УДК 517.54

БИФУРКАЦИИ И НОВЫЕ УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.В. Казанцев

Аннотация

Определены типы бифуркаций нулей градиента гиперболической производной голоморфной функции в единичном круге, вложенной в семейство ее «линий уровня». Установленный характер зависимости движения нулей от кривизны гиперболической производной позволяет расширить возможности теоремы Пуанкаре – Хопфа для построения класса новых условий единственности нуля в форме неотрицательности функционалов типа кривизны. Данный класс содержит однопараметрическую серию неравенств Эпштейна, получаемых из условия линейной выпуклости по Бенке – Пешлю областей Хартогса специального вида. При этом возникает своеобразный эффект жесткости: указанные неравенства содержательны только на конечном отрезке параметров.

Ключевые слова: гиперболическая производная, конформный радиус, бифуркации критических точек, линейная инвариантность, линейная выпуклость по Бенке – Пешлю.

Введение

Согласно теореме Римана нормированное конформное отображение F гиперболической области $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ на круг E_R порождает некоторую поверхность (в $\mathbb{R}^3$) над D [1, с. 32]. Эта поверхность, $R = R_D(z)$, характеризуется тем, что каждая ее линия уровня представляет радиус R «мишени» E_R, центром которой является F-образ текущей точки указанной линии. Величина $R_D(z)$ называется (внутренним) *конформным радиусом* области D в точке z [2, с. 26].

С помощью биголоморфизма $f : \mathbb{D} \to D$ ситуация переносится в пространство над единичным кругом $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, так что конформный радиус в точке $f(\omega)$ оказывается равным значению функции

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\big|f'(\zeta)\big| \qquad (1)$$

в точке $\zeta = \omega \in \mathbb{D}$ [2, с. 28], [3]). Для заданной области D выбор такого f единствен с точностью до автоморфизмов $\mathbb{D}$, поэтому в (1) содержится полная информация о конформном радиусе области D.

Исследование величины (1) с *произвольными* голоморфными в $\mathbb{D}$ функциями f выводит на первый план изучение соответствий $f \mapsto h_f$, сменяющих соответствия $D \mapsto R_D$ для различных классов областей при первоначальной D-постановке. В рамках такого f-подхода величина (1) приобрела название *гиперболической производной*, или *производной Блоха*, функции f (см., например, [4, 5]). Как известно, экстремумы (1) «формализуют препятствия» при исследовании корректности ряда задач математической физики и теории функций (см. [6] и библиографию в [7]). Различие (обычно отождествляемых посредством $z = f(\zeta)$) представлений $R = R_D(z)$ и $h = h_f(\zeta)$ становится существенным при «пересчете на» $\zeta \in \mathbb{D}$ выражений для их гауссовых кривизн, неотрицательность которых приводит к условиям [8]

$$\big|\{f, \zeta\}\big| \le \big|-2/(1 - |\zeta|^2)^2 + (1/2)|(f''/f')(\zeta) - 2\overline{\zeta}/(1 - |\zeta|^2)|^2\big|, \ \zeta \in \mathbb{D}, \qquad (2)$$

где $\{f,\zeta\} = (f''/f')'(\zeta) - (f''/f')^2(\zeta)/2$ – производная Шварца функции f в точке ζ, и $|\{f,\zeta\} + 2(\ln h_f(\zeta))_\zeta (f''/f')(\zeta)| \le | - 2/(1-|\zeta|^2)^2 + 2|(\ln h_f(\zeta))_\zeta|^2|$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Аналогичный «пересчет» для логарифмов $\ln R$ и $\ln h$ дает неравенства

$$\bigl|\{f,\zeta\} - (1/2)((f''/f')(\zeta) - 2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2))^2\bigr| \le 2/(1-|\zeta|^2)^2,\ \zeta \in \mathbb{D}, \tag{3}$$

и $|(f''/f')'(\zeta) - 2\overline{\zeta}^2/(1-|\zeta|^2)^2| \le 2/(1-|\zeta|^2)^2$, $\zeta \in \mathbb{D}$.

