

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

*А.И. Абдрахманова, Л.У. Султанов*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

### Аннотация

Работа посвящена построению вычислительного алгоритма исследования конечных деформаций трехмерных тел с учетом контактного взаимодействия. Алгоритм основан на так называемом подходе «мастер – слуга» (“master–slave”), рассматривается проекция slave-точки на master-поверхность, которая задана параметрически. Построены все необходимые кинематические соотношения. Для поиска зоны контакта применен алгоритм проекции ближайшей точки. Рассмотрен случай контактного взаимодействия без учета трения между контактируемыми поверхностями. Для выполнения условий контакта применяется метод штрафных функций. На основе уравнения принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации дана вариационная постановка решения задачи с учетом контактного взаимодействия, построен функционал контактного взаимодействия от неизвестной скорости проникновения одного тела в другое. Определяющие соотношения записаны с помощью упругого потенциала деформации. Для решения полученной нелинейной задачи применен метод пошагового нагружения. Разрешающее уравнение построено на основе линеаризации уравнения принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации, получены линеаризованные соотношения, разработан алгоритм решения нелинейной задачи. Приведена конечноэлементная реализация предложенного алгоритма. Пространственная дискретизация построена на основе восьмиузлового конечного элемента и пятиузлового контактного элемента, реализующего решения вариационной контактной задачи. Приведены результаты решения модельных задач.

**Ключевые слова:** конечная деформация, контактное взаимодействие, метод штрафа, алгоритм проекции ближайшей точки

### Введение

При решении практически значимых задач возникает необходимость учета различных аспектов деформирования, одним из которых является контактное взаимодействие. Построению алгоритмов решения деформирования твердых тел с учетом контактного взаимодействия посвящено большое количество публикаций, среди которых отметим работы [1–7].

Особенностью контактных задач является то, что взаимодействие упругих тел сопровождается, как правило, появлением между телами зон контакта, через которые передаются усилия с одного тела на другое. Граничные условия в зоне контакта становятся специфическими, так как точки контакта в этой области могут перемещаться либо совместно, либо проскальзывать друг относительно друга. Все это усложняет граничные условия для каждого из контактирующих тел, так как неизвестными становятся как напряжения, так и перемещения точек в зоне контакта.

В последние десятилетия в механике контактного взаимодействия получила активное развитие вычислительная механика, которая использует конечномерные



точки, который сводится к решению следующей экстремальной задачи:

$$F(\xi^1, \xi^2) = \|\mathbf{r}^s - \mathbf{r}^m(\xi^1, \xi^2)\| = (\mathbf{r}^s - \mathbf{r}^m) \cdot (\mathbf{r}^s - \mathbf{r}^m) \rightarrow \min.$$

Предполагая, что функция  $F$  дважды непрерывно дифференцируема, для нахождения минимума функции  $F$  применим итерационный метод Ньютона, состоящий в решении следующей задачи:

$$\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} - \left( F''(\xi^{(n)}) \right)^{-1} F'(\xi^{(n)}), \quad (2)$$

где  $\xi = (\xi^1, \xi^2)$  – координаты проекции slave-точки на master-поверхность,  $\xi^{(0)}$  – заданное начальное приближение,  $n$  – номер итерации. Путем решения (2) определяется точка проникновения на master-поверхности  $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ , а из (1) – величина проникновения  $p$ .

Из соотношения (1) определим радиус-вектор slave-точки

$$\mathbf{r}^s = \mathbf{r}^m + p\mathbf{n} = \mathbf{r}^m(\xi^1, \xi^2) + p\mathbf{n}(\xi^1, \xi^2). \quad (3)$$

Дифференцируя соотношение (3) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{r}^s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}^m}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}^m}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^i + p\dot{\mathbf{n}} + p \frac{d\mathbf{n}}{dt}. \quad (4)$$

Обозначим  $\mathbf{v}^s = \mathbf{r}^s/dt$ ,  $\mathbf{v}^m = \partial \mathbf{r}^m / \partial t$ ,  $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r}^m / \partial \xi^i$ , тогда из (4) следует кинематическое соотношение в скоростях

$$\dot{p} = (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^m) \cdot \mathbf{n}. \quad (5)$$

