УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.958:539.3

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

С.Н. Тимергалиев

Аннотация

Статья посвящена доказательству существования решений геометрически нелинейной краевой задачи для пологих оболочек типа Тимошенко, учитывающих деформации поперечных сдвигов. Уравнения равновесия приводятся к системе нелинейных сингулярных интегральных уравнений по плоской области, разрешимость которой устанавливается при помощи принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: краевая задача, пологие оболочки типа Тимошенко, уравнения равновесия, обобщенное решение, оператор, интегральные уравнения, принцип сжатых отображений.

Введение

Все теоремы существования, известные к настоящему времени в нелинейной теории пологих оболочек, получены в рамках модели Кирхгофа – Лява (см. [1–5] и цитированную в них литературу). Вопросы существования решений нелинейных задач в рамках других, более общих моделей до сих пор остаются открытыми, и они вошли в список нерешенных проблем математической теории оболочек [1, с. 349]. Настоящая статья посвящена исследованию разрешимости геометрически нелинейных, физически линейных краевых задач для пологих оболочек в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко, не опирающейся на гипотезы Кирхгофа – Лява.

1. Постановка задачи. Вывод уравнений равновесия

Рассматривается следующая модель теории пологих оболочек типа Тимошенко: I) соотношения деформации-перемещения [6, с. 168–170, 269]:

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{jj}^0 \equiv \gamma_{jj}^0 = w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3 + \omega_j^2/2, \quad j = 1,2,\\
&2\epsilon_{12}^0 \equiv \gamma_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3 + \omega_1\omega_2,\\
&\epsilon_{jj}^1 \equiv \gamma_{jj}^1 = \nu_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda \nu_\lambda, \quad j = 1,2,\\
&2\epsilon_{12}^1 \equiv \gamma_{12}^1 = \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \nu_\lambda,\\
&2\epsilon_{i3}^0 \equiv \gamma_{i3}^0 = \omega_i + \nu_i, \quad i = 1,2,\\
&\epsilon_{33}^0 \equiv \gamma_{33}^0 = \nu_1^2 + \nu_2^2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_j = w_{3\alpha^j}$; ϵ_{ij}^0 и ϵ_{ij}^1, $i,j = 1,2$, – компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0 оболочки; ϵ_{i3}^0, $i = 1,2$, – компоненты деформации поперечных сдвигов, ϵ_{33}^0 – деформация поперечного обжатия; ν_i, $i = 1,2$, – углы поворота нормальных сечений; w_i и w_3 – тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; B_{ij} – составляющие тензора кривизны S_0; G_{ij}^k – символы

Кристоффеля; α^1, α^2 – декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω с границей Γ, гомеоморфной S_0. В (1) и далее по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3, по греческим индексам – от 1 до 2;

II) определяющие соотношения:

$$\sigma^{ij} = B^{ijkn}\gamma_{kn}, \quad i \le j,\ k \le n,\ i,j = 1,2,3,$$

где $\gamma_{kn} = \gamma^0_{kn} + \alpha^3\gamma^1_{kn}$ $(\gamma^1_{k3} \equiv 0, k = 1,2,3)$, B^{ijkn} – упругие характеристики оболочки;

III) граничные условия:

$$w_i|_\Gamma = \nu_k|_\Gamma = 0, \quad i = 1,2,3, \quad k = 1,2; \tag{2}$$

IV) на оболочку действуют массовые $\overrightarrow{F}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ и поверхностные $\overrightarrow{F}^{\pm}(\alpha^1,\alpha^2)$ силы.

