

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кондратьева Е.Д., Ишмухаметова М.Г.

МЕТОДЫ АСТРОДИНАМИКИ

Методическое пособие

Часть I

КАЗАНЬ – 2002

Печатается по решению Редакционно - издательского
Совета физического факультета

УДК 521.14

Кондратьева К.Д. – канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры
астрономия

Ишмухаметова М.Г. – канд. физ.-мат.наук, ассистент
кафедры астрономия

Методы астродинамики. Методическое пособие для
студентов третьего курса специальностей астрономия и
астрономогеодезия, часть 1, Казань 2001, 40 с.

В пособии приведены рабочие формулы для решения основных задач небесной механики: от определения элементов простейшей круговой орбиты до орбит космических аппаратов. Рассмотрены дифференциальные уравнения возмущенного движения для оскулирующих элементов орбит и методы их интегрирования.

Рецензент: Загребдинов Р.В. – канд. физ. – мат. наук,
доцент.

Физический факультет Казанского государственного
университета, 2001.

1. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

Небесная механика – это часть астрономии, которая занимается изучением движения небесных тел под воздействием естественных сил природы. Небесными телами при этом называются любые реально существующие космические объекты: Солнце, большие планеты, астероиды, кометы, метеорные тела, искусственные спутники Земли (ИСЗ) и космические летательные аппараты (КА) (исключение составляют те части траекторий полета, на которых они двигаются под действием ракетных двигателей). Основной задачей небесной механики является определение положения и скорости тела на любой момент времени.

Всю совокупность методов небесной механики можно разделить на два основных раздела: теорию невозмущенного движения и теорию возмущений. Первая часть называется часто также задачей двух тел. Ее теория была разработана Иоганном Кеплером (1571 – 1630) в виде трех законов, которые называются *законами Кеплера*:

1. Каждое тело движется по коническому сечению, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Площадь сектора, описываемая радиусом-вектором тела, изменяется пропорционально времени.
3. Квадраты периодов обращения тел относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Так как расстояния между телами Солнечной системы очень велики по сравнению с размерами самих тел, то все они могут рассматриваться как материальные точки, притягивающие друг друга по закону Ньютона.

В первом приближении движение тела можно рассматривать в предположении, что оно происходит только в поле тяготения центрального тела (Солнца – для естественных тел Солнечной системы, Земли – для ИСЗ). В этом случае дифференциальные уравнения движения тела можно решить в конечном виде, а постоянные интегрирования имеют астрономический смысл и называются *кеплеровскими элементами орбиты*.

Форма орбиты определяется двумя элементами:

a – большая полуось орбиты, e – эксцентриситет.

При $a > 0$, $0 < e < 1$ – орбита тела эллипс;

$a = \infty$, $e = 1$ – парабола;

$a < 0$, $e > 1$ – гипербола.

Круг – частный случай эллипса, когда $a = \text{const}$, $e = 0$.

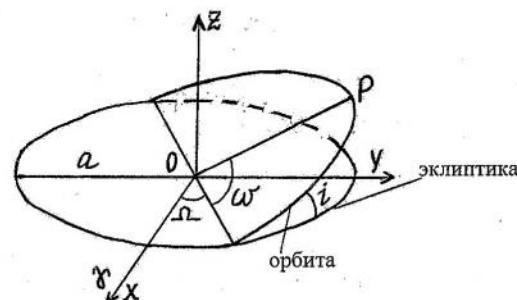


Рис. 1. Кеплеровские элементы орбит

Положение орбиты тела в пространстве определяется элементами:

i - наклон плоскости орбиты к плоскости эклиптики;

ω - аргумент перигелия, т. е. угловое расстояние перигелия P от линии узлов;

Ω - долгота восходящего узла.

Шестой элемент, время, входит в элементы орбиты либо как T – момент прохождения через перигелий, либо как две величины:

t_o - произвольно выбранный момент времени;

M_o - средняя аномалия. Величина M_o вычисляется по формуле:

$$M_o = n(t_o - T),$$

где $n = k/a\sqrt{a}$ - среднее суточное движение,

k – постоянная Гаусса.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ

ПО ДВУМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Для определения шести элементов орбиты любого тела необходимо иметь не менее трех его наблюдений. Между тем иногда бывает целесообразно получить результат уже по двум наблюдениям, особенно если по каким-то причинам наблюдения тела были прекращены. При этом, так как по двум наблюдениям определить все шесть

элементов нельзя, приходится заранее делать предположение о характере движения тела. Часто для этого можно использовать гипотезу о круговой орбите.

Допуская, что орбита тела есть круг, мы принимаем, что эксцентриситет $e = 0$, а аргумент перигелия ω не определяется, так как само понятие прохождения через перигелий для круговой орбиты теряет смысл. За начало отсчета истинной аномалии можно принять любой момент t_o , а аргумент перигелия ω заменить на аргумент широты u_o для избранной эпохи t_o . Определить еще три элемента a, i, Ω не представляет труда.

Наблюдения, проведенные в моменты t_1 и t_2 , дают два направления на светило. Если тело движется по окружности, то геоцентрические расстояния r_1 и r_2 должны быть равны радиусу орбиты. При этом дуга, пройденная телом по орбите от t_1 до t_2 , должна соответствовать законам Кеплера. Наиболее простой способ удовлетворить эти условия – это подобрать радиус орбиты a .

Исходные данные.

Прямое восхождение α_i , склонение δ_i наблюдаемого тела на моменты t_i , где $i = 1, 2$.

Схема решения.

1. Вычислим прямоугольные координаты Солнца X_i, Y_i, Z_i на моменты t_i и равноденствие, к которому приводим наблюдения.

Напомним, что при использовании астрономического ежегодника (АЕ) достаточно использовать вторые разности:

$$f_t = f_o + n(f_1 - f_o) + n(n-1)/2[f_2 - 2f_1 + f_o],$$

$$\text{где } n = (t_i - t_o)/(t_{i+1} - t_i)$$

2. Получим постоянные величины:

$$a_i = \cos \alpha_i \cos \delta_i$$

$$b_i = \sin \alpha_i \cos \delta_i$$

$$c_i = \sin \delta_i$$

При отладке программы необходимо сделать контроль:

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1.$$

3. Вычислим

$$R_i \cos \theta_i = -(a_i X_i + b_i Y_i + c_i Z_i)$$

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2$$

$$(R_i \sin \theta_i)^2 = R_i^2 - (R_i \cos \theta_i)^2,$$

где θ – угол между направлением от Солнца на Землю и от Земли на тело.

4. Определение радиуса орбиты.

