

УДК 519.61+519.62+539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249

## МЕТОД НЕПРЕРЫВНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО НАИЛУЧШЕМУ ПАРАМЕТРУ ПРИ РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*А.А. Семенов<sup>1</sup>, С.С. Леонов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург, 190005, Россия*

<sup>2</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*

### Аннотация

В работе рассматривается подход к решению задач прочности и устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций с учетом поперечных сдвигов и ортотропии материала. Численное моделирование подобных задач при использовании метода Ритца сводится к системам нелинейных алгебраических уравнений. Их численное решение сопряжено с рядом трудностей, связанных с наличием на кривой множества решений предельных особых точек или точек бифуркации, в которых матрица Якоби вырождается. Обойти эти трудности позволяет метод продолжения решения по параметру. Приводится описание трех вариантов метода продолжения решения: метод М. Лаэя, метод Д.Ф. Давиденко и метод наилучшей параметризации. Обсуждаются их достоинства и недостатки. На примере расчета пологих оболочек двойкой кривизны, прямоугольных в плане, показывается применимость данного метода к решению задач прочности и устойчивости оболочечных конструкций. Проводится верификация предложенного подхода.

**Ключевые слова:** продолжение решения по параметру, наилучшая параметризация, метод Ритца, оболочка, прочность, устойчивость

### Введение

Оболочечные конструкции являются одними из основных элементов при проектировании различных объектов и сооружений в машиностроении, строительной и аэрокосмической отраслях. Большое число инженерных задач, связанных с необходимостью расчета деформационно-прочностных свойств и устойчивости оболочечных конструкций, диктует необходимость разработки эффективных методов исследования таких задач. Когда учитываются только упруго-пластические свойства конструкции, ее расчет на прочность и устойчивость при использовании метода Ритца сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Но в ряде задач приходится сталкиваться с прощелкиванием или выпучиванием оболочечных конструкций, что связано с наличием на кривой множества решений особых точек (предельных и точек бифуркации), в которых матрица Якоби системы уравнений вырождается. В этих случаях применение традиционных методов решения, например метода Ньютона, затруднено. Начиная с 60-х годов прошлого века разрабатывается метод продолжения решения по параметру, позволяющий обходить вычислительные трудности, связанные с описанием процессов прощелкивания и выпучивания конструкций.

Идея метода продолжения решения по параметру использовалась еще в работах А. Пуанкаре и У. Леверье. По сути метод замены переменной под знаком интеграла и метод малого параметра являются отражением этой общей идеи.

В вычислительных целях впервые метод продолжения решения по параметру был использован в работе бельгийского математика М. Лаэя для построения решений трансцендентных уравнений и систем [1, 2].

Позднее, в работах советского математика Д.Ф. Давиденко был предложен метод сведения системы нелинейных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 4]. Однако при построении замкнутых кривых приходится менять параметр продолжения решения в окрестности предельных особых точек. Для решения этой проблемы было предложено использовать параметры продолжения общего вида. Для решения нелинейных краевых задач теории упругости в работе И.И. Воровича и В.Ф. Зипаловой [5] был предложен параметр продолжения, отсчитываемый по касательной к кривой множества решений рассматриваемой задачи. В этой же работе впервые сделано предположение, что данный параметр продолжения будет в некотором смысле наилучшим для задач, кривые множества решений которых имеют предельные особые точки.

Доказательство этого факта было намечено в статье голландского инженера Э. Рикса [6] применительно к исследованию устойчивости прощелкивающихся и выпучивающихся конструкций. С конца 70-х годов прошлого века началось систематическое исследование вопросов применения наилучшего параметра к задачам математики и механики с предельными особыми точками и точками бифуркации. Отметим две крупные монографии Э.И. Григолюка, В.И. Шалашилина [7] и Ю.Л. Алльгёвера, К. Георга [8], подводящие итог полученных результатов к началу 90-х годов прошлого века. В монографии В.И. Шалашилина и Е.Б. Кузнецова [9] было доказано, что параметр, отсчитываемый по касательной к кривой множества решений системы нелинейных уравнений, доставляет задаче наилучшую обусловленность, то есть является наилучшим. Более того, этот результат был обобщен на системы обыкновенных дифференциальных, дифференциально-алгебраических и функционально-дифференциальных уравнений. В дальнейших работах Е.Б. Кузнецова было рассмотрено обобщение полученных результатов на многомерный случай [10], а также предложен алгоритм прохождения точек бифуркации различной коразмерности с использованием редукции Ляпунова – Шмидта [11]. Один из последних результатов связан с развитием нового подхода – метода продолжения решения по модифицированному наилучшему аргументу, отсчитываемому в направлении, близком к касательному, для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [12, 13].

Помимо указанных выше работ, метод продолжения решения по наилучшему параметру применялся к решению жестких и сверхжестких задач в статьях [14–16]; для исследования устойчивости панелей оболочек из изотропных [17] и ортотропных [18] материалов при геометрически нелинейном деформировании, при решении гиперболических систем с предельными особыми точками [19] и физически нелинейных задач [20]. Специальные виды параметров продолжения используют в своих работах Е.А. Лопаницын при расчете тонких пологих оболочек с учетом конечных прогибов [21] и С.С. Гаврюшин при расчете напряжений и деформаций сложных стержневых и оболочечных элементов конструкций [22].

Одним из вариантов метода продолжения решения в задачах расчета элементов конструкций является метод последовательных нагружений, предложенный В.В. Петровым [23], когда в качестве параметра продолжения решения берется прикладываемая нагрузка. Благодаря использованию этого метода было решено много прикладных инженерных задач. Основная сложность исследования устойчивости оболочек при использовании метода последовательных нагружений состоит в обходе особых точек. Один из способов такого обхода состоит в смене параметра продолжения [24, 25], однако наиболее эффективным является подход,

основанный на выборе в качестве наилучшего параметра продолжения решения длины дуги [9]. Помимо определения верхней критической нагрузки потери устойчивости он позволяет получить значение нижней критической нагрузки, выявить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции. Группа методов, основанная на использовании в качестве параметра продолжения решения длины дуги, в зарубежной литературе получила название “arc-length methods”.

Методы продолжения решения, в том числе и с использованием в качестве параметра продолжения длины дуги, использовались также для исследования поведения оболочечных конструкций в работах [26–32].

Близкими по тематике к рассматриваемой в настоящей статье задаче являются работы В.Н. Паймушина с соавторами. Отметим две статьи. В первой из них [33] исследуется устойчивость трехслойных пластин и оболочек с трансверсально-мягким наполнителем при малых деформациях и средних перемещениях. В указанной статье описано докритическое поведение конструкции и выявлены все возможные формы потери устойчивости несущих слоев и подкрепляющих стержней. В работе [34] проводится численный расчет задачи деформирования трехслойной цилиндрической оболочки с трансверсально-мягким наполнителем, подкрепленной в торцевых сечениях упругими стержнями, в осесимметричном случае. Рассмотрены докритическое и закритическое геометрически нелинейные поведения оболочки. Неустойчивые положения равновесия определяются методом продолжения решения по параметру при выборе в качестве параметра работы внешних сил.