Соотношения (1) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma^k_{ij} = t^k_{ij} + \tau^k_{ij} + \chi^k_{ij} \equiv e^k_{ij} + \chi^k_{ij}, \quad i,j = 1,2,3, \quad k = 0,1, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
&t^0_{jj} = w_{j\alpha^j}(j=1,2), \quad t^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1},\\
&t^1_{jj} = \nu_{j\alpha^j}(j=1,2), \quad t^1_{12} = \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1}, \quad t^k_{i3} = 0 \quad (i=1,2,3,\ k=0,1);\\
&\tau^0_{jj} = -G^\lambda_{jj}w_\lambda - B_{jj}w_3(j=1,2), \quad \tau^0_{12} = -2G^\lambda_{12}w_\lambda - 2B_{12}w_3,\\
&\tau^1_{jj} = -G^\lambda_{jj}\nu_\lambda(j=1,2), \quad \tau^1_{12} = -2G^\lambda_{12}\nu_\lambda, \quad \tau^0_{i3} = \nu_i + w_{3\alpha^i}\ (i=1,2),\\
&\tau^0_{33} = \tau^1_{i3} \equiv 0\ (i=1,2,3); \quad \chi^0_{jj} = w^2_{3\alpha^j}/2(j=1,2), \quad \chi^0_{12} = w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2},\\
&\chi^0_{33} = \nu_1^2 + \nu_2^2, \quad \chi^0_{k3} = \chi^1_{ij} \equiv 0 \quad (k=1,2,\ i,j=1,2,3).
\end{aligned} \tag{4}$$

Через δU и δA обозначим вариации соответственно потенциальной энергии деформации и работы внешних приложенных к оболочке сил:

$$\delta U = \iint\limits_\Omega [D^{ijkn}_p\gamma^0_{ij}\delta\gamma^0_{kn} + D^{ijkn}_*(\gamma^0_{ij}\delta\gamma^1_{kn} + \gamma^1_{ij}\delta\gamma^0_{kn}) + D^{ijkn}_u\gamma^1_{ij}\delta\gamma^1_{kn}]\, d\Omega,$$

$$\delta A = \iint\limits_\Omega [R^j(\alpha^1,\alpha^2)\delta w_j + L^\lambda(\alpha^1,\alpha^2)\delta\nu_\lambda]\, d\Omega, \quad d\Omega = D\, d\alpha^1\, d\alpha^2,$$

где

$$D^{ijkn}_p = \int\limits_{-h}^{h} B^{ijkn}\, d\alpha^3, \quad D^{ijkn}_* = \int\limits_{-h}^{h} B^{ijkn}\alpha^3\, d\alpha^3, \quad D^{ijkn}_u = \int\limits_{-h}^{h} B^{ijkn}(\alpha^3)^2\, d\alpha^3,$$

$$R^j(\alpha^1,\alpha^2) = F^{+j}(\alpha^1,\alpha^2) + F^{-j}(\alpha^1,\alpha^2) + \int\limits_{-h}^{h} F^j(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)\, d\alpha^3, \quad j = 1,2,3,$$

$$L^i(\alpha^1,\alpha^2) = [F^{+i}(\alpha^1,\alpha^2) - F^{-i}(\alpha^1,\alpha^2)]h + \int\limits_{-h}^{h} F^i(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)\alpha^3\, d\alpha^3, \quad i = 1,2;$$

$2h = \mathrm{const}$ – толщина оболочки.

Для вывода уравнений равновесия оболочки используем вариационный принцип Лагранжа, в соответствии с которым

$$\delta U = \delta A. \tag{5}$$

При помощи традиционных рассуждений из вариационного соотношения (5) получим уравнения равновесия вида

$$\begin{aligned} &(DT^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + R^i = 0, \quad i = 1, 2, \\ &(DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + R^3 = 0, \\ &(DM^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT^{i3} - 2D\nu_i T^{33} + DG^i_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu} + L^i = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{6}$$

в которых усилия T^{ij} и моменты M^{ij} даются формулами

$$\begin{aligned} T^{ij} &= D_p^{ijkn}\gamma^0_{kn} + D_*^{ijkn}\gamma^1_{kn}, \\ M^{ij} &= D_*^{ijkn}\gamma^0_{kn} + D_u^{ijkn}\gamma^1_{kn}, \quad i, j = 1, 2, 3; \end{aligned} \tag{7}$$

символ $(DT^{i\lambda})_{\alpha^\lambda}$ означает дифференцирование по переменной α^λ, при этом по λ ведется суммирование.

