УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2022, Т. 164, кн. 2–3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 153–169 ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.111 doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.153-169

О МОЩНОСТИ СЛОЁВ ЧЁТНОЗНАЧНОЙ n-МЕРНОЙ РЕШЁТКИ

Т.В. Андреева[1], *Ю.С. Семенов*[2]

[1]*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, 105005, Россия*

[2]*Независимый исследователь, г. Москва, 111399, Россия*

Аннотация

В работе в явном виде вычислены поправки к главному слагаемому асимптотики мощности центральных слоёв n-мерной k-значной решётки для чётных k при $n \to \infty$, которое было найдено В.Б. Алексеевым для некоторого класса частично упорядоченных множеств. Технически более простой случай нечётных k был рассмотрен авторами ранее.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, слой, асимптотика, производящая функция

Введение

Настоящая работа является продолжением работы [1] по уточнению асимптотики мощности центральных слоёв n-мерной k-значной решётки при $n \to \infty$. В отличие от [1] здесь нами рассматривается технически более сложный случай чётных значений k.

Напомним основные определения и результаты. Пусть S – некоторое частично упорядоченное множество (ЧУМ) с отношением порядка $<$, а S^n – его декартова степень. Если $s_1 < s_2$ и $\{s : s_1 < s < s_2\} = \emptyset$, то s_1 *непосредственно предшествует* s_2, обозначение $s_1 \prec s_2$. Для наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in S^n$ $(\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ \widetilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n))$ скажем, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, если $\alpha_i < \beta_i$ или $\alpha_i = \beta_i$ для всех i. Таким образом, S^n тоже является частично упорядоченным множеством.

Пусть на ЧУМ S задана функция веса w, назовём её *допустимой*, если для всех $s_1, s_2 \in S$ из $s_1 < s_2$ следует, что $w(s_1) \leqslant w(s_2) - 1$. Если при этом из $s_1 \prec s_2$ следует, что $w(s_1) = w(s_2) - 1$, то w является функцией ранга, а S – ранжированным множеством.

Вес набора $\widetilde{\alpha} \in S^n$ определяется по формуле $w(\widetilde{\alpha}) = \sum\limits_{i=1}^{n} w(\alpha_i)$, то есть как сумма весов его компонент. Если w – функция ранга, то множество S^n является ранжированным.

Множество $S^n_r = \{\widetilde{\alpha} \in S^n : w(\widetilde{\alpha}) = r\}$ называется r-м *слоем* множества S^n.

В частности, на множестве $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ введём порядок: $0 < 1 < \dots < k - 1$, а n-ю декартову степень E^n_k будем, как обычно, называть k*-значной* n*-мерной решёткой*. Вес набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n_k$ определим как $w(\widetilde{\alpha}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, тогда E^n_k становится ранжированным ЧУМ (ранг считаем равным весу).

Через $F(n,r,k)$ обозначим r*-й слой* E_k^n, $0 \leqslant r \leqslant n(k-1)$, а его мощность – через $N(n,r,k) = \big|F(n,r,k)\big|$.

В общем случае из работы В.Б. Алексеева [2] следует, что при $n \to \infty$

$$(S^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \cdot \frac{|S|^n}{\sqrt{n}} \big(1 + o(1)\big), \tag{1}$$

где (S^n) — максимальное число элементов в антицепи, $D = \inf D(\xi_w)$ (берётся точная нижняя грань дисперсий некоторой случайной величины ξ_w, определяемой весовой функцией w, по всем допустимым w).

Структура работы следующая. В разд. 1 приведён ряд вспомогательных формул и результатов, необходимых для доказательства основной теоремы – теоремы 2, усиливающей результат В.Б. Алексеева (1) для n-мерной k-значной решётки при чётных k, а также теорема 3. Теоремы сформулированы в конце разд. 1.

В разд. 2 дано доказательство теоремы 2 на основе подхода из работы [1]. Доказательство теоремы 3 можно провести по той же схеме с учётом дополнительного множителя под знаком интеграла, вклад которого в окончательный результат несложно проконтролировать. Подробного доказательства теоремы 3 мы не приводим.

1. Вспомогательные формулы и утверждения. Основная теорема

1.1. Значения некоторых интегралов от тригонометрических функций. Нам понадобится известное значение интеграла

$$I_{2p,2q} = I_{2q,2p} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi \, \sin^{2q}\varphi \, d\varphi = \frac{(2p-1)!!\,(2q-1)!!}{(2p+2q)!!}. \tag{2}$$

В частности,

$$I_{2p,0} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi \, d\varphi = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}, \tag{3}$$

$$I_{2p,2} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi \, \sin^{2}\varphi \, d\varphi = \frac{I_{2p,0}}{2p+2}, \tag{4}$$

$$I_{2p,4} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p}\varphi \, \sin^{4}\varphi \, d\varphi = \frac{3I_{2p,0}}{(2p+2)(2p+4)} = I_{2p,0} \cdot O\biggl(\frac{1}{p^2}\biggr), \tag{5}$$

$$I_{2p\pm 2,0} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p\pm 2}\varphi \, d\varphi = I_{2p,0} \left(1 \mp \frac{1}{2p} + O\biggl(\frac{1}{p^2}\biggr)\right). \tag{6}$$

