных по пространственным переменным областях: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – М., 2000. – 101 с.

7. *Ильин А.М.* О поведении решения одной краевой задачи при $t \to \infty$ // Матем. сборник. – 1972. – Т. 87, № 4. – С. 529–553.

8. *Лежнёв В.Г.* Асимптотические задачи линейной гидродинамики. – Краснодар: Изд-во КубГУ, 1993. – 92 с.

9. *Свидлов А.А., Бирюк А.Э., Дроботенко М.И.* Негладкое решение уравнения Россби // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2013. – № 2. – С. 89–94.

10. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 401 с.

11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.

12. *Купрадзе В. Д.* О приближенном решении задач математической физики // Усп. матем. наук. – 1967. – Т. XXII, № 2. – С. 59–107.

13. *Дроботенко М.И., Игнатьев Д.В.* Метод точечных потенциалов для уравнения Лапласа // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2007. – № 1. – С. 5–9.

14. *Михлин С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.

15. *Свидлов А.А.* О второй начально-краевой задаче для уравнения Россби в ограниченной области // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. – 2009. – № 3. – С. 80–84.

Поступила в редакцию
08.04.13

Свидлов Александр Анатольевич – преподаватель кафедры теории функций, Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия.

E-mail: *svidlov@mail.ru*