### 1. Метод продолжения решения по параметру

Приведем краткое описание метода продолжения решения по параметру для систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, следуя монографии [9]. Рассмотрим систему  $n$  нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений относительно неизвестных  $x_1, \dots, x_n$ , содержащую вещественный параметр  $p$  и имеющую вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, p) = 0, \quad p \in [p_0; p_*]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  – заданная вектор-функция векторного аргумента,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  – вектор неизвестных.

Полагая, что вектор-функция  $\mathbf{F}$  удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции (см., например, [35]) и задана точка  $(\mathbf{x}_0, p_0)$  такая, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, p_0) = 0, \quad (2)$$

получаем, что существует решение системы (1), задаваемое однозначными непрерывными функциями параметра  $p$

$$x_i = x_i(p), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

**1.1. Методика М. Лаэя.** В статье М. Лаэя [2] для построения решения системы (1), удовлетворяющего условию (2), предложен следующий вычислительный процесс по методу Ньютона:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{(0)} &= \mathbf{x}_{k-1}, \\ \mathbf{x}_k^{(j)} &= \mathbf{x}_k^{(j-1)} - J^{-1} \left( \mathbf{x}_k^{(j-1)}, p_k \right) \cdot \mathbf{F} \left( \mathbf{x}_k^{(j-1)}, p_k \right), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Вычислительный процесс по формулам (4) продолжается до момента, когда

$$\left\| \mathbf{x}_k^{(j)} - \mathbf{x}_k^{(j-1)} \right\|_2 < \varepsilon.$$

Здесь  $J$  – матрица Якоби системы (1), вычисляемая по формуле

$$J(\mathbf{x}, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$\|\cdot\|_2$  – квадратичная (евклидова) норма вектора,  $\varepsilon > 0$  – заданная погрешность по норме искомого решения,  $j$  – номер итерации по методу Ньютона. Таким образом, метод Лаэя позволяет получить решение системы (1) при переходе от значения параметра  $p_{k-1}$  к  $p_k$ .

**1.2. Методика Д.Ф. Давиденко.** Другой подход предложил Д.Ф. Давиденко [3, 4]. Полагая справедливой зависимость (3), продифференцируем систему (1) по параметру  $p$

$$J \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dp} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} = 0. \quad (5)$$

Дополняя систему дифференциальных уравнений (5) начальными условиями

$$\mathbf{x}(p_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6)$$

полученными разрешением условия (2) относительно  $\mathbf{x}_0$ , приходим к задаче Коши. При этом решение задачи (5)–(6) является множеством решений системы (1), удовлетворяющим условию (2). В монографии [9] показано, что итерационные процессы, подобные процессу М. Лаэя, также связаны со схемами интегрирования начальной задачи (5)–(6).

Стоит отметить, что и метод Лаэя, и метод Давиденко позволяют построить решение системы (1) только в интервале изменения параметра  $p$ , в котором отличен от нуля якобиан  $\det J$ . В окрестности точек, в которых  $\det J = 0$ , называемых особыми, непосредственное применение указанных методов невозможно. Рассмотрим процесс построения решения в окрестности особых точек.

**1.3. Продолжение решения по параметру в окрестности предельных особых точек.** Запишем координатный вид системы дифференциальных уравнений (5)

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dp} + \frac{\partial F_i}{\partial p} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Система (7) является линейной относительно производных  $\frac{dx_i}{dp}$ . Дополняя матрицу Якоби  $J$  вектор-столбцом  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p}$  и обозначая полученную матрицу через

$$\bar{J} = \left( J, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \right),$$

можно разрешить систему (7) относительно производных  $\frac{dx_i}{dp}$  по правилу Крамера

$$\frac{dx_i}{dp} = (-1)^{n-i} \frac{\det J_i}{\det \bar{J}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Здесь  $\det J_i$  – определитель матрицы  $J_i$ , получающейся из  $\bar{J}$  вычеркиванием  $i$ -го столбца.

В регулярных точках множества решений системы (1) якобиан  $\det J$  отличен от нуля. Остановимся на случае  $\det J = 0$ , когда в окрестности некоторой точки множества решений ранги матриц  $J$  и  $\bar{J}$  удовлетворяют условиям

$$\operatorname{rg}(J) = n - 1, \quad \operatorname{rg}(\bar{J}) = n.$$

Такие точки принято называть предельными.

Будем считать, что параметр  $p$  есть  $(n + 1)$ -я неизвестная  $x_{n+1}$ . Тогда система (1) переписется в виде

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0. \quad (9)$$

Так как  $\operatorname{rg}(\bar{J}) = n$ , среди столбцов матрицы  $\bar{J}$  найдутся  $n$  линейно независимых, а значит, хотя бы один из определителей  $\det J_j$  отличен от нуля. Принимая неизвестную  $x_j$  за параметр продолжения, можно переписать систему уравнений (8) в виде

$$\frac{dx_i}{dx_j} = (-1)^{j-i} \frac{\det J_i}{\det J_j}, \quad \frac{dx_{n+1}}{dx_j} = (-1)^{n-j} \frac{\det J}{\det J_j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Используя систему (10) можно обойти трудности, связанные с неограниченным ростом правой части системы (8) в окрестности предельной особой точки. Переход от системы (8) к системе (10) носит название смены параметра продолжения [3, 4]. Сменяя параметр продолжения нужное число раз, можно обойти все предельные особые точки, построив решение системы (9) во всей рассматриваемой области.

Однако сам процесс смены параметра продолжения плохо формализуем и делается фактически вручную, что усложняет процесс решения. Более целесообразным является использование параметров продолжения более общего вида

$$d\mu = \alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n + \alpha_{n+1} dx_{n+1}, \quad (11)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  – заданные функции неизвестных  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ .

Полагая, что все неизвестные  $x_1, \dots, x_{n+1}$  зависят от параметра  $\mu$ , запишем систему (7) в виде

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{d\mu} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

А дополняя его уравнением для параметра  $\mu$  (11), получим замкнутую систему из  $(n + 1)$ -го уравнения. Выбирая соответствующим образом функции  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ , можно добиться того, чтобы система (12) не имела предельных особых точек во всей рассматриваемой области. На существование таких функций  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  указывает тот факт, что, как это было показано выше, в окрестности каждой точки мы можем выбрать такую неизвестную  $x_j$ , для которой рассматриваемая система уравнений не будет иметь особенностей. В этом случае функции  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  равны нулю, за исключением  $\alpha_j = 1$ . Определяя таким образом значения  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  в каждой точке, получим искомые функции.