Общий подход к построению подобных условий был намечен М.И. Киндером в [9] в связи с проблемой единственности критической точки функции (1) (см. разд. 1); в работе [8] полностью исследован случай (2). В настоящей статье в рамках указанной проблемы исследуются условия вида

$$J(f,\zeta) \ge 0,\ \zeta \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

для голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f при $J = G_\alpha$, I_β и K_γ, где

$$\begin{aligned} G_\alpha(f,\zeta) + \bigl|\{f,\zeta\} + (3/2-\alpha)[(f''/f')^2(\zeta) - 4\overline{\zeta}^2/(1-|\zeta|^2)^2]\bigr| &= \\ = I_\beta(f,\zeta) + \bigl|\{f,\zeta\} + 2(2\beta-1)(\ln h_f(\zeta))_\zeta^2\bigr| &= \\ = K_\gamma(f,\zeta) + \bigl|(f''/f')'(\zeta) - \gamma\overline{\zeta}^2/(1-|\zeta|^2)^2\bigr| &= 2/(1-|\zeta|^2)^2. \end{aligned}$$

Выбор H – класса голоморфных в $\mathbb{D}$ функций – в качестве области определения для функционалов J обусловлен, в частности, тем, что (в отличие, например, от (2)) условие (4) заведомо не выполняется для мероморфных функций в $\mathbb{D}$, когда J совпадает с одним из функционалов G_α (при $\alpha \ne 3/2$), I_β (с $\beta \ne 1/2$) или K_γ. Случай $J = G_{3/2} = I_{1/2}$ приводит к известному неравенству Нехари

$$\bigl|\{f,\zeta\}\bigr| \le 2/(1-|\zeta|^2)^2, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{5}$$

обеспечивающему единственность критической точки (1) и для мероморфных f (такой точкой оказывается полюс f). Чтобы установить единственность для голоморфных f из (5), был предложен ряд методов в [5, 10–13]. Отметим два из них: использованный в [10] и развитый в [11] метод радиальной суперпозиции, а также метод бифуркаций параметрических семейств [13, 14], связанный со сконструированным в [15, 16] вариантом теоремы Пуанкаре – Хопфа для векторного поля ∇h_f. В настоящей статье оба указанных метода «сравниваются на доказательстве» (не более чем) единственности критической точки (1) для функций $f \in H$, удовлетворяющих неравенству $I_\beta(f,\zeta) \ge 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$, которое возникает как условие слабой линейной выпуклости областей Хартогса специального вида в $\mathbb{C}^2$ и является разновидностью условия Эпштейна [17] (см. разд. 3). Применение метода бифуркаций упрощается за счет обобщения упомянутой версии теоремы Пуанкаре – Хопфа (теорема 1).

Сопутствующей темой является корректность условия (4) при $f \in H$. Пусть $H_0 = \{f \in H : f'(\zeta) \ne 0,\ \zeta \in \mathbb{D}\}$ – класс голоморфных локально однолистных функций в $\mathbb{D}$. Легко проверить, что при $J = G_\alpha$, I_β или K_γ выполнение (4) для голоморфной в $\mathbb{D}$ функции f, отличной от тождественной постоянной, влечет за собой $f \in H_0$. Таким образом, если специально не оговаривается противное, все рассматриваемые далее в статье функции предполагаются локально однолистными в $\mathbb{D}$. Важным аспектом корректности является и вопрос о содержательности условий вида (4). Решение этого вопроса оказывается существенно связанным с применением (в духе [18]) классической теоремы Плеснера; тем не менее удобно использовать следующее определение.