## 2. Вариационная модель контакта

Запишем вариацию мощности, возникающую при контактном взаимодействии двух тел на возможных скоростях

$$\delta W_c = \int_{S^c} \mathbf{T}_s \cdot (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) dS,$$

где  $S^c$  – часть master-поверхности, на которой возникает контактное взаимодействие,  $\mathbf{T}_s$  представим в виде суммы нормальной и касательной составляющих,

$$\mathbf{T}_s = N\mathbf{n} + T_i \mathbf{r}^i, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим задачу при отсутствии трения, то есть компоненты  $T_i = 0$ , тогда

$$\delta W_c = \delta W_c^N = \int_{S^c} N (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S^c} N \delta p dS,$$

где вариация  $\delta p$  определяется из (5) по формуле

$$\delta p = (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) \cdot \mathbf{n}. \quad (6)$$

Для численного решения контактной задачи используется метод штрафа [10]. Представим нормальное усилие в виде

$$N = \varepsilon_N H(-p) p,$$

где  $\varepsilon_N$  – параметр штрафа, который определяет жесткость взаимодействия, увеличение  $\varepsilon_N$  приводит в пределе к удовлетворению условий по непроникновению тел друг в друга;  $H(p)$  – функция Хевисайда:

$$H(p) = \begin{cases} 0, & p < 0, \\ 1, & p \geq 0. \end{cases}$$

Тогда контактный функционал  $\delta W_c$  примет вид

$$\delta W_c = \int_{S^c} \varepsilon_N H(-p) p \delta \dot{p} dS. \quad (7)$$

### 3. Вариационное уравнение деформирования твердого тела

Приведем алгоритм решения задачи упругого деформирования твердого тела с учетом больших деформаций [14–16]. В качестве основного уравнения используем уравнение принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации

$$\delta W = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega - \int_{S^\sigma} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} ds - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{d} = 0.5(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)$  – тензор деформации скорости,  $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$  – тензор пространственного градиента скорости,  $\Omega$  – текущий объем;  $S^\sigma$  – часть поверхности, на которой заданы усилия;  $\mathbf{t}_n$ ,  $\mathbf{f}$  – векторы поверхностных и объемных сил соответственно,  $\delta \mathbf{v}$  – вариация вектора скорости перемещения,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши [14–16]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}, \quad (9)$$

где  $J$  – относительное изменение объема,  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  – левый тензор Коши–Грина,  $\mathbf{F}$  – градиент деформаций,  $\psi$  – функция удельной потенциальной энергии [14–16].

Для изотропного материала функция удельной потенциальной энергии есть

$$\psi = \psi(I_{1\mathbf{B}}, I_{2\mathbf{B}}, I_{3\mathbf{B}}),$$

где  $I_{1\mathbf{B}} = \text{tr}(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{I}$ ,  $I_{2\mathbf{B}} = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{B}$ ,  $I_{3\mathbf{B}} = \det(\mathbf{B})$  – главные инварианты тензора  $\mathbf{B}$ .

Добавив в левую часть вариационного уравнения (8) вариацию контактного функционала (7), получим полное вариационное уравнение мощности на возможных скоростях перемещений с учетом контактного взаимодействия

$$\delta W + \delta W_c = 0. \quad (10)$$

### 4. Алгоритм решения

Уравнение (10) является нелинейным, и для его решения используем метод пошагового нагружения [14–16]. Запишем уравнение (10) на  $(k+1)$ -м временном слое

$$\delta^{k+1} W + \delta^{k+1} W_c = 0$$

или

$$\delta^k W + \delta^k W_c + \left( \delta^k \dot{W} + \delta^k \dot{W}_c \right) dt = 0, \quad (11)$$

где функционал (10) записан на  $k$ -м шаге нагружения:

$$\delta^k W = \int_{\Omega} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta^k \mathbf{d} \, d\Omega - \int_{S^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} \, ds - \int_{\Omega} {}^k \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Omega,$$

$$\delta^k W_c = \int_{S^c} \varepsilon_N H(-{}^k p) {}^k p \delta^k \dot{p} \, dS.$$