Если в (6) вместо усилий и моментов подставить выражения из (7), а деформации γ^k_{ij} заменить с помощью (3), то придем к уравнениям равновесия в обобщенных перемещениях, которые представим в виде

$$\begin{aligned} &l_p^{ij}(w_j) + l_*^{i\lambda}(\nu_\lambda) + K_i(a) + G_i(a) + R^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ &l_*^{ij}(w_j) + l_u^{i\lambda}(\nu_\lambda) + K_{3+i}(a) + G_{3+i}(a) + L^i = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $l^{ij}_{p,*,u}$ – линейные формы относительно своих переменных:

$$l^{ij}_{p,*,u}(v_k) = D\left[D^{i11j}_{p,*,u}v_{k\alpha^1\alpha^1} + (D^{i21j}_{p,*,u} + D^{i12j}_{p,*,u})v_{k\alpha^1\alpha^2} + +D^{i22j}_{p,*,u}v_{k\alpha^2\alpha^2}\right],$$

$$D^{ijkn}_{p,*,u} \equiv D^{jikn}_{p,*,u} \equiv D^{knij}_{p,*,u},$$

$K_i(a)$ и $G_i(a)$ – линейные и нелинейные операторы:

$$K_i(a) = (DD_p^{i\lambda kn})_{\alpha^\lambda}e^0_{kn} + (DD_*^{i\delta\lambda\mu})_{\alpha^\delta}\gamma^1_{\lambda\mu} + DD_p^{i\lambda kn}(\tau^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + \\ + DD_*^{i\delta\lambda\mu}(\tau^1_{\lambda\mu})_{\alpha^\delta} + DG^i_{\lambda\mu}T_e^{\lambda\mu},$$

$$G_i(a) = (DD_p^{i\lambda kn}\chi^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu}T_\chi^{\lambda\mu}, \quad i = 1, 2,$$

$$K_3(a) = (DD_p^{\lambda 3kn})_{\alpha^\lambda}e^0_{kn} + DD_p^{\lambda 3kn}(\tau^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + (DD_*^{\lambda 3kn})_{\alpha^\lambda}\gamma^1_{kn} + \\ + DD_*^{\lambda 3kn}(\tau^1_{kn})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T_e^{\lambda\mu}, \tag{9}$$

$$G_3(a) = (DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} + (DD_p^{\lambda 3kn}\chi^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T_\chi^{\lambda\mu}$$

$$K_{3+i}(a) = (DD_*^{i\lambda kn})_{\alpha^\lambda}e^0_{kn} + (DD_u^{i\delta\lambda\mu})_{\alpha^\delta}\gamma^1_{\lambda\mu} + \\ + DD_*^{i\lambda kn}(\tau^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + DD_u^{i\delta\lambda\mu}(\tau^1_{\lambda\mu})_{\alpha^\delta} - DT_e^{i3} + DG^i_{\lambda\mu}M_e^{\lambda\mu},$$

$$G_{3+i}(a) = (DD_*^{i\lambda kn}\chi^0_{kn})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu}M_\chi^{\lambda\mu} - DT_\chi^{i3} - 2D\nu_i T^{33}, \quad i = 1, 2;$$

$T_e^{\lambda\mu}$, $M_e^{\lambda\mu}$ и $T_\chi^{\lambda\mu}$, $M_\chi^{\lambda\mu}$ – линейные и нелинейные части $T^{\lambda\mu}, M^{\lambda\mu}$ относительно перемещений; $a = (w_1, w_2, w_3, \nu_1, \nu_2)$ – вектор обобщенных перемещений.

Уравнения равновесия (8) представляют собой систему пяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно обобщенных перемещений. Таким образом, требуется найти решение системы (8), удовлетворяющее граничному условию (2).

2. Исследование разрешимости системы (8)

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) S_0 – кусочно-гладкая поверхность, склеенная из конечного числа поверхностей класса C^3;

2) упругие характеристики $D^{ijkn}_{p,*,u}$ имеют частные производные первого порядка по переменным α^1,α^2, ограниченные в $\overline{\Omega}$;

3)
$$\overrightarrow{F}\in L_p(\Omega)\times L_1[-h,h],\quad \overrightarrow{F}^{\pm}\in L_p(\Omega)\quad \forall p>2;$$

4) Ω – односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ класса C^1_β $(0<\beta<1)$;

5) $D\equiv D(\alpha^1,\alpha^2)>0$ в $\overline{\Omega}$.

