

УДК 539.3

## РАСЧЕТ СОВМЕСТНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ГРУНТА И ГОФРИРОВАННОЙ ПОЛИЭТИЛЕНОВОЙ ТРУБЫ

*Р.А. Каюмов, Р.А. Шакирзянов, Ф.Р. Шакирзянов*

### Аннотация

Рассматривается задача оценки предельной нагрузки и осадки грунта, внутри которого располагается конструкция – полиэтиленовая гофрированная труба. Определяются осадки этой системы по упруго-вязко-пластической модели деформирования с учетом дилатансии грунта и изменения его механических характеристик с течением времени. Учитываются температурные деформации и влияние температуры на пределы текучести полиэтилена. Для выявления закономерностей влияния геометрических и механических характеристик на предельную нагрузку и осадку системы проводятся численные эксперименты с использованием МКЭ.

**Ключевые слова:** механика грунтов, ползучесть, пластичность, предельная нагрузка, дилатансия, метод конечных элементов.

### Введение

Сильная изношенность современных коммуникаций ЖКХ, тонкостенных трубопроводов в грунте требует оценки их состояния, прочности и прогнозирования долговечности и в случае необходимости замены их на трубы из прочных и долговечных современных материалов.

Однако в современных материалах типа полиэтилен от перепада температур сильно изменяются прочностные и жесткостные характеристики, что может привести к значительному изменению напряженно-деформированного состояния (НДС) и несущей способности системы «грунт – тонкостенная конструкция». Поэтому необходимы учет и оценка влияния уменьшения при нагревании жесткости и прочности полиэтилена на несущую способность и осадку полиэтиленовой трубы, находящейся в грунте. С другой стороны, система «грунт – тонкостенная конструкция» сама изменяется с течением времени от деформаций пластичности, ползучести, дилатансии, что может привести к значительному изменению НДС и несущей способности [1–8]. Поэтому их также необходимо учитывать.

В настоящей работе эта проблема решается для полиэтиленовой гофрированной трубы низкого давления, находящейся в грунте.

### 1. Основные соотношения

Воспользуемся вариационным уравнением принципа возможных перемещений

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \iiint_V Q_i \delta u_i dV + \iint_S P_{ni} \delta u_i dS, \quad (1)$$

где  $Q_i$ ,  $P_{ni}$  – объемные и поверхностные нагрузки,  $\sigma_{ij}$  – напряжения,  $\varepsilon_{ij}$  – деформации,  $u_i$  – перемещения.

Связь между деформациями и перемещениями будем считать линейной, задаваемой соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Прочность грунта оценим по критерию Друккера–Прагера [8, 9]:

$$F = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \varkappa = 0,$$

где инварианты тензора напряжений  $J_1$ ,  $J_2$  имеют вид

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2,$$

$\alpha$  и  $\varkappa$  – постоянные, зависящие от коэффициента сцепления  $C$  и угла внутреннего трения  $\varphi$  грунта [9]:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad \varkappa = \frac{6C \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}.$$

Прочность полиэтилена оценим по критерию Мизеса [10]:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

Пластические деформации грунта определим по ассоциированному закону течения [10]

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\theta} = \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2)$$

Ползучесть грунта учтем по теории течения с упрочнением, согласно которой тензор скорости деформаций ползучести имеет вид [10]

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{\mu \sigma_0^\alpha}{1 + A_1 \varepsilon_0^c} \delta_{ij} + \frac{\eta \sigma_i^\beta}{1 + A_2 \varepsilon_i^c} H^{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (3)$$

Здесь  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – реологические коэффициенты;  $A_1$ ,  $A_2$  – параметры упрочнения;  $H^{ijkl}$  – тензор, связывающий компоненты тензора напряжений и девиатор скорости деформаций ползучести.

Предельную нагрузку и осадку системы оценим по теории упруго-вязко-пластического деформирования с учетом температуры, так как в полиэтиленовых трубопроводах при колебаниях температуры воды могут возникать значительные деформации.

