

УДК 519.6:532:533

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ МЕТОДА SIP-CUP НА АДАПТИВНЫХ SOROBAN-СЕТКАХ

А.А. Аганин, Т.С. Гусева

Аннотация

Сравнивается эффективность метода SIP-CUP на фиксированной равномерной разнесенной сетке и модификаций этого метода на неразнесенных динамически адаптивной soroban-сетке и фиксированной равномерной сетке для численного решения задач о распространении волн в однородных (жидкости) и неоднородных (при наличии контактных границ газ – газ и газ – жидкость) средах. Показано, что в сравнении с исходным вариантом метода SIP-CUP на равномерной разнесенной сетке его модификация на soroban-сетке позволяет проводить расчеты с аналогичной или даже более высокой точностью при значительно меньшем числе узлов. Модификация метода SIP-CUP на фиксированной неразнесенной равномерной сетке является наименее эффективной. Кроме того, она может приводить к возникновению немонотонностей в решении.

Ключевые слова: ударные волны, неоднородная среда, метод SIP-CUP, адаптивные soroban-сетки.

Введение

Для расчета задач со значительными и быстрыми деформациями контактных границ и ударными волнами (как, например, в задачах динамики пузырька в жидкости вблизи стенки) наиболее естественным является подход, в котором и ударные волны, и контактные границы рассчитываются на эйлеровой сетке сквозным образом (отслеживаются неявно). Сквозной расчет ударных волн и контактных границ реализуется, в частности, в методе SIP-CUP (Constrained Interpolation Profile Combined Unified Procedure) [1]. В своих первоначальных версиях метод SIP-CUP был ориентирован на использование эйлеровых расчетных сеток. Одна из таких версий была положена в основу реализованной ранее методики расчета динамики жидкости и газа без явного выделения межфазной границы на стационарных декартовых разнесенных сетках [2, 3]. В этом случае контактная граница представляет собой область с ненулевым градиентом функции-идентификатора среды и большим градиентом плотности для границ типа газ – жидкость. Данная методика была использована для расчета задач, в которых сгущение сетки было необходимо лишь в относительно небольшой окрестности межфазной границы. Однако из-за того, что межфазная граница была криволинейной, сильно деформировалась, быстро и значительно перемещалась, приходилось использовать неравномерные сетки со сгущением в большей части расчетной области, что приводило к значительному увеличению потребностей компьютерного времени. Кроме того, нужно отметить, что хотя прямое применение метода SIP на неравномерных сетках и возможно без снижения точности, в многомерных задачах такой подход усложняется [4]. При использовании же метода SIP на неравномерных сетках в сочетании

с преобразованием координат порядок точности метода существенно снижается даже при небольшом нарушении однородности сетки [4].

Представляется, что в задачах с ударными волнами и быстро изменяющимися контактными границами более предпочтительны динамически адаптивные сетки, сгущающиеся в окрестности больших градиентов решения и разреженные в областях, где градиенты решения малы. Для подобных задач оптимальными являются подходы, в которых отсутствуют ограничения, обусловленные движением и деформацией адаптивной сетки. Один из таких подходов предложен в [4, 5]. Дискретизация расчетной области в нем осуществляется посредством системы узлов, не связанных между собой какими-либо ячейками. Эта система узлов, называемая soroban-сеткой (от япон. *soroban* – счеты), по-существу, является неструктурированной сеткой. С одной стороны, при отсутствии связей между узлами в виде ячеек становится затруднительным использование разнесенных сеток. С другой стороны, отсутствие таких связей освобождает от ограничений, обусловленных деформациями сетки. В [5] предложена также соответствующая модификация метода SIP-CUP, позволяющая сохранить достоинства его первоначальных версий. Эффективность метода SIP-CUP на soroban-сетках обусловлена, в частности, простотой алгоритма построения сетки, уменьшением общего числа узлов сетки за счет динамической адаптации, использованием метода SIP для интерполяции. В настоящей работе излагаются основные положения численной методики расчета двумерных волн в неоднородных средах без явного выделения контактных границ на основе предложенной в [5] модификации метода SIP-CUP на динамически адаптивных soroban-сетках. Проведено тестирование разработанных на основе этой методики алгоритмов и программ на задачах в одномерной и двумерной постановке и выполнено сравнение с численными решениями, полученными на фиксированных равномерных сетках: с использованием модификации метода SIP-CUP на неразнесенных сетках и первоначального варианта SIP-CUP на разнесенных сетках [2, 3].

1. Методика расчета

1.1. Построение сетки. В двумерном случае soroban-сетка представляет собой набор узлов, расположенных на линиях, параллельных, например, оси Ox (рис. 1). Количество узлов на разных линиях может быть различным. На каждом временном шаге строится новая сетка узлов $\mathbf{x}^{n+1} = (x^{n+1}, y^{n+1})$, адаптирующаяся к решению и никак не связанная со старой сеткой узлов $\mathbf{x}^n = (x^n, y^n)$: линии могут перемещаться в поперечном направлении, в случае, приведенном на рис. 1, – в направлении оси Oy , узлы на каждой из линий могут перемещаться вдоль нее, количество линий и узлов может изменяться. Для нумерации линий и узлов вводятся независимые одномерные массивы, узлы нумеруются сквозным образом.

Для адаптации сетки к решению используется монитор-функция M , определяемая пространственным распределением какого-либо параметра решения f (например, плотности). В одномерном случае она имеет вид

$$M(x, t) = \sqrt{1 + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2} + \beta \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \quad x \in [x_S, x_E].$$

Здесь x_S, x_E – координаты начала и конца отрезка, на котором строится сетка, α, β – положительные константы. В областях с возрастающими по модулю градиентами решения функция $M(x, t)$ также возрастает.

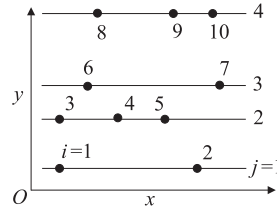


Рис. 1. Двумерная соболев-сетка, j – номер линии, i – номер узла

Введя функцию

$$I(x, t) = \int_{x_S}^x M(x, t) dx,$$

можно определить координаты сетки из N^{n+1} узлов на временном шаге $n + 1$, исходя из условия, что приращение функции I на каждом отрезке будущей сетки постоянно и равно $I(x_E)/(N^{n+1} - 1)$:

$$x_i^{n+1} = I^{-1} \left(i \frac{I(x_E)}{N^{n+1} - 1} \right).$$

Здесь I^{-1} – функция, обратная к положительной возрастающей функции I . Значения обратной функции могут быть получены линейной интерполяцией

$$x_i^{n+1} = \frac{(I_{i+1}^n - I_0)x_i^n + (I_0 - I_i^n)x_{i+1}^n}{I_{i+1}^n - I_i^n},$$

где $I_k^n = I(x_k^n, t^n)$, $I_0 \in [I_i^n, I_{i+1}^n]$. Количество узлов сетки может выбираться произвольным образом. В данном алгоритме оно задается как округленное до целого числа отношение интеграла монитор-функции по всей длине линии к заданному максимальному шагу сетки

$$N^{n+1} = \text{int} \left(\frac{I(x_E)}{\Delta x_{\max}} \right) + 1.$$

Соотношение максимального и минимального шагов можно регулировать, вводя ограничение на монитор-функцию

$$M(x, t) = \min \left(\sqrt{1 + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2} + \beta \left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right|, M_{\max} \right), \quad x \in [x_S, x_E],$$

где M_{\max} – константа. Если M принимает везде минимальное значение (равное 1), то строится равномерная сетка с шагом Δx_{\max} . В противном случае минимальный шаг сетки будет определяться как $\Delta x_{\min} = \Delta x_{\max}/M_{\max}$.