Линеаризация функционала (8) есть

$$\delta^k \dot{W} = \int_{k\Omega} \left( {}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta^k \mathbf{d} + {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta^k \dot{\mathbf{d}} + \frac{{}^k J}{k J} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta^k \mathbf{d} \right) d\Omega -$$

$$- \int_{k S^\sigma} \left( {}^k \mathbf{t}_n \cdot {}^k \mathbf{h} + \frac{{}^k J}{k J} {}^k \mathbf{t}_n + {}^k \dot{\mathbf{t}}_n \right) \cdot \delta \mathbf{v} \, ds + \int_{\Omega} \left( \frac{{}^k J}{k J} {}^k \mathbf{f} + {}^k \dot{\mathbf{f}} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (12)$$

где

$$\frac{J}{J} = I_{1\mathbf{d}} = \text{tr}(\mathbf{d}) = I \cdot \mathbf{d}, \quad \delta \dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left( \delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} + \dot{\mathbf{F}}^{-\mathbf{T}} \cdot \delta \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{T}} \right).$$

Скорость изменения напряжений Коши вычисляется по формуле

$${}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2 \left\{ \frac{1}{k J} {}^k \dot{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial {}^k \mathbf{B}} + \frac{1}{k J} \left( {}^k \mathbf{B} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial {}^k \mathbf{B}^2} \right) \cdot {}^k \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{k J} {}^k \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial {}^k \mathbf{B}} I_{1^k \mathbf{d}} \right\} =$$

$$= \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\sigma} I_{1\mathbf{d}},$$

где

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{4}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B} \partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}.$$

Линеаризация контактного функционала (7) будут иметь вид

$$\delta^k \dot{W}_c = \int_{S^c} \varepsilon_N H(-{}^k p) ({}^k \dot{p} \delta^k \dot{p} + p \delta^k \ddot{p}) \, dS.$$

Линеаризация вариации скорости проникновения получена путем дифференцирования обеих частей (5) по времени:

$$\delta^k \ddot{p} = - (\delta \mathbf{v}_i^m \cdot {}^k \mathbf{n}) {}^k a^{ij} ({}^k \mathbf{v}^s - {}^k \mathbf{v}^m) \cdot {}^k \mathbf{r}_j -$$

$$- (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) \cdot {}^k \mathbf{r}_j {}^k a^{ij} ({}^k \mathbf{v}_i^m \cdot {}^k \mathbf{n}) + (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) {}^k h^{ij} ({}^k \mathbf{r}_i) ({}^k \mathbf{v}^s - {}^k \mathbf{v}^m) \cdot {}^k \mathbf{r}_j,$$

где

$${}^k \mathbf{r}_j = \frac{\partial {}^k \mathbf{r}^m}{\partial \xi^j}, \quad {}^k a_{ij} = {}^k \mathbf{r}_i \cdot {}^k \mathbf{r}_j, \quad {}^k h^{ij} = {}^k h_{gl} {}^k a^{ig} {}^k a^{jl} = \frac{\partial^2 {}^k \mathbf{r}^m}{\partial \xi^g \partial \xi^l} \cdot \mathbf{n}^k a^{ig} {}^k a^{jl}.$$

$$\delta^k \dot{W}_c = \int_{S^c} \varepsilon_N H(-{}^k p) (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) \cdot ({}^k \mathbf{n} \otimes {}^k \mathbf{n}) \cdot ({}^k \mathbf{v}^s - {}^k \mathbf{v}^m) \, dS -$$

$$- \int_{S^c} \varepsilon_N H(-{}^k p) {}^k p \delta \mathbf{v}_i^m \cdot {}^k a^{ij} ({}^k \mathbf{n} \otimes {}^k \mathbf{r}_j) \cdot ({}^k \mathbf{v}^s - {}^k \mathbf{v}^m) \, dS -$$

$$- \int_{S^c} \varepsilon_N H(-{}^k p) {}^k p (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) \cdot {}^k a^{ij} ({}^k \mathbf{r}_i \otimes {}^k \mathbf{n}) \cdot {}^k \mathbf{v}_j^m \, dS -$$

$$- \int_{S^c} \varepsilon_N H(-{}^k p) {}^k p (\delta \mathbf{v}^s - \delta \mathbf{v}^m) \cdot {}^k h^{ij} ({}^k \mathbf{r}_i \otimes {}^k \mathbf{r}_j) \cdot ({}^k \mathbf{v}^s - {}^k \mathbf{v}^m) \, dS. \quad (13)$$

Решая систему линейных уравнений (11), получим вектор скорости перемещений, который определяет конфигурацию тела на следующем шаге нагружений

$${}^{k+1}\mathbf{r} = {}^k\mathbf{r} + {}^k\mathbf{v}dt.$$

Напряженное состояние находится с помощью соотношения (9).