Функционал $J : H_0 \times \mathbb{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (f, \zeta, \omega) \mapsto J_\omega(f, \zeta)$, порождающий семейство классов $\mathcal{J}_\omega = \{f \in H_0 : J_\omega(f, \zeta) \geq 0,\ \zeta \in \mathbb{D}\}$, назовем *жестким по параметру* ω, или просто *жестким*, если множество $\Omega = \Omega(J) = \{\omega \in \mathbb{R} : \mathcal{J}_\omega \neq \emptyset\}$, которое будет называться *носителем* функционала J, представляет собой отрезок в $\mathbb{R}$.

Решающую роль, которую функционал Нехари

$$G_{3/2}(f, \zeta) = I_{1/2}(f, \zeta) = 2/(1 - |\zeta|^2)^2 - \big|\{f, \zeta\}\big|$$

и связанное с ним неравенство (5) сыграли в свое время в постановке задачи построения функционалов J со свойством «$J \geq 0 \Rightarrow$ единственный экстремум (1)», может прояснить, например, следующее наблюдение. На элементах

$$M_f = \{a \in \mathbb{D} : (\partial h_f / \partial \zeta)(a) = 0\}$$

– множеств критических точек (1) при $f \in H_0$ – функционал Нехари совпадает как с функционалами G_α, I_β и K_γ (независимо от значений параметров), так и с функционалами, порождающими неравенства (2), (3) и их аналоги. Эффективность отмеченной постановки связана с расширением набора ситуаций, подтверждающих справедливость следующей «метатеоремы», которая уже на этапе работы над [11] и [9] превратилась из рядового предположения в руководящую гипотезу ([19]):

Гипотеза М.И. Киндера. *Пусть* $J : H_0 \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *– функционал со свойством*

$$\operatorname{sgn} J(f, a) = \operatorname{sgn} I_{1/2}(f, a),\ a \in M_f,\ f \in H_0, \tag{6}$$

и пусть класс $\mathcal{J} = \{f \in H_0 : J(f, \zeta) \geq 0,\ \zeta \in \mathbb{D}\}$ *непуст. Тогда если* $f \in \mathcal{J}$ *и* $k_f < \infty$, *то* $k_f \leq 1$.

Здесь $k_f = \# M_f$ – количество элементов M_f. Случай $k_f = \infty$ может возникать только в двух ситуациях: при наличии в M_f аналитических дуг (с концами на $\partial\mathbb{D}$ при $f \in H_0$) [20] и когда M_f дискретно и имеет предельные точки на $\partial\mathbb{D}$ [21].

1. Проверка гипотезы

Особое место функционала $I_{1/2}$ в рассматриваемой постановке основано на том, что на элементах M_f он, как и функционал K_2, является знакоопределяющим сомножителем в выражении для кривизны $K_f(\zeta)$ функции $\ln h_f(\zeta)$:

$$K_f(a) = \big[2/(1 - |a|^2)^2 + \big|\{f, a\}\big|\big] I_{1/2}(f, a),\ a \in M_f. \tag{7}$$

Отметим также соотношение $K_f(\zeta) = [1 + |F|^2]^{-2} J_f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, где $J_f(\zeta) = (|F_\zeta| + |F_{\overline{\zeta}}|) K_2(f, \zeta)$ – якобиан векторного поля $\nabla \ln h_f(\zeta) \simeq \overline{F} = 2(\ln h_f)_{\overline{\zeta}}$, а $F = F(\zeta, \overline{\zeta}) = f''(\zeta)/f'(\zeta) - 2\overline{\zeta}/(1 - \zeta\overline{\zeta})$ – *отображение Гахова* с множеством нулей M_f [6].

Более тонкой характеристикой поверхности $h = h_f(\zeta)$ в окрестности изолированных элементов M_f является индекс

$$\gamma_f(a) = -(2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\zeta - a| = \rho} d \ln (h_f)_{\overline{\zeta}}$$

точки $a \in M_f$, особой для векторного поля $\nabla h_f(\zeta)$; $M_f \bigcap \{|\zeta - a| \leq \rho\} = \{a\}$. Известно [15, 16], что $\gamma_f(M_f) \subset \{\pm 1, 0\}$. Обозначая $m_f^\varepsilon = \#\{a \in M_f : \gamma_f(a) = \varepsilon 1\}$, получим $k_f = m_f^+ + m_f^0 + m_f^-$. Объединенная классификация изолированных элементов M_f ($f \in H_0$) выглядит следующим образом (см., например, [13]).