Используя формулу Стирлинга, можно получить, что

$$I_{2p,0} = \sqrt{\frac{1}{\pi p}} \left(1 - \frac{1}{8p} + \frac{1}{128p^2} + O\biggl(\frac{1}{p^3}\biggr)\right) = O\biggl(\frac{1}{\sqrt{p}}\biggr). \tag{7}$$

1.2. Технические леммы. При доказательстве теоремы 1 используются леммы 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть для интеграла*

$$G_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^2\varphi + a_4\sin^4\varphi + a_6\sin^6\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m}\varphi + \dots\right)^n d\varphi$$

выполнено одно из условий:
(*i*) $\max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}\left|a_4 + a_6\sin^2\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi + \dots\right| \leqslant M < 1$,
(*ii*) $|a_4| + |a_6| + \dots + |a_{2m}| + \dots = M < 1$.
Тогда

$$G_n - \sum_{b=0}^{2}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\left(a_4\sin^4\varphi + a_6\sin^6\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m}\varphi + \dots\right)^b d\varphi = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Доказательство. Условие (*ii*) влечёт (*i*), поэтому будем считать, что всегда выполнено (*i*). По формуле бинома

$$G_n = \sum_{b=0}^{n}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\left(a_4\sin^4\varphi + a_6\sin^6\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m}\varphi + \dots\right)^b d\varphi.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что

$$\sum_{b=3}^{n}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\,\sin^{4b}\varphi\left(a_4 + a_6\sin^2\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi + \dots\right)^b d\varphi = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

В этой сумме рассмотрим отдельно слагаемое при $b = 3$:

$$\binom{n}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-6}\varphi\,\sin^{12}\varphi\left(a_4 + a_6\sin^2\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi + \dots\right)^3 d\varphi.$$

Раскрывая скобки и применяя формулы (2) и (7), убеждаемся, что эта величина имеет вид

$$I_{2n,0}\cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^{7/2}}\right) = o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Оценим теперь

$$S_4 = \sum_{b=4}^{n}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\,\sin^{4b}\varphi\left(a_4 + a_6\sin^2\varphi + \dots + a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi + \dots\right)^b d\varphi.$$

В силу (*i*) и (2) имеем оценку $|S_4| \leqslant A$, где

$$A = \sum_{b=4}^{n}\binom{n}{b}M^b\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\,\sin^{4b}\varphi\,d\varphi = \sum_{b=4}^{n}\binom{n}{b}M^b\cdot\frac{(2n-2b-1)!!\cdot(4b-1)!!}{(2n+2b)!!}.$$

Поскольку

$$\binom{n}{b}\cdot\frac{(2n-2b-1)!!\cdot(4b-1)!!}{(2n+2b)!!}=$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-b+1)}{b!}\cdot\frac{(2n-2b-1)!!\cdot(4b-1)!!}{2^{n+b}(n+b)!}=$$
$$=\frac{(2n-2b-1)!!}{2^{n-b}(n-b)!}\cdot\frac{(4b-1)!!}{2^{2b}\,b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)}<\frac{(4b-1)!!}{2^{2b}\,b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)},$$

то

$$A<B=\sum_{b=4}^{n}\frac{M^b\cdot(4b-1)!!}{2^{2b}\,b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)}.$$

Положим

$$x_b=\frac{M^b\cdot(4b-1)!!}{2^{2b}\,b!(n+1)(n+2)\cdots(n+b)}.$$

Покажем, что при $n\gg 1$ имеет место оценка $B<(n-3)x_4$. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{x_{b+1}}{x_b}=\frac{M(4b+1)(4b+3)}{4(b+1)(n+b+1)}.$$

Несложно проверить, что это отношение возрастает по b, когда b меняется от 4 до $n-1$, причём при $n\gg 1$ и $b=4$ оно меньше 1. Следовательно, в диапазоне от 4 до n последовательность x_b либо убывает, либо сначала убывает, а потом начинает возрастать. В первом случае x_4 – наибольший член последовательности $(4\leqslant b\leqslant n)$, а во втором для определения наибольшего члена следует сравнить x_4 и x_n:

$$x_4=\frac{M^4\cdot 15!!}{24\cdot 256\cdot(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$
$$x_n=\frac{M^n\cdot(4n-1)!!}{2^{2n}\,n!\cdot(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}=\frac{M^n\cdot(4n)!}{2^{4n}\cdot(2n)!\cdot(2n)!}<M^n.$$

Очевидно, что при $n\gg 1$ будет выполнено условие $x_n<x_4$. Поэтому можно считать, что при $n\to\infty$

$$|S_4|<B<(n-3)x_4=\frac{(n-3)M^4\cdot 15!!}{24\cdot 256(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}<\frac{M^4\cdot 15!!}{6144n^3}=O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть даны интегралы*

$$G_n^{(2)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\cdots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\right)^n\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

$$G_n^{(4)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\cdots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\right)^n\sin^4\varphi\,d\varphi,$$

$$G_n^{(2t)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\cdots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\right)^n\sin^{2t}\varphi\,d\varphi,\quad t\geqslant 3$$