Систему (8) будем исследовать в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p>2$. Назовем вектор $a=(w_1,w_2,w_3,\nu_1,\nu_2)$ обобщенных перемещений обобщенным решением задачи равновесия, если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p>2$, почти всюду в Ω удовлетворяет системе (8) и граничному условию (2). Заметим, что в силу теоремы вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ при $p>2$ обобщенное решение a принадлежит $C^1_\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha=(p-2)/p$.

Известно [7, с. 266–267], что функцию $a\in W_p^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющую граничному условию (2), можно представить в виде

$$a=\iint\limits_{\Omega} H(\zeta,z)\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta\equiv \widetilde{T}\rho,\quad \zeta=\xi+i\eta, \tag{10}$$

где $\rho=(\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4,\rho_5)$ – вещественная вектор-функция пространства $L_p(\Omega)$, $p>2$, $H(\zeta,z)$ – гармоническая функция Грина для области Ω. В дальнейшем, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что Ω – единичный круг: $|z|\le 1$, $z=\alpha^1+i\alpha^2$. Функция Грина для единичного круга имеет вид: $H(\zeta,z)=(1/\pi)\ln|(z-\zeta)/(1-z\bar{\zeta})|$.

Решение системы (8) будем искать в виде (10). Продифференцируем (10) по $z,\bar{z}$:

$$\begin{aligned} a_z&=\iint\limits_{\Omega} H_z(\zeta,z)\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right)\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta,\\ a_{\bar{z}}&=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}}-\frac{\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\right)\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta,\end{aligned} \tag{11}$$

где $a_{\bar{z}}=(a_{\alpha^1}+ia_{\alpha^2})/2, a_z=(a_{\alpha^1}-ia_{\alpha^2})/2$. Продолжая вектор-функцию $\rho(z)$ на всю плоскость C по закону $\rho_*(z)=\rho(z)$ при $|z|<1$ и $\rho_*(z)=-(1/|z|^4)\rho(1/\bar{z})$ при $|z|\ge 1$, соотношение (11) можно представить в виде

$$a_z=T\rho_*/4,\quad a_{\bar{z}}=\overline{T}\rho_*/4, \tag{12}$$
$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta,\quad \overline{T}f=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\,d\xi\,d\eta.$$

Известно [7, с. 39, 46], что Tf – вполне непрерывный оператор из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)(1\le q\le 2p/(2-p))$, если $1\le p\le 2$, и из $L_p(\Omega)$ в $C_{(p-2)/p}(\bar{\Omega})$, если $p>2$. Кроме того, существуют обобщенные производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial\bar{z}}=f,\quad \frac{\partial Tf}{\partial z}=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta\equiv Sf, \tag{13}$$

где Sf – линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p>1$ [7, с. 267], причем

$$\|Sf\|_{L_p(\Omega)} \le \Lambda_p \|f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{14}$$

Используя (13), соотношения (12) еще раз продифференцируем по z, $\bar z$:

$$a_{zz} = S\rho_*/4, \quad a_{\bar z\bar z} = \overline{S}\rho_*/4, \quad a_{z\bar z} = \rho_*/4, \tag{15}$$

где $\overline{S}f = -\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_C \dfrac{f(\zeta)}{(\bar\zeta - \bar z)^2}\,d\xi\,d\eta$.