Температурные деформации определим из закона линейного температурного расширения

$$\varepsilon_{ii}^T = \beta \Delta T, \quad (4)$$

где  $\beta$  – коэффициент температурного расширения,  $\Delta T$  – перепад температуры.

Тогда полная деформация будет определяться выражением

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^T,$$

в котором скорости пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}^p$  и скорости деформаций ползучести  $\dot{\varepsilon}^c$  определяются из соотношений (2), (3), а упругие деформации  $\varepsilon^e$  – из нелинейных соотношений

$$\varepsilon_{ij}^e = \left( \frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \sigma_0 \delta_{ij} + \frac{1}{2G} \sigma_{ij}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Здесь  $K$  – объемный модуль и  $G$  – модуль сдвига, зависящие от уровня деформированного состояния. Эти зависимости принимаются в виде дробно-линейного соотношения, предложенного С.П. Тимошенко:

$$\sigma_0 = 3K(\varepsilon_0)\varepsilon_0, \quad \tau_i = G(\gamma_i)\gamma_i,$$

где

$$K = \frac{E_0\sigma_s}{3(1-2\nu)\sigma_s + E_0\varepsilon_0}, \quad G = \frac{G_0\tau_s}{\tau_s + G_0\gamma_i},$$

$\sigma_s, \tau_s$  – экспериментальные механические характеристики,  $E_0$  – начальный модуль сжатия,  $G_0$  – начальный модуль сдвига.

При моделировании процессов деформирования грунта учтем и дилатансию, то есть изменение объема грунта от сдвига в виде

$$\varepsilon_0^d = \frac{d_1\gamma_i}{1 + d_2\gamma_i}, \quad (5)$$

где  $d_1, d_2$  – экспериментальные механические характеристики,  $\gamma_i$  – интенсивность сдвига. Тогда объемную деформацию грунта можно представить в виде суммы

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^0 + \varepsilon_0^d,$$

где  $\varepsilon_0^0$  – объемная деформация, вызванная всесторонним давлением;  $\varepsilon_0^d$  – объемная дилатансионная часть деформации, вызванная сдвигом.

Прочность полиэтилена значительно ниже, чем у стали, а коэффициент линейного температурного расширения, наоборот, в 15–20 раз больше [11, 12]. Поэтому учтем изменение прочностных и жесткостных характеристик в зависимости от изменения температуры  $\Delta T$  через их линейную аппроксимацию:

$$\begin{aligned} \sigma_{pr}(T) &= \Delta T \cdot \sigma_{\Delta T} + \sigma_{pr}(T_0), & \sigma_{\Delta T} &= [\sigma_{pr}(T_0) - \sigma_{pr}(T_1)] / \Delta T, \\ E_{pr}(T) &= \Delta T \cdot E_{\Delta T} + E_{pr}(T_0), & E_{\Delta T} &= [E_{pr}(T_0) - E_{pr}(T_1)] / \Delta T. \end{aligned}$$

Сама задача отыскания НДС системы «грунт – конструкция» решается методом последовательных догрузений [13], когда на всех шагах нагружения решается вытекающее из (1) уравнение равновесия в приращениях. Согласно (4) приращения напряжений  $\{\Delta\sigma\}$  определяются по формуле

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon^e\},$$

где  $[D]$  – матрица упругих характеристик,  $\{\Delta\varepsilon^e\}$  – вектор приращений упругих деформаций. Последние находятся следующим образом:

$$\{\Delta\varepsilon^e\} = \{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon^p\} - \{\Delta\varepsilon^c\} - \{\Delta\varepsilon^d\} - \{\Delta\varepsilon^T\},$$

где  $\{\Delta\varepsilon^p\}$ ,  $\{\Delta\varepsilon^c\}$ ,  $\{\Delta\varepsilon^T\}$  и  $\{\Delta\varepsilon^d\}$  определяются из соотношений (2), (3), (4), (5) соответственно.