Пусть радиус орбиты равен произвольному значению a , тогда

$$g_i = \sqrt{a^2 - R_i^2 \sin^2 \theta_i - R_i \cos \theta_i}$$

$$x_i = a_i g_i - X_i$$

$$y_i = b_i g_i - Y_i$$

$$z_i = c_i g_i - Z_i$$

$$\sin^2 f_g = 1/4 a^2 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]$$

$$f_d = k(t_2 - t_1)/2a\sqrt{a},$$

где $k = 0,0172021 = 0,98561$.

Здесь, как обычно, введено обозначение разности истинных аномалий $2f = v_2 - v_4$. Через f_g обозначено геометрическое значение дуги f , через f_d - динамическое.

Процесс последовательного приближения (подбора значения радиуса орбиты) продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие: $f_g = f_d$.

В данный момент нами получено значение $\Delta_4 = (f_g - f_d)_4$ по заданному значению a_4 .

По величине Δ_4 можно судить о том, в какую сторону надо изменять значение a_4 для того, чтобы $\Delta \approx 0$ (конечно, в пределах заданной точности). Вводя новые значения a , мы каждый раз возвращаемся к началу пункта 4.

Однако при использовании компьютера для решения задачи можно пойти и другим путем. Задав также произвольно второе значение радиуса орбиты a_2 , получим $\Delta_2 = (f_g - f_d)_2$. Тогда третье значение a_3 можно вычислить из пропорции:

$$\Delta a = (a_2 - a_4)(-\Delta_4) / (\Delta_2 - \Delta_4), \quad a_3 = a_2 + \Delta a.$$

Далее можно взять пару значений a_2 и a_3 и так продолжать до получения заданной точности.

5. Вывод элементов орбиты.

$$f = (f_g + f_d) / 2, \quad n = k / a \sqrt{a'}$$

$$\begin{aligned} a P_x &= (x_4 + x_2) / 2 \cos f & a Q_x &= (x_2 - x_4) / 2 \sin f \\ a P_y &= (y_4 + y_2) / 2 \cos f & a Q_y &= (y_2 - y_4) / 2 \sin f \\ a P_z &= (z_4 + z_2) / 2 \cos f & a Q_z &= (z_2 - z_4) / 2 \sin f \end{aligned}$$

Контроль при отладке программы:

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1$$

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0$$

Угловые элементы i , получим из соотношений:

$$\sin i \sin \omega = P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon$$

$$\sin i \cos \omega = Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon,$$

где ε - наклон эклиптики к экватору, а $\sin i > 0$.

Теперь можно найти долготу восходящего узла

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) / \cos \varepsilon$$

$$\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega$$

Для определения четверти угла i необходимо вычислить

$$\cos i = -(P_x \sin \omega - Q_x \cos \omega) / \sin \Omega$$

При этом $\omega = u_o$ для эпохи $t_o = (t_2 + t_4) / 2$.

3. ПОИСКОВАЯ ЭФЕМЕРИДА

Эфемерида – это последовательность гео(или гелио)-центрических положений небесного тела, разделенных равными промежутками времени. Эфемериды вычисляются для обеспечения астрономических и геодезических работ, морских и воздушных навигаций, а также навигаций ИСЗ и КА. Сюда относится и сравнение теоретических положений с наблюденными, и поиск тела на небосводе. В первом случае точность эфемериды должна соответствовать точности наблюдений, т. е. для обеспечения точности 0,01 вычисления должны проводиться с семью значащими

цифрами после запятой. Во втором случае при вычислении поисковой эфемериды достаточно пяти значащих цифр, так как это обеспечивает точность до $1''$ на небесной сфере.

Исходные данные.

Элементы орбиты небесного тела:

M_o - средняя аномалия на момент t_o ;

t_o - эпоха и оскуляция;

T - момент прохождения через перигелий;

i - наклон плоскости орбиты;

ω - аргумент перигелия;

Ω - долгота восходящего узла;

a - большая полуось орбиты;

e - эксцентриситет.

Требуется найти геоцентрические экваториальные координаты тела α_i, δ_i на моменты t_i .

Вспомогательные средства: АЕ, содержащий координаты Солнца на моменты t_i и заданное равноденствие.

Схема решения.

1. Выписываем из АЕ значение наклона эклиптики к экватору ε на заданное равноденствие:

$$\varepsilon_{2000} = 23^\circ 26' 21.41''$$

2. Вычисляем векторные элементы

$$\alpha_1 = \sin \Omega \sin \omega \quad \gamma_1 = \sin i \sin \omega \quad \beta_1 = \cos \Omega \sin \omega$$

$$\alpha_2 = \sin \Omega \cos \omega \quad \gamma_2 = \sin i \cos \omega \quad \beta_2 = \cos \Omega \cos \omega$$

На заданное
равноденствие
(принято 2000.0)

$$P_x = \beta_2 - \alpha_1 \cos i$$

$$P_y = (\alpha_2 + \beta_1 \cos i) \cos \varepsilon - \gamma_1 \sin \varepsilon$$

$$P_z = (\alpha_2 + \beta_1 \cos i) \sin \varepsilon + \gamma_1 \cos \varepsilon$$

$$Q_x = -\beta_1 - \alpha_2 \cos i$$

$$Q_y = (-\alpha_1 + \beta_2 \cos i) \cos \varepsilon - \gamma_2 \sin \varepsilon$$

$$Q_z = (-\alpha_1 + \beta_2 \cos i) \sin \varepsilon + \gamma_2 \cos \varepsilon.$$

Контроль при отладке программы:

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1$$

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0.$$

3. Находим среднюю аномалию:

$$M_i = M_o + n(t_i - t_o)$$

Величину $(t_i - t_o)$ в сутках вычисляем по таблице "Юлианский период" в АЕ. Среднее суточное движение находим по формуле:

$$n = k / a \sqrt{a},$$

где $k = 0,985607686 = 0,01720209895$ - постоянная Гаусса.

Если в исходных данных приведена величина T – момент прохождения тела через перигелий, то предварительно находим

$$M_o = n(t_o - T)$$

Момент t_o выбирается произвольно, но для простоты вычислений вблизи моментов t_i , на которые вычисляется эфемерида.

4. Из уравнения Кеплера находим эксцентрисическую аномалию E на каждый заданный момент времени t_i :

$$E_i - e \sin E_i = M_i.$$

При этом надо учесть, что эксцентриситет должен быть выражен в угловой мере $e^\circ = e \cdot 57^\circ 29578$, если в ней ведутся все вычисления, или M в радианной мере, что удобнее для работы. Найти эксцентрическую аномалию E можно различными методами.

Метод итераций.

Так как $E = M + e \sin E$, примем в первом приближении

$$E_1 = M.$$

Тогда $E_2 = M + e \sin E_1$

$$E_3 = M + e \sin E_2$$

• • • •

$$E_{k+1} = M + e \sin E_k$$

Процесс повторяется до тех пор, пока разность $|E_{k+1} - E_k|$ не достигнет заданной точности. Этот метод применим при $e < 0.4$. При больших значениях e итерации сходятся медленно и лучше применить другой алгоритм.