### 5. Конечноэлементная реализация

Для решения системы уравнений (11) используется метод конечных элементов. Рассматриваемые твердые тела дискретизируются с помощью 8-узлового конечного элемента. Введём следующее аппроксимирующее представление геометрии и скорости:

$${}^k y^i(\xi^j) = \sum_{s=1}^8 {}^k y_s^i N_s(\xi^j), \quad {}^k \mathbf{v}^i(\xi^j) = \sum_{s=1}^8 {}^k \mathbf{v}_s^i N_s(\xi^j),$$

где  ${}^k y_s^i$  – координаты узлов ( $k$  – номер шага нагружения,  $s$  – номер узла в элементе),  $\xi_s^i = \pm 1$  – координаты соответствующих узлов в локальной системе координат,  ${}^k \mathbf{v}_s^i$  – скорости узлов, а  $N_s(\xi^j) = (1 + \xi_s^1 \xi^1)(1 + \xi_s^2 \xi^2)(1 + \xi_s^3 \xi^3)/8$  – функция формы,  $-1 \leq \xi^1, \xi^2, \xi^3 \leq 1$ . С помощью введенных аппроксимаций из (8) и (12) получаются конечноэлементные соотношения.

Для моделирования контактного взаимодействия строится 5-узловой конечный элемент на базе соотношений (7) и (13). Master-поверхность задается параметрически  $\mathbf{r}^m = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{r}^{mi}$ , где  $N_i = (1 + \xi_i^1 \xi^1)(1 + \xi_i^2 \xi^2)/4$ . Четыре узла выбираются на master-поверхности, пятым узлом контактного конечного элемента является узел конечного элемента slave-тела.

Введём аппроксимацию скорости перемещений в этих узлах:  $\mathbf{v}^m = \sum_{t=1}^4 N_t \mathbf{v}^{mt}$ ,  $\mathbf{v}^s = N_5 \mathbf{v}^{s5}$ , где  $N_5 = -1$ ,  $\{v\}^T = \{v_{xj}, v_{yj}, v_{zj}\}^T$ ,  $j = 1, \dots, 5$  – вектор скорости перемещений на контактном элементе.

С помощью алгоритма проекции ближайшей точки устанавливается принадлежность slave-узла элементу master-поверхности, критерием служит условие  $|\xi_Q| \leq 1$ , что и определяет алгоритм поиска зоны контакта.

В результате конечноэлементной аппроксимации получим систему линейных алгебраических уравнений на  $k$ -м шаге нагружения:

$$([{}^k K] + [{}^k K_c]) \{\Delta^k \mathbf{v}\} = \{\Delta^k P\} + \{\Delta^k H\},$$

где матрица  $[{}^k K]$  и вектор  $\{\Delta^k P\}$  являются результатом аппроксимации (12),  $[{}^k K_c]$  – (13),  $\{\Delta^k H\}$  – (7), (8).

### 6. Численные примеры

Рассмотрим функцию потенциальной энергии упругой деформации, записанного в виде

$$\psi = \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{8}(I_{1\mathbf{B}} - 3)^2 + \tilde{\mu}(I_{1\mathbf{B}} - 3) - \frac{\tilde{\mu}}{2}(I_{2\mathbf{B}} - 3),$$

где  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$  – параметры Ламе.