Тогда разрешающее уравнение расчета по упруго-вязко-пластической модели принимает вид [13, 14]:

$$\begin{aligned} \iiint_V \{\Delta\varepsilon\}^T [D_{ep}] \{\delta\varepsilon\} dV &= \iiint_V \{\Delta Q\}^T \{\delta u\} dV + \\ &+ \iint_S \{\Delta P\}^T \{\delta u\} dS + \iiint_V \{\Delta\varepsilon^d\}^T [D] \{\delta u\} dV + \\ &+ \iiint_V \{\Delta\varepsilon^c\}^T [D] \{\delta u\} dV + \iiint_V \{\Delta\varepsilon^T\}^T [D] \{\delta u\} dV, \quad (6) \end{aligned}$$

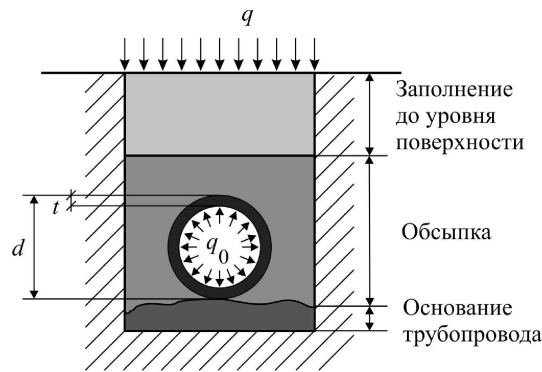


Рис. 1. Модель

Табл. 1

Физико-механические характеристики

Параметр	Грунт	ПЭ
Модуль упругости при изгибе, МПа	9.18	120
Коэффициент Пуассона	0.42	0.15
Угол внутреннего трения грунта, °С	25	–
Коэффициент сцепления, КПа	80.5	–
Предел прочности при растяжении/сжатии, МПа	–	18
Коэффициент температурного расширения, 1/°С	–	$2.0 \cdot 10^{-4}$
Плотность, кН/м <sup>3</sup>	19.6	9.1

где  $[D_{ep}]$  – упруго-пластическая матрица. Из уравнения (6) определяются приращения перемещений  $\{\Delta u\}$ , а затем полные перемещения, деформации и напряжения

$$\begin{aligned} \{u^{k+1}\} &= \{u^k\} + \{\Delta u\}, \\ \{\varepsilon^{k+1}\} &= \{\varepsilon^k\} + \{\Delta \varepsilon\}, \\ \{\sigma^{k+1}\} &= \{\sigma^k\} + \{\Delta \sigma\}. \end{aligned}$$

Здесь  $k$  – номер шага по времени. За критерий достижения предельного состояния принимается условие резкого увеличения приращений.

## 2. Модельная задача

В качестве примера рассмотрена задача оценки прочности трубопровода из полиэтилена низкого давления (ПЭНД), закрепленного на неподвижных бетонных опорах и находящегося в грунте (рис. 1). По трубопроводу подается горячая жидкость. Диаметр трубы  $D = 1.2$  м, относительный диаметр  $D/t = 17$  ( $t$  – толщина трубы); глубина залегания  $h = 1.5$  м; перепад температур  $\Delta T = 30$  °С, внутреннее давление в трубопроводе  $q_0 = 1$  МПа.

Геометрические, механические и силовые характеристики системы взяты из [15]. Используемые в расчете физико-механические характеристики грунта и ПЭНД приведены в табл. 1.

Зависимость от температуры разрушающего напряжения для ПЭНД [15] при сжатии, статическом изгибе и срезе приведена в табл. 2.