В двумерном случае монитор-функция определяется свойствами поверхности, представляющей собой зависимость выбранного параметра от двух пространственных координат:

$$M(x, y, t) = \sqrt{1 + \alpha \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)} + \beta \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \right| \right),$$

$$x \in [x_S, x_E], \quad y \in [y_S, y_E].$$

При построении сетки сначала определяются новые позиции линий y_j^{n+1} . Для этого используется одномерная монитор-функция

$$M^y(y, t) = q \max_{x_S \leq x \leq x_E} M(x, y, t) + (1 - q) \frac{1}{x_E - x_S} \int_{x_S}^{x_E} M(x, y, t) dx, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Затем для каждой новой линии y_j^{n+1} определяются новые позиции узлов с использованием значений функции $M^j(x, t) = M(x, y_j^{n+1}, t)$, получаемых линейной интерполяцией.

1.2. Уравнения динамики сжимаемой среды. В случае двух контактирующих сред их динамика без учета эффектов вязкости и теплопроводности описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, & \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p}{\rho}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p &= -\rho C_S^2 \nabla \cdot \mathbf{u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$C_S = \varphi C_{S1} + (1 - \varphi) C_{S2}, \quad C_{Si} = \sqrt{\Gamma_i(p + B_i)/\rho},$$

ρ – плотность, \mathbf{u} – скорость, p – давление, C_{Si} – скорость звука, Γ_i, B_i – константы уравнения состояния Тэта для жидкости, $\Gamma_i = \gamma$, $B_i = 0$ для газа (γ – показатель адиабаты), φ – функция-идентификатор среды. Предполагается, что $0 \leq \varphi \leq 1$: в области первой среды $\varphi = 1$, в области второй среды $\varphi = 0$, а в малой окрестности их контактной границы φ непрерывна и монотонно меняется от 0 до 1.

1.3. Основные положения численного метода. Система (1) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f} = \mathbf{G}, \quad (2)$$

где $\mathbf{f} = (\rho, \mathbf{u}, p, \varphi)$, $\mathbf{G} = (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, -\rho^{-1} \nabla p, -\rho C_S^2 \nabla \cdot \mathbf{u}, 0)$.

Как и в работах [1, 4–6], численное решение системы (2) разбивается на конвективную и неконвективную стадии

$$\frac{\mathbf{f}^* - \mathbf{f}^n}{\Delta t^n} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^*}{\Delta t^n} = \mathbf{G}, \quad (4)$$

где \mathbf{f}^* – результат расчета конвективной стадии (3).

1.4. Решение уравнений конвективной стадии. Для расчета группы уравнений переноса (3) применяется метод RCIP (Rational-Cubic Interpolation Propagation), являющийся одним из вариантов метода CIP. Решение уравнения переноса

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0$$

в узле \mathbf{x}^{n+1} в момент $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$ можно приближенно записать в виде

$$f^* = f^n(\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{n+1})\Delta t^n),$$

где аргумент представляет собой отправную точку – положение «лагранжевой частицы», которая за время Δt^n переместится в узел новой сетки \mathbf{x}^{n+1} . Если положение отправной точки не совпадает с узлами старой сетки, то значение переносимой величины в этой точке интерполируется по известным значениям f^n на старой сетке \mathbf{x}^n . Ниже это будет описано подробнее. Так как узлы старой и новой сеток также могут не совпадать, значение $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{n+1})$ в узле новой сетки определяется интерполированием с применением значений \mathbf{u}^n на старой сетке \mathbf{x}^n .

В методе RCIP кроме узловых значений самой функции f независимыми искомыми параметрами являются также производные функции в узлах сетки, в двумерном случае – по обеим координатам f_x, f_y . Далее дифференцирование по x и y обозначается как $\partial_x(\cdot), \partial_y(\cdot)$ соответственно, а для обозначения производных, которые предполагается аппроксимировать конечными разностями, используются обозначения $\partial(\cdot)/\partial x, \partial(\cdot)/\partial y$. Неизвестные f_x, f_y определяются уравнениями, полученными дифференцированием (2) по x и по y соответственно:

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_x = \partial_x G - \partial_x \mathbf{u} \cdot \nabla f, \quad \frac{\partial f_y}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_y = \partial_y G - \partial_y \mathbf{u} \cdot \nabla f.$$

Решение этих уравнений также осуществляется путем расщепления на конвективную стадию

$$\frac{f_x^* - f_x^n}{\Delta t^n} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_x = 0, \quad \frac{f_y^* - f_y^n}{\Delta t^n} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_y = 0, \quad (5)$$

которая дополняется соотношениями

$$\tilde{f}_x = f_x^* - \Delta t^n (u_x f_x^* + v_x f_y^*), \quad \tilde{f}_y = f_y^* - \Delta t^n (u_y f_x^* + v_y f_y^*), \quad (6)$$

и неконвективную стадию

$$\frac{f_x^{n+1} - \tilde{f}_x}{\Delta t^n} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{f_y^{n+1} - \tilde{f}_y}{\Delta t^n} = \frac{\partial G}{\partial y}. \quad (7)$$

В соотношениях (6) используются значения u_x, u_y, v_x, v_y , которые находятся одновременно с $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{n+1})$.

Одномерная интерполяционная функция, определенная на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, имеет вид [6]

$$\text{RCIP}(f_i, f_{i+1}, f_{xi}, f_{xi+1}, X, x_{i+1} - x_i) = (1 + abX)^{-1} \sum_{0 \leq m \leq 3} C_m X^m.$$

Здесь $a = 1$ при $f_{xi} f_{xi+1} < 0$, $a = 0$ при $f_{xi} f_{xi+1} \geq 0$; коэффициенты C_m, b вычисляются из условий равенства функций $f(x)$ и $f_x(x)$ в узлах x_i, x_{i+1} заданным значениям $f_i, f_{i+1}, f_{xi}, f_{xi+1}$. В случае $a = 0$ интерполяционная функция становится полиномом третьей степени, а в случае $a = 1$ полагается $C_3 = 0$, так что она представляет собой отношение полинома второй степени к полиному первой степени.