Тогда тензор напряжений Коши  $\boldsymbol{\sigma}$  есть

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{J} \left\{ \left[ \frac{\tilde{\lambda}}{2}(I_{1\mathbf{B}} - 3) - \tilde{\mu} \right] \cdot \mathbf{B} + \tilde{\mu} \mathbf{B}^2 \right\}.$$

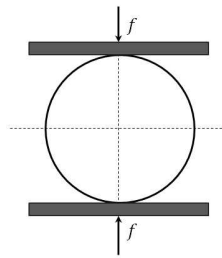


Рис. 2. Задача Герца

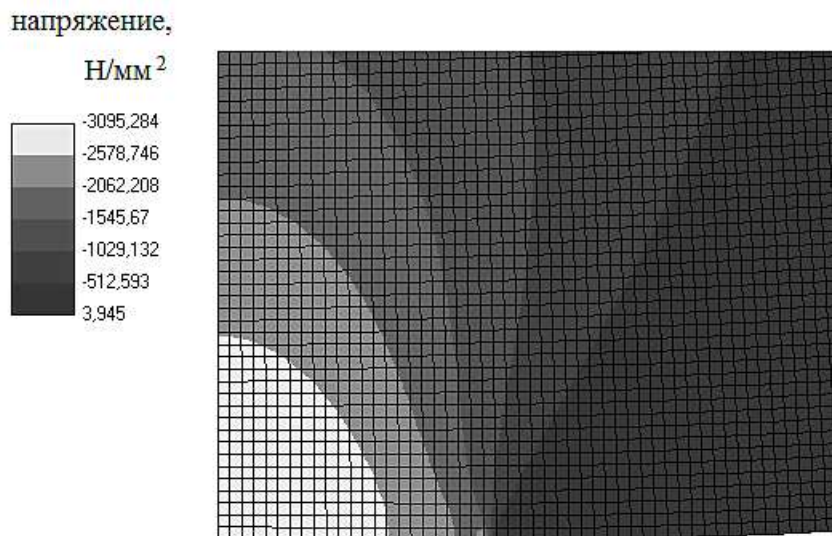


Рис. 3. Распределение нормальных вертикальных напряжений в области контакта

В качестве тестовой задачи рассмотрена задача Герца о взаимодействии бесконечно длинного цилиндра с плоскостями (рис. 2).

Бесконечно длинный цилиндр сжимается абсолютно жесткими параллельными плоскостями под действием сил  $f = 15$  МН (рис. 2), силой трения между контактирующими поверхностями пренебрегаем. Радиус цилиндра  $R = 100$  мм, материал – упругий с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup> и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0$ . Так как задача является симметричной, достаточно рассмотреть четверть цилиндра с заданием соответствующих условий симметрии.

Была построена конечноэлементная сетка с высокой концентрацией элементов в зоне контакта и более разреженная в областях, не подверженных непосредственному контакту.

На рис. 3 представлено распределение нормальных вертикальных напряжений в области контакта. Из рисунка видно, что наибольшее контактное напряжение равно 3095.284 Н/мм<sup>2</sup> в центральной точке, при этом длина зоны контакта составляет 2.9 мм. Сравним полученные результаты с аналитическим решением

$$p = \frac{2f}{\pi a^2} \sqrt{a^2} = 3090.194 \text{ Н/мм}^2,$$

где  $a = \sqrt{4fR(1 - \nu^2)/\pi E} = 3.09$  мм – длина зоны контакта.

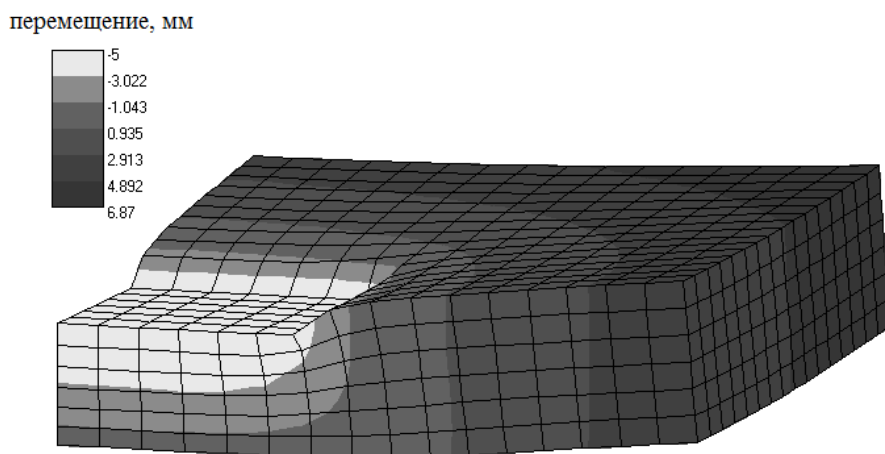


Рис. 4. Деформированное состояние упругой плиты

Далее приводится решение контактной задачи о вдавливании прямоугольного штампа с плоским основанием в упругую плиту, нижнее основание которого ограничено абсолютно жесткой плоскостью. Материал плиты имеет следующие механические параметры: модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^4$  Н/мм<sup>2</sup> и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.345$ . На рис. 4 представлено деформированное состояние с полем вертикальных перемещений.