Также примем $E_1 = M$

$$E_2 = E_1 + (M + e \sin E_1 - E_1) / (1 - e \cos E_1)$$

или $E_{k+1} = E_k + (M + e \sin E_k - E_k) / (1 - e \cos E_k)$

Здесь эксцентриситет e , стоящий в знаменателе всегда выражен в радианной мере.

Метод разложения в ряд.

Эксцентрическую аномалию можно найти и с помощью ряда по кратным средней аномалии M . Коэффициентами

этих рядов являются некоторые функции эксцентриситета e .

Ряды сходятся при всех M при $0 < e < e^*$ абсолютно,

при $0 < e < 1$ не абсолютно,

где $e^* = 0,6627434\dots$ называется *пределом Лапласа*.

Обычно используется одна из двух формул:

$$E = M + (e - e^3/8) \sin M + e^2 \sin 2M/2 + 3e^3 \sin 3M/8 + \dots$$

или
$$E = M + e \sin M + e^2 \sin 2M/2 + \\ + e^3 (3^2 \sin 3M - 3 \sin M) / 3! 2^2 + \\ + e^4 (4^3 \sin 4M - 4 \cdot 2^3 \sin 2M) / 4! 2 + \\ + e^5 (5^4 \sin 5M - 5 \cdot 3^4 \sin 3M + 10 \sin M) / 5! 2 + \dots$$

5. Находим $r_i \sin v_i = a \sqrt{1 - e^2} \sin E_i$

$$r_i \cos v_i = a (\cos E_i - e)$$

6. Вычисляем гелиоцентрические экваториальные прямоугольные координаты тела:

$$x_i = r_i P_x \cos v_i + r_i Q_x \sin v_i$$

$$y_i = r_i P_y \cos v_i + r_i Q_y \sin v_i$$

$$z_i = r_i P_z \cos v_i + r_i Q_z \sin v_i$$

7. Выписываем из АЕ прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты Солнца X_i, Y_i, Z_i на момент t_i , отнесенные к заданному равноденствию.

8. Получаем геоцентрические координаты небесного тела:

$$\xi_i = x_i + X_i$$

$$\eta_i = y_i + Y_i$$

$$\zeta_i = z_i + Z_i$$

9. Находим α_i, δ_i – сферические координаты тела и φ_i :

$$\varrho_i \cos \omega_i \cos \delta_i = \xi_i$$

$$\varrho_i \sin \omega_i \cos \delta_i = \eta_i$$

$$\varrho_i \sin \delta_i = \tilde{\eta}_i$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО СМЕШАННЫМ ДАННЫМ

Радиолокационные методы вошли в астрономию довольно давно, но наиболее полно они используются при определении параметров движения КА. Это поставило перед небесной механикой ряд новых задач. Во-первых, необходимо определять наклонную дальность, т.е. расстояние между наземной станцией наблюдения и КА. Во-вторых, существуют методы исключительно точных измерений радиальной скорости (скорости увеличения и уменьшения длины вектора наклонной дальности). Кроме того, при определении угловых координат КА чаще используют высоту и азимут, чем прямое восхождение и склонение.

Все это привело к созданию в рамках небесной механики нового раздела – *астродинамики*, основой задачей которой является определение орбит искусственных небесных тел. Для определения орбиты КА по смешанным данным при наличии избыточных наблюдений наиболее часто применяют *метод Херрика-Джисбаса*.

Исходные данные.

Исходные данные получены из наблюдений:

A_i - азимут;

h_i - высота;

ϱ_i - наклонная дальность;

t_i - моменты наблюдений, $i = 3$.

Координаты станций наблюдений:

φ_i - геодезическая широта;

λ_i - долгота (положительная к востоку);

H_i - высота пункта.

Постоянные величины:

$a_e = 1,0$ - экваториальный радиус Земли;

$M = 1,0$ - масса Земли;

$f = 1/298,3$ - сжатие Земли;

$k = 0,07436574$ (э.р.) /мин. - гравитационная постоянная;

$d\theta/dt = 0,25068447$ град/мин - постоянная для перехода к звездному времени.

Схема решения.

1. Определим звездное время на момент наблюдения.

Гринвичское звездное время на начало суток второго наблюдения:

$$\Theta_2 = 99,6909833 + 36000,7689 T_2 + 0,00038708 T_2^2,$$

где $T_2 = (JD - 2415020,0) / 36525$, а JD - целая часть второго момента, выраженная в юлианских сутках. Тогда местное звездное время в моменты наблюдений равны:

$$\theta_i = \theta_{j2} + d\theta / dt (t_i - JD_2) + \lambda_i ,$$

значение $(t_i - JD_2)$ выражено в минутах времени.

2. Найдем направляющие косинусы орбиты L_{xi} , L_{yi} , L_{zi}

$$L_{1i} = -\cos A_i \cos h_i \quad S_{1i} = \sin \varphi_i \cos \theta_i$$

$$L_{2i} = \sin A_i \cos h_i \quad S_{2i} = \sin \varphi_i \sin \theta_i$$

$$L_{3i} = \sin h_i \quad S_{3i} = -\cos \varphi_i$$

$$E_{1i} = -\sin \theta_i \quad z_{1i} = \cos \theta_i \cos \varphi_i$$

$$E_{2i} = \cos \theta_i \quad z_{2i} = \sin \theta_i \cos \varphi_i$$

$$E = 0 \quad z_{3i} = \sin \varphi_i$$

$$L_{xi} = L_1 S_1 + L_2 E_1 + L_3 Z_1$$

$$L_{yi} = L_1 S_2 + L_2 E_2 + L_3 Z_2$$

$$L_{zi} = L_1 S_3 + L_2 E_3 + L_3 Z_3$$

Все эти вычисления проделываем для каждого наблюдения.

3. Вычисляем радиусы кривизны Земли в точках наблюдений:

$$g_{1i} = H_i + a_e / [1 - (2f - f^2) \sin^2 \varphi_i]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$g_{2i} = H_i + a_e (1-f)^2 / [1 - (2f - f^2) \sin^2 \varphi_i]^{1/2}$$

4. Получаем компоненты радиуса – вектора станции.

$$X_i = -g_{1i} \cos \varphi_i \cos \theta_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$Y_i = -g_{1i} \cos \varphi_i \sin \theta_i$$

$$Z_i = -g_{2i} \sin \varphi_i$$

5. Координаты КА на моменты наблюдений

$$x_i = \varrho_i L_{xi} - X_i$$

$$y_i = \varrho_i L_{yi} - Y_i$$

$$z_i = \varrho_i L_{zi} - Z_i$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

По трем положениям тела можно определить элементы его орбиты. Однако надо помнить, что в случае искусственных небесных тел (КА и ИСЗ) нередко используются наблюдения, сделанные на разных витках. Поэтому для получения более точных параметров орбиты лучше пользоваться координатами и скоростями на один момент наблюдений.