Можно видеть, что выбор функций  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  не однозначен для конкретной задачи. В [9] доказано, что система (11), (12) будет обусловлена наилучшим образом, если в качестве параметра продолжения, называемого в дальнейшем наилучшим, выбрать длину дуги  $\lambda$ , отсчитываемую вдоль кривой множества решения. Это соответствует выбору функций  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  в форме

$$\alpha_j = \frac{dx_j}{d\lambda}, \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

Для параметра  $\lambda$  справедливо соотношение

$$d\lambda^2 = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 + (dx_{n+1})^2. \quad (13)$$

Переходя к параметру  $\lambda$ , определяемому выражением (13), получим, что система (11), (12) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{d\lambda} = 0, \quad \left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{d\lambda}\right)^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

В качестве начальных условий для системы (14) выберем

$$x_j(\lambda_0) = x_{j0}, \quad j = 1, \dots, n + 1. \quad (15)$$

Полагается, что значениям  $x_{i0}$  соответствует значение  $\lambda = \lambda_0$ . Поскольку параметр  $\lambda$  не входит явно в уравнения системы (14), начало его отсчета можно вести из любой точки. В дальнейшем будем полагать, что  $\lambda_0 = 0$ .

Задача Коши (14)–(15) не имеет особенностей и может быть решена любым известным численным методом.

## 2. Математическая модель процесса деформирования оболочечных конструкций

Будем рассматривать тонкостенные пологие оболочки (рис. 1), находящиеся под действием внешней равномерно-распределенной статической поперечной нагрузки, направленной по нормали к поверхности в сторону вогнутости. Геометрический вид данных конструкций будет характеризоваться параметрами Ляме  $A$ ,  $B$  и главными кривизнами  $k_x$ ,  $k_y$  вдоль координат  $x, y$  соответственно.

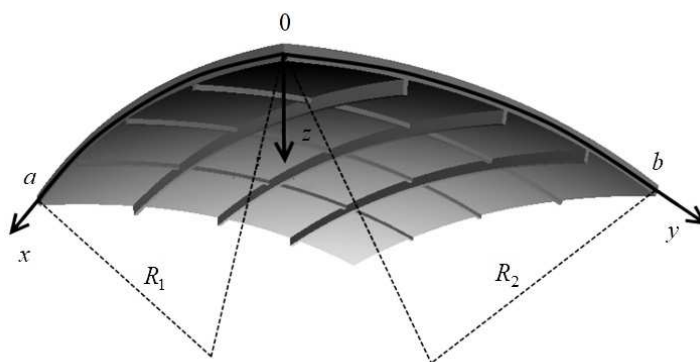


Рис. 1. Пологая оболочка двоякой кривизны с принятой локальной системой координат

Будем использовать математическую модель типа Тимошенко (Миндлина–Рейснера), которая учитывает поперечные сдвиги, ортотропию материала и геометрическую нелинейность [18]. Согласно этой модели неизвестными будут три функции перемещений точек координатной поверхности  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскости  $xOz$ ,  $yOz$ :  $\Psi_x = \Psi_x(x, y)$ ,  $\Psi_y = \Psi_y(x, y)$ . Учет геометрической нелинейности в данном случае дает возможность исследовать не только напряженно-деформированное состояние оболочки, но и ее устойчивость.

В основе данной модели лежит функционал полной потенциальной энергии деформации, который имеет вид

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left( N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + \right. \\ \left. + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - qW \right) AB dx dy, \quad (16)$$

где  $N_x, N_y$  – нормальные усилия в направлении осей  $x, y$ ,  $N_{xy}, N_{yx}$  – сдвиговые усилия в соответствующей плоскости  $xOy$ ,  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты,  $M_{xy}$  – крутящий момент,  $Q_x, Q_y$  – поперечные силы в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ , которые определяются соотношениями

$$N_x = \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \quad N_{xy} = N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy}, \\ M_x = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \quad M_y = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\ M_{xy} = M_{yx} = \frac{G_{12} h^3}{6} \chi_{12}, \quad Q_x = G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2).$$

Здесь  $E_1, E_2$  – модули упругости в направлениях  $x, y$ ,  $k = 5/6$ ,  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модули сдвига в плоскостях  $xOy, xOz, yOz$  соответственно,  $\mu_{12}, \mu_{21}$  – коэффициенты Пуассона,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  – деформации удлинения,  $\gamma_{xy}$  – деформации сдвига в плоскости  $xOy$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \\ \theta_1 = - \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right).$$

Для корректности дальнейшего применения численных методов, введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \quad \bar{B} = \frac{bB}{h}, \\ \bar{U} = \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y bB}{h}, \quad \bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}.$$

Таким образом, осуществлен переход к новой системе координат  $(\xi, \eta, \bar{z})$ , и неизвестными функциями теперь являются  $\bar{U}(\xi, \eta)$ ,  $\bar{V}(\xi, \eta)$ ,  $\bar{W}(\xi, \eta)$ ,  $\bar{\Psi}_x(\xi, \eta)$ ,  $\bar{\Psi}_y(\xi, \eta)$ . Подробно переход к безразмерным параметрам рассматривался в [36].

### 3. Алгоритм решения задач прочности и устойчивости

Для решения задачи анализа устойчивости оболочечной конструкции необходимо найти минимум функционала (16). Применим для этого метод Ритца, что позволит свести вариационную задачу о поиске минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В таком случае неизвестные безразмерные функции представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n U_{kl} X_1^k Y_1^l, & \bar{V} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n V_{kl} X_2^k Y_2^l, & \bar{W} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_{kl} X_3^k Y_3^l, \\ \bar{\Psi}_x &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{x_{kl}} X_4^k Y_4^l, & \bar{\Psi}_y &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{y_{kl}} X_5^k Y_5^l, \end{aligned} \tag{17}$$

где  $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x_{kl}}, \Psi_{y_{kl}}$  – неизвестные числовые множители,  $X_1^k, \dots, X_5^k$  и  $Y_1^l, \dots, Y_5^l$  – известные аппроксимирующие функции аргументов  $\xi$  и  $\eta$ , которые удовлетворяют краевым условиям. Краевые условия для каждой конструкции выбираются исходя из способа закрепления контура оболочки.

Будем рассматривать тонкостенные оболочки, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру (при  $x = 0, x = a : U = V = W = M_x = \Psi_y = 0$ ; при  $y = 0, y = b : U = V = W = M_y = \Psi_x = 0$ ). Тогда в качестве аппроксимирующих функций можно использовать следующие тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} X_1^k &= \sin(2k\pi\xi), & X_2^k &= \sin[(2k-1)\pi\xi], & X_3^k &= \sin[(2k-1)\pi\xi], \\ X_4^k &= \cos[(2k-1)\pi\xi], & X_5^k &= \sin[(2k-1)\pi\xi], \\ Y_1^l &= \sin[(2l-1)\pi\eta], & Y_2^l &= \sin(2l\pi\eta), & Y_3^l &= \sin[(2l-1)\pi\eta], \\ Y_4^l &= \sin[(2l-1)\pi\eta], & Y_5^l &= \cos[(2l-1)\pi\eta]. \end{aligned}$$

Подставим (17) в (16), перейдя таким образом от функционала  $E_p$  к функции  $E_{pf}$ . Для поиска минимума найдем производные от функции  $E_{pf}$  по всем неизвестным числовым параметрам и далее приравняем их к нулю

$$\frac{\partial E_{pf}}{\partial U_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial E_{pf}}{\partial V_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial E_{pf}}{\partial W_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial E_{pf}}{\partial \Psi_{x_{kl}}} = 0, \quad \frac{\partial E_{pf}}{\partial \Psi_{y_{kl}}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, n. \tag{18}$$

В результате получена система нелинейных алгебраических уравнений. Для ее решения используем метод продолжения решения по наилучшему параметру, который позволяет свести решение нелинейной системы к решению начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве наилучшего параметра продолжения решения предлагается брать длину дуги кривой множества решений  $\lambda$ . Параметр нагрузки  $\bar{P}$  является равноправным с остальными неизвестными, поэтому приходится находить решение задачи в безразмерных координатах. Метод продолжения решения по наилучшему параметру при использовании адаптивного выбора сетки позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, а также точки бифуркации [17], так как при обходе особых точек значение параметра нагрузки может уменьшаться.