и выполнено условие (i) *или* (ii) *леммы* 1*. Тогда*

$$G_n^{(2)}-\sum_{b=0}^{1}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\bigl(a_4\sin^4\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\dots\bigr)^b\sin^2\varphi\,d\varphi=O\biggl(\frac{1}{n^3}\biggr),$$

$$G_n^{(4)}-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi=O\biggl(\frac{1}{n^3}\biggr),\quad G_n^{(2t)}=o\biggl(\frac{1}{n^3}\biggr).$$

Доказательство. Проводится по схеме доказательства леммы 1. □

Теорема 1. *В условиях и обозначениях лемм* 1 *и* 2 *рассмотрим интеграл*

$$K_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\bigl(\cos^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\cdots\bigr)^n(1+H_2\sin^2\varphi+H_4\sin^4\varphi)\,d\varphi,\quad (8)$$

где H_2 *– константа, а* $H_4=H_4(\sin^2\varphi)$ *– ограниченная функция.*

Тогда при $n\to\infty$

$$K_n=I_{2n,0}\biggl(1+\frac{3a_4+2H_2}{4n}+O\biggl(\frac{1}{n^2}\biggr)\biggr).$$

Доказательство. Представим K_n в виде суммы $K_n=G_n+H_2G_n^{(2)}+K_n^{(4)}$, где (в обозначениях лемм 1 и 2)

$$G_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\bigl(\cos^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\bigr)^n\,d\varphi,$$

$$G_n^{(2)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\bigl(\cos^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\bigr)^n\,\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

$$K_n^{(4)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\bigl(\cos^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\bigr)^n\,H_4\sin^4\varphi\,d\varphi.$$

Сначала покажем, что

$$K_n^{(4)}=I_{2n,0}\cdot O\biggl(\frac{1}{n^2}\biggr)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,O\biggl(\frac{1}{n^2}\biggr).$$

Ввиду ограниченности H_4 (скажем, $|H_4|\leqslant L$) и условия (i) леммы 1 имеем

$$|K_n^{(4)}|\leqslant\frac{2L}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\bigl(\cos^2\varphi+M\sin^4\varphi\bigr)^n\,\sin^4\varphi\,d\varphi.$$

Применяя к интегралу справа лемму 2 при значениях $a_4=M$, $a_6=a_8=\dots=0$, получаем, что

$$\frac{2L}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\bigl(\cos^2\varphi+M\sin^4\varphi\bigr)^n\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{2L}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi+O\biggl(\frac{1}{n^3}\biggr)=L\cdot I_{2n,4}+O\biggl(\frac{1}{n^3}\biggr).$$

Согласно формуле (5) имеем

$$L\cdot I_{2n,4}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=I_{2n,0}\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Рассмотрим теперь $G_n^{(2)}$. По лемме 2

$$G_n^{(2)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}n\cos^{2n-2}\varphi\big(a_4\sin^4\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\big)\sin^2\varphi\,d\varphi+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=$$
$$=I_{2n,2}+a_4\cdot nI_{2n-2,6}+$$
$$+\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\varphi\big(a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\big)\sin^2\varphi\,d\varphi+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Поскольку

$$\left|\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\varphi\big(a_6\sin^2\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m-4}\varphi+\cdots\big)\sin^6\varphi\,d\varphi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\varphi\big(M+|a_4|\big)\sin^6\varphi\,d\varphi=$$
$$=n(M+|a_4|)I_{2n-2,6}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}O\left(\frac{1}{n^2}\right)=I_{2n,0}\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

получаем

$$G_n^{(2)}=I_{2n,2}+a_4\cdot nI_{2n-2,6}+I_{2n,0}\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Нам осталось рассмотреть только слагаемое G_n. В силу леммы 1 имеем

$$G_n=\sum_{b=0}^{2}\binom{n}{b}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-2b}\varphi\big(a_4\sin^4\varphi+a_6\sin^6\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\big)^b d\varphi+$$
$$+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=I_{2n,0}+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}n\cos^{2n-2}\varphi\big(a_4\sin^4\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\big)\,d\varphi+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{n(n-1)}{2}\cos^{2n-4}\varphi\big(a_4\sin^4\varphi+\dots+a_{2m}\sin^{2m}\varphi+\cdots\big)^2\,d\varphi+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

По тем же соображениям, что и для $G_n^{(2)}$, получаем после несложных преобразований формулу

$$G_n=I_{2n,0}+a_4\cdot nI_{2n-2,4}+I_{2n,0}\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Подведём итог. Имеет место формула

$$K_n = I_{2n,0} + a_4 \cdot nI_{2n-2,4} + H_2(I_{2n,2} + a_4 \cdot nI_{2n-2,6}) + I_{2n,0} \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{9}$$

После подстановки выражений (2)–(6) и несложных упрощений получается окончательный результат из утверждения теоремы. □

Замечание. Формула (9) может быть записана как

$$K_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^{2n}\varphi + n\cos^{2n-2}\varphi \cdot a_4 \sin^4\varphi\right)\left(1 + H_2 \sin^2\varphi\right) d\varphi + I_{2n,0} \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{10}$$

то есть она получается формальным раскрытием скобки по формуле бинома в выражении (8) и отбрасыванием H_4, а также всех слагаемых, содержащих $\sin\varphi$ в степени 6 или выше.

