

**Вопросы и задачи к устному экзамену по геометрии в
10А, 10В, 10М, 10С классах.**

Теоретические вопросы.

1. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом (Т1,2,3 с доказательством). Способы задания плоскости.
2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Определение и признак (Т4 с доказательством).
3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельные прямые в пространстве. Определение параллельных прямых. Т5 (с доказательством), Т6 (без доказательства), Т7 (с доказательством).
4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между лучами и прямыми в пространстве, Т8 (с доказательством). Перпендикулярные прямые.
5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Определение и признак. Т9,10(с доказательством), Т11,12 (без доказательства).
6. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Перпендикулярность прямой и плоскости. Определение и признак. Т13 (без доказательства). Т14,15 (с доказательством).
7. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Определения перпендикуляра к плоскости, наклонной, проекции наклонной на плоскость. Теорема о трёх перпендикулярах. Т16,17 (с доказательством)-на выбор.
8. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
9. Параллельное проектирование. Ортогональное проектирование.
10. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Параллельные плоскости. Определение, признак (Т18 или Т19 с доказательством на выбор), свойства параллельных плоскостей (Т20-25 с доказательством, Т26 без доказательства).
11. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Угол между двумя плоскостями, Т27 (без доказательства).
12. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Перпендикулярность плоскостей. Определение, признак (Т28 с доказательством), свойства (Т29, 30 с доказательством, Т31 без доказательства).
13. Площадь ортогональной проекции многоугольника (Т.32 с доказательством).
14. Расстояние между фигурами в пространстве.
15. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
16. Компланарные векторы. Разложение вектора на плоскости. Разложение вектора по трём некопланарным векторам.
17. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства, признак перпендикулярности двух векторов.

18. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора в пространстве. Линейные операции над векторами в координатах.

Задачи по планиметрии.

1. Основания равнобедренной трапеции равны 27 и 43. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{8}{9}$. Найдите боковую сторону.
2. Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 52. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.
3. В параллелограмме ABCM высота, опущенная на сторону AB, равна 9. синус угла A равен $\frac{3}{4}$. Найдите AM.
4. В параллелограмме ABCM синус угла C равен $\frac{1}{3}$, AM = 6. Найдите высоту опущенную на сторону AB.
5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, BC = 14, синус угла A равен $\frac{4}{7}$. Найдите AH.
6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, AB = 26, тангенс угла A равен $\frac{2}{3}$. Найдите AH.
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, AB = 25, синус угла A равен $\frac{4}{5}$. Найдите AH.
8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, AB = 12, косинус угла A равен $\frac{1}{2}$. Найдите AH.
9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , AC = 120, BC = 35. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.
10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , AB = 4, BC = 2. Найдите синус внешнего угла при вершине A.
11. В треугольнике ABC угол C равен 90° , синус угла A равен $\frac{4}{5}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.
12. В треугольнике ABC угол C равен 90° , косинус угла B равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.
13. В треугольнике ABC угол C равен 90° , тангенс угла A равен 0,4. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.
14. В треугольнике ABC угол C равен 90° , тангенс угла A равен 3. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.
15. В треугольнике ABC угол C равен 90° , косинус угла A равен 0,4. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

16. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , синус угла A равен 0,7. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

17. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, тангенс угла A равен $\frac{4}{3}$. Найдите AB.

18. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 15$, синус угла A равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите AC.

19. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, косинус угла A равен 0,1. Найдите AC.

20. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, косинус угла A равен 0,4. Найдите AB.

21. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , $AC = \sqrt{51}$, $BC = 7$. Найдите синус угла A.

22. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , $AC = 20$, $BC = 14$, Найдите тангенс угла A.

23. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , $AB = 20$, тангенс угла A равен $\frac{3}{4}$.

Найдите BC.

24. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , $AB = 10$, тангенс угла A равен $\frac{\sqrt{21}}{2}$. Найдите AC.

25. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , синус угла A равен 0,6, $AC = 12$. Найдите AB.

26. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , $AB = 5$, косинус угла B равен 0,6. Найдите AC.

27. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , $BC = 2$, тангенс угла A равен 0,5. Найдите AC.

28. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , $AB = 4$, синус угла A равен 0,75. Найдите BC.

29. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , тангенс угла A равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите косинус угла B.

30. В треугольнике ABC угол C равен 90^0 , синус угла A равен $\frac{5}{\sqrt{41}}$. Найдите тангенс угла B.