Если $x^0 = x_i^{n+1} - u(x_i^{n+1})\Delta t^n$ – координата отправной точки, принадлежащей отрезку $[x_i^n, x_{i+1}^n]$ старой сетки, то решение одномерного уравнения переноса в точке новой сетки x_i^{n+1} в момент $t^n + \Delta t^n$ определяется как

$$f_x^*(x_i^{n+1}) = \text{RCIP}(f_i^n, f_{i+1}^n, f_{xi}^n, f_{xi+1}^n, X, x_{i+1}^n - x_i^n),$$

где $X = x^0 - x_i^n$. Значение производной можно получить дифференцированием интерполяционной функции по координате x

$$f_x^*(x_i^{n+1}) = \partial_x \text{RCIP}(f_i^n, f_{i+1}^n, f_{xi}^n, f_{xi+1}^n, X, x_{i+1}^n - x_i^n).$$

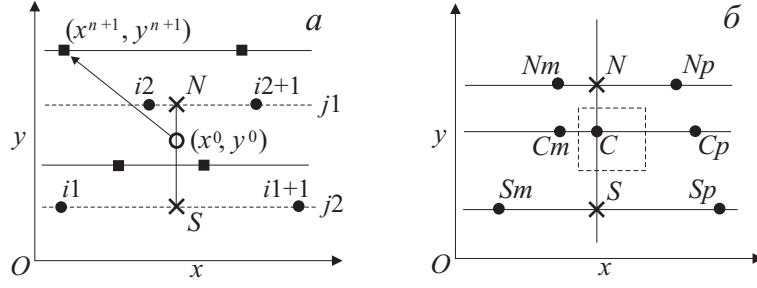


Рис. 2. (а) Отправная точка (x^0, y^0) на согобан-сетке. Сплошные линии и символы \blacksquare – новая сетка шага t^{n+1} , штриховые линии и символы \bullet – старая сетка шага t^n , символами \times и \circ обозначены точки, значение функции f в которых определяется интерполяцией; (б) особенности дискретизации на согобан-сетке: узел C – центральный узел шаблона. Штриховой линией показан контрольный объем, используемый для расчета давления в центральном узле

В двумерном случае расчет конвективной части осуществляется с использованием расщепления по направлениям Ox, Oy . Пусть $(x^0, y^0) = (x_i^{n+1} - u(\mathbf{x}_i^{n+1})\Delta t^n, y_j^{n+1} - v(\mathbf{x}_i^{n+1})\Delta t^n)$ – координаты отправной точки, в которой требуется рассчитать значение функции f и ее производных по известному их распределению в момент t^n на старой сетке \mathbf{x}^n (рис. 2, а). Для расчета на двух линиях старой согобан-сетки таких, что $y_{j_1}^n \leq y^0 \leq y_{j_2}^n$, $j_2 = j_1 + 1$, отыскиваются пары узлов таких, что $x_{i_1}^n \leq x^0 \leq x_{i_1+1}^n$ и $x_{i_2}^n \leq x^0 \leq x_{i_2+1}^n$. Далее, значения функции f и ее производных определяются в точках $S(x_S = x^0)$ на линии j_1

$$f_S = \text{RCIP}(f_{i_1}^n, f_{i_1+1}^n, f_{x_{i_1}}^n, f_{x_{i_1+1}}^n, x^0 - x_{i_1}^n, x_{i_1+1}^n - x_{i_1}^n),$$

$$f_{xS} = \partial_x \text{RCIP}(f_{i_1}^n, f_{i_1+1}^n, f_{x_{i_1}}^n, f_{x_{i_1+1}}^n, x^0 - x_{i_1}^n, x_{i_1+1}^n - x_{i_1}^n)$$

и $N(x_N = x^0)$ на линии j_2

$$f_N = \text{RCIP}(f_{i_2}^n, f_{i_2+1}^n, f_{x_{i_2}}^n, f_{x_{i_2+1}}^n, x^0 - x_{i_2}^n, x_{i_2+1}^n - x_{i_2}^n),$$

$$f_{xN} = \partial_x \text{RCIP}(f_{i_2}^n, f_{i_2+1}^n, f_{x_{i_2}}^n, f_{x_{i_2+1}}^n, x^0 - x_{i_2}^n, x_{i_2+1}^n - x_{i_2}^n).$$

Для получения $f(x^0, y^0)$ путем одномерной интерполяции на отрезке $[y_S, y_N]$ нужны значения f_{yS} и f_{yN} :

$$f_{yS} = \text{RCIP}(f_{y_{i_1}}^n, f_{y_{i_1+1}}^n, f_{y_{x_{i_1}}^n}, f_{y_{x_{i_1+1}}^n}, x^0 - x_{i_1}^n, x_{i_1+1}^n - x_{i_1}^n),$$

$$f_{yN} = \text{RCIP}(f_{y_{i_2}}^n, f_{y_{i_2+1}}^n, f_{y_{x_{i_2}}^n}, f_{y_{x_{i_2+1}}^n}, x^0 - x_{i_2}^n, x_{i_2+1}^n - x_{i_2}^n).$$

При этом требуется введение дополнительных независимых переменных – смешанных производных $f_{xy} \equiv f_{yx}$, значения которых в узлах S и N находятся как

$$f_{yxS} = \partial_x \text{RCIP}(f_{y_{i_1}}^n, f_{y_{i_1+1}}^n, f_{y_{x_{i_1}}^n}, f_{y_{x_{i_1+1}}^n}, x^0 - x_{i_1}^n, x_{i_1+1}^n - x_{i_1}^n)$$

$$f_{yxN} = \partial_x \text{RCIP}(f_{y_{i_2}}^n, f_{y_{i_2+1}}^n, f_{y_{x_{i_2}}^n}, f_{y_{x_{i_2+1}}^n}, x^0 - x_{i_2}^n, x_{i_2+1}^n - x_{i_2}^n).$$

Для их вычисления также требуется пересчет после конвективной стадии, подобный (6), (7):

$$\tilde{f}_{yx} = f_{yx}^* - \Delta t^n \left(u_y \frac{\partial f_x^*}{\partial x} + u_{yx} f_x^* + u_x f_{yx}^* + v_y f_{yx}^* + v_x \frac{\partial f_y^*}{\partial y} + v_{yx} f_y^* \right),$$

$$\frac{f_{yx}^{n+1} - \tilde{f}_{yx}}{\Delta t^n} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}. \quad (8)$$

Финальная интерполяция на отрезке $[y_S, y_N]$ определяет решение

$$\begin{aligned} f^*(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}) &= \text{RCIP}(f_S, f_N, f_{yS}, f_{yN}, y^0 - y_{j1}^n, y_{j2}^n - y_{j1}^n), \\ f_y^*(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}) &= \partial_y \text{RCIP}(f_S, f_N, f_{yS}, f_{yN}, y^0 - y_{j1}^n, y_{j2}^n - y_{j1}^n), \\ f_x^*(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}) &= \text{RCIP}(f_{xS}, f_{xN}, f_{yxS}, f_{yxN}, y^0 - y_{j1}^n, y_{j2}^n - y_{j1}^n), \\ f_{xy}^*(x_i^{n+1}, y_j^{n+1}) &= \partial_y \text{RCIP}(f_{xS}, f_{xN}, f_{yxS}, f_{yxN}, y^0 - y_{j1}^n, y_{j2}^n - y_{j1}^n). \end{aligned}$$

Расчет конвекции выполняется уже на новой сетке (отправные точки определяются для узлов новой сетки \mathbf{x}^{n+1}), а значения f, f_x, f_y, f_{xy} в отправной точке определяются интерполяцией с использованием $f^n, f_x^n, f_y^n, f_{xy}^n$ на старой сетке \mathbf{x}^n . Таким образом, здесь фактически объединены перемещение сетки и перенос значений со старой сетки на новую.