Проверочный расчет на прочность полиэтиленового трубопровода проводился с учетом всех действующих на него сил. Для этого использовался разработанный

Табл. 2

Зависимость от температуры разрушающего напряжения для ПЭНД

Разрушающее напряжение, МПа	Температура, °С			
	20	40	60	80
При сжатии	12.6	7.7	4	–
При статическом изгибе	11.8	8.8	6	–
При срезе	16.9	13.1	9.2	5.3

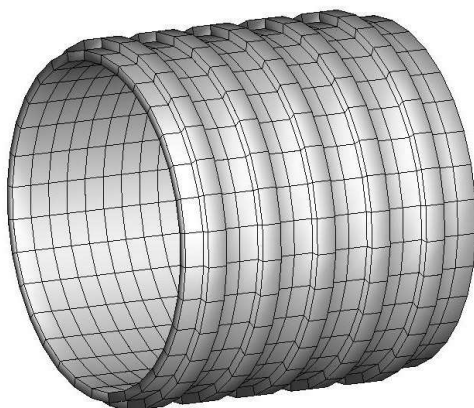


Рис. 2. Конечно-элементная модель участка трубы

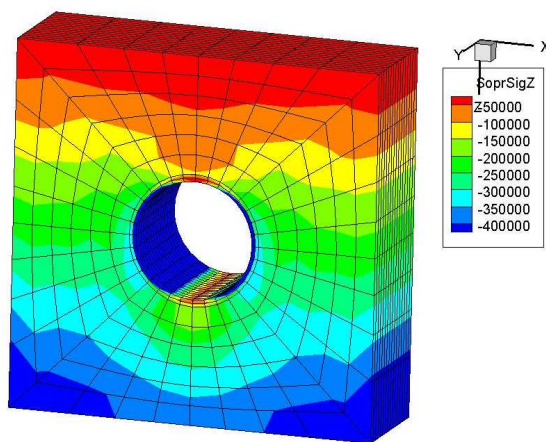


Рис. 3. НДС сечения грунта с трубой

авторами комплекс программ МКЭ на основе восьмиузлового изопараметрического трехмерного конечного элемента [13, 14]. Конечно-элементная модель участка трубы приведена на рис. 2.

Напряжения  $\sigma_z$  для выбранного участка системы представлены на рис. 3.

Влияние толщины полиэтиленовой трубы на осадку системы «грунт–труба» представлено на рис. 4. Исследовано также влияние изменения температуры на предельную нагрузку (рис. 5).

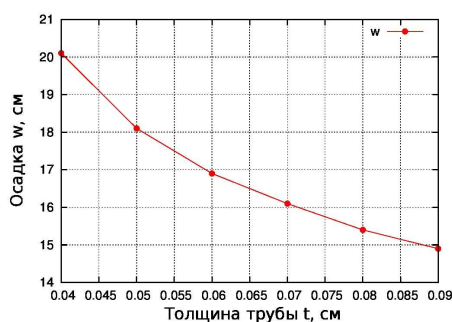


Рис. 4. Зависимость осадки системы «грунт–гофрированная труба» от толщины трубы

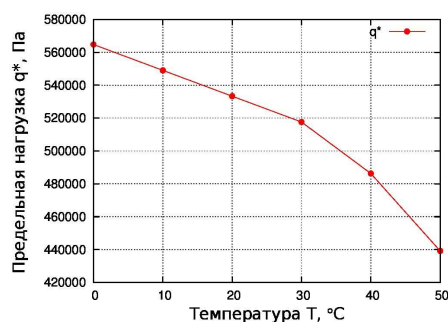


Рис. 5. Зависимость предельной нагрузки системы «грунт–гофрированная труба» от температуры

Таким образом, разработанный подход моделирования процесса деформирования и потери несущей способности системы «грунт–тонкостенная конструкция» позволяет решать задачу расчета трубы в грунте в более точной постановке, учитывать влияние различных факторов и изменение механических характеристик системы с течением времени. В результате расчетов получился ожидаемый результат – увеличение температуры трубы уменьшает несущую способность системы, хотя напряжения в трубе и уменьшаются.