Так как $a_{\alpha^k\alpha^k} = 2a_{z\bar z} + (-1)^{k-1}(a_{zz} + a_{\bar z\bar z})$ $(k=1,2)$, $a_{\alpha^1\alpha^2} = 2\mathrm{Im}\,a_{\bar z\bar z}$, то с учетом (15) почти всюду в Ω получим векторные соотношения

$$\begin{gathered} a_{\alpha^k\alpha^k} = \rho/2 + (-1)^{k-1}\mathrm{Re}\,S\rho_*/2 \quad (k=1,2), \quad a_{\alpha^1\alpha^2} = \mathrm{Im}\,\overline{S}\rho_*/2, \\ a_{\alpha^k} = \mathrm{Re}\,(i^{k-1}T\rho_*) \quad (k=1,2). \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь

$$a_{\alpha^i\alpha^j} = (w_{1\alpha^i\alpha^j}, w_{2\alpha^i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j}, \nu_{1\alpha^i\alpha^j}, \nu_{2\alpha^i\alpha^j}), \quad \rho_* = (\rho_{1*}, \rho_{2*}, \rho_{3*}, \rho_{4*}, \rho_{5*}).$$

Теперь выражения (10), (16) для обобщенных перемещений и их производных подставим в систему (8). После несложных преобразований получим систему нелинейных сингулярных интегральных уравнений по области Ω относительно вектор-функции ρ следующего вида:

$$a_{kj}\rho_j + P_k(\rho) + K_k(\rho) + G_k(\rho) \equiv f_k, \quad k = 1,2,\ldots,5, \tag{17}$$

где $P_k(\rho) = Re(b_{kj}S\rho_{j*})$ (здесь и в (17) суммирование по j ведется от 1 до 5),

$$K_k(\rho) \equiv K_k(\widetilde{T}\rho), \; G_k(\rho) \equiv G_k(\widetilde{T}\rho), \; f_k = -R^k \; (k=1,2,3), \; f_{3+k} = -L^k \; (k=1,2),$$

$$\begin{aligned} & a_{kj} = D(D_p^{k11j} + D_p^{k22j})/2 \equiv A_p^{kj}, \\ & b_{kj} = D[D_p^{k11j} - D_p^{k22j} + i(D_p^{k21j} + D_p^{k12j})]/2 \equiv B_p^{kj} \quad (j=1,2,3), \\ & a_{k,3+j} = A_*^{kj}, \quad b_{k,3+j} = B_*^{kj} \quad (j=1,2, \; k=1,2,3), \quad a_{3+k,j} = A_*^{kj}, \\ & b_{3+k,j} = B_*^{kj} (j=1,2,3), \quad a_{3+k,3+j} = A_u^{kj}, \quad b_{3+k,3+j} = B_u^{kj} \quad (k,j=1,2); \end{aligned} \tag{18}$$

A_*^{kj}, B_*^{kj} и A_u^{kj}, B_u^{kj} определяются по тем же формулам, что и A_p^{kj}, B_p^{kj}, с той лишь разницей, что вместо индекса “p” необходимо взять “$*$” и “u”.

При помощи матриц

$$\begin{gathered} A = (a_{ij})_{5\times 5}, \quad P(\rho) = (P_1,\ldots,P_5)^T, \quad K(\rho) = (K_1,\ldots,K_5)^T, \\ G(\rho) = (G_1,\ldots,G_5)^T, \quad f = (f_1,\ldots,f_5)^T \end{gathered}$$

(знак “T” сверху означает транспонирование) систему (17) представим в матричной форме

$$A\rho + P(\rho) + K(\rho) + G(\rho) = f, \quad \rho = (\rho_1,\ldots,\rho_5)^T. \tag{19}$$

Пусть в $\overline{\Omega}$ выполняется условие

$$\det A \neq 0. \tag{20}$$

Тогда (19) эквивалентно уравнению

$$\rho + \widetilde{P}(\rho) + \widetilde{K}(\rho) + \widetilde{G}(\rho) = \widetilde{f}, \tag{21}$$

где $\widetilde{P} = A^{-1}P = (\widetilde{P}_1,\ldots,\widetilde{P}_5)^T$, $\widetilde{K} = A^{-1}K = (\widetilde{K}_1,\ldots,\widetilde{K}_5)^T$, $\widetilde{G} = A^{-1}G = (\widetilde{G}_1,\ldots,\widetilde{G}_5)^T$, $\widetilde{f} = A^{-1}f = (\widetilde{f}_1,\ldots,\widetilde{f}_5)^T$, $A^{-1} = (\widetilde{a}_{ij})_{5\times 5}$ – обратная матрица.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 1)–5). *Тогда*