1.5. Решение уравнений неконвективной стадии. Система (4) записывается в виде следующих неявных соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t^n} &= -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t^n} &= -\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^*}, \\ \frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t^n} &= -\rho^* C_S^{*2} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Применив ко второму уравнению системы (9) операцию дивергенции и выразив $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$ из третьего уравнения, получаем

$$\frac{p^{n+1} - p^*}{\rho^* C_S^{*2} \Delta t^{n2}} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^*} \right) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t^n}. \quad (10)$$

Определяя поле скорости на стадии предиктора по известному полю давления

$$\mathbf{u}^{*+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t^n \frac{\nabla p^*}{\rho^*}, \quad (11)$$

преобразуем (10) к виду

$$\frac{\Delta p}{\rho^* C_S^{*2} \Delta t^{n2}} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Delta p}{\rho^*} \right) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{*+1}}{\Delta t^n}, \quad (12)$$

где $\Delta p = p^{n+1} - p^*$. Система линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений Δp , получаемая при дискретизации (12), решается методом последовательной верхней релаксации. Затем корректируется значение скорости

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{*+1} - \Delta t^n \frac{\nabla \Delta p}{\rho^*} \quad (13)$$

и вычисляются давление

$$p^{n+1} = p^* + \Delta p, \quad (14)$$

а также плотность с учетом того, что согласно третьему уравнению из (9) $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = -\Delta p / \Delta t^n \rho^* C_S^{*2}$,

$$\rho^{n+1} = \rho^* + \frac{\Delta p}{C_S^{*2}}. \quad (15)$$

1.6. Особенности численной реализации. Построение конечно-разностных аппроксимаций производных на неструктурированной *soqoban*-сетке имеет некоторые особенности, подробно описанные в [5, 7]. Производные по x в узле C (рис. 2, б) аппроксимируются центральными разностями на неравномерной сетке с использованием узлов C, C_p, C_m . Для построения конечно-разностных аппроксимаций производных по y в узле C требуются значения расчетных параметров в точках S и N (рис. 2, б). Для их определения применяется RCIP-интерполяция.

Узлы *soqoban*-сетки не связаны между собой ячейками, поэтому модифицированный метод CIP-CUP применяется на неразнесенной сетке, когда давление, плотность и компоненты вектора скорости вычисляются в одном и том же узле. С целью повышения устойчивости и точности расчетов на неразнесенной сетке конечно-разностная аппроксимация некоторых слагаемых строится подобно аппроксимации на разнесенных сетках [5]. В частности, аппроксимация дивергенции скорости в узле C (рис. 2, б) для уравнения (12) строится с использованием значений компонент скорости на гранях прямоугольника, проходящих через середины интервалов между рассматриваемым узлом и соседними узлами. Аппроксимация отношения $\nabla p/\rho$ в узле C для уравнений (11), (13) строится посредством линейной интерполяции с использованием значений $\nabla p/\rho$ на гранях этого прямоугольника. При этом значения параметров в серединах интервалов между узлами сетки также находятся с использованием RCIP-интерполяции.

Вместо построения конечно-разностных аналогов $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial y$, $\partial^2 G/\partial y \partial x$ при аппроксимации уравнений (7) и второго уравнения из (8) в силу того, что влияние G уже учтено при вычислении f^{n+1} на неконвективной стадии, используются соотношения [5, 7]

$$f_x^{n+1} = \tilde{f}_x + \frac{\partial(f^{n+1} - \tilde{f})}{\partial x}, \quad f_y^{n+1} = \tilde{f}_y + \frac{\partial(f^{n+1} - \tilde{f})}{\partial y},$$

а затем

$$f_{yx}^{n+1} = \tilde{f}_{yx} + \frac{\partial(f_y^{n+1} - \tilde{f}_y)}{\partial x}.$$

При решении задач с интенсивными ударными волнами схема CIP-CUP используется в сочетании с искусственной вязкостью. В алгоритм расчета добавляется стадия

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_{\text{невязк}}^{n+1} + \Delta t^n \mathbf{Q}_u, \quad p^{n+1} = p_{\text{невязк}}^{n+1} + \Delta t^n Q_p,$$

где $\mathbf{u}_{\text{невязк}}^{n+1}$ и $p_{\text{невязк}}^{n+1}$ – значения, полученные на неконвективной «невязкой» стадии (11)–(15),

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_u &= -\frac{1}{\rho} \nabla q_v, \quad Q_p = -(\kappa - 1) q_v \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ q_v &= c_v \rho \left(-C_S \Delta \mathbf{U} + \frac{\kappa + 1}{2} \Delta \mathbf{U}^2 \right), \quad \Delta \mathbf{U} = \min(0, \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \kappa &= \varphi \Gamma_1 + (1 - \varphi) \Gamma_2, \quad c_v = \varphi c_{v,1} + (1 - \varphi) c_{v,2}, \end{aligned}$$

$c_{v,1}$, $c_{v,2}$ – коэффициенты искусственной вязкости сред 1 и 2, $\lambda = (\Delta x \Delta y)^{1/2}$, Δx , Δy – локальные шаги сетки [5].

В задачах с ударными волнами при использовании явных схем, например схемы С.К. Годунова, шаг по времени обычно выбирают из условия устойчивости Куранта. В одномерном случае его можно вычислить по формуле

$$\Delta t^n = k_{\text{CRT}} \min \left[\frac{\Delta x}{(|u^n| + C_S^n)} \right], \quad (16)$$

а в двумерном случае – по формуле

$$\Delta t^n = k_{\text{CRT}} \min \left[\frac{1}{(|\mathbf{u}^n| + C_S^n)} \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \right)^{-1} \right], \quad (17)$$

где $\min[]$ – минимальное значение аргумента во всей расчетной области, k_{CRT} – число Куранта, $k_{\text{CRT}} < 1$. Хотя условие Куранта не имеет отношения к схеме SIP-CUP, оно будет применяться в дальнейшем. В [3] показано, что при использовании метода SIP-CUP приемлемыми являются значения числа Куранта $0.1 < k_{\text{CRT}} < 1$, при $k_{\text{CRT}} > 1$ может возникать чрезмерное размывание фронта ударной волны.

2. Результаты расчетов

Разработанные алгоритмы и программы расчета протестированы на ряде задач в одномерной и двумерной постановках. Сравнивались численные решения, полученные с использованием реализованной ранее методики на основе метода SIP-CUP на фиксированных разнесенных равномерных сетках (эту методику будем называть старой) и новой методики на основе модифицированного метода SIP-CUP на неразнесенных сетках: динамически адаптивных sogoban-сетках и фиксированных равномерных сетках.

2.1. Соударение движущейся и покоящейся частей жидкости. В области, занятой жидкостью с параметрами $\Gamma = 7.15, B = 3072$ бар, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $p_0 = 1$ бар, в начальный момент времени $t = 0$ имеется разрыв скорости:

$$u = \begin{cases} u_0, & x \geq x_0, \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

$x_0 = 35$ м, $u_0 = -200$ м/с.