Перейдём теперь к конкретным результатам, касающимся чётномерной решётки E_k^n. Из следующих двух лемм вытекает, что для такой решётки выполнены условия теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть $k = 2l \geqslant 4$ – чётное число. Рассмотрим функцию*

$$E(y) = (1-y^2)\left(1 + \sum_{s=1}^{l-1}(-1)^s d_{2s} y^{2s}\right)^2 = 1 - e_2y^2 + e_4y^4 + \dots + e_{4l-2}y^{4l-2},$$

где $d_{2s} = \dfrac{1}{(2s+1)!}\prod\limits_{j=1}^{s}\left(k^2 - (2j)^2\right)$. *Тогда* $e_2 = \dfrac{k^2-1}{3}$ *и*

$$\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}\left|a_4 + a_6\sin^2\varphi + \dots + a_{4l-2}\sin^{4l-6}\varphi\right| = M < 0.72, \quad \textit{где} \quad a_{2s} = \frac{e_{2s}}{e_2^s}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что $d_2 = \dfrac{k^2-2^2}{3!}$,

$$E(y) = \left(1-y^2\right)\left(1 - 2d_2y^2 + 2\sum_{s=2}^{l-1}(-1)^s d_{2s}y^{2s} + \left(\sum_{s=1}^{l-1}(-1)^s d_{2s}y^{2s}\right)^2\right) =$$
$$= 1 - \left(1+2d_2\right)y^2 + 2d_2y^4 + y^4\left(1-y^2\right)\left(2\sum_{s=2}^{l-1}(-1)^s d_{2s}y^{2s-4} + \left(\sum_{s=1}^{l-1}(-1)^s d_{2s}y^{2s-2}\right)^2\right).$$

Отсюда, во-первых, получим значение коэффициента e_2. Во-вторых, заметим, что

$$\sin^4\varphi\left(a_4 + a_6\sin^2\varphi + \dots + a_{4l-2}\sin^{4l-6}\varphi\right) = E\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{e_2}}\right) - 1 + \sin^2\varphi.$$

Введём обозначение $U = 1 + \dfrac{d_2}{e_2} + \dfrac{d_4}{e_2^2} + \dots + \dfrac{d_{2l-2}}{e_2^{l-1}}$. Оценим значение U. Поскольку

$$\frac{d_{2s}}{e_2^s} = \frac{3^s}{(2s+1)!}\prod_{j=1}^{s}\frac{k^2-(2j)^2}{k^2-1} < \frac{3^s}{(2s+1)!}, \tag{11}$$

то на основании известного разложения гиперболического синуса в ряд Тейлора получаем

$$U<1+\frac{3}{3!}+\frac{3^2}{5!}+\cdots=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}^3}{3!}+\frac{\sqrt{3}^5}{5!}+\cdots\right)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

поэтому

$$\left|\sum_{s=2}^{l-1}\frac{d_{2s}}{e_2^s}\right|<\frac{\operatorname{sh}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-1-\frac{1}{2}<0.09, \tag{12}$$

$$\left(\sum_{s=1}^{l-1}\frac{d_{2s}}{e_2^s}\right)^2<\left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-1\right)^2<0.34. \tag{13}$$

Из (11) следует, что $\dfrac{d_2}{e_2}<0.5$. Кроме того, $\dfrac{1}{e_2}=\dfrac{3}{k^2-1}\leqslant 0.2$ при $k\geqslant 4$.

Перейдём к оценке. Воспользуемся (12) и (13):

$$\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}\left|a_4+a_6\sin^2\varphi+\cdots+a_{4l-2}\sin^{4l-6}\varphi\right|=$$

$$=\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}\left|2\frac{d_2}{e_2}\cdot\frac{1}{e_2}+\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{e_2}\right)\left(2\sum_{s=2}^{l-1}(-1)^s\frac{d_{2s}}{e_2^s}\sin^{2s-4}\varphi+\left(\sum_{s=1}^{l-1}(-1)^s\frac{d_{2s}}{e_2^s}\sin^{2s-2}\varphi\right)^2\right)\right|<$$

$$<0.2+2\cdot 0.09+0.34=0.72.$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *В условиях леммы* 3 : $a_4=\dfrac{e_4}{e_2^2}=\dfrac{d_2^2+2d_2+2d_4}{(1+2d_2)^2}=\dfrac{2(k^2-4)}{5(k^2-1)}$.