1) $\widetilde{P}_j(\rho)$ *и* $\widetilde{K}_j(\rho)$ *– линейные ограниченные и вполне непрерывные операторы в* $L_p(\Omega)$, $p > 2$ *соответственно, причем* $\|\widetilde{P}_j(\rho)\|_{L_p} \le \Lambda_p q_{jk} \|\rho_k\|_{L_p}$ *(по* k *суммирование от* 1 *до* 5*),* $\|\widetilde{K}_j(\rho)\|_{L_p} \le k_j \|\rho\|_{L_p}$ $(j = 1, \ldots, 5)$, $\|\rho\|_{L_p} = \|\rho_1\|_{L_p} + \ldots + \|\rho_5\|_{L_p}$, $\rho > 2$, $q_{jk} = \|\widetilde{a}_{jn} \mathrm{Re}\, b_{nk}\|_C + \|\widetilde{a}_{jn} \mathrm{Im}\, b_{nk}\|_C$ *(по* n *суммирование от* 1 *до* 5*);*

2) $\widetilde{G}_j(\rho)$ *– нелинейные ограниченные операторы в* $L_\rho(\Omega)$, $p > 2$, *причем для любых* ρ^1, $\rho^2 \in L_p(\Omega)$, $p > 2$, *принадлежащих шару* $\|\rho\|_{L_p} < r$, *справедливы оценки* $\|\widetilde{G}_j(\rho^1) - \widetilde{G}_j(\rho^2)\|_{L_p} \le g_j r(1 + r) \|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p}$, $p > 2$ $(j = 1, \ldots, 5)$; k_j, g_j *– известные положительные постоянные, зависящие от физико-геометрических характеристик оболочки и норм операторов* $\widetilde{T}\rho$, $T\rho$, $S\rho$.

Справедливость леммы устанавливается при помощи формул (9), (18) с учетом соотношений (14), (16), свойств операторов $\widetilde{T}f$, Tf, Sf, принадлежности искомого обобщенного решения задачи пространству $C^1_\alpha(\bar{\Omega})$, $\alpha = (p-2)/p$.

Используя лемму 1, для матричных операторов $\widetilde{P}(\rho)$, $\widetilde{K}(\rho)$, $\widetilde{G}(\rho)$ получим следующие оценки

$$\|\widetilde{P}(\rho)\|_{L_p} \le \Lambda_p q \|\rho\|_{L_p}, \quad \|\widetilde{K}(\rho)\|_{L_p} \le k \|\rho\|_{L_p}, \tag{22}$$

$$\|\widetilde{G}(\rho^1) - \widetilde{G}(\rho^2)\|_{L_p} \le g r(1+r) \|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p},$$

где $q = \max\,(q_{1j} + \ldots + q_{5j})$, $k = k_1 + \ldots + k_5$, $g = g_1 + \ldots + g_5$.

Предположим, что выполнено условие

$$q < 1. \tag{23}$$

Так как [7, с. 270] $\Lambda_p = \|S\|_{L_p}$ непрерывна по p и $\Lambda_2 = 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что выполняется неравенство $\Lambda_p q < 1$, если $2 < p \le 2 + \varepsilon$. Тогда линейный оператор $\widetilde{P}(\rho)$ будет сжимающим. Следовательно, существует обратный оператор $(I + \widetilde{P})^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$, применив который к уравнению (21), придем к эквивалентному уравнению

$$\rho + K_0(\rho) + G_0(\rho) = f_0, \tag{24}$$

где $K_0(\rho) = (I + \widetilde{P})^{-1} \widetilde{K}(\rho)$, $G_0(\rho) = (I + \widetilde{P})^{-1} \widetilde{G}(\rho)$, $f_0 = (I + \widetilde{P})^{-1} \widetilde{f}$, I – тождественный оператор. Заметим, что $K_0(\rho)$ – линейный вполне непрерывный, а $G_0(\rho)$ – нелинейный ограниченный операторы в $L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$.