На рис. 3 представлены точное решение данной задачи о распаде разрыва и результаты расчетов, полученные на фиксированных равномерных разнесенной ($a-e$) и неразнесенной ($z-e$) сетках из 100 узлов с шагом $\Delta x = 70/100$ м, а также на sogoban-сетке с $\Delta x_{\min} = \Delta x/2$ и $\Delta x_{\max} = 7\Delta x$ ($ж-и$). Построение sogoban-сетки производилось при $a = 3, b = 1.5$. Начальное распределение параметров при расчете на sogoban-сетке задавалось на равномерной сетке из 200 узлов. В таком случае начальная область разрыва, к которому адаптируется сетка, имеет меньшую ширину, чем если бы начальные данные задавались на сетке из 100 узлов, что положительно сказывается на качестве решения. Расчеты проводились при $c_v = 0.3, k_{\text{CRT}} = 0.1$ в (16) на равномерных сетках и $k_{\text{CRT}} = 0.2$ на sogoban-сетке. Шаг по времени во всех случаях составлял примерно $3.6 \cdot 10^{-5}$ с.

В численном решении, полученном в рамках старой методики на разнесенной равномерной сетке ($a-e$), в окрестности точки соударения подвижной и неподвижной частей жидкости $x/x_0 = 1$ возникает локальное уменьшение (провал) плотности, расходящиеся от этой точки ударные волны описываются удовлетворительно. Качество численного решения, полученного с использованием новой методики на неразнесенной равномерной сетке ($z-e$), заметно хуже: возникает пилообразная немонотонность на фронте ударной волны, распространяющейся влево по неподвижной жидкости, появляются осцилляции давления и плотности в области прохождения ударных волн (с максимумом непосредственно за фронтом левой ударной волны), также возникает провал плотности в месте соударения. При использовании sogoban-сетки ($ж-и$) узлы сгущаются в окрестности фронтов ударных волн таким

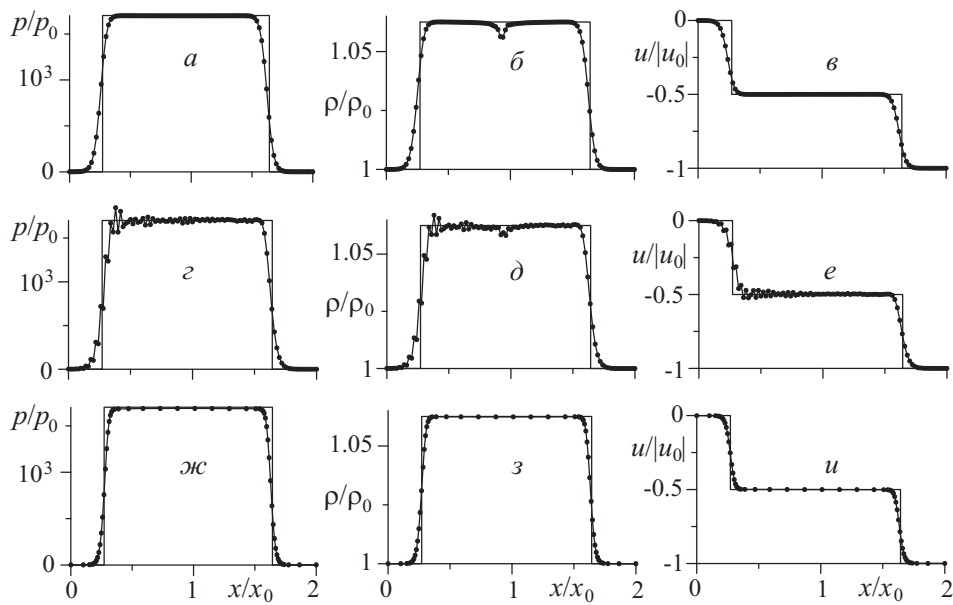


Рис. 3. Пространственные распределения давления, плотности и скорости в момент $t = 0.015$ с в задаче о соударении покоящейся и движущейся частей жидкости, полученные с применением старой методики на равномерной разнесенной сетке (а–в), по новой методике на неразнесенных сетках: равномерной сетке (з–е) и sobolev-сетке (ж–и). Точное решение – кривые без точек, численные решения – кривые с точками (значениями в узлах соответствующей сетки)

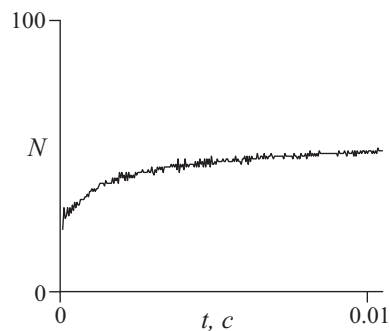


Рис. 4. Зависимость количества узлов sobolev-сетки от времени в ходе расчета соударения покоящейся и движущейся частей жидкости

образом, что шаг сетки оказывается здесь в 2 раза меньше шага используемой равномерной сетки. В результате фронты ударных волн становятся более крутыми. Кроме того, решение в пределах размытого фронта ударной волны, распространяющейся влево, и в области прохождения ударных волн становится монотонным, не возникает провала плотности в окрестности точки соударения. Количество узлов sobolev-сетки на протяжении всего расчета не превышает 53 (рис. 4), в то время как равномерная сетка, обеспечивающая аналогичное разрешение фронта ударных волн, состояла бы из 200 узлов.

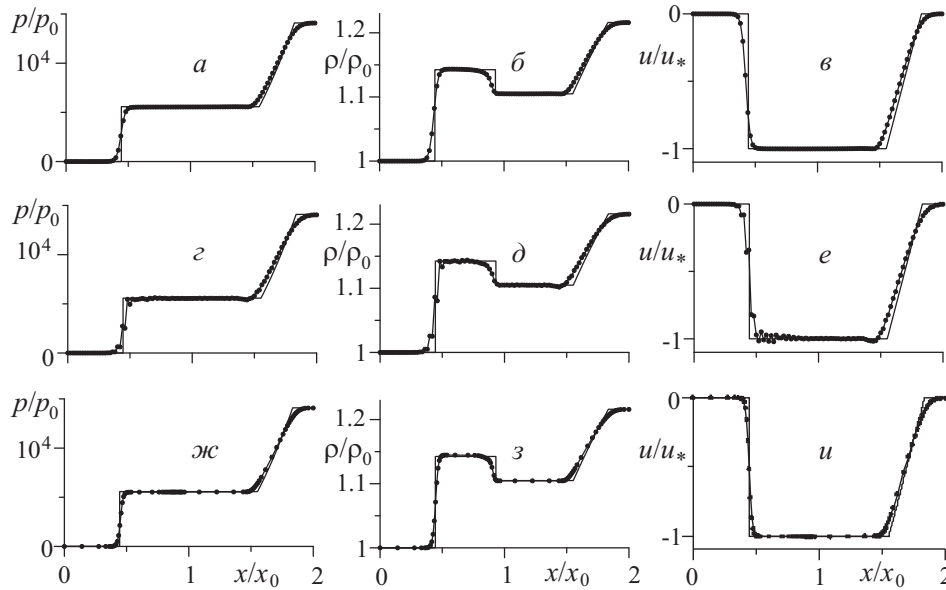


Рис. 5. Пространственные распределения давления, плотности и скорости в момент $t = 0.0092$ с в задаче о распаде разрыва в жидкости, полученные с применением старой методики на равномерной разнесенной сетке (а-в), по новой методике на неразнесенных сетках: равномерной сетке (з-е) и sobolan-сетке (ж-и), $u_* = 264$ м/с. Точное решение – кривые без точек

2.2. Распад разрыва в жидкости. В покоящейся жидкости ($\Gamma = 7.15$, $B = 3072$) в начальный момент времени $t = 0$ имеется разрыв параметров:

$$p = \begin{cases} 14089p_0, & x \geq x_0, \\ p_0, & x < x_0, \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} 1.216\rho_0, & x \geq x_0, \\ \rho_0, & x < x_0, \end{cases}$$

$p_0 = 1$ бар, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $x_0 = 20$ м.