Лемма 4. *Пусть* $k=2l\geqslant 4$ *– чётное число. Рассмотрим произведение*

$$B(y)=C(y)D(y)=1-b_2y^2+b_4y^4+\cdots+b_{2m}y^{2m}+\cdots$$

ряда

$$C(y)=\sqrt{1-y^2}=1-\frac{1}{2}y^2-\frac{1!!}{4!!}y^4-\cdots-\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}y^{2p}-\cdots$$

и многочлена

$$D(y)=1-d_2y^2+d_4y^4+\cdots+(-1)^{l-1}d_{2l-2}y^{2l-2},$$

где d_{2s} *определено в предыдущей лемме. Тогда* $b_2=\dfrac{k^2-1}{6}$ *и*

$$|a_4|+|a_6|+\cdots+|a_{2m}|+\cdots=M<0.9,\quad \text{где}\quad a_{2m}=\frac{b_{2m}}{b_2^m}.$$

Доказательство. Коэффициент b_2 находится непосредственно. Положим $c_{2p}=\dfrac{(2p-3)!!}{(2p)!!}$ при $p\geqslant 1$ (считаем, что $(-1)!!=1$). При этом коэффициенты c_{2p} монотонно убывают по p.

Дальше заметим, что

$$M=|a_4|+|a_6|+\cdots+|a_{2m}|+\cdots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d_4+c_2d_2+c_4}{b_2^2}+\frac{d_6+c_2d_4+c_4d_2+c_6}{b_2^3}+\cdots+$$

$$+\frac{d_{2m}+c_2d_{2m-2}+\cdots+c_{2m-2}d_2+c_{2m}}{b_2^m}+\cdots=M_0.$$

Заметим также, что в ряде M_0 (состоящем из неотрицательных слагаемых) по условию подразумевается $d_{2l} = d_{2l+2} = \cdots = 0$.

Введём обозначение

$$Q = 1 + \frac{d_2}{b_2} + \frac{d_4}{b_2^2} + \cdots + \frac{d_{2l-2}}{b_2^{l-1}}.$$

Несложно оценить значение Q. Поскольку

$$\frac{d_{2m}}{b_2^m} = \frac{6^m}{(2m+1)!} \prod_{j=1}^{m} \frac{k^2-(2j)^2}{k^2-1} < \frac{6^m}{(2m+1)!},$$

то

$$Q < 1 + \frac{6}{3!} + \frac{6^2}{5!} + \cdots = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}^3}{3!} + \frac{\sqrt{6}^5}{5!} + \cdots \right) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{6}}{\sqrt{6}} < 2.35. \tag{14}$$

Вернёмся к оценке значения M_0

$$M_0 = \frac{d_4 + c_2 d_2 + c_4}{b_2^2} + \frac{d_6 + c_2 d_4 + c_4 d_2 + c_6}{b_2^3} + \cdots +$$
$$+ \frac{d_{2m} + c_2 d_{2m-2} + \cdots + c_{2m-2} d_2 + c_{2m}}{b_2^m} + \cdots =$$
$$= \left(\frac{d_4}{b_2^2} + \cdots + \frac{d_{2l-2}}{b_2^{l-1}} \right) + \frac{c_2}{b_2} \left(\frac{d_2}{b_2} + \cdots + \frac{d_{2l-2}}{b_2^{l-1}} \right) + \frac{c_4}{b_2^2} \left(1 + \frac{d_2}{b_2} + \cdots + \frac{d_{2l-2}}{b_2^{l-1}} \right) + \cdots =$$
$$= \left(Q - 1 - \frac{d_2}{b_2} \right) + \frac{c_2}{b_2}(Q-1) + Q \left(\frac{c_4}{b_2^2} + \frac{c_6}{b_2^3} + \cdots \right).$$

Ввиду того, что

$$\frac{d_2}{b_2} = \frac{k^2-4}{k^2-1}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = \frac{1}{8} > c_6 > \cdots,$$

получаем оценку

$$M_0 < \left(Q - 1 - \frac{d_2}{b_2} \right) + \frac{Q-1}{2b_2} + \frac{Q}{8} \left(\frac{1}{b_2^2} + \frac{1}{b_2^3} + \cdots \right) =$$
$$= Q - 1 - \frac{k^2-4}{k^2-1} + \frac{3(Q-1)}{k^2-1} + \frac{9Q}{2(k^2-1)(k^2-7)} =$$
$$= Q - 2 + \frac{3Q}{4} \left(\frac{1}{k^2-7} + \frac{3}{k^2-1} \right).$$

При $k \geqslant 4$ в итоге получается, что

$$M \leqslant M_0 < Q - 2 + \frac{3Q}{4} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{5} \right) = \frac{37Q}{30} - 2 < 0.9.$$

Лемма доказана. □

Следствие 2. *В условиях леммы* 4 : $a_4 = \dfrac{b_4}{b_2^2} = \dfrac{d_4 + d_2/2 - 1/8}{(d_2+1/2)^2} = \dfrac{3(k^2-9)}{10(k^2-1)}$.

Известно, что при чётных k слои решётки E_k^n симметричны относительно одного или двух центральных слоёв. Количество центральных слоёв – один или два – зависит от чётности n. Мощности слоёв последовательно возрастают от нулевого до центрального(-ных) слоя(-ёв) вместе с весом.

Сформулируем основную теорему о мощности центрального(-ных) слоя(-ёв) чётнозначной n-мерной решётки.