Покажем, что уравнение

$$\rho + K_0(\rho) = 0 \tag{25}$$

имеет лишь тривиальное решение в $L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$. Пусть $\rho \in L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$, есть ненулевое решение уравнения (25). Этому решению ρ согласно формуле (10) соответствует вектор $a = (w_1, w_2, w_3, \nu_1, \nu_2)$ обобщенных перемещений, который удовлетворяет граничному условию (2) и является решением системы линейных однородных уравнений

$$l_p^{ij}(w_j) + l_*^{i\lambda}(\nu_\lambda) + K_i(a) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{26}$$

$$l_*^{ij}(w_j) + l_u^{i\lambda}(\nu_\lambda) + K_{3+i}(a) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Равенства в (26) умножим соответственно на w_1, w_2, w_3, ν_1, ν_2, после чего их сложим и проинтегрируем по области Ω. В результате получим интегральное равенство

$$\iint\limits_{\Omega} [T_e^{kn}(a) e_{kn}^0(a) + M_e^{kn}(a) e_{kn}^1(a)]\, d\Omega = 0,$$

левая часть которого есть удвоенное выражение потенциальной энергии линейной деформации. Поэтому $e_{ij}^k(a) = 0$ $(i, j = 1, 2, 3,\ k = 0, 1)$, или с учетом (3), (4) в развернутом виде:

$$\begin{gathered} w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3 = 0, \quad j = 1, 2, \\ w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3 = 0, \\ \nu_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda \nu_\lambda = 0, \quad j = 1, 2, \\ \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \nu_\lambda = 0, \\ \nu_j + w_{3\alpha^j} = 0, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{27}$$

В (27) из 4-го равенства вычтем 5-е и разность прибавим к 6-му, умноженному на мнимую единицу i. Полученное таким образом равенство при помощи комплексной функции $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ запишется в виде $\nu_{\bar{z}} + g_1 \nu + g_2 \bar{\nu} = 0$ $(g_1, g_2$ – известные функции, зависящие от $G_{kj}^n)$. Последнее соотношение означает, что $\nu(z)$ – обобщенная аналитическая функция в Ω, принадлежащая пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega}), \alpha = (p-2)/2$ и удовлетворяющая граничному условию $\nu|_\Gamma = 0$. В силу теоремы единственности для обобщенных аналитических функций [7, с. 123] имеем: $\nu(z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Тогда из последних двух равенств в (27) с учетом граничного условия (2) для w_3 получим, что $w_3 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. С помощью аналогичных рассуждений из первых трех равенств в (27) будем иметь $w_1 = w_2 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Таким образом, $a \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Если теперь принять во внимание (15), то получим $\rho \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$, то есть уравнение (25) имеет только нулевое решение в $L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$. Следовательно, существует обратный оператор $(I + K_0)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$, используя который, уравнение (24) запишем в эквивалентном виде:

$$\rho + G_*(\rho) = f_*, \tag{28}$$

где $G_*(\rho) = (I + K_0)^{-1} G_0(\rho)$, $f_* = (I + K_0)^{-1} f_0$.

Применяя оценки в (22), для любых $\rho^1, \rho^2 \in L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$, принадлежащих шару $\|\rho\|_{L_p} < r$, будем иметь:

$$\|G_*(\rho^1) - G_*(\rho^2)\|_{L_p} \le g_* \|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p},$$

где $g_* = g\|(I + K_0)^{-1}\|_{L_p} \|(I + \widetilde{P})^{-1}\|_{L_p} r(1 + r)$. Радиус r шара возьмем таким, чтобы имело место неравенство

$$g_* < 1. \tag{29}$$

Далее, предположим, что внешние силы, действующие на оболочку, удовлетворяют условию

$$\|f_*\|_{L_p} < (1 - g_*) r. \tag{30}$$

В этих условиях к уравнению (28) можно применить принцип сжатых отображений [8, с. 146], согласно которому уравнение (28) в шаре $\|\rho\|_{L_p} < r$ имеет единственное решение $\rho \in L_p(\Omega), 2 < p \le 2 + \varepsilon$. Зная ρ, по формуле (10) находим обобщенные перемещения w_j $(j = 1, 2, 3)$, ν_k $(k = 1, 2)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)–5), (20), (23), (29) *и* (30). *Тогда задача равновесия для пологих оболочек типа Тимошенко в некотором шаре пространства* $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$ *имеет единственное обобщенное решение* $a = (w_1, w_2, w_3, \nu_1, \nu_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$.