На рис. 5 представлено точное решение этой задачи и результаты численных расчетов на таких же равномерных сетках и при тех же параметрах построения sobolan-сетки, что и в предыдущей задаче. Начальные поля плотности, давления и скорости при расчете на sobolan-сетке также задавались на равномерной сетке из 200 узлов. Расчеты проводились при $c_v = 0.3$, $k_{\text{CRT}} = 0.1$ в соотношении (16) на равномерных сетках и $c_v = 0.5$, $k_{\text{CRT}} = 0.2$ на sobolan-сетке. Шаг по времени во всех случаях составлял примерно $2.3 \cdot 10^{-5}$ с.

Как и в предыдущей задаче, численное решение, рассчитанное с применением новой методики на равномерной неразнесенной сетке, в отличие от sobolan-сетки, оказывается заметно хуже решения, полученного с помощью старой методики на равномерной разнесенной сетке. А именно, решение немонотонно на фронте движущейся влево ударной волны, за фронтом этой волны возникают осцилляции, в окрестности заднего фронта распространяющейся вправо волны разрежения возникает локальный минимум давления, плотности и скорости.

При использовании sobolan-сетки узлы сгущаются в окрестности фронта ударной волны, волны разрежения и в области контактного разрыва. Фронт ударной волны становится круче, чем в обоих случаях применения равномерных сеток, осцилляции за фронтом отсутствуют, более точно рассчитываются волна разрежения (локальный минимум не возникает) и контактный разрыв. Таким образом,

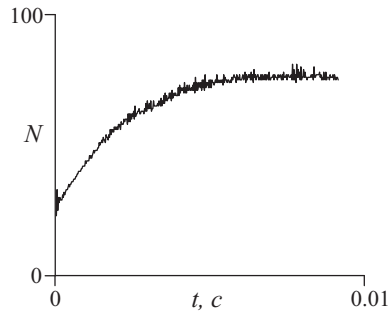


Рис. 6. Зависимость количества узлов соробан-сетки от времени в ходе расчета распада разрыва в жидкости

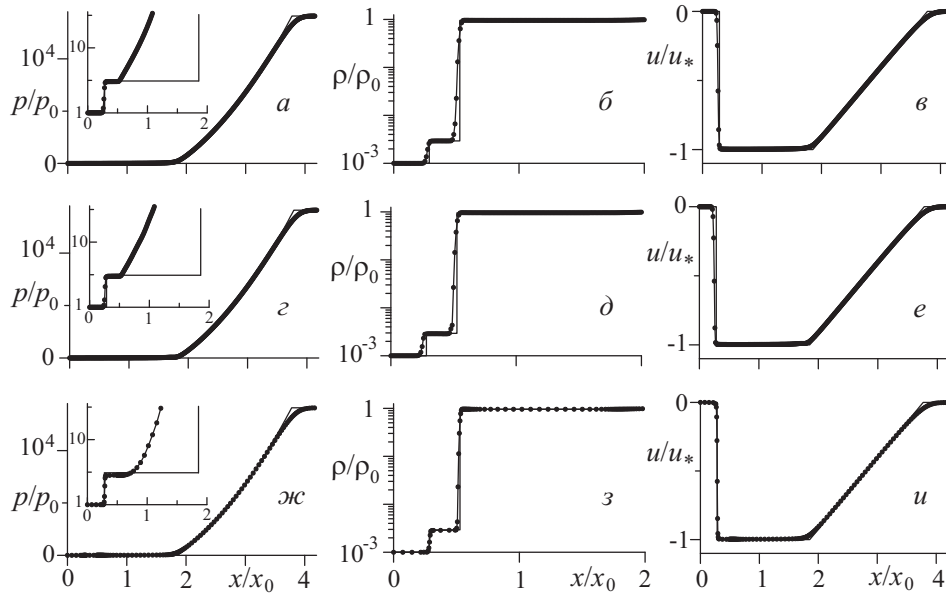


Рис. 7. Пространственные распределения давления, плотности и скорости при $t = 1$ с в задаче о распаде разрыва на границе газ-жидкость, полученные с применением старой методики на равномерной разнесенной сетке (а-в), по новой методике на неразнесенных сетках: равномерной сетке (г-е) и соробан-сетке (ж-и), $u_* = 540$ м/с. Точное решение – кривые без точек

полученное на соробан-сетке решение ближе к точному, а используемое при этом количество узлов на протяжении всего расчета остается меньше 100 (рис. 6).

2.3. Распад разрыва на границе газ – жидкость. В начальный момент времени область $x > x_0$ занята жидкостью ($\varphi = 1$) с параметрами $\Gamma = 7.15$, $B = 3072$ бар, $p = 14089 p_0$, $\rho = 1.216 \rho_0$, а область $x < x_0$ – газом ($\varphi = 0$) с параметрами $\gamma = 1.4$, $p = p_0$, $\rho = 10^{-3} \cdot \rho_0$. Обе среды неподвижны, $p_0 = 1$ бар, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $x_0 = 1200$ м.

На рис. 7 представлено точное решение задачи о распаде разрыва на границе газ – жидкость и результаты расчетов, полученные в области длиной 5000 м с применением фиксированных равномерных разнесенной (а-в) и неразнесенной (г-е) сеток из 400 узлов с шагом $\Delta x = 5000/400$ м, а также на соробан-сетке с $\Delta x_{\min} =$

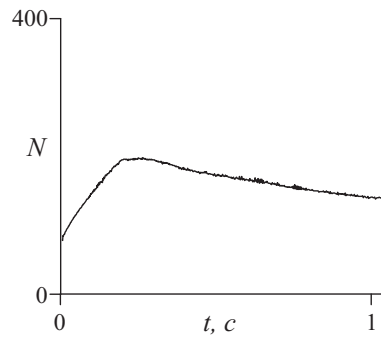


Рис. 8. Зависимость количества узлов *согобан*-сетки от времени в ходе расчета распада разрыва на границе газ-жидкость

$= \Delta x/2$ и $\Delta x_{\max} = 7\Delta x$ (*жс-и*). Начальное распределение параметров при расчете на *согобан*-сетке задавалось на равномерной сетке из 500 узлов. Расчеты проводились при $c_{v,l} = 0, c_{v,g} = 0.7$. Для равномерной сетки $k_{\text{CRT}} = 0.4$ в соотношении (16), для *согобан*-сетки $k_{\text{CRT}} = 0.8$. Шаг по времени в обоих случаях составлял около $2 \cdot 10^{-3}$ с.