Обозначим

$$X = (U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x_{kl}}, \Psi_{y_{kl}})^T, \quad \tilde{X} = (U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x_{kl}}, \Psi_{y_{kl}}, \bar{P})^T, \quad k, l = 1, \dots, n,$$

а систему нелинейных уравнений (18) запишем в виде  $F(\tilde{X}) = 0$ .

Известно, что в ненагруженном состоянии оболочки значения перемещений и углов поворота нормали равны нулю, поэтому начальное значение  $\tilde{X}$  задается нулевым вектором размерности  $5n^2 + 1$ ,

$$\tilde{X}^0 = (0, \dots, 0)^T. \tag{19}$$

Следует заметить, что параметр длины дуги  $\lambda$  не входит явно в систему уравнений и связан с переменными задачи следующим образом

$$(d\lambda)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[ (dU_{kl})^2 + (dV_{kl})^2 + (dW_{kl})^2 + (d\Psi_{x_{kl}})^2 + (d\Psi_{y_{kl}})^2 \right] + (d\bar{P})^2. \tag{20}$$



Продифференцировав систему уравнений (18) по параметру  $\lambda$  и полагая, что все компоненты вектора  $\tilde{X}$  от него зависят, получим систему  $5n^2$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\bar{J} \cdot \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

с начальными условиями (19) при  $\lambda_0 = 0$ .

Здесь  $\bar{J} = \partial F(\tilde{X})/\partial \tilde{X}$  – расширенная матрица Якоби (имеет  $5n^2$  строк и  $5n^2 + 1$  столбцов), а  $J = \partial F(X, \bar{P})/\partial X$  – матрица Якоби вектор-функции  $F$ , необходимая для выявления особых точек, исходя из критерия  $\det J = 0$ .

Дополняя уравнения системы (21) соотношением (20), получим замкнутую систему  $(5n^2 + 1)$ -го обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}$

$$\begin{bmatrix} \bar{J} \\ \left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}\right)^T \end{bmatrix} \cdot \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

к которой сводится процесс продолжения решения по наилучшему параметру для системы нелинейных уравнений (18) на каждом шаге.

Система (22) относительно  $d\tilde{X}/d\lambda$  является нелинейной. Чтобы ее решить, воспользуемся вариантом шагового процесса продолжения, предложенным в монографии [7]. В ней предложено заменить в матрице системы (22) последнюю строку  $\left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}\right)^T$  на вектор  $\left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}\right)^T$ , который на каждом шаге принимается равным вектору, вычисленному на предыдущем шаге, то есть

$$\left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}\right)^T(\lambda_k) = \left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}\right)^T(\lambda_{k-1}).$$

Начальное значение вектора  $\left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}\right)^T$  при  $k = 0$  принимается равным

$$\left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}\right)^T(\lambda_0) = (0, \dots, 0, 1)^T.$$

Учитывая все вышесказанное, запишем схему явного метода Эйлера решения начальной задачи (19), (22) в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно  $\left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}\right)^T$  [9]

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \tilde{X}(\lambda_0), \quad \left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}\right)^T(\lambda_{-1}) = (0, \dots, 0, 1)^T, \\ \begin{bmatrix} \bar{J}(\lambda_k) \\ \left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}\right)^T(\lambda_{k-1}) \end{bmatrix} \cdot \frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}(\lambda_k) = \frac{\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k)}{\left\| \frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k) \right\|_2}, \\ \tilde{X}_{k+1} &= \tilde{X}_k + \frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}(\lambda_k) \cdot \Delta\lambda_k, \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, решение нелинейной системы алгебраических уравнений сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (23) относительно значений производных  $d\tilde{X}/d\lambda$ . Чем больше разница между векторами  $d\tilde{X}/d\lambda$  на текущем и предыдущем шагах, тем хуже обусловленность матрицы системы и, следовательно, тем менее устойчив вычислительный процесс. В связи с этим целесообразно применять адаптивный выбор сетки для повышения точности расчетов.

Выявление критической нагрузки потери устойчивости осуществляется следующим образом: анализируется график зависимости «нагрузка – прогиб», когда малому изменению нагрузки соответствует существенное изменение прогиба (критерий Ляпунова), при этом потеря устойчивости конструкции происходит «хлопком» – осуществляется переход на новое равновесное состояние. Критической нагрузке соответствует также момент, когда определитель матрицы Якоби  $J$  обращается в нуль.

Следует отметить, что условие  $\det J = 0$  может также соответствовать нижним критическим нагрузкам и точкам бифуркации.

Поиск предельно допустимой нагрузки потери прочности, соответствующей моменту, когда в какой-либо точке конструкции начинается начальное разрушение материала (или возникают пластические деформации), осуществляется на каждом шаге продолжения решения путем анализа значений компонент напряжений (критерий максимальных напряжений)

$$F_1^- \leq \sigma_x \leq F_1^+, \quad F_2^- \leq \sigma_y \leq F_2^+, \quad |\tau_{xy}| \leq F_{12}. \quad (24)$$

**Замечание.** Предложенная методика позволяет задавать не только равномерно-распределенную, но и другие виды нагрузок. Если распределение нагрузки можно задать в виде непрерывной функции аргументов  $x$  и  $y$ , то в функционале (16) достаточно умножить параметр  $q$  на функцию распределения.

В том случае, если необходимо задать локально действующие нагрузки, требуется параметр нагрузки умножить на дельта-функцию, что в конечном счете приведет к разбиению области интегрирования. Таким образом, потребуются представить исходный интеграл как сумму интегралов по соответствующим подобластям. На эффективность действия методики расчета данная модификация не повлияет.

Способы задания полосовых и сосредоточенных нагрузок можно найти, например, в работе [37].

## 4. Расчеты

**4.1. Верификация.** Для обоснования достоверности получаемых результатов проведем расчеты пологих оболочек двойкой кривизны, квадратных в плане, которые рассматривались в работах [38, 39]. Параметры Ляме и кривизны для данного вида оболочек будут  $A = B = 1$ ,  $k_x = 1/R_1$ ,  $k_y = 1/R_2$ . Параметры материалов конструкций:

Материал 1:  $E_1 = E_2 = 0.3 \cdot 10^5$  МПа,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.1154 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu_{12} = 0.3$ .