Теорема 2. *Пусть $k = 2l \geqslant 2$ – чётное. Тогда при чётных n*

$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{3}{k^2-1}} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(1 + \frac{k^2-4}{10(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+11}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

при нечётных n

$$N\left(n, \frac{n(k-1)-1}{2}, k\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{3}{k^2-1}} \cdot \frac{n!!}{(n+1)!!}\left(1 + \frac{3(k^2-4)}{5(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+71}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Для слоёв, соседних с центральным(-ми), справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Для чётных $k \geqslant 2$ при чётных n*

$$N\left(n, \frac{n(k-1)}{2} - 1, k\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{3}{k^2-1}} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(1 + \frac{k^2-64}{10(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+251}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right);$$

для чётных $k \geqslant 2$ при нечётных n

$$N\left(n, \frac{n(k-1)-1}{2} - 1, k\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{3}{k^2-1}} \cdot \frac{n!!}{(n+1)!!}\left(1 + \frac{3(k^2-24)}{5(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= k^n \cdot \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{k^2+551}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

2. Доказательство основной теоремы

При $k \geqslant 2$ производящая функция мощности слоёв E_k^n имеет вид

$$A(z) = \left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1}\right)^n.$$

При $k = 2$ мощность центрального слоя выписывается явно по формуле бинома, поэтому далее считаем, что $k \geqslant 4$.

Случай 1. Сначала рассмотрим случай чётных n. Положим $m = n(k-1)/2$ и найдём мощность центрального слоя

$$A_m = N(n,m,k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\left(1+z+z^2+\cdots+z^{k-1}\right)^n}{z^{n(k-1)/2+1}}\,dz = \left\{z = e^{2iu}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(2\cos u + 2\cos 3u + \cdots + 2\cos(k-1)u\right)^n du.$$

Несложно получить, воспользовавшись, например, формулами из [3], что при чётных k

$$2\cos u + 2\cos 3u + \cdots + 2\cos(k-1)u = \frac{\sin ku}{\sin u} =$$

$$= k\cos u\Big(1 - \frac{k^2-2^2}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big).$$

В скобках справа всего $k/2$ слагаемых. Теперь

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin ku}{\sin u}\right)^n du =$$

$$= k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \bigg(\cos u\Big(1 - \frac{k^2-2^2}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big)\bigg)^n du.$$

Далее для оценки A_m можно воспользоваться одним из двух подходов (каждый из соавторов предложил свой). Первый подход:

$$A_m = k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \bigg(\cos^2 u\Big(1 - \frac{k^2-2^2}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big)^2\bigg)^{n/2} du.$$

В обозначениях леммы 3 имеем

$$\cos^2 u\Big(1 - \frac{k^2-2^2}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big)^2 = E(\sin^2 u) =$$

$$= 1 - \frac{k^2-1}{3}\sin^4 u + e_6 \sin^6 u + \cdots + e_{2k-2}\sin^{2k-2} u.$$

Тогда

$$A_m = k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\arcsin\sqrt{3/(k^2-1)}} \bigg(\cos^2 u\Big(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{120}\sin^4 u - \cdots\Big)^2\bigg)^{n/2} du +$$

$$+ k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{\arcsin\sqrt{3/(k^2-1)}}^{\pi/2} \left(\frac{\sin ku}{k\sin u}\right)^n du = k^n(T_1 + T_2).$$

Несложно также оценить второй интеграл:

$$\left|\frac{\sin ku}{k\sin u}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{при} \quad u \in \left[\arcsin\sqrt{\frac{3}{k^2-1}},\, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$|T_2| \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad \text{для любого} \quad p>0.$$

Выполним подстановку в интеграле T_1 при $u \in \left[0,\, \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{k^2-1}}\right]$:

$$\sqrt{\frac{k^2-1}{3}}\sin u = \sin\varphi, \quad \varphi \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$du = \sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{k^2-1}\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\left(1-\frac{k^2-4}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi+\gamma_k\sin^4\varphi\right)d\varphi,$$

где $\gamma_k = \gamma_k(\sin^2\varphi)$ и $|\gamma_k| \leqslant \dfrac{k^2+2}{2(k^2-1)}$. Последняя оценка получается при рассмотрении вспомогательной функции ($h=\sin^2\varphi \in (0;1]$)

$$F_k(h) = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\sqrt{1-h}}{\sqrt{1-\frac{3}{k^2-1}\cdot h}} - \left(1-\frac{k^2-4}{2(k^2-1)}h\right)\right), \quad F_k(0) = \lim_{h\to 0+0} F_k(h),$$

для которой выполнено условие $0 \geqslant F_k(h) \geqslant F_k(1) = -\dfrac{k^2+2}{2(k^2-1)}$ при $h\in[0;\,1]$.