В методе Херрика-Джиббса большое внимание уделено определению вектора скорости на момент среднего наблюдения.

6. Перейдем к модифицированному времени

$$\tau_{12} = k(t_2 - t_1) \quad \text{здесь интервалы}$$

$$\tau_{23} = k(t_3 - t_2) \quad \text{между наблюдениями}$$

$$\tau_{13} = k(t_3 - t_1) \quad \text{выражены в минутах.}$$

7. Вычисляем коэффициенты основного уравнения.

$$G_1 = \tau_{23} / \tau_{12} \cdot \tau_{13} \quad H_1 = M \tau_{23} / 12$$

$$G_3 = \tau_{12} / \tau_{23} \cdot \tau_{13} \quad H_3 = M \tau_{12} / 12$$

$$G_2 = G_1 - G_3 \quad H = H_1 - H_3$$

$$d_i = G_i + H_i / r_i^3 \quad i = 1, 2, 3$$

8. Находим компоненты вектора скорости КА

$$\dot{x}_i = -d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3$$

$$\dot{y}_2 = -d_1 y_4 + d_2 y_2 + d_3 y_3$$

$$\dot{z}_2 = -d_1 z_4 + d_2 z_2 + d_3 z_3$$

Компоненты вектора скорости на момент t_2 определены с точностью до членов порядка $(r^{\frac{5}{2}}/5!) \tilde{C}_{ij}^5$.

Итак, определив координаты и скорости на заданный момент, можно легко найти элементы орбиты КА.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО КООРДИНАТАМ И СКОРОСТИЯМ НА ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ

Исходные данные

x, y, z - прямоугольные координаты

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - компоненты скорости

t - момент, на который они вычислены.

Отметим, что для естественных тел Солнечной системы обычно используются гелиоцентрические координаты, отнесенные к плоскости стандартной эклиптики.

При этом момент t чаще выражают в юлианской дате (JD). Если компоненты скорости получены из численного интегрирования, то они обычно относятся к единице времени, равной ω' суток (ω' - шаг интегрирования) и их следует разделить на $\omega' \cdot k$ или только на ω' и при этом принять $k = 1$.

Схема решений

1. Вычисляем расстояние до притягивающего тела и линейную скорость на орбите

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

2. Определяем большую полуось орбиты

$$1/a = 2/r - V^2/k^2 ,$$

где k должно быть принято равным 1, если время модифицированное.

3. Находим эксцентриситет орбиты e и эксцентрическую аномалию E

$$e \cos E = 1 - r/a$$

$$e \sin E = r \dot{r} / k \sqrt{a} ,$$

при этом

$$r \dot{r} = x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z} , \quad k = 1 .$$

4. Можно вычислить момент прохождения через перигелий T из известного уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - T) .$$

$$n = k/a \sqrt{a'} , \quad k = 1$$

Гораздо чаще момент T заменяется двумя взаимно связанными величинами M_o , t_o . В этом случае за t_o принимается заданный момент $t = t_o$, а $M_o = E - e \sin E$.

5. Направляющие косинусы орбиты.

$$P_x = (x/r) \cos E - \dot{x} \sqrt{a} \sin E$$

$$P_y = (y/r) \cos E - \dot{y} \sqrt{a} \sin E$$

$$P_z = (z/r) \cos E - \dot{z} \sqrt{a} \sin E$$

$$Q_x = x \sin E / r \sqrt{(1-e^2)} + \dot{x} \sqrt{a} (\cos E - e) / \sqrt{(1-e^2)}$$

$$Q_y = y \sin E / r \sqrt{1-e^2} + \dot{y} \sqrt{a} (\cos E - e) / \sqrt{1-e^2}$$

$$Q_z = z \sin E / r \sqrt{1-e^2} + \dot{z} \sqrt{a} (\cos E - e) / \sqrt{1-e^2}$$

Контроль при отладке программы:

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1$$

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0.$$

7. Угловые элементы орбиты могут быть найдены из соотношений:

$$\sin i \sin \omega = P_z \cos \epsilon - P_y \sin \epsilon$$

$$\sin i \cos \omega = Q_z \cos \epsilon - Q_y \sin \epsilon$$

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \epsilon$$

$$\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega$$

$$\cos i = -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \operatorname{cosec} \Omega,$$

где ϵ - наклон эклиптики к экватору, к которому отнесены исходные данные.

6. СКОРОСТЬ СПУТНИКА И ЕЕ КОМПОНЕНТЫ.

СВОЙСТВО СКОРОСТИ В КЕПЛЕРОВСКОМ ДВИЖЕНИИ.

Форма и размеры орбиты любого тела P , движущегося в центральном поле тяготения, например Солнца S , вполне определяются двумя величинами: большой полуосью орбиты a и эксцентриситетом e (случай прямолинейного здесь исключается). Если в какой-то момент времени известна истинная аномалия v , то можно вычислить и вектор скорости V .

Во многих задачах удобнее использовать не сам вектор скорости, а его компоненты. В астродинамике приняты проекции скорости на два основных направления, связанных с движением тела по орбите, это по радиусу - вектору V_z и нормали к радиусу вектору в плоскости орбиты V_T .

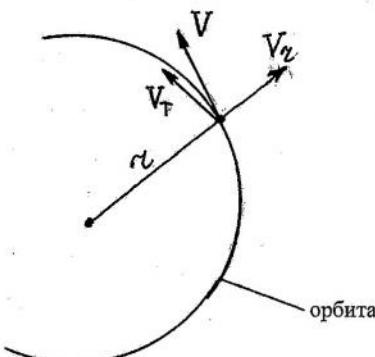


Рис. 2. Составляющие скорости спутника

Эти компоненты называются радиальной и трансверсальной составляющими скорости. Трансверсальную составляющую часто также называют поперечной, поэтому в литературе она обозначается как V_T или V_n .

Прежде всего определим V_z и V_T через элементы орбиты. Обозначим угол между радиальной составляющей V_z и вектором скорости V через φ . Тогда из прямоугольных треугольников следует

$$V_z = V \cos \varphi$$

$$V_T = V \cos (90^\circ - \varphi) = V \sin \varphi$$

Из механики известны соотношения:

$$V_2 = dr/dt = \dot{r} \quad V_T = r \cdot dv/dt = r \dot{v},$$

где r – радиус-вектор тела, v – истинная аномалия.

Отсюда

$$r V_T = r V \sin \varphi = r^2 \dot{v}$$

$$r^2 = dv/dt = r^2 \dot{v} = c.$$

Следовательно, $r V \sin \varphi = c$ – это новая, четвертая формула интеграла площадей.