Предложение 1. *На дискретной части* M_f *имеем* $\gamma_f(\operatorname{sgn} K_f = \pm 1) = \operatorname{sgn} K_f$, $\gamma_f(\operatorname{sgn} K_f = 0) \subseteq \{-1, 0+1\}$, *причем* $\operatorname{sgn} K_{f\circ\phi}(a) = \operatorname{sgn} K_f(\phi(a))$ *и* $\gamma_{f\circ\phi}(a) = \gamma_f(\phi(a))$, $a \in M_f$, ϕ *– автоморфизм* $\mathbb{D}$. *Поверхность* $h = h_f(\zeta)$ *над элементами* $M_f \ni a \simeq (\operatorname{sgn} K_f(a), \gamma_f(a))$ *допускает следующее строение:* $(+1,+1)$ *– эллиптический максимум* (*омбилика при* $\{f, 0\} = 0$); $(0,+1)$ *– параболический максимум;* $(0,0)$ *– параболическое полуседло;* $(0,-1)$ *– параболическое седло;* $(-1,-1)$ *– гиперболическое седло. Все варианты реализуемы.*

Отправной точкой для исследования сформулированной гипотезы можно считать следующую версию [15, 16] классической теоремы Пуанкаре–Хопфа ([22, с. 223]), в которой $\mathcal{B}_0 = \{f \in H : \lim_{\zeta \to \partial\mathbb{D}} h_f(\zeta) = 0\}$ – малый класс Блоха.

Предложение 2. *Если* $f \in \mathcal{B}_0 \bigcap H_0$, $k_f < \infty$, *то* $\displaystyle\sum_{a \in M_f} \gamma_f(a) = m_f^+ - m_f^- = 1$.

Замечание 1. Как показывает пример функции $f \in \mathcal{B}_0 \bigcap H_0$ со счетным M_f, построенный в [21], второе условие $k_f < \infty$ в приведенном утверждении не может быть снято за счет первого.

Для подтверждения гипотезы в частном случае в работе [9] был введен класс $\mathcal{F}$ функций $f \in H$, восстанавливаемых из представлений $\ln f'(\zeta) = (1/2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} p(\theta)(e^{i\theta} + \zeta)/(e^{i\theta} - \zeta)\, d\theta$ с $p \in C[0, 2\pi]$. Справедливо

Предложение 3. *Пусть* $J : H_0 \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *– функционал со свойством* (6) *и пусть функция* $f \in \mathcal{F}$ *удовлетворяет строгому неравенству* (4), *то есть*

$$J(f, \zeta) > 0, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{8}$$

Тогда $k_f = 1$.

Включение $f \in \mathcal{F}$ обеспечивает одновременное выполнение обоих условий предложения 2, применение которого с учетом (6) (а также (7) и предложения 1) и доказывает предложение 3: $m_f^- = m_f^0 = 0$ и $k_f = m_f^+ = 1$.

В качестве иллюстрации приведенного утверждения в работе [9] предложены строгие версии следующих неравенств при $\zeta \in \mathbb{D}$:

А) $G_0(f, \zeta) \geq 0$;

Б) $L_{3/2}(f, \zeta) \geq 0$, где $L_\delta(f, \zeta) = 1/(1 - |\zeta|^2) - |\zeta|\big|(f'/f'')(\zeta)\{f, \zeta\} + 2\delta(\ln h_f(\zeta))_\zeta\big|$;

В) $|\zeta|\big|(f'''/f'')(\zeta) - 3/2(f''/f')(\zeta)\big| \leq 1/(1 - |\zeta|^2)$;

Г) $|\zeta|^2\big|2(f'/f'')'(\zeta) + 1\big| \leq 1$.