В начальный момент времени влево по газу начинает распространяться ударная волна, вправо по жидкости — волна разрежения. На рис. 7, б, д, з приведена часть расчетной области $x/x_0 < 2$ для того, чтобы более детально показать ударную волну в газе и следующую за ней контактную границу. В отличие от предыдущих задач, здесь новая методика на равномерной сетке (рис. 7, з-е) дает в целом удовлетворительное решение. Только положение фронта ударной волны, как можно видеть на рис. 7, д, оказывается менее точным по сравнению с остальными двумя решениями. При использовании *согобан*-сетки за счет задания начального разрыва на более мелкой сетке и своевременного сгущения сетки все особенности решения описываются более точно. Как видно по вставкам на рис. 7, а, з, жс, более детально изображающим решение в окрестности ударной волны в газе и заднего фронта волны разрежения в жидкости, при использовании *согобан*-сетки давление жидкости за контактной границей (при $t = 1$ с ее положение $x/x_0 \approx 0.5$) оказывается более близким к точному решению: задний фронт волны разрежения отделяется от контактной границы, в отличие от решений, полученных с использованием равномерных сеток. В решении, полученном на *согобан*-сетке, положения ударной волны и контактной границы значительно лучше согласуются с точным решением, чем в обоих случаях равномерных сеток, фронт ударной волны становится заметно круче. Вместе с тем в результате разрежения в областях перед и за фронтом ударной волны в газе, между контактным разрывом и задним фронтом волны разрежения, а также между передним и задним фронтами волны разрежения количество узлов *согобан*-сетки на протяжении всего расчета остается меньше 200 (рис. 8).

2.4. Цилиндрический взрыв в неоднородной среде. В начальный момент времени в цилиндрической области взрыва $\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} < 0.08$ находится газ с $\gamma = 1.2, \varphi = 0, p = 3, \rho = 1$, а вне ее — газ с $\gamma = 1.8, \varphi = 1, p = 0.1, \rho = 0.1$. Оба газа неподвижны. В начальный момент времени на границе области возникают радиально расходящаяся ударная волна и радиально сходящаяся к центру области взрыва волна разрежения. На рис. 9 приведены профили плотности перед началом (1) и в процессе (2) фокусировки волны разрежения

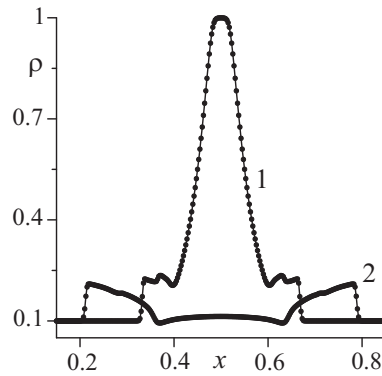


Рис. 9. Задача о цилиндрическом взрыве в неоднородной среде. Радиальные профили плотности в сечении $y = 0.5$ в моменты $t = 0.03$ (кривая 1) и 0.075 (кривая 2)

в центре области взрыва. Профили рассчитаны с применением старой методики на фиксированной разнесенной сетке 401×401 ($\Delta x = \Delta y = 1/400$), $k_{\text{CRT}} = 0.4$ в (17).

На рис. 10 представлены результаты расчетов этой задачи на момент $t = 0.075$ с применением стационарных разнесенных и неразнесенных равномерных сеток, а также soroban-сетки. Использовались равномерные сетки с 101×101 узлами с $\Delta x = \Delta y = 0.01$ и с 201×201 узлами с $\Delta x = \Delta y = 0.005$, soroban-сетка с $\Delta x_{\min} = 0.01/2$, $\Delta x_{\max} = 10 \cdot 0.01$ ($a = 0.3$, $b = 0.52$, $q = 1$). Расчеты проводились при $k_{\text{CRT}} = 0.4$ в соотношении (17) на равномерных сетках 101×101 и $k_{\text{CRT}} = 0.8$ на равномерных сетках 201×201 и на soroban-сетке. Шаг по времени во всех случаях составлял примерно $5.5 \cdot 10^{-4}$. Применялась искусственная вязкость с $c_v = 0.6$.

При увеличении количества узлов равномерных сеток с 101×101 до 201×201 как для старой, так и для новой методики фронт расходящейся ударной волны становится более крутым, изолинии плотности становятся более близкими к круговым, минимум плотности на заднем фронте сходящейся волны разрежения углубляется. Кроме того, в окрестности контактной границы появляется участок, где скорость изменения плотности снижается — это более выражено в результатах расчетов в рамках новой методики на неразнесенной равномерной сетке (рис. 10, *e*). В этом же варианте в области между ударной волной и контактной границей цилиндрическая симметрия решения на грубой сетке сильно нарушена (рис. 10, *z*). Значение плотности в окрестности точки фокусировки волны разрежения, в рамках старой и новой методик на равномерных сетках 201×201 примерно равно 0.12.

При использовании soroban-сетки начальное распределение параметров в расчетной области задавалось на равномерной сетке с 201×201 узлами. Применение густой начальной сетки и, соответственно, более точное задание начальной границы разрыва, к которой адаптируется soroban-сетка, заметно улучшает круговую симметрию численного решения. Изолинии плотности на рис. 10, *z* получены интерполяцией решения с soroban-сетки на равномерную сетку 201×201 . На рис. 10, *жс* приведен вид soroban-сетки в момент $t = 0.075$. Сетка довольно резко сгущается в окрестности фронта ударной волны, контактной границы и в областях с локальными экстремумами (в окрестности минимальных значений плотности сходящейся волны разрежения). Динамическая адаптация soroban-сетки позволяет получить более качественное, чем в обоих случаях равномерных сеток 101×101 , решение: круговая симметрия улучшается, фронт расходящейся ударной волны становится более крутым, а минимумы плотности в области сходящейся волны разрежения — более выраженными. Кроме того, при использовании soroban-сетки