### Заключение

В работе предложена методика численного исследования деформирования трехмерных тел при их контактном взаимодействии. Получено линейаризованное разрешающее уравнение, реализован алгоритм поиска зоны контакта, проведена численная реализация, основанная на методе конечных элементов. Решена задача задачи Герца о взаимодействии бесконечного цилиндра с плоскостями, дано сравнение с аналитическим решением, которое показало совпадение с приемлемой погрешностью.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160021.

### Литература

1. *Ворович И.И., Александров В.М.* Механика контактных взаимодействий. – М.: Физматлит, 2001. – 671 с.
2. *Johnson K. L.* Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. – 452 p.
3. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
4. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core // Russ. Math. – 2017. – V. 61, No 1. – P. 69–75. – doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
5. *Badriev I.B., Paimushin V.N.* Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38, No 5. – P. 779–793. – doi: 10.1134/S1995080217050055.



6. *Berezhnoi D.V., Shamim R.* Numerical investigation of clinch connection manufacturing process // *Procedia Eng.* – 2017. – V. 206. – P. 1056–1062. – doi: 10.1016/j.proeng.2017.10.594.
7. *Berezhnoi D.V., Shamim R., Balafendieva I.S.* Numerical modeling of mechanical behavior of clinch connections at breaking out and shearing // *MATEC Web Conf.* – 2017. – V. 129. – Art. 03023, P. 1–4. – doi: 10.1051/mateconf/201712903023.
8. *Bathe K.-J.* Finite element procedures in engineering analysis. – Prentice-Hall, 1996. – 735 p.
9. *Султанов Л.У.* Исследование конечных упругопластических деформаций: алгоритм решения, численные примеры // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 509–517.
10. *Bonnet J., Wood R.D.* Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. – 279 p.
11. *Wriggers P.* Nonlinear Finite Element Methods. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – XII, 560 p. – doi: 10.1007/978-3-540-71001-1.
12. *Оден Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
13. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. – McGraw-Hill, 1994. – 756 p.
14. *Davydov R.L., Sultanov L.U.* Numerical algorithm for investigating large elasto-plastic deformations // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 2015. – V. 88, No 5. – P. 1280–1288. – doi: 10.1007/s10891-015-1310-7.
15. *Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U.* Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids // *Mater. Phys. Mech.* – 2016. – V. 26, No 1. – P. 30–32.
16. *Давыдов Р.Л., Султанов Л.У.* Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика.* – 2013. – № 1. – С. 81–93. – doi: 10.15593/perm.mech/2013.1.81-93.
17. *Konyukhov A., Izi R.* Introduction to computational contact mechanics: a geometrical approach. – John Wiley & Sons Ltd, 2015. – 304 p.
18. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. – John Wiley & Sons Ltd, 2002. – 464 p.
19. *Laurson T.A.* Computational Contact and Impact Mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002 – XV, 454 p. – doi: 10.1007/978-3-662-04864-1.
20. *Puso M.A., Laurson T.A., Solberg J.* A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* – 2008. – V. 197, No 6–8. – P. 555–566. – doi: 10.1016/j.cma.2007.08.009.
21. *Yang B., Laurson T.A., Meng X.* Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 2005. – V. 62, No 9. – P. 1183–1225. – doi: 10.1002/nme.1222.