31. Точки A и B лежат на окружности. Точка C лежит вне неё, причём отрезок AC пересекает окружность в точке M, а отрезок BC - в точке E. Угол ACB равен 48^0 . Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек M и E, равна 162^0 . Найдите угол MAE. Ответ дайте в градусах.

32. Точки A и B лежат на окружности. Точка C лежит вне неё, причём отрезок AC пересекает окружность в точке M, а отрезок BC - в точке E. Найдите угол ACB, если вписанные углы AMB и MAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118^0 и 38^0 . Ответ дайте в градусах.

33. Угол $\angle ACO$ равен 20° . Его сторона CA касается окружности с центром в точке O . Прямая CO пересекает окружность в точках B и D . Найдите градусную величину большей дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.
34. Найдите угол $\angle ACO$, если его сторона CA касается окружности, O – центр окружности, а меньшая дуга окружности AB , заключённая внутри этого угла, равна 58° . Ответ дайте в градусах.
35. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 48° . Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB . Ответ дайте в градусах.
36. Хорда AB стягивает дугу окружности в 120° . Найдите угол $\angle ABC$ между этой хордой и касательной к окружности проведённой через точку B . Ответ дайте в градусах.
37. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол $\angle ABD = 28^\circ$, угол $\angle CAD = 44^\circ$. Найдите угол $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.
38. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол $\angle ABC = 44^\circ$, угол $\angle CAD = 36^\circ$. Найдите угол $\angle ABD$. Ответ дайте в градусах.
39. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 44° и 87° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.
40. Угол $\angle A$ четырёхугольника $ABCD$ вписанного в окружность равен 116° . Найдите угол $\angle C$ этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

Задачи по стереометрии.

- 1) $EFGHE_1F_1G_1H_1$ -куб. Точки L, N, T – середины ребер F_1G_1, G_1H_1, H_1H соответственно. K – точка пересечения диагоналей грани EE_1F_1F . Найти взаимное расположение прямых и угол между ними: F_1T и KN, KH_1 и LN .
 Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}, 30$ градусов
- 2) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ -куб. Точка M – середина ребра $B_1 C_1$. O – точка пересечения диагоналей грани $ABCD$. Найти взаимное расположение прямых и угол между ними: $A_1 D$ и AC, MA_1 и $BC, C_1 O$ и AB_1 . Ответ: $60, \arctg 2, 30$
- 3) Основанием правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через AB и точку K – середину ребра PC . Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8. Ответ: $12\sqrt{11}$
- 4) В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P все ребра равны 4. Постройте сечение этой пирамиды, проходящее через центр O

ее основания параллельно ребру ВС и медиане РК грани ВСР. Установите форму полученного сечения, его периметр и площадь. Ответ: 10 и $3\sqrt{3}$

- 5) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а основание 12. Точка М удалена от каждой его стороны на 15. Найдите расстояние от точки М до плоскости треугольника. Ответ: $6\sqrt{6}$
- 6) Диагонали ромба равны 30 и 40 и пересекаются в точке Н. Длина перпендикуляра НМ к плоскости ромба равна 5. Найдите расстояние от точки М до каждой стороны ромба. Ответ: 13
- 7) В правильном тетраэдре РАВС с ребром, равным 2, точка О- центр основания АВС. Найдите расстояние от точки О до плоскости грани РВС.
Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$
- 8) Точка Р равноудалена от всех сторон прямоугольной трапеции с острым углом в 60 градусов и большей боковой стороной, равной $8\sqrt{3}$. Найдите расстояния от точки Р до сторон трапеции, если известно, что расстояние от этой точки до плоскости трапеции равно 8. Ответ: 10
- 9) Прямая DM перпендикулярна плоскости квадрата ABCD. О – точка пересечения диагоналей квадрата. Найдите угол между прямой OM и плоскостью MDC, между прямой AO и плоскостью ADM. Ответ: $\arctg\frac{\sqrt{5}}{5}$,
45
- 10) Прямая BK перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC, BK=AB, точка М – середина AC. Найдите угол между прямой BM и плоскостью KBA, между прямой AK и плоскостью BKM. Ответ: 30 и $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$
- 11) О -точка пересечения медиан правильного треугольника ABC. MO – перпендикуляр к плоскости ABC, MA=AB, точка К – середина BC. Найдите угол между прямой CM и плоскостью AMK, между прямой OM и плоскостью MBC. Ответ: 30 и $\arcsin\frac{1}{3}$