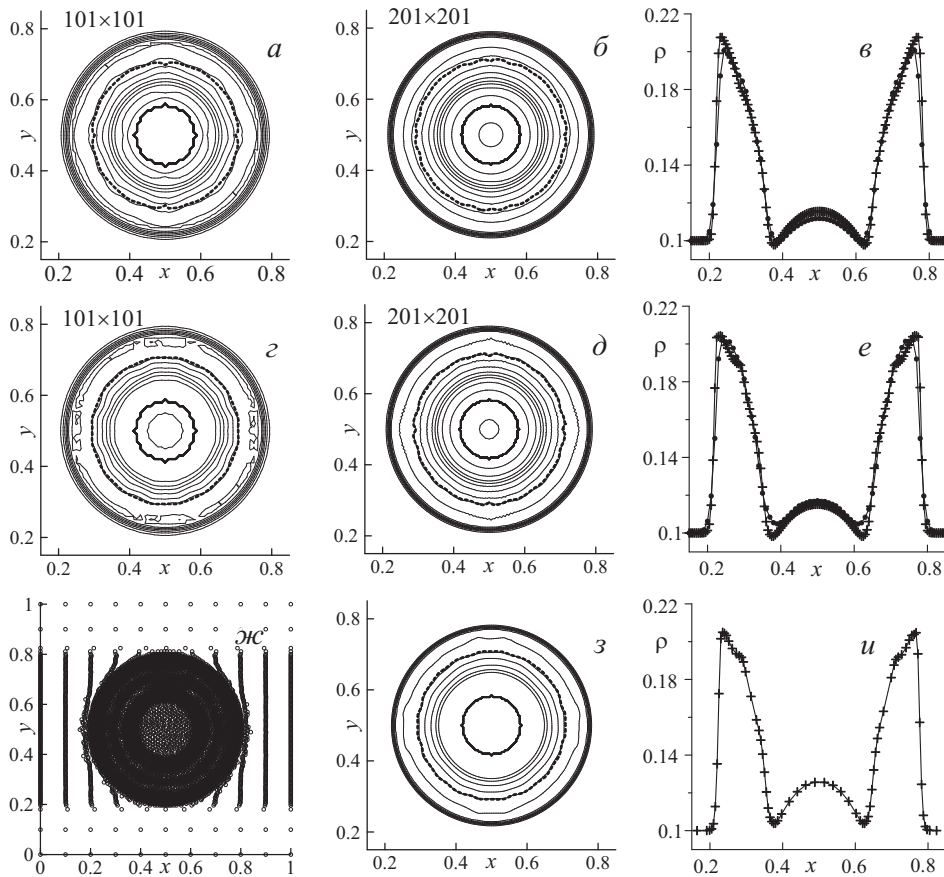


Рис. 10. Задача о цилиндрическом взрыве в неоднородной среде. Верхний ряд – результаты, полученные по старой методике на разнесенных равномерных сетках, средний ряд – по новой методике на неразнесенных равномерных сетках, нижний ряд – по новой методике на sobolav-сетке; (a–d, ж) – изолинии плотности в момент $t = 0.075$, внутренняя жирная кривая – начальная граница области взрыва, штриховая кривая – текущее положение контактной границы ($\varphi = 0.5$); (v, e, u) – радиальные профили плотности в сечении $y = 0.5$ в момент $t = 0.075$: точками показано решение, полученное на сетках 101×101 , символами + – на сетках 201×201 и на sobolav-сетке. Точки и символы + на профилях плотности соответствуют узлам сеток. Вид sobolav-сетки в момент $t = 0.075$ (ж)

в окрестности контактной границы имеется участок со значительно меньшим градиентом плотности. Как отмечалось выше, все эти особенности возникают и в численном решении на равномерной сетке при ее измельчении. В области фокусировки волны разрежения применяемая sobolav-сетка, как видно, оказывается разреженной, поэтому полученное решение оказывается менее точным в этой области, чем решения, полученные на равномерных сетках 201×201 : значения плотности в точке фокусировки и на заднем фронте волны разрежения оказываются несколько завышенными.

В данном случае применения sobolav-сетки число ее узлов не превышает количества узлов равномерной сетки 101×101 на протяжении всего расчета (рис. 11) за счет сильного разрежения сетки в областях, где решение изменяется мало. Время расчета в рамках новой методике оказывается на sobolav-сетке в 1.8 раз меньше, чем на равномерной сетке 201×201 , а полученное решение оказывается столь же

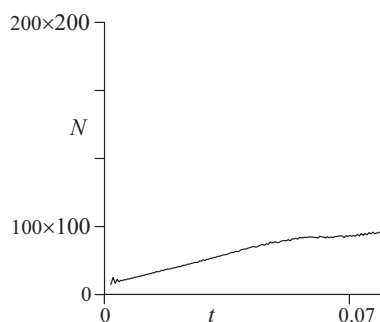


Рис. 11. Зависимость количества узлов соробан-сетки от времени в ходе расчета цилиндрического взрыва в неоднородной среде

качественным в областях ударной волны и контактной границы и лишь немного менее точным в области фокусировки волны разрежения.

Заключение

На ряде задач о распространении волн в однородных (жидкость) и неоднородных (при наличии контактных границ газ–газ и газ–жидкость) средах продемонстрирована эффективность модификации метода CIP-CUP с применением динамически адаптивных соробан-сеток. Рассматривались, в частности, одномерные задачи о соударении движущейся и покоящейся частей жидкости, о распаде разрывов в жидкости и на границе газ–жидкость, двумерная задача о цилиндрическом взрыве в газе, в которой продукты взрыва моделируются также газом, но с другим показателем адиабаты. Сравнивались решения, полученные с использованием метода CIP-CUP на фиксированной разнесенной равномерной сетке и модификаций этого метода на неразнесенных сетках: динамически адаптивной соробан-сетке и фиксированной равномерной сетке. Показано, что применение модификации метода CIP-CUP на неразнесенной равномерной сетке наименее эффективно, причем в некоторых случаях может приводить к возникновению нефизичных немонотонностей в решении. Применение модификации метода CIP-CUP на динамически адаптивной соробан-сетке позволяет при использовании существенно меньшего, чем на разнесенной равномерной сетке, числа узлов получить более близкое к точному решение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-97004р_поволжье_a).

Summary

A.A. Aganin, T.S. Guseva. Numerical Simulation of the Dynamics of Non-Uniform Compressible Media Based on the CIP-CUP Method on Dynamically Adaptive Soroban Grids.

We compare the efficiency of the CIP-CUP method on a stationary uniform staggered grid and the modifications of this method on a non-staggered dynamically adaptive Soroban grid and a non-staggered stationary uniform grid in their use for computing problems of wave propagation in uniform (liquid) and non-uniform (with the presence of gas–gas and gas–liquid contact boundaries) media. We show that as compared with the initial version of the CIP-CUP method on a stationary uniform staggered grid, its modification on a Soroban grid allows one to conduct computations with similar or even higher accuracy and to apply significantly smaller number of grid vertices. The modification of the CIP-CUP method on a stationary uniform non-staggered grid is least efficient. Moreover, it can lead to non-monotonic solutions.

Keywords: shock waves, non-uniform medium, CIP-CUP method, adaptive Soroban grids.

Литература

1. *Yabe T., Wang P.Y.* Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid // *J. Phys. Soc. Japan.* – 1991. – V. 60, No 7. – P. 2105–2108.
2. *Аганин А.А., Гусева Т.С.* Численное моделирование контактного взаимодействия сжимаемых сред на эйлеровых сетках // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки.* – 2012. – Т. 154, кн. 4. – С. 74–99.
3. *Аганин А.А., Гусева Т.С.* Расчет контактного взаимодействия сжимаемых сред без явного выделения межфазных границ // *Вестн. Башкир. ун-та.* – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 646–661.
4. *Yabe T., Mizoe H., Takizawa K., Moriki H., Im H.-N., Ogata Y.* Higher-Order Schemes with CIP Method and Adaptive Soroban Grid towards Mesh-Free Scheme // *J. Comput. Phys.* – 2004. – V. 194, No 1. – P. 57–77.
5. *Takizawa K., Yabe T., Tsugawa Y., Tezduyar T.E., Mizoe H.* Computation of free-surface flows and fluid-object interactions with the CIP method based on adaptive meshless Soroban grids // *Comput. Mech.* – 2007. – V. 40, No 1. – P. 167–183.
6. *Yabe T., Xiao F., Utsumi T.* The constrained interpolation profile method for multiphase analysis // *J. Comput. Phys.* – 2001. – V. 169, No 2. – P. 556–593.
7. *Аганин А.А., Гусева Т.С.* Методика расчета волн в жидкости и газе методом CIP-CUP с применением динамически-адаптивных Soroban-сеток // *Вестн. Башкир. ун-та.* – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 368–380.

Поступила в редакцию
24.03.14

Аганин Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, Россия.

E-mail: *aganin@kfti.knc.ru*

Гусева Татьяна Сергеевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, Россия.

E-mail: *ts.guseva@mail.ru*