Поступила в редакцию  
06.02.18

---

**Абдрахманова Алиса Ильгамовна**, аспирант кафедры теоретической механики

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: A061093@mail.ru

**Султанов Ленар Усманович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: *Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

---

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 3, pp. 423–434

---

---

### Numerical Investigation of Nonlinear Deformations with Contact Interaction

*A.I. Abdrakhmanova\**, *L.U. Sultanov\*\**

*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*  
E-mail: *\*A061093@mail.ru, \*\*Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

Received February 6, 2018

#### Abstract

The paper is devoted to the development of a computational algorithm for investigation of finite deformations of solids with contact interaction. The algorithm is based on the master-slave approach. The projection of the slave point onto the master surface, which is given parametrically, has been considered. All necessary kinematic relations have been constructed. To identify the contact areas, the closest point projection algorithm has been applied. The frictionless contact interaction between the contacting surfaces has been considered. The penalty method has been used for regularization of the contact conditions. The principle of virtual work in terms of the virtual velocity equation in the actual configuration has been used. The variation formulation of the solution of the problem with the contact interaction has been given. The functional of contact interaction from an unknown rate of penetration of one body into another has been constructed. The elastic deformation potential function has been used to obtain the constitutive relations. The incremental method has been applied to solve the nonlinear problem. The resolving equation has been constructed as a result of the linearization of the equation of the principle of virtual work in actual configuration. The linearized relations have been obtained. The algorithm of solving the nonlinear problem has been developed. The finite element implementation of the algorithm has been presented. The spatial discretization has been constructed on the basis of an eight-node finite element and a five-node contact element implementing solutions of the variational contact problem. The results of solving the model problems have been presented.

**Keywords:** finite deformations, contact interaction, penalty method, closest point projection algorithm

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan as part of research project no. 18-41-160021.

### Figure Captions

Fig. 1. The projection of a slave point on the master surface.

Fig. 2. Hertz's problem.

Fig. 3. The normal vertical stresses in the near-contact zone.

Fig. 4. Deformed state of an elastic plate.

### References

1. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M. *Mekhanika kontaknykh vzaimodeistvii* [Contact Mechanics Interaction]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 671 p. (In Russian)
2. Johnson K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987. 452 p.
3. Landau L.D., Livshits E.M. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1987. 246 p. (In Russian)
4. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 69–75. doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
5. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 779–793. doi: 10.1134/S1995080217050055.
6. Bereznoi D.V., Shamim R. Numerical investigation of clinch connection manufacturing process. *Procedia Eng.*, 2017, vol. 206, pp. 1056–1062. doi: 10.1016/j.proeng.2017.10.594.
7. Bereznoi D.V., Shamim R., Balafendieva I.S. Numerical modeling of mechanical behavior of clinch connections at breaking out and shearing. *MATEC Web Conf.*, 2017, vol. 129, art. 03023, pp. 1–4. doi: 10.1051/mateconf/201712903023.
8. Bathe K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1996. 735 p.
9. Sultanov L.U. Analysis of large elastic-plastic deformations: Integration algorithm and numerical examples. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 509–517. (In Russian)
10. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997. 279 p.
11. Wriggers P. *Nonlinear Finite Element Methods*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2008. xii, 560 p. doi: 10.1007/978-3-540-71001-1.
12. Oden D. *Konechnye elementy v nelineinoi mekhanike sploshnykh sred* [Finite Elements in Nonlinear Mechanics of Continuous Media]. Moscow, Mir, 1976. 465 p. (in Russian)
13. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1994. 756 p.
14. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical algorithm for investigating large elasto-plastic deformations. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2015, vol. 88, no. 5, pp. 1280–1288. doi: 10.1007/s10891-015-1310-7.
15. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids. *Mater. Phys. Mech.*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 30–32.
16. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by FEM. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2013, no. 1, pp. 82–93. doi: 10.15593/perm.mech/2013.1.81-93.
17. Konyukhov A., Izi R. *Introduction to Computational Contact Mechanics: A Geometrical Approach*. John Wiley & Sons Ltd, 2015. 304 p.
18. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons Ltd, 2002. 464 p.

19. Laursen T.A. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2002. xv, 454 p. doi: 10.1007/978-3-662-04864-1.
20. Puso M.A., Laursen T.A., Solberg J. A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2008, vol. 197, nos. 6–8, pp. 555–566. doi: 10.1016/j.cma.2007.08.009.
21. Yang B., Laursen T.A., Meng X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2005, vol. 62, no. 9, pp. 1183–1225. doi: 10.1002/nme.1222.

---

⟨ **Для цитирования:** Абдрахманова А.И., Султанов Л.У. Численное исследование нелинейных деформаций с учетом контактного взаимодействия // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 423–434. ⟩

⟨ **For citation:** Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of nonlinear deformations with contact interaction. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 423–434. (In Russian) ⟩