В заключение с целью иллюстрации условий (20), (23) разрешимости задачи равновесия рассмотрим случай изотропной однородной оболочки типа Тимошенко. Имеем

$$D_p^{1111}=D_p^{2222}=2hE/(1-\mu^2),\quad D_p^{1122}=2hE\mu/(1-\mu^2),\quad D_p^{1212}=hE/(1+\mu),$$
$$D_p^{1313}=D_p^{2323}=k^2Eh/(2(1+\mu)),\quad D_u^{1111}=D_u^{2222}=2h^3E/(3(1-\mu^2)),$$
$$D_u^{1122}=2h^3E\mu/(3(1-\mu^2)),\quad D_u^{1212}=h^3E/(3(1+\mu)),\quad D_*^{ijkn}=0\quad (i,j,k,n=1,2,3)$$

и остальные $D_{p,u}^{ijkn}$ также равны нулю. Здесь E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, k^2 – коэффициент сдвига.

По формулам (18) непосредственными вычислениями находим:

$$a_{11}=a_{22}=D(3-\mu)hE/(2(1-\mu^2)),\quad a_{33}=Dk^2Eh/(2(1+\mu)),$$
$$a_{44}=a_{55}=D(3-\mu)h^3E/(6(1-\mu^2)),$$

остальные коэффициенты a_{ij} равны нулю. Тогда условие (20) примет вид $3-\mu\neq 0$. Далее, из (18) получаем

$$b_{11}=DhE/(2(1-\mu)),\quad b_{12}=ib_{11}=b_{21},\quad b_{22}=-b_{11},$$
$$b_{44}=Dh^3E/(6(1-\mu)),\quad b_{45}=ib_{44}=b_{54},\quad b_{55}=-b_{44},$$

остальные коэффициенты $b_{ij}\equiv 0$.

Вычисляя обратную матрицу A^{-1} и подставляя ее элементы $\widetilde{a}_{ij}$ в выражения для q_{jk} (см. лемму 1), получаем

$$q_{11}=q_{12}=q_{21}=q_{22}=q_{44}=q_{45}=q_{54}=q_{55}=(1+\mu)/(3-\mu);$$

остальные $q_{ij}=0$. Тогда $q=2(1+\mu)/(3-\mu)$ и условие (23) принимает вид $2(1+\mu)/(3-\mu)<1$, которое выполняется при $\mu<1/3$.

Summary

S.N. Timergaliev. On Resolving Boundary Value Problems of Nonlinear Theory for Timoshenko Types Shallow Shells.

The article is devoted to proving the existence of solutions of geometrically nonlinear boundary value problem for Timoshenko type shallow shells which take into account the deformations of cross displacements. Equilibrium equations are reduced to a system of nonlinear singular integral equations on flat region, the resolution of which is established with the help of compressed reflections principle.

Key words: boundary value problem, Timoshenko type shallow shells, equilibrium equations, generalized solution, operator, integral equations, compressed reflections principle.

Литература

1. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М.: Наука, 1989. – 376 с.
2. *Ворович И.И., Лебедев Л.П.* Некоторые вопросы механики сплошной среды и математические проблемы теории тонкостенных конструкций // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 3–20.
3. *Карчевский М.М.* Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и их сеточные аппроксимации // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 10. – С. 17–30.

4. *Карчевский М.М.* О разрешимости вариационных задач нелинейной теории пологих оболочек // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 7. – С. 1196–1203.

5. *Тимергалиев С.Н.* Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 2003. – 340 с.

6. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.

7. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

8. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

Поступила в редакцию
22.11.07

Тимергалиев Самат Низаметдинович – доктор физико-математических наук, проректор по научной работе Камской государственной инженерно-экономической академии, г. Набережные Челны.

E-mail: *samat_tim@mail.ru*