Теперь

$$T_1 = \sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi+\frac{2(k^2-4)}{5(k^2-1)}\sin^4\varphi-\cdots\right)^{n/2}\left(1-\frac{k^2-4}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi+\gamma_k\sin^4\varphi\right)d\varphi.$$

Условия теоремы 1 выполнены при $a_4 = \dfrac{2(k^2-4)}{5(k^2-1)}$, $H_2 = -\dfrac{k^2-4}{2(k^2-1)}$, $H_4=\gamma_k$. Следовательно,

$$A_m = N\left(n,\frac{n(k-1)}{2},k\right) = k^n\sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\,I_{n,0}\left(1+\frac{k^2-4}{10(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Далее воспользуемся другим подходом:

$$A_m = k^n\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sqrt{1-\sin^2u}\left(1-\frac{k^2-2^2}{3!}\sin^2u+\frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4u-\cdots\right)\right)^n du.$$

В обозначениях леммы 4 имеем

$$\sqrt{1-\sin^2u}\left(1-\frac{k^2-2^2}{3!}\sin^2u+\frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4u-\cdots\right) = B(\sin^2u) =$$

$$= 1-\frac{k^2-1}{6}\sin^4u+b_6\sin^6u+\cdots+b_{2k-2}\sin^{2k-2}u+\cdots$$

Тогда

$$A_m = k^n \cdot \frac{2}{\pi} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\arcsin\sqrt{6/(k^2-1)}} \left(\cos^2 u \Big(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{120}\sin^4 u - \cdots\Big)\right)^n du +$$

$$+ k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{\arcsin\sqrt{6/(k^2-1)}}^{\pi/2} \left(\frac{\sin ku}{k \sin u}\right)^n du = k^n (Q_1 + Q_2).$$

Как и ранее, оценим второй интеграл:

$$|Q_2| \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^n = o\Big(\frac{1}{n^p}\Big) \quad \text{для любого} \quad p > 0.$$

В интеграле Q_1 выполним подстановку при $u \in \Big[0, \arcsin\sqrt{\dfrac{6}{k^2-1}}\Big]$:

$$\sqrt{\frac{k^2-1}{6}} \sin u = \sin\varphi, \quad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big];$$

$$du = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \left(1 - \frac{k^2-7}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi + \tau_k \sin^4\varphi\right) d\varphi,$$

где $\tau_k = \tau_k(\sin^2\varphi)$ и $|\tau_k| \leqslant \dfrac{k^2+5}{2(k^2-1)}$. Тогда имеем

$$Q_1 = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}} \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \Big(\cos^2\varphi + \frac{3(k^2-9)}{10(k^2-1)}\sin^4\varphi - \cdots\Big)^n \Big(1 - \frac{k^2-7}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi + \tau_k \sin^4\varphi\Big)\, d\varphi.$$

Условия теоремы 1 выполнены при $a_4 = \dfrac{3(k^2-9)}{10(k^2-1)}$, $H_2 = -\dfrac{k^2-7}{2(k^2-1)}$, $H_4 = \tau_k$. Следовательно,

$$A_m = N\left(n, \frac{n(k-1)}{2}, k\right) = k^n \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\, I_{2n,0} \left(1 - \frac{k^2+11}{40(k^2-1)} \cdot \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$

Случай 2. Теперь рассмотрим случай нечётных n. Положим $m = \dfrac{n(k-1)-1}{2}$ и найдём мощность одного из центральных слоев

$$A_m = N(n,m,k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\big(1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1}\big)^n}{z^{(n(k-1)-1)/2+1}}\, dz =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \big(2\cos u + 2\cos 3u + \cdots + 2\cos(k-1)u\big)^n \cos u\, du =$$

$$= k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos u \Big(1 - \frac{k^2-2^2}{3!}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{5!}\sin^4 u - \cdots\Big)\right)^n \cos u\, du.$$

Сначала применим первый подход:

$$A_m = k^n \cdot \frac{2}{\pi} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\arcsin\sqrt{3/(k^2-1)}} \left(\cos u\left(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{120}\sin^4 u - \cdots\right)\right)^n \cos u\,du +$$
$$+ k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{\arcsin\sqrt{3/(k^2-1)}}^{\pi/2} \left(\frac{\sin ku}{k\sin u}\right)^n \cos u\,du = k^n(T_1+T_2).$$

Как и ранее,

$$|T_2| \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad \text{для любого} \quad p>0.$$

В интеграле T_1 рассмотрим подынтегральное выражение

$$\left(\cos u\left(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{120}\sin^4 u - \cdots\right)\right)^n \cos u =$$
$$= \left(\cos^2 u\left(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \cdots\right)^2\right)^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \cdots\right)(1-\sin^2 u) =$$
$$= \left(\cos^2 u\left(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \cdots\right)^2\right)^{(n-1)/2} \times$$
$$\times \left(1 - \frac{k^2+2}{6}\sin^2 u + \frac{(k^2-4)(k^2+4)}{120}\sin^4 u - \cdots\right).$$

Выполним подстановку $\sqrt{\dfrac{k^2-1}{3}}\sin u = \sin\varphi$:

$$T_1 = \sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi + \frac{2(k^2-4)}{5(k^2-1)}\sin^4\varphi - \cdots\right)^{(n-1)/2}$$
$$\times\left(1 - \frac{k^2+2}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi + \cdots\right)\left(1 - \frac{k^2-4}{2(k^2-1)}\sin^2\varphi + \gamma_k\sin^4\varphi\right)d\varphi.$$