Материал 2:  $E_1 = 0.2 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 0.4 \cdot 10^5$  МПа,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu_{12} = 0.1$ .

Для всех конструкций оси ортотропии совпадают с локальной системой координат оболочки, а направление оси ортотропии 1 совпадает с направлением оси  $x$  (безразмерная ось  $\xi$ ).

В работе [38] рассматривались изотропные и ортотропные пологие оболочки двойкой кривизны, квадратные в плане и шарнирно-неподвижно закрепленные по

Табл. 1

Сравнение значений критических нагрузок, полученных по предложенной методике, с работами других авторов

Вариант задачи	$q_{cr}$ , МПа				
	Д.Х. ван Кампен, В.П. Бушман и др. [39]		С. Ван [38]		А.А. Семенов [18]
	PSM	АЕМ	DQM	FEM	МПРНП
1	25.14	31.92	22.74	22.63	23.22
2	57.86	76.71	50.76	52.89	54.35

контуру, в основе алгоритма предлагается использовать DQM-метод (Differential quadrature method). После приведения входных данных к обозначениям, принятым в настоящей работе, получим следующие характеристики конструкций:

Вариант 1. Линейные размеры  $a = b = 0.2$  м, радиусы главных кривизн  $R_1 = R_2 = 7.2727$  м, толщина  $h = 0.00022$  м, Материал 1 считается изотропным.

Вариант 2. Линейные размеры  $a = b = 0.2$  м, радиусы главных кривизн  $R_1 = 5$  м,  $R_2 = 3.33$  м, толщина  $h = 0.00022$  м, Материал 2 считается ортотропным.

Следует отметить, что в модели, представленной в работе [38], в отличие от предлагаемой, не учитывается влияние поперечных сдвигов. В статье [38] автор сравнивает также полученные им значения критических нагрузок с результатами расчета в ПК NASTRAN (FEM) и работой [39] (в основе алгоритма используются Partitioned solution method (PSM) и Adjacent equilibrium method (АЕМ)). Авторами статьи [39] отмечается, что для случая несимметричной ортотропной оболочки расхождение результатов в несколько раз больше, чем для симметричной изотропной. Сравнение значений критических нагрузок, полученных авторами, показано в табл. 1. Сравнение графиков зависимости «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » и полей прогибов данных конструкций проведено ранее в работе [18].

**4.2. Расчет пологой оболочки, квадратной в плане.** В настоящей работе будем рассматривать пологую оболочку двойкой кривизны, квадратную в плане с параметрами:  $a = b = 5.4$  м,  $R_1 = R_2 = 20.25$  м,  $h = 0.09$  м, закрепление контура – шарнирно-неподвижное. Параметры материала: углепластик М60J/Ероху,  $E_1 = 3.3 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 0.059 \cdot 10^5$  МПа,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.039 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu_{12} = 0.32$ , предельно допустимые значения напряжений  $F_1^+ = 1760$  МПа,  $F_1^- = -780$  МПа,  $F_2^+ = 30$  МПа,  $F_2^- = -168$  МПа,  $F_{12} = 39$  МПа.

При разложении искоемых функций в ряды принималось  $n = 4$  ( $n^2 = 16$  членов разложения).

На рис. 2 приводится график зависимости безразмерного параметра прогиба  $\bar{W}$  от безразмерного параметра нагрузки  $\bar{P}$ . Показаны кривые прогиба в характерных точках конструкции. На графике отмечен также момент потери прочности, определенный по критерию максимальных напряжений.

Как видно из рис. 2, устойчивость рассматриваемая конструкция теряет при  $\bar{P}_{cr} = 61.8718$ . Невыполнение условий прочности происходит уже после первой критической нагрузки, на том участке кривой, который на практике не реализуется. Поэтому будем считать, что потеря прочности произошла одновременно с потерей устойчивости, при переходе на новое равновесное состояние. Важным при исследовании устойчивости является анализ докритического и закритического состояний и, в частности, распределения вмятин по поверхности конструкции. На рис. 3 показано поле прогибов при критической нагрузке  $\bar{P}_{cr} = 61.8718$  до и после потери устойчивости.

На рис. 4 показаны поля различных компонент напряжений до и после потери устойчивости. Располагая информацией о распределении опасных напряжений

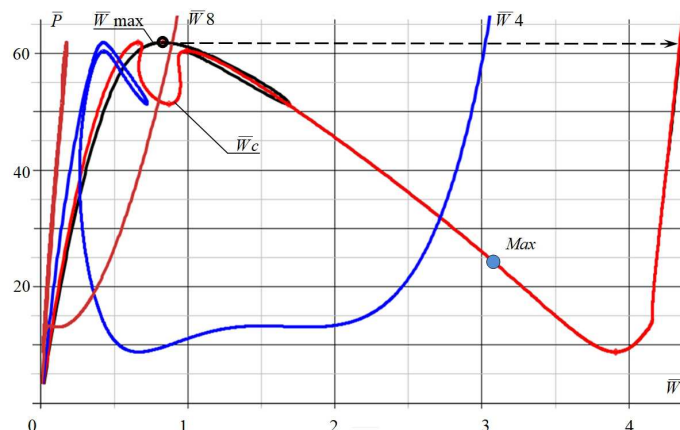


Рис. 2. График зависимости безразмерного параметра прогиба  $\bar{W}$  от безразмерного параметра нагрузки  $\bar{P}$ : черным цветом показана кривая максимального прогиба  $\bar{W}_{\max}$ , который вычисляется по всей области оболочки, красным цветом – кривая прогиба  $\bar{W}_c$  в центре области конструкции ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ ), синим цветом – кривая  $\bar{W}_4$  в четверти ( $\xi = 0.25, \eta = 0.25$ ), оранжевым –  $\bar{W}_8$  в восьмой части ( $\xi = 0.125, \eta = 0.125$ ). Пунктирной линией показан переход на новое равновесное состояние (потеря устойчивости)

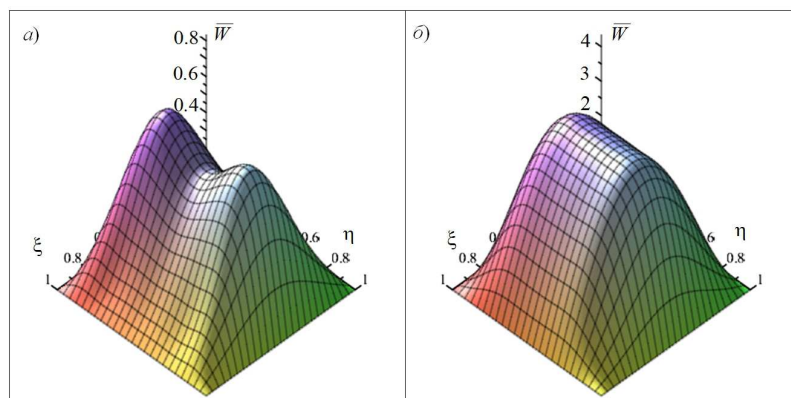


Рис. 3. Поле прогибов при критической нагрузке  $\bar{P}_{cr} = 61.8718$  до и после потери устойчивости

по полю оболочки, можно подкрепить конструкцию в этих местах ребрами жесткости, таким образом повысив ее жесткость и прочность.