- 12) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M – середина ребра $B_1 C_1$, точка F – середина ребра $D_1 C_1$, точка K – середина ребра DC . Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC , между прямой AC и плоскостью MKF .
 Ответ: $\arctg \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и 90
- 13) Прямая DF пересекает параллельные плоскости α , β и γ соответственно в точках D , E и F , при этом $DF=3$, $EF=9$. Прямая EG пересекает плоскости α и γ соответственно в точках G и H , при этом $EG=12$. Найдите длину отрезка GH . Ответ: 6 или 3
- 14) Точка O – центр основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через O параллельно грани PAB , определите вид сечения и найдите его площадь, если $BC=12$, $PB=10$. Ответ: 36
- 15) Точка O – центр основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину отрезка OB параллельно диагонали AC основания и ребру PD , определите вид сечения и найдите его площадь, если $BC=12$, $PB=10$. Ответ: $\frac{15\sqrt{2}}{2}$
- 16) Ребро PC тетраэдра $PABC$ перпендикулярно к плоскости ABC , $AB=BC=AC=6$, $BP=3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $P(AC)B$, $P(AB)C$, $B(CP)A$. Ответ: 90, 45, 60
- 17) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка M – середина ребра $D_1 C_1$. Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и ADC , $A_1 M A$ и $B_1 C_1 C$. Ответ: 45, $\arctg 0,5$
- 18) Плоскости ABC и ABD образуют угол в 45 градусов. Известно, что $AD=3$, $AB=5$, $BC=\sqrt{2}$, DA перпендикулярно AB , CB перпендикулярно AB . Найдите CD и угол между прямой CD и плоскостью ABC . Ответ: $\sqrt{30}$ и $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{10}$

- 19) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a , точка K – середина ребра $B_1 C_1$. Найдите расстояния между прямыми: DC и $A_1 K$, DD_1 и $A_1 K$. Ответ: a и $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$
- 20) Постройте сечение куба плоскостью $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер BC , CD и CC_1 . Найдите его площадь и периметр, если известно, что $AB=18$. Ответ: $\frac{81}{2}\sqrt{3}; 27\sqrt{2}$.
- 21) Каждое ребро тетраэдра $ABCD$ равно 10. Построить сечение плоскостью, проходящей через середину ребра BC параллельно плоскости (ABD) , и найти его площадь. Ответ: $\frac{25}{4}\sqrt{3}$.
- 22) Расстояния от точки D до каждой из вершин правильного треугольника ABC равны. Найдите это расстояние и площадь треугольника ABC , если $DO \perp (ABC)$, $CK \perp AB$, $OK=8$, $OD=10$. Ответ: $2\sqrt{89}; 192\sqrt{3}$.
- 23) К плоскости равностороннего треугольника ABC из точки пересечения медиан O проведен перпендикуляр $OD=4\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки D до сторон и вершин треугольника, если каждая из его сторон равна 18. Ответ: $5\sqrt{3}; 2\sqrt{39}$.
- 24) Из точки, удаленной от плоскости на $2\sqrt{3}$, проведены две наклонные под углом 60° к плоскости. Найдите расстояние между их основаниями, если угол между проекциями наклонных равен 60° . Ответ: 2.
- 25) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ – квадрат. Найдите его стороны, если $AC=CC_1$, $AD_1=12$. Ответ: 6.
- 26) Длины перпендикуляров, опущенных из точки O на грани двугранного угла, равны 18, т.е. $OA \perp \beta$, $OB \perp \alpha$, $OA=OB=18$. Найдите AC , если $\angle ACB=120^\circ$, AC – перпендикуляр линии пересечения плоскостей α и β . Ответ: $6\sqrt{3}$.

- 27) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD=10$, $AA_1=4$, $AB=6$. Найти тангенс угла между диагональю AC_1 и плоскостью $ABCD$; между диагональю AC_1 и плоскостью $AA_1 B_1 B$. Ответ: $\sqrt{\frac{2}{17}}$; $\frac{5}{\sqrt{13}}$.
- 28) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ – квадрат. Точка K делит диагональ AC в отношении $1:4$, считая от точки A . Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку K и ребро BB_1 , и найти его площадь, если $BB_1=7$, $AC_1=\sqrt{177}$. Ответ: $14\sqrt{17}$.
- 29) Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC , а отрезок BD перпендикулярен его плоскости. Найти площадь треугольника ADC , если $AB=BC=6$ и $\angle ADC=30^\circ$, $BD=8$. Ответ: 25
- 30) Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK , перпендикулярная плоскости $ABCD$. Известно, что $BK=\sqrt{89}$, $KC=5\sqrt{5}$, $KD=10$. Найти AK и расстояние между прямой AK и CD . Ответ: 8; 6.