

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по информатике

Казань, 20-22 января 2024 г.

Задача «Упражнение с гирями»



- Идея задачи — М. Киндер
- Решение задачи — М. Киндер, И. Валеев
- Подготовка тестов — М. Киндер

Постановка задачи

- Имеются k гирь с массами $1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1}$ граммов ($1 \leq k \leq 60$). Гиря разрешается ставить на левую и правую чашу весов.
- Для заданного груза в n граммов нужно распределить все k гирь по двум чашам так, чтобы весы оказались в равновесии ($1 \leq n < 2^k$).
- Вывести l и r — количество гирь на левой и правой чашке весов, а также массы самих гирь.

Основные темы задачи:

- конструктивные алгоритмы;
- двоичная запись числа;
- битовые операции.

Решение. Подзадача 1

Подзадача 1:

- Для небольшого количества гирь подходит перебор.
- Каждая гиря участвует на левой или правой чаше весов.
- Добавляем к грузу на левой чаше каждую из k гирь.
- Проверяем каждый раз условие равновесия. Число возможных вариантов не превосходит 2^{10} , поэтому такое решение проходит тесты первой подзадачи.

Решение. Подзадача 1

Подзадача 1:

- Для небольшого количества гирь подходит перебор.
- Каждая гиря участвует на левой или правой чаше весов.
- Добавляем к грузу на левой чаше каждую из k гирь.
- Проверяем каждый раз условие равновесия. Число возможных вариантов не превосходит 2^{10} , поэтому такое решение проходит тесты первой подзадачи.

Решение. Подзадача 1

Подзадача 1:

- Для небольшого количества гирь подходит перебор.
- Каждая гиря участвует на левой или правой чаше весов.
- Добавляем к грузу на левой чаше каждую из k гирь.
- Проверяем каждый раз условие равновесия. Число возможных вариантов не превосходит 2^{10} , поэтому такое решение проходит тесты первой подзадачи.

Решение. Подзадача 1

Подзадача 1:

- Для небольшого количества гирь подходит перебор.
- Каждая гиря участвует на левой или правой чаше весов.
- Добавляем к грузу на левой чаше каждую из k гирь.
- Проверяем каждый раз условие равновесия. Число возможных вариантов не превосходит 2^{10} , поэтому такое решение проходит тесты первой подзадачи.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз чётной массы n

- Общая масса всех k гирь — нечётное число. Если n — чётное, то общая масса груза и всех гирь будет нечётным числом.
- Разделить массу гирь и груза на две равные части невозможно.
- При чётном n ответ -1.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз чётной массы n

- Общая масса всех k гирь — нечётное число. Если n — чётное, то общая масса груза и всех гирь будет нечётным числом.
- Разделить массу гирь и груза на две равные части невозможно.
- При чётном n ответ -1.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз чётной массы n

- Общая масса всех k гирь — нечётное число. Если n — чётное, то общая масса груза и всех гирь будет нечётным числом.
- Разделить массу гирь и груза на две равные части невозможно.
- При чётном n ответ -1.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз нечётной массы n

- Пусть L и R — массы гирь на левой и правой чашах, их общая масса $L + R = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
- Кроме того, должно выполняться равенство $n + L = R$.
- Отсюда $L = 2^{k-1} - \frac{1}{2}(n + 1)$ и $R = 2^{k-1} + \frac{1}{2}(n - 1)$, где 2^{k-1} — масса самой тяжёлой гири.
- При нечётном n числа L и R — целые.
- Используя двоичную запись чисел L и R , найдём гири на левой и правой чаше весов.
- Ввиду единственности двоичной записи чисел, решение единственно.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз нечётной массы n

- Пусть L и R — массы гирь на левой и правой чашах, их общая масса $L + R = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
- Кроме того, должно выполняться равенство $n + L = R$.
- Отсюда $L = 2^{k-1} - \frac{1}{2}(n + 1)$ и $R = 2^{k-1} + \frac{1}{2}(n - 1)$, где 2^{k-1} — масса самой тяжёлой гири.
- При нечётном n числа L и R — целые.
- Используя двоичную запись чисел L и R , найдём гири на левой и правой чаше весов.
- Ввиду единственности двоичной записи чисел, решение единственно.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз нечётной массы n

- Пусть L и R — массы гирь на левой и правой чашах, их общая масса $L + R = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
- Кроме того, должно выполняться равенство $n + L = R$.
- Отсюда $L = 2^{k-1} - \frac{1}{2}(n + 1)$ и $R = 2^{k-1} + \frac{1}{2}(n - 1)$, где 2^{k-1} — масса самой тяжёлой гири.
- При нечётном n числа L и R — целые.
- Используя двоичную запись чисел L и R , найдём гири на левой и правой чаше весов.
- Ввиду единственности двоичной записи чисел, решение единственно.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз нечётной массы n

- Пусть L и R — массы гирь на левой и правой чашах, их общая масса $L + R = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
- Кроме того, должно выполняться равенство $n + L = R$.
- Отсюда $L = 2^{k-1} - \frac{1}{2}(n + 1)$ и $R = 2^{k-1} + \frac{1}{2}(n - 1)$, где 2^{k-1} — масса самой тяжёлой гири.
- При нечётном n числа L и R — целые.
- Используя двоичную запись чисел L и R , найдём гири на левой и правой чаше весов.
- Ввиду единственности двоичной записи чисел, решение единственно.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз нечётной массы n

- Пусть L и R — массы гирь на левой и правой чашах, их общая масса $L + R = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
- Кроме того, должно выполняться равенство $n + L = R$.
- Отсюда $L = 2^{k-1} - \frac{1}{2}(n + 1)$ и $R = 2^{k-1} + \frac{1}{2}(n - 1)$, где 2^{k-1} — масса самой тяжёлой гири.
- При нечётном n числа L и R — целые.
- Используя двоичную запись чисел L и R , найдём гири на левой и правой чаше весов.
- Ввиду единственности двоичной записи чисел, решение единственно.

Решение. Подзадачи 2-3.

Груз нечётной массы n

- Пусть L и R — массы гирь на левой и правой чашах, их общая масса $L + R = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
- Кроме того, должно выполняться равенство $n + L = R$.
- Отсюда $L = 2^{k-1} - \frac{1}{2}(n + 1)$ и $R = 2^{k-1} + \frac{1}{2}(n - 1)$, где 2^{k-1} — масса самой тяжёлой гири.
- При нечётном n числа L и R — целые.
- Используя двоичную запись чисел L и R , найдём гири на левой и правой чаше весов.
- Ввиду единственности двоичной записи чисел, решение единственно.

Решение. Подзадачи 2-3.

Алгоритм решения

- Вычисляем массу самой тяжёлой гири 2^{k-1} .
- Находим массы L и R гирь на левой и правой чаше весов.
- Находим двоичную запись чисел L и R .
- Единичный бит в двоичной записи L означает, что соответствующая гиря 2^i размещается на левой чаше весов, а нулевой бит — на правой чаше.
- Количество единичных битов в двоичной записи L и R равно числу гирь на левой и правой чаше весов.
- В зависимости от реализации решение проходит тесты второй или третьей подзадачи.

Собственно, всё...

Вопросы?