### Summary

*R.A. Kayumov, R.A. Shakirzyanov, F.R. Shakirzyanov.* Modeling of the Deformation Process and Evaluation of the Bearing Capacity of Soil and Polyethylene Corrugated Pipe with Allowance for Temperature.

The problem of estimating the ultimate load and soil settlement with a thin-walled structure – polyethylene corrugated pipe – enclosed therein is considered. The settlement of this system is determined through the elastic-viscoplastic model of deformation with regard to the soil dilatancy and changes in its mechanical properties over time. Temperature deformations and effects of temperature on the yield stress of polyethylene are taken into account. Numerical experiments are performed using the finite element method to identify patterns of the influence exercised by geometric and mechanical characteristics on the maximum load and system settlement.

**Keywords:** soil mechanics, creep, plasticity, limit load, dilatancy, finite element method.

### Литература

1. *Бережной Д.В., Паймушин В.Н.* Математическое моделирование этапов строительства сложных сооружений по трансформирующимся расчетным схемам // Научно-технологические технологии. – 2005. – № 8-9. – С. 59–64.
2. *Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Султанов Л.У.* Моделирование деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенной в грунте сложной физической природы // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2013. – Т. 16, № 9. – С. 250–255.
3. *Баженов В.Г., Ломунов В.К., Осетров С.Л., Павленкова Е.В.* Экспериментально-расчетный метод исследования больших упруго-пластических деформаций цилиндрических оболочек при растяжении до разрыва и построение диаграмм деформирования при неоднородном напряженно-деформированном состоянии // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 116–124.

4. *Султанов Л.У., Бережной Д.В.* Математическое моделирование несущей способности грунтовых насыпей // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2013. – Т. 1. – С. 117–124.
5. *Каюмов Р.А.* // Метод вариации упругих характеристик в задаче о предельной нагрузке // Прикл. механика и техн. физика. – 1990. – № 3. – С. 134–139.
6. *Каюмов Р.А.* // Об одном методе двусторонней оценки предельной нагрузки // Проблемы прочности. – 1992. – № 1. – С. 51–55.
7. *Гаеврюшин С.С., Захаренков Д.В.* Численный анализ влияния дефектов сварного шва на прочность трубопровода // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: Тр. второй междунар. конф. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – С. 102–104.
8. *Abrate S.* Criteria for yielding or failure of cellular materials // J. Sandwich Struct. Mater. – 2008. – V. 10, No 1. – P. 5–51.
9. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Q. Appl. Math. 1952. – V. 10, No 2. – P. 157–165.
10. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред: в 2 т. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 1: Теория идеальной пластичности. – 448 с.
11. *Лавров И.Г.* Уточнение математической модели напряженного состояния полиэтиленовых труб для расчета при различных температурах // Фундаментальные исслед. – 2007. – № 1. – С. 44–45.
12. *Thomas H.R., Missoum H.* Three-dimensional coupled heat, moisture, and air transfer in a deformable unsaturated soil // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1999. – V. 44, No 7. – P. 919–943.
13. *Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р.* Моделирование поведения и оценка несущей способности системы тонкостенная конструкция-грунт с учетом ползучести и деградации грунта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн 4. – С. 67–75.
14. *Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Шевченко С.Ю.* Оценка несущей способности системы конструкция-грунт // Изв. КГАСУ. – 2012. – № 4 (22). – С. 496–501.
15. ГОСТ 16338-85. Полиэтилен низкого давления. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2003. – 33 с.

Поступила в редакцию  
15.10.14

---

**Каюмов Рашит Абдулхакович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [kayumov@rambler.ru](mailto:kayumov@rambler.ru)

**Шакирзянов Рашит Аглеевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры механики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [rashitagl@mail.ru](mailto:rashitagl@mail.ru)

**Шакирзянов Фарид Рашитович** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры механики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [faritbox@mail.ru](mailto:faritbox@mail.ru)