Дифференцируя известное выражение для радиуса-вектора

$$r = p/(1 + e \cos v)$$

получим

$$\dot{r} = -p(-\dot{v} e \sin v)/(1 + e \cos v)^2$$

Подставляя сюда \dot{v} из $r^2 \dot{v} = c = \sqrt{\mu} \sqrt{p}$

имеем

$$\begin{aligned} \dot{r} &= p \cdot e \frac{\sin v \cdot (1 + e \cos v)^2 \sqrt{\mu} \sqrt{p}}{p^2 (1 + e \cos v)^2} = e \sin v \cdot \sqrt{\mu/p} \\ V_2 &= \dot{r} = e \sin v \sqrt{\mu/p} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} V_T &= r \dot{v} = (p(1 + e \cos v) \sqrt{\mu/p})/p^2 (1 + e \cos v) = \\ &= (1 + e \cos v) \sqrt{\mu/p} \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь мы можем вычислить скорость тела V через элементы его орбиты. Действительно,

$$\begin{aligned} V^2 &= V_2^2 + V_T^2 = \\ &= (\sqrt{\mu/p})^2 [e^2 \sin^2 v + 1 + 2e \cos v + e^2 \cos^2 v] = \\ &= (\sqrt{\mu/p})^2 [1 + 2e \cos v + e^2], \\ V &= \sqrt{\mu/p} \cdot \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Выражения (1), (2), (3) позволяют получить весьма полезные следствия.

1. Тело находится в перигелии:

$$v = 0 \quad \sin v = 0$$

$$V_2 = 0 \quad \cos v = +1$$

$$V_T = (1 + e) \sqrt{\mu/p}, \quad V = (1 + e) \sqrt{\mu/p} \quad (4)$$

т.е. в перигелии скорость V направлена перпендикулярно радиусу-вектору и равна V_2 .

2. Тело находится в афелии:

$$v = 180^\circ \quad \sin v = 0$$

$$V_2 = 0 \quad \cos v = -1$$

$$V_T = (1 - e) \sqrt{\mu/p}, \quad V = (1 - e) \sqrt{\mu/p} \quad (5)$$

т.е. в афелии скорость V также направлена перпендикулярно радиусу-вектору и равна V_T .

3. Из соотношений (4), (5) следует, что скорость V в перигелии максимальна, тогда как в афелии она минимальна.

$$V_{\text{пер}}/V_{\text{аф}} = (1 + e)/(1 - e) = Q/q,$$

так как $Q = a(1 + e)$, $q = a(1 - e)$.

Это условие называется «правилом рычага».

7. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ.

ОСКУЛИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТ

Если на тело, движущееся в поле притяжения центрального тела, действует дополнительная сила, то условие задачи двух тел будет нарушено, и орбита тела не будет точным коническим сечением. В случае движения планет,

астероидов, комет основной дополнительной силой является притяжения их помимо Солнца другими планетами. При изучении движения ИСЗ в гравитационном поле Земли необходимо учитывать влияние ее геопотенциала сопротивляющую среду атмосферы, действие притяжения Солнца, Луны и других планет, а также некоторые другие негравитационные эффекты.

Различия между координатами и составляющими скорости в действительных орбитах и их значениями, соответствующими кеплеровской орбите, называются **возмущениями**, дополнительная сила – возмущающей, а само движение – возмущенным.

При возмущенном движении правые части дифференциальных уравнений движения отличны от нуля и имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \mu x / r^3 = X \\ \ddot{y} + \mu y / r^3 = Y \\ \ddot{z} + \mu z / r^3 = Z \end{array} \right. \quad (6)$$

где X, Y, Z – возмущающие ускорения, создаваемые возмущающей силой в общем случае. Если имеется несколько возмущающих факторов (например, при движении ИСЗ), то возмущающее ускорение можно представить в виде:

$$X = \sum_{j=0}^n X_j; \quad Y = \sum_{j=0}^n Y_j; \quad Z = \sum_{j=0}^n Z_j.$$

Если возмущенное движение происходит только в гравитационном поле, то правые части могут быть выражены через производные **пертурбационной функции R**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \mu x / r^3 = \partial R / \partial x \\ \ddot{y} + \mu y / r^3 = \partial R / \partial y \\ \ddot{z} + \mu z / r^3 = \partial R / \partial z \end{array} \right. \quad (6)$$

где μ – гравитационный параметр.

Возмущения в движении небесных тел были одним из тех вопросов, которому со времени Ньютона посвятили свое внимание многие великие математики. Аналитическое развитие методов изучения возмущений было начато Л.Эйлером (1707-1783) и А.Клеро (1713-1765), продолжено Лапласом и Лагранжем, дополнено работами Коши и Вейерштрассом. Существует два метода определения возмущений.

1. Метод вариации координат предполагает учет возмущающих сил путем прямого вычисления возмущений координат и составляющих скорости.
2. Метод вариации постоянных (т. е. вариации элементов орбит) основан на выражении возмущенной орбиты через невозмущенную кеплеровскую орбиту с переменными элементами.

Для второго метода Лагранжем было введено понятие оскулирующей орбиты. Предположим, что в процессе

движения тела по возмущенной орбите в какой-то момент возмущения перестали действовать. Тогда после этого момента тело будет двигаться по некоторой кеплеровской невозмущенной орбите, причем в заданный момент эта орбита имеет общую точку (соприкасается - оскулирует) с возмущенной орбитой (рис. 3).



Рис. 3. Возмущенная и оскулирующая орбиты.

Таких точек на возмущенной орбите можно выбрать сколь угодно много и сколь угодно близко друг к другу, всякий раз полагая, что возмущения исчезают. Тем самым можно получить бесчисленное множество невозмущенных орбит с разными элементами, каждая из которых имеет общую точку с возмущенной орбитой. Такая кеплеровская орбита называется *оскулирующей*. Точка соприкосновения оскулирующей и возмущенной орбит называется точкой оскуляции, а соответствующий этой точке момент времени – эпохой оскуляции. В любой заданый момент времени, если известны элементы оскулирующей орбиты, то

положение тела может быть вычислено по формулам невозмущенного движения. Метод вариации элементов орбит наиболее часто используется для изучения возмущенного движения, так как основан на известных уравнениях невозмущенного движения.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОСКУЛИРИЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ

Для невозмущенного движения решение дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x = f_1(t, e_1, \dots, e_6) \\ y = f_2(t, e_1, \dots, e_6) \\ z = f_3(t, e_1, \dots, e_6) \end{cases}$$

где e_1, \dots, e_6 – кеплеровские элементы орбит.