### Заключение

Использование методики, основанной на методе Рунге и методе продолжения решения по наилучшему параметру, позволяет исследовать прочность и устойчивость оболочек, обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб», получать значения верхней и нижней критических нагрузок, находить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции.

Анализ поведения пологой оболочки двойной кривизны при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки показал, что в данном случае потеря прочности происходит одновременно с потерей устойчивости, значения различных компонент напряжений во время перехода на новое равновесное состояние суще-

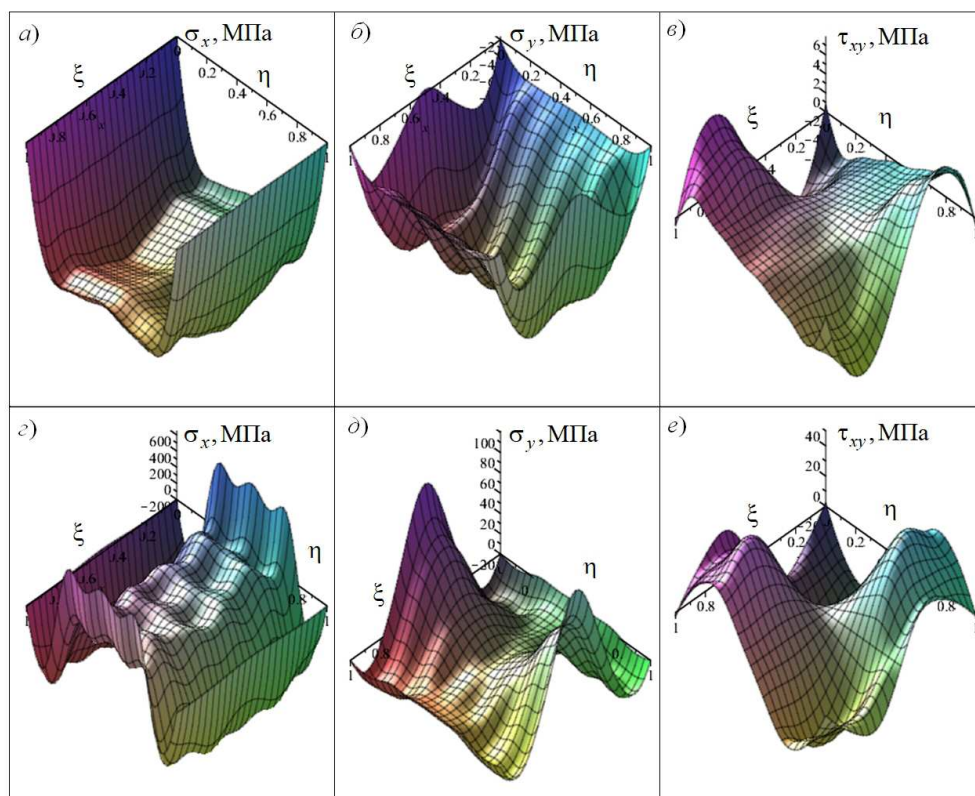


Рис. 4. Поля различных компонент напряжений до и после потери устойчивости

ственно меняются, в том числе и с отрицательных (сжимающих) на положительные (растягивающие). Притом наибольшая концентрация опасных напряжений наблюдается вблизи контура конструкции, а в центре конструкции разница не такая значительная.

Полученные данные показали неравномерное распределение вмятин по полю оболочка, обусловленное ортотропией материала, притом после потери устойчивости происходит их перераспределение, а также перераспределение напряжений. Резкое изменение этих характеристик зачастую усиливает разрушающий эффект от действия нагрузки. Существенным преимуществом ортотропных композиционных материалов является возможность манипулирования их характеристиками за счет изменения направления ориентации волокон, добавления слоев или изменения количества волокон на стадии изготовления. Имея данные о процессе деформирования конструкции, становится возможным скорректировать параметры материала, и сделать работу конструкции более безопасной.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00474).

#### Литература

1. *Lahaye M.E.* Une methode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compter Rendus hebdomadaires des seances de L'Academie des sciences. – 1934. – V. 198, No 21. – P. 1840–1842.

2. *Lahaye M.E.* Solution of system of transcendental equations // Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sci. – 1948. – V. 5. – P. 805–822.
3. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88, № 4. – С. 601–602.
4. *Давиденко Д.Ф.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. матем. журн. – 1953. – Т. 5, № 2. – С. 196–206.
5. *Ворович И.И., Зипалова В.Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // Прикл. матем. и механика. – 1965. – Т. 29, Вып. 5. – С. 894–901.
6. *Рикс Э.* Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механика. – 1972. – № 4. – С. 204–210.
7. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
8. *Allgower E.L., Georg K.* Introduction to Numerical Continuation Methods. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1990. – 388 p.
9. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.
10. *Кузнецов Е.Б.* Некоторые приложения метода продолжения решения по наилучшему параметру. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
11. *Кузнецов Е.Б.* Параметризация краевых задач и прохождение точек бифуркации. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
12. *Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.* Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2017. – Т. 57, № 6. – С. 934–957.
13. *Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.* Примеры параметризации задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 6. – С. 914–933.
14. *Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П.* Решение задачи Коши для жестких систем с гарантированной точностью методом длины дуги // Матем. моделирование. – 2014. – Т. 26, № 7. – С. 3–18.
15. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Численные методы решения задач Коши с контрастными структурами // Модел. и анализ информ. систем. – 2016. – Т. 23, № 5. – С. 529–538.
16. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 10. – С. 97–109.
17. *Москаленко Л.П.* Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестн. гражд. инженеров. – 2011. – № 4. – С. 161–164.
18. *Semenov A.A.* Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // Thin-Walled Struct. – 2016. – V. 106. – P. 428–436. – doi: 10.1016/j.tws.2016.05.018.
19. *May S., Vignollet J., de Borst R.* A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy // Eng. Comput. – 2016. – V. 33, No 1. – P. 100–115. – doi: 10.1108/EC-02-2015-0044.
20. *Wang X., Ma T.-B., Ren H.-L., Ning J.-G.* A local pseudo arc-length method for hyperbolic conservation laws // Acta Mech. Sin. – 2015. – V. 30, No 6. – P. 956–965. – doi: 10.1007/s10409-014-0091-0.

21. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек. – М.: Изд-во МАМИ, 2004. – 162 с.
22. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 479 с.
23. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. – 119 с.
24. Карпов В.В., Петров В.В. Уточнение решений при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – № 5. – С. 189–191.
25. Валлишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
26. Трушин С.И., Михайлов А.В. Устойчивость и бифуркации гибких пологих сетчатых оболочек // Вестн. НИЦ Строительство. – 2010. – № 2. – С. 150–158.
27. Luo K., Liu C., Tian Q., Hu H. Nonlinear static and dynamic analysis of hyper-elastic thin shells via the absolute nodal coordinate formulation // Nonlinear Dyn. – 2016. – V. 85, No 2. – P. 949–971. – doi: 10.1007/s11071-016-2735-z.
28. Kundu C.K., Han J.-H. Vibration and post-buckling behavior of laminated composite doubly curved shell structures // Adv. Compos. Mater. – 2009. – V. 18, No 1. – P. 21–42. – doi: 10.1163/156855108X385320.
29. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells // J. Sound Vib. – 2011. – V. 330, No 7. – P. 1432–1454. – doi: 10.1016/j.jsv.2010.10.003.
30. Mouhat O., Khamlichi A. Effect of loading pulse duration on dynamic buckling of stiffened panels // MATEC Web Conf. – 2014. – V. 16. – Art. 07006, P. 1–5. – doi: 10.1051/mateconf/20141607006.
31. Zhao X., Liew K.M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells // Int. J. Mech. Sci. – 2009. – V. 51, No 2. – P. 131–144. – doi: 10.1016/j.ijmecsci.2008.12.004.
32. Khan A.H., Patel B.P. On the nonlinear dynamics of bimodular laminated composite conical panels // Nonlinear Dyn. – 2015. – V. 79, No 2. – P. 1495–1509. – doi: 10.1007/s11071-014-1756-8.
33. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Контактная постановка задач механики подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 1. – С. 77–85.
34. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Осесимметричные задачи о геометрически нелинейном деформировании и устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с контурными подкрепляющими стержнями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 395–428.
35. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. – М.: Дрофа, 2003. – Т. 2: Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. – 720 с.
36. Карпов В.В., Семенов А.А. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74–94. – doi: 10.15593/perm.mech/2015.3.07.
37. Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.

38. Wang X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* – 2007. – V. 196. – P. 2242–2251. – doi: 10.1016/j.cma.2006.11.009.
39. van Campen D.H., Bouwman V.P., Zhang G.Q., Zhang J., ter Weeme B.J.W. Semianalytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels – considering the effects of boundary conditions // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2002. – V. 37. – P. 659–667. – doi: 10.1016/S0020-7462(01)00090-7.

Поступила в редакцию  
08.04.19

---

**Семенов Алексей Александрович**, кандидат технических наук, заведующий кафедрой информационных технологий

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет  
ул. 2-я Красноармейская, д. 4, г. Санкт-Петербург, 190005, Россия  
E-mail: *sw.semenov@gmail.com*

**Леонов Сергей Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирования динамических систем

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: *powerandglory@yandex.ru*

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 2, pp. 230–249

---

doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249

### The Continuous Method of Solution Continuation with Respect to the Best Parameter in the Calculation of Shell Structures

*A.A. Semenov<sup>a\*</sup>, S.S. Leonov<sup>b\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,  
St. Petersburg, 190005 Russia*

<sup>b</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, 125993 Russia*

E-mail: \* *sw.semenov@gmail.com*, \*\* *powerandglory@yandex.ru*

Received April 8, 2019

#### Abstract

The paper considers the numerical solution process of the strength and stability problems of thin-walled shell structures taking into account the geometric nonlinearity, transverse shifts, and material orthotropy. Similar problems have great importance in mechanical engineering, aerospace industry, and building sector. Numerical simulation of these problems using the Ritz method is reduced to solving the systems of nonlinear algebraic equations regarding the increments of the desired functions. However, the numerical solution of the systems is related to a



number of difficulties associated with the presence on the solution set curve of limiting singular points or bifurcation points in which the Jacobi matrix degenerates. The paper aims to develop a computational methodology making it possible to overcome the indicated difficulties for the problems considered. For this purpose, we used the method of solution continuation with respect to the parameter developed in the works of M. Lahaye, D. Davidenko, I. Vorovich, E. Riks, E. Grigolyuk, V. Shalashilin, E. Kuznetsov, and other scientists. For the system of algebraic or transcendental equations, the solution of which is a one-parameter family of curves, the method of solution continuation is as follows. The problem original parameter is replaced with a new one, the use of which enables to overcome the singular points contained on the solution set curve. Three variants of the solution continuation method were described: Lahaye's method, Davidenko's method, and the best parameterization method. Their advantages and disadvantages were shown. The effectiveness of the best parameterization for solving the strength and stability problems of shell structures was shown using the example of the calculation of double curvature shallow shells rectangular in plan. Verification of the proposed approach was carried out. The results obtained show that the use of the technique based on the combination of the Ritz method and the method of solution continuation with respect to the best parameter allows investigation of the strength and stability of the shallow shells, overcoming the singular points of the "load-deflection" curve, obtaining the values of the upper and lower critical loads, and detecting the bifurcation points and investigate the supercritical behavior of the structure. These results are essential in shell structure calculation, for which there are the effects of snapping and buckling observed in various applications.

**Keywords:** solution continuation with respect to parameter, best parameter, Ritz method, shells, strength, buckling

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-19-00474).

### Figure Captions

Fig. 1. The shallow shell of double curvature with the adopted local coordinate system.

Fig. 2. The dependence of the dimensionless deflection parameter  $\bar{W}$  on the dimensionless load parameter  $\bar{P}$ : the curve of maximum deflection  $\bar{W}_{\max}$  calculated for the entire shell area is shown with black color, deflection curve  $\bar{W}_c$  in the center of structure ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ ) is shown with red color, curve  $\bar{W}_4$  in one-fourth part ( $\xi = 0.25, \eta = 0.25$ ) is shown with blue color,  $\bar{W}_8$  in one-eighth part ( $\xi = 0.125, \eta = 0.125$ ) is shown with orange color. Transition to a new equilibrium state (loss of stability) is shown with a dotted line.

Fig. 3. Deflection field at critical load  $\bar{P}_{cr} = 61.8718$  before and after buckling.

Fig. 4. Fields of different stress components before and after buckling.

### References

1. Lahaye M.E. Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentales. *Compter Rendus hebdomataires des seances de L'Academie des sciences*, 1934, vol. 198, no. 21, pp. 1840–1842. (In French)
2. Lahaye M.E. Solution of system of transcendental equations. *Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sci.*, 1948, vol. 5, pp. 805–822.
3. Davidenko D.F. On a new numerical method for solving systems of nonlinear equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 4, pp. 601–602. (In Russian)
4. Davidenko D.F. Approximate solution of nonlinear equation systems. *Ukr. Mat. Zh.*, 1953, vol. 5, no. 2, pp. 196–206. (In Russian)
5. Vorovich I.I., Zivalova V.F. On the solution of nonlinear boundary value problems of the theory of elasticity by a method of transformation to an initial value Cauchy problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, no. 5, pp. 1055–1063. doi: 10.1016/0021-8928(65)90126-7.

6. Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, no. 4, pp. 1060–1065. doi: 10.1115/1.3422829.
7. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problems of Nonlinear Deformation: The Continuation Method Applied to Nonlinear Problems in Solid Mechanics*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1991. 262 p.
8. Allgower E.L., Georg K. *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1990. 388 p.
9. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. *Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ., 2003. 228 p.
10. Kuznetsov E.B. *Nekotorye prilozheniya metoda prodolzheniya resheniya po nailuchshemu parametru* [Some Applications of the Solution Continuation Method with Respect to the Best Argument]. Moscow, Izd. MAI, 2013. 160 p. (In Russian)
11. Kuznetsov E.B. *Parametrizatsiya kraevykh zadach i prokhozhenie toчек bifurkatsii* [Parametrization of Boundary Value Problems and Passing through Bifurcation Points]. Moscow, Izd. MAI, 2016. 160 p. (In Russian)
12. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 6, pp. 931–952. doi: 10.1134/S0965542517060094.
13. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Examples of parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 6, pp. 881–897. doi: 10.1134/S0965542518060076.
14. Kalitkin N.N., Poshivaylo I.P. Solving the Cauchy problem with guaranteed accuracy for stiff systems by the arc length method. *Math. Models Comput. Simul.*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 24–35. doi: 10.1134/S2070048215010044.
15. Belov A.A., Kalitkin N.N. Numerical methods of solving Cauchy problems with contrast structures. *Model. Anal. Inform. Sist.*, 2016, vol. 23, no. 5, pp. 529–538. (In Russian)
16. Belov A.A., Kalitkin N.N. Features of calculating contrast structures in the Cauchy problem. *Math. Models Comput. Simul.*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 281–291. doi: 10.1134/S2070048217030048.
17. Moskalenko L.P. Methods for investigating the stability of shallow ribbed shells based on the continuation of solution method by the best parameter. *Vestn. Grazhdanskikh Inzh.*, 2011, no. 4, pp. 161–164. (In Russian)
18. Semenov A.A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures. *Thin-Walled Struct.*, 2016, vol. 106, pp. 428–436. doi: 10.1016/j.tws.2016.05.018.
19. May S., Vignollet J., de Borst R. A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy. *Eng. Comput.*, 2016, vol. 33, no. 1, pp. 100–115. doi: 10.1108/EC-02-2015-0044.
20. Wang X., Ma T.-B., Ren H.-L., Ning J.-G. A local pseudo arc-length method for hyperbolic conservation laws. *Acta Mech. Sin.*, 2015, vol. 30, no. 6, pp. 956–965. doi: 10.1007/s10409-014-0091-0.
21. Grigolyuk E.I., Lopanitsyn E.A. *Konechnye progiby, ustoichivost' i zakriticheskoe povedenie tonkikh plogikh obolochek* [Finite Deflections, Stability, and Supercritical Behavior of Thin Shallow Shells]. Moscow, Izd. MAMI, 2004. 162 p. (In Russian)
22. Gavryushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennyi analiz elementov konstruktsii mashin i priborov* [Numerical Analysis of Machine and Equipment Components]. Moscow, Izd. MGTU im. N.E. Baumana, 2014. 479 p. (In Russian)

23. Petrov V.V. *Metod posledovatel'nykh nagruzenii v nelineinoi teorii plastinok i obolochek* [The Method of Sequential Loading in the Nonlinear Theory of Plates and Shells]. Saratov, Izd. Sarat. Univ., 1975. 119 p. (In Russian)
24. Karpov V.V., Petrov V.V. Solutions refinement in the theory of flexible plates and shells using step methods. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1975, no. 5, pp. 189–191. (In Russian)
25. Valishvili N.V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETsVM* [Methods for Calculating the Rotation Shells on a Digital Computer]. Moscow, Mashinostroenie, 1976. 278 p. (In Russian)
26. Trushin S.I., Mikhailov A.V. Stability and bifurcations of flexible flat mesh shells. *Vestn. NITS Stroitelstvo*, 2010, no. 2, pp. 150–158. (In Russian)
27. Luo K., Liu C., Tian Q., Hu H. Nonlinear static and dynamic analysis of hyper-elastic thin shells via the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dyn.*, 2016, vol. 85, no. 2, pp. 949–971. doi: 10.1007/s11071-016-2735-z.
28. Kundu C.K., Han J.-H. Vibration and post-buckling behavior of laminated composite doubly curved shell structures. *Adv. Compos. Mater.*, 2009, vol. 18, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1163/156855108X385320.
29. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *J. Sound Vib.*, 2011, vol. 330, no. 7, pp. 1432–1454. doi: 10.1016/j.jsv.2010.10.003.
30. Mouhat O., Khamlichi A. Effect of loading pulse duration on dynamic buckling of stiffened panels. *MATEC Web Conf.*, 2014, vol. 16, art. 07006, pp. 1–5. doi: 10.1051/matec-conf/20141607006.
31. Zhao X., Liew K.M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells. *Int. J. Mech. Sci.*, 2009, vol. 51, no. 2, pp. 131–144. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2008.12.004.
32. Khan A.H., Patel B.P. On the nonlinear dynamics of bimodular laminated composite conical panels. *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 1495–1509. doi: 10.1007/s11071-014-1756-8.
33. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact statement of mechanical problems of reinforced on contour sandwich plates with transversal-soft core. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 69–75. doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
34. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. The axisymmetric problems of geometrically nonlinear deformation and stability of a sandwich cylindrical shell with contour reinforcing beams. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 395–428. (In Russian)
35. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza* [A Course of Mathematical Analysis]. Vol. 2: Series. Differential and integral calculus of functions of several variables. Moscow, Drofa, 2003. 720 p. (In Russian)
36. Karpov V.V., Semenov A.A. Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells. *Vestn. Perm. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2015, no. 3, pp. 74–94. doi: 10.15593/perm.mech/2015.3.07. (In Russian)
37. Karpov V.V., Ignatiev O.V., Salnikov A.Yu. *Nelineinye matematicheskie modeli deformirovaniya obolochek peremennoi tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniya* [Nonlinear Mathematical Models of Variable Thickness Shells Deformation and Algorithms for Their Study]. Moscow, ACB; St. Petersburg, SPbGASU, 2002. 420 p. (In Russian)
38. Wang X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2007, vol. 196, pp. 2242–2251. doi: 10.1016/j.cma.2006.11.009.

39. van Campen D.H., Bouwman V.P., Zhang G.Q., Zhang J., ter Weeme B.J.W. Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels – considering the effects of boundary conditions. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2002, vol. 37, pp. 659–667. doi: 10.1016/S0020-7462(01)00090-7.

---

**Для цитирования:** Семенов А.А., Леонов С.С. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 2. – С. 230–249. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249.

**For citation:** Semenov A.A., Leonov S.S. The continuous method of solution continuation with respect to the best parameter in the calculation of shell structures. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 2, pp. 230–249. doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249. (In Russian)