Вторая скобка под знаком интеграла содержит $\left(\dfrac{k}{2}+1\right)$ слагаемых. По лемме 2 имеем

$$T_1 = \sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi + \frac{2(k^2-4)}{5(k^2-1)}\sin^4\varphi - \cdots\right)^{(n-1)/2}\times$$
$$\times\left(1-\sin^2\varphi + \delta_k\sin^4\varphi\right)d\varphi + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Условия теоремы 1 выполнены при $a_4 = \dfrac{2(k^2-4)}{5(k^2-1)}$, $H_2 = -1$, $H_4 = \delta_k$. Следовательно,

$$A_m = N\left(n, \frac{n(k-1)-1}{2}, k\right) = k^n \sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\, I_{n-1,0}\left(1 - \frac{2k^2+7}{5(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) =$$
$$= k^n \sqrt{\frac{3}{k^2-1}}\, I_{n,0}\left(1 + \frac{3(k^2-4)}{5(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Теперь применим второй подход:

$$A_m = k^n \cdot \frac{2}{\pi}\times$$
$$\times \int\limits_0^{\arcsin\sqrt{6/(k^2-1)}} \left(\cos u\Big(1 - \frac{k^2-2^2}{6}\sin^2 u + \frac{(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{120}\sin^4 u - \cdots\Big)\right)^n \cos u\, du +$$
$$+ k^n \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_{\arcsin\sqrt{6/(k^2-1)}}^{\pi/2} \left(\frac{\sin ku}{k\sin u}\right)^n \cos u\, du = k^n(Q_1+Q_2).$$

Как и ранее, имеем

$$|Q_2| \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt6}\right)^n = o\Big(\frac{1}{n^p}\Big) \quad \text{для любого} \quad p>0.$$

В интеграле Q_1 выполним подстановку $\sqrt{\dfrac{k^2-1}{6}}\sin u = \sin\varphi$, тогда

$$\cos u\, du = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\sqrt{1-\sin^2\varphi}\, d\varphi = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \tau\sin^4\varphi\right) d\varphi, \quad |\tau| \leqslant \frac{1}{2},$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi + \frac{3(k^2-9)}{10(k^2-1)}\sin^4\varphi - \cdots\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \tau\sin^4\varphi\right) d\varphi.$$

Условия теоремы 1 выполнены при $a_4 = \dfrac{3(k^2-9)}{10(k^2-1)}$, $H_2 = -\dfrac{1}{2}$, $H_4 = \tau$. Следовательно,

$$A_m = N\left(n, \frac{n(k-1)-1}{2}, k\right) = k^n \sqrt{\frac{6}{k^2-1}}\, I_{2n,0}\left(1 - \frac{k^2+71}{40(k^2-1)}\cdot\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 об асимптотике мощности слоёв, соседних с центральным(-ми), доказывается по аналогичной схеме. При этом надо иметь в виду, что, во-первых, если $k=2$, то мощность слоя, соседнего с центральным, выписывается явно по формуле бинома, а во-вторых, при $k \geqslant 4$ отличие проявляется в том, что под знаком соответствующего интеграла появляется множитель типа, например, $1-2\sin^2 u$. Вклад такого множителя в окончательное выражение для интеграла несложно проконтролировать.

Литература

1. *Андреева Т.В., Семенов Ю.С.* О мощности слоёв некоторых частично упорядоченных множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 269–284. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.269-284.
2. *Алексеев В.Б.* О числе монотонных k-значных функций // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1974. – Вып. 28 – С. 5–24.
3. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

Поступила в редакцию
19.10.2021

Андреева Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическое моделирование»

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

ул. 2-я Бауманская, д. 5, корп. 1, г. Москва, 105005, Россия

E-mail: *t-v-andreeva@mail.ru*

Семенов Юрий Станиславович, кандидат физико-математических наук, доцент

Независимый исследователь

ул. Металлургов, д. 42, г. Москва, 111399, Россия

E-mail: *yuri_ semenoff@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 153–169

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.153-169

On the Cardinality of Layers in Even-Valued n-Dimensional Lattice

T.V. Andreeva[a*], *Yu.S. Semenov*[b**]

[a] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

[b] *Independent Researcher, Moscow, 111399 Russia*

E-mail: **t-v-andreeva@mail.ru*, ***yuri_semenoff@mail.ru*

Received October 19, 2021

Abstract

In this article, we explicitly calculated terms additional to the main one of cardinality asymptotics of central layers in the n-dimensional k-valued lattice E_k^n for even k as $n \to \infty$. The main term had been found by V.B. Alekseev for a certain class of posets. The case of odd k, which is technically less complicated, was the major focus of our previous work.

Keywords: poset, layer, asymptotics, generating function

References

1. Andreeva T.V., Semenov Yu.S. On the cardinality of layers in some partially ordered sets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 269–284. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.269-284. (In Russian)
2. Alekseev V.B. On the number of k-valued monotone functions. *Probl. Kibern.*, 1974, no. 28, pp. 5–24. (In Russian)
3. Dwight H.B. *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly* [Tables of Integrals and Other Mathematical Data]. Moscow, Nauka, 1978. 224 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Андреева Т.В., Семенов Ю.С.* О мощности слоёв чётнозначной n-мерной решётки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 2–3. – С. 153–169. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.153-169. ⟩

⟨ ***For citation*:** Andreeva T.V., Semenov Yu.S. On the cardinality of layers in even-valued n-dimensional lattice. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 153–169. doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.153-169. (In Russian) ⟩