Тогда решение системы уравнений (6) возмущенного движения можно записать в том же виде, но через оскулирующие элементы орбит, т.е. в этом случае сами элементы орбит будут функциями времени:

$$\begin{cases} x = f_1(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \\ y = f_2(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \\ z = f_3(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \end{cases}$$

Понизим порядок системы (6) введением новых переменных:

$$x' = \dot{x}, \quad y' = \dot{y}, \quad z' = \dot{z},$$

тогда

$$\begin{cases} \dot{x}' + \mu x/r^3 = \partial R/\partial x \\ \dot{y}' + \mu y/r^3 = \partial R/\partial y \\ \dot{z}' + \mu z/r^3 = \partial R/\partial z \end{cases} \quad (7)$$

а движение в текущий момент времени по оскулирующему эллипсу может быть описано формулами невозмущенного движения:

$$\begin{cases} x' = f_1(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \\ y' = f_2(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \\ z' = f_3(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \\ \dot{x}' = \partial f_1/\partial t(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \\ \dot{y}' = \partial f_2/\partial t(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \\ \dot{z}' = \partial f_3/\partial t(t, e_1(t), \dots, e_6(t)) \end{cases} \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по t , получим

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial x/\partial t + \sum_{j=1}^6 (\partial x/\partial e_j; de_j/dt) \\ \dot{y} = \partial y/\partial t + \sum_{j=1}^6 (\partial y/\partial e_j; de_j/dt) \\ \dot{z} = \partial z/\partial t + \sum_{j=1}^6 (\partial z/\partial e_j; de_j/dt) \\ \dot{x}' = \partial x'/\partial t + \sum_{j=1}^6 (\partial x'/\partial e_j; de_j/dt) \\ \dot{y}' = \partial y'/\partial t + \sum_{j=1}^6 (\partial y'/\partial e_j; de_j/dt) \\ \dot{z}' = \partial z'/\partial t + \sum_{j=1}^6 (\partial z'/\partial e_j; de_j/dt) \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \partial x/\partial t - x' &= 0 & \partial x'/\partial t + \mu x/r^3 &= 0 \\ \partial y/\partial t - y' &= 0 & \partial y'/\partial t + \mu y/r^3 &= 0 \\ \partial z/\partial t - z' &= 0 & \partial z'/\partial t + \mu z/r^3 &= 0, \end{aligned}$$

получим шесть дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов орбиты:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^6 (\partial x/\partial e_j \cdot de_j/\partial t) = 0 \\ \sum_{j=1}^6 (\partial y/\partial e_j \cdot de_j/\partial t) = 0 \\ \sum_{j=1}^6 (\partial z/\partial e_j \cdot de_j/\partial t) = 0 \\ \sum_{j=1}^6 (\partial x'/\partial e_j \cdot de_j/\partial t) = \partial R/\partial x \\ \sum_{j=1}^6 (\partial y'/\partial e_j \cdot de_j/\partial t) = \partial R/\partial y \\ \sum_{j=1}^6 (\partial z'/\partial e_j \cdot de_j/\partial t) = \partial R/\partial z \end{cases} \quad (10)$$

Так как в правой части стоит пертурбационная функция R , то имеется в виду движение лишь в гравитационном поле.

Данная система уравнений имеет шесть неизвестных:

$de_1/dt, \dots, de_6/dt$, где e - постоянные интегрирования.

Постоянными интегрирования являются элементы орбит, например, такие как $\Omega, \omega, i, a, e, M$. Тогда для нахождения коэффициентов:

$\partial x/\partial \Omega, \partial x/\partial \omega, \partial x/\partial i, \partial x/\partial a, \partial x/\partial e, \partial x/\partial M,$

$\partial y/\partial \Omega, \partial y/\partial \omega, \partial y/\partial i, \partial y/\partial a, \partial y/\partial e, \partial y/\partial M,$

$\partial z/\partial \Omega, \partial z/\partial \omega, \partial z/\partial i, \partial z/\partial a, \partial z/\partial e, \partial z/\partial M;$

и

$\partial x'/\partial \Omega, \partial x'/\partial \omega, \partial x'/\partial i, \partial x'/\partial a, \partial x'/\partial e, \partial x'/\partial M,$

$\partial y'/\partial \Omega, \partial y'/\partial \omega, \partial y'/\partial i, \partial y'/\partial a, \partial y'/\partial e, \partial y'/\partial M,$

$\partial z'/\partial \Omega, \partial z'/\partial \omega, \partial z'/\partial i, \partial z'/\partial a, \partial z'/\partial e, \partial z'/\partial M$

необходимо продифференцировать известные формулы невозмущенного движения по элементам орбит:

$$x = r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i)$$

$$y = r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \quad (10a)$$

$$z = r \sin u \sin i$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{\mu/p}[e \sin v (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) + \\ &\quad + (1+e \cos v)(-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i)] \\ \dot{y} &= \sqrt{\mu/p}[e \sin v (\cos u \sin \Omega - \sin u \cos \Omega \cos i) + \\ &\quad + (1+e \cos v)(-\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i)] \\ \dot{z} &= \sqrt{\mu/p}[e \sin v \sin u \sin i + (1+e \cos v) \cos u \sin i].\end{aligned}$$

и подставить эти коэффициенты в систему уравнений (10). Решая систему (10) относительно неизвестных $d\Omega/dt$, di/dt , $d\omega/dt$, da/dt , de/dt , dM/dt , получим уравнения для нахождения оскулирующих элементов орбит:

$$\left\{ \begin{aligned}da/dt &= 2/na \cdot \partial R/\partial M \\ de/dt &= (1-e^2)/(n a^2 e) \cdot \partial R/\partial M - \\ &\quad - (\sqrt{1-e^2})/(n a^2 e) \cdot \partial R/\partial \omega \\ di/dt &= \cos i / (n a^2 \sqrt{(1-e^2)} \sin i) \cdot \partial R/\partial M \\ d\omega/dt &= \sqrt{(1-e^2)}/na^2 e \cdot \partial R/\partial e - \\ &\quad - \cos i / (n a^2 \sqrt{(1-e^2)} \sin i) \cdot \partial R/\partial i \\ d\Omega/dt &= 1 / (n a^2 \sqrt{(1-e^2)} \sin i) \cdot \partial R/\partial i \\ dM/dt &= n - \sqrt{(1-e^2)}/n a^2 e \cdot \partial R/\partial e - 2/na \cdot \partial R/\partial a\end{aligned} \right. \quad (11)$$

где n – среднее движение.

Данные уравнения оскулирующих элементов орбит при движении только в гравитационном поле называются **уравнениями Лагранжа**.

Если движение происходит не только под действием гравитационных сил, то в общем случае для нахождения оскулирующих элементов применяют **уравнения Ньютона**:

$$\left\{ \begin{aligned}da/dt &= \sqrt{p/\mu} [2 e a^2 \sin v/p^2 + 2 a^2/r] \cdot S \\ de/dt &= \sqrt{p/\mu} [\sin v + \cos(v+e) r/p] \cdot T \\ di/dt &= \sqrt{p/\mu} r/p \cos(v+\omega) \cdot W \\ dM/dt - n &= \sqrt{p/\mu} [\sqrt{(1-e^2)}/e (\cos v + 2 e r/p) - \\ &\quad - \sqrt{(1-e^2)}/e (1+r/p) \sin v] \cdot S \\ d\Omega/dt &= \sqrt{p/\mu} [\sin(v+\omega)/\sin i \cdot r/p] \cdot T \\ d\omega/dt &= \sqrt{p/\mu} [-\cos v/e + \sin v/e(1+r/p) - \\ &\quad - r/p \sin(v+\omega) \operatorname{ctg} i] \cdot W\end{aligned} \right. \quad (12)$$

$p = a(1+e)$ – фокальный параметр

В уравнения Ньютона вместо пертурбационной функции R входят S – радиальная составляющая возмущающего ускорения (направлена вдоль радиуса–вектора орбиты), T – трансверсальная составляющая (лежит в плоскости оскулирующей орбиты, перпендикулярна к S и направлена в сторону орбитального движения), W – ортогональная составляющая возмущающего ускорения (перпендикулярна к плоскости орбиты и направлена так, чтобы тройка векторов S , T , W была правой).

9. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОСКУЛИРУЮЩИХ ОРБИТ

Уравнения Лагранжа (11) и Ньютона (12) представляют собой нелинейную систему обыкновенных уравнений и в конечном виде не интегрируются. Поэтому для их решения в небесной механике применяют различного рода

преобразования путем введения новых координат, параметров, упрощающих внешний вид уравнений, или используют приемы приближенного интегрирования. Все общие методы интегрирования дифференциальных уравнений можно разделить на численные, аналитические и качественные.

Численные методы предполагают нахождение точного решения системы уравнений в момент t_{n+1} , если оно известно в момент t_n . Таким образом, имеем систему уравнений (11) или (12), необходимо найти значения $a_1(t_1)$, $e_1(t_1)$, $i_1(t_1)$, $\Omega_1(t_1)$, $\omega_1(t_1)$, $M_1(t_1)$ в момент t_1 , удовлетворяющие данным уравнениям и условию $a_0, e_0, i_0, M_0, \Omega_0, \omega_0$ в момент t_0 . Наиболее простым способом решения является способ разложения выбранных элементов орбит в ряд Тейлора в окрестности некоторого начального момента t_0 :

$$a_1 = a_0 + a_0'(t_1 - t_0) + a_0''(t_1 - t_0)^2/2! + a_0'''(t_1 - t_0)^3/3! + \dots$$

$$e_1 = e_0 + e_0'(t_1 - t_0) + e_0''(t_1 - t_0)^2/2! + e_0'''(t_1 - t_0)^3/3! + \dots$$

$$i_1 = i_0 + i_0'(t_1 - t_0) + i_0''(t_1 - t_0)^2/2! + i_0'''(t_1 - t_0)^3/3! + \dots$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_0'(t_1 - t_0) + \omega_0''(t_1 - t_0)^2/2! + \omega_0'''(t_1 - t_0)^3/3! + \dots$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \Omega_0'(t_1 - t_0) + \Omega_0''(t_1 - t_0)^2/2! + \Omega_0'''(t_1 - t_0)^3/3! + \dots$$

$$M_1 = M_0 + M_0'(t_1 - t_0) + M_0''(t_1 - t_0)^2/2! + M_0'''(t_1 - t_0)^3/3! + \dots$$

где производные элементов по времени зависят от возмущающих сил ($'$ – порядок дифференцирования).

Затем за начальный момент принимают значение t_1 и

соответственно значения $a_1, e_1, i_1, \omega_1, \Omega_1, M_1$, и определяют элементы орбиты $a_2, e_2, i_2, \omega_2, \Omega_2, M_2$ в момент t_2 , и т. д. В последнее время в результате быстрого развития вычислительной техники все чаще стали использоваться такие численные методы как метод квадратур, метод Коуэлла, метод Рунге – Кутта и др.

Под **аналитическими методами** понимают способы и приемы, дающие возможность найти общее или частное решение системы дифференциальных уравнений путем вывода буквенных приближенных формул для заранее неизвестных функций. Как правило, решение, полученное аналитическим методом, является периодическим, так как все величины, определяющие взаимное расположение тел, выражают через периодические функции времени с одним и тем же периодом. Примером такого аналитического метода служит наиболее часто используемый метод малого параметра Пуанкаре.

Пусть составляющие возмущающего ускорения (в общем случае это $-S, T, W$) являются заданными функциями координат и составляющих скорости (т.е. выполнено разложение возмущающей силы), а также некоторого малого параметра \mathfrak{S} . Тогда решения уравнений возмущенного движения (7) в общем случае могут быть представлены в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням этого малого параметра:

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2x/dt^2 + \mu x/r^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k X^{(k)} \\ d^2y/dt^2 + \mu y/r^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Y^{(k)} \\ d^2z/dt^2 + \mu z/r^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Z^{(k)} \end{array} \right. \quad (13)$$

и

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k x^{(k)} \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k y^{(k)} \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k z^{(k)} \quad (14)$$

Для определения нулевого приближения полагают $\sigma = 0$, тогда правые части уравнений (13) равны 0, и мы имеем уравнения невозмущенного движения, а $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ находятся по известным формулам (10а) невозмущенного движения. Чтобы определить первое $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ и последующие приближения $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$ дифференцируем систему (13) по σ с учетом равенств (14):

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2/dt^2(dx/d\sigma) + \mu/r^3 dx/d\sigma - \\ - 3\mu x/r^5(x \cdot dx/d\sigma + y \cdot dy/d\sigma + z \cdot dz/d\sigma) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma^{k-1} X^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k dX^{(k)}/d\sigma \\ d^2/dt^2(dy/d\sigma) + \mu/r^3 dy/d\sigma - \\ - 3\mu y/r^5(x \cdot dx/d\sigma + y \cdot dy/d\sigma + z \cdot dz/d\sigma) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma^{k-1} Y^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k dY^{(k)}/d\sigma \\ d^2/dt^2(dz/d\sigma) + \mu/r^3 dz/d\sigma - \\ - 3\mu z/r^5(x \cdot dx/d\sigma + y \cdot dy/d\sigma + z \cdot dz/d\sigma) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma^{k-1} Z^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k dZ^{(k)}/d\sigma \end{array} \right. \quad (15)$$

где $dX^{(k)}/d\sigma$, $dY^{(k)}/d\sigma$, $dZ^{(k)}/d\sigma$ - полная частная производная от функций X, Y, Z по параметру σ определяется формулами:

$$\begin{aligned} dX^{(k)}/d\sigma &= \partial X^{(k)}/\partial x \ dx/d\sigma + \dots + \partial X^{(k)}/\partial \dot{x} \ d\dot{x}/d\sigma + \dots \\ dY^{(k)}/d\sigma &= \partial Y^{(k)}/\partial y \ dy/d\sigma + \dots + \partial Y^{(k)}/\partial \dot{y} \ d\dot{y}/d\sigma + \dots \\ dZ^{(k)}/d\sigma &= \partial Z^{(k)}/\partial z \ dz/d\sigma + \dots + \partial Z^{(k)}/\partial \dot{z} \ d\dot{z}/d\sigma + \dots \end{aligned}$$

Для упрощения вычислений запишем ряды (14) через ряды

Тейлора при $\sigma = 0$:

$$x^{(k)} = 1/k! (d^k x/d\sigma^k), \quad \dot{x}^{(k)} = 1/k! (d^k \dot{x}/d\sigma^k), \dots$$

$$y^{(k)} = 1/k! (d^k y/d\sigma^k), \quad \dot{y}^{(k)} = 1/k! (d^k \dot{y}/d\sigma^k), \dots$$

$$z^{(k)} = 1/k! (d^k z/d\sigma^k), \quad \dot{z}^{(k)} = 1/k! (d^k \dot{z}/d\sigma^k), \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Полагая теперь $\sigma = 0$, получим для определения функций $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ первого приближения следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2x^{(1)}/dt^2 + p_{11}x^{(1)} + p_{12}y^{(1)} + p_{13}z^{(1)} = X_1 \\ d^2y^{(1)}/dt^2 + p_{21}x^{(1)} + p_{22}y^{(1)} + p_{23}z^{(1)} = Y_1 \\ d^2z^{(1)}/dt^2 + p_{31}x^{(1)} + p_{32}y^{(1)} + p_{33}z^{(1)} = Z_1 \end{array} \right. \quad (16)$$

коэффициенты которых определяются формулами:

$$p_{11} = \mu/r^{(0)3} - 3\mu x^{(0)2}, \quad p_{21} = -3\mu y^{(0)}x^{(0)}/r^{(0)5}$$

$$p_{12} = -3\mu x^{(0)}y^{(0)}/r^{(0)5}, \quad p_{22} = \mu/r^{(0)3} - 3\mu y^{(0)2}/r^{(0)5}$$

$$p_{13} = -3\mu x^{(0)}z^{(0)}/r^{(0)5}, \quad p_{23} = -3\mu y^{(0)}z^{(0)}/r^{(0)5}$$

$$p_{31} = -3\mu z^{(0)}x^{(0)}/r^{(0)5}$$

$$p_{32} = -3\mu z^{(0)}y^{(0)}/r^{(0)5}$$

$$p_{33} = \mu/r^{(0)3} - 3\mu z^{(0)2}/r^{(0)5}$$

и где

$$X_1 = X^{(1)}(t; x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, \dot{z}^{(0)})$$

$$Y_1 = Y^{(1)}(t; x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, \dot{z}^{(0)})$$

$$Z_1 = Z^{(1)}(t; x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, \dot{z}^{(0)})$$

также известные формулы времени, так как общее решение уравнений нулевого приближения известно из теории невозмущенного кеплеровского движения.

Дифференцируя теперь уравнения (15) по параметру второй, третий, и вообще $(k - 1)$ -й раз и полагая после каждого дифференцирования $\mathcal{G} = 0$, мы будем получать последовательно уравнения, определяющие второе, третье и т.д. приближения. Таким образом, функции $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$ определяются уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d^2x^{(k)}}{dt^2} + p_{11}x^{(k)} + p_{12}y^{(k)} + p_{13}z^{(k)} = X_k \\ \frac{d^2y^{(k)}}{dt^2} + p_{21}x^{(k)} + p_{22}y^{(k)} + p_{23}z^{(k)} = Y_k \\ \frac{d^2z^{(k)}}{dt^2} + p_{31}x^{(k)} + p_{32}y^{(k)} + p_{33}z^{(k)} = Z_k \end{cases} \quad (16)$$

При изучении движения небесных тел и ИСЗ часто приходится рассматривать возмущающую силу, которая складывается из нескольких возмущающих сил различной природы и, таким образом, содержит не один малый параметр \mathcal{G} , а несколько. В этом случае функции x, y, z удобнее записать не по формулам (14), а в следующем виде:

$$x = x^{(0)} + \delta x, \quad y = y^{(0)} + \delta y, \quad z = z^{(0)} + \delta z$$

где, как уже было сказано выше, $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ есть невозмущенные координаты тела.

Величины

$$\delta x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}^k x^{(k)}, \quad \delta y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}^k y^{(k)}, \quad \delta z = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}^k z^{(k)}$$

представляют собой полные возмущения координат, вызываемые каждой возмущающей силой.

Величины

$$\delta_x^{(k)} = \mathcal{G}^k \cdot x^{(k)}, \quad \delta_y^{(k)} = \mathcal{G}^k \cdot y^{(k)}, \quad \delta_z^{(k)} = \mathcal{G}^k \cdot z^{(k)}$$

называются возмущениями k -порядка прямоугольных координат относительно параметра \mathcal{G} .

Процесс вычисления приближений координат x, y, z очень трудоемкий и громоздкий. Поэтому для облегчения вычислений необходимо выбрать соответствующую систему прямоугольных координат или использовать сферические и цилиндрические координаты. Кроме того, вид уравнений (15) зависит прежде всего от природы возмущающей силы. Поэтому интегрировать данные уравнения проще для конкретных задач возмущенного движения небесных тел и ИСЗ (различного вида ограниченные и неограниченные задачи), которые будут рассмотрены в отдельных методических пособиях.

Помимо численных и аналитических методов существуют также *качественные методы* решения дифференциальных уравнений в небесной механике. К ним относятся все способы и приемы, которые позволяют установить свойства функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, не зная общего решения этих уравнений, т.е. позволяют изучать общие свойства движений небесных тел.

Как правило, при решении конкретных задач о движении естественных и искусственных небесных тел используют два метода – аналитический и качественный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1975, 799 с.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1978, 456 с.
3. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968, 800 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ.....	3
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ ПО ДВУМ НАБЛЮДЕНИЯМ.....	5
3. ПОИСКОВАЯ ЭФЕМЕРИДА.....	9
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО СМЕШАННЫМ ДАННЫМ.....	14
5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО КООРДИНАТАМ И СКОРОСТИЯМ НА ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ.....	18
6. СКОРОСТЬ СПУТНИКА И ЕЕ КОМПОНЕНТЫ. СВОЙСТВО СКОРОСТИ В КЕПЛЕРОВСКОМ ДВИЖЕНИИ.....	20
7. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ. ОСКУЛИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТ.....	23
8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ.....	27
9. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОСКУЛИРУЮЩИХ ОРБИТ.....	31
ЛИТЕРАТУРА	38