Справедливо

Предложение 4. *Функционалы* $G : (f, \zeta, \alpha) \mapsto G_\alpha(f, \zeta)$ *и* $L : (f, \zeta, \delta) \mapsto L_\delta(f, \zeta)$ *являются жесткими по своим параметрам с носителями* $|2\alpha - 3| \leq 1$ *и* $|\delta| \leq 1/2$ *соответственно. В частности, неравенства* А) *и* Б) *не являются содержательными* (*в классе* H).

Доказательство. Согласно классической теореме Плеснера [23] найдутся точка на $\partial\mathbb{D}$ и сходящаяся к ней последовательность элементов $\mathbb{D}$ такие, что соответствующая последовательность значений голоморфной функции $(f''/f')' + (1 - \alpha)(f''/f')^2$ имеет *конечный* предел. Осуществляя указанный предельный переход в неравенстве $(1 - |\zeta|^2)^2 G_\alpha(f, \zeta) \geq 0$ $(\zeta \in \mathbb{D})$, получим, что $|2\alpha - 3| \leq 1$. Жесткость функционала L устанавливается аналогично. □

Функционалы, соответствующие В) и Г), определены на $H \setminus \{a\zeta + b : a, b \in \mathbb{C}\}$, условие $f \in H_0$ следует из В) автоматически, а для Г) налагается дополнительно; при этом в обоих случаях $\zeta = 0$ не может быть омбиликой. Выполнение условий В) и Г) очевидно, например, для дробно-линейных f (оба неравенства – строгие), а также для функций вида $f(\zeta) = a + bf_s(\varepsilon\zeta)$, где $f_s(\zeta) = (1/2)\ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$ ($f(\mathbb{D})$ – полоса), a, $b \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$: в В) равенство достигается на диаметре $\mathbb{D}$, а в Г) – всюду в $\mathbb{D}$. Если $0 \in M_f$, то строгая оценка В) может выполняться только при $0 < |\zeta| < 1$: в точке $\zeta = 0$ левая часть В) равна $\big|\{f,\zeta\}\big|/\big|(f''(\zeta)/f'(\zeta))/\zeta\big|_{\zeta=0} = 1$.

При $f''(0) \neq 0$ случай Г) упрощается за счет применения леммы Шварца к неравенству $|\zeta^2 u'(\zeta)/u^2(\zeta)| \leq 1$, $\zeta \in \mathbb{D}$, эквивалентному Г) с учетом

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2u(\zeta)/(1 - \zeta u(\zeta)). \tag{9}$$

Оценка Г) оказывается строгой; частные случаи $u'/u^2 \equiv -1$, $u'/u^2 \equiv 1$ и $u'/u^2 \equiv 0$ включают соответственно примеры $f(\zeta) = e^{\tau\zeta} \in \mathcal{F}$ ($\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) с $k_f = 1$,

$$f(\zeta) = \ln(1/(1-\zeta)) \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0 \ \text{ и } \ f(\zeta) = 1/(1-\zeta) \notin \mathcal{B}, \tag{10}$$

где $\mathcal{B} = \{f \in H : \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} h_f(\zeta) < \infty\}$ – класс Блоха. В двух последних случаях $k_f = 0$. Таким образом, строгость Г) сама по себе еще не обеспечивает наличия критических точек функции (1) в $\mathbb{D}$.

При $f''(0) = 0$ возникает новый эффект – «существенная» неэллиптичность точки $0 \in M_f$: условие $|\{f, 0\}| \geq 2$ – это Г) при $\zeta = 0$. Параболический случай $|\{f, 0\}| = 2$ исчерпывается некоторым явно выписываемым семейством вне $\mathcal{F}$, содержащим f_s. Пример функции $f \in \mathcal{F}$ с $0 \in M_f$ и строгой оценкой Г) получается из (9) при $1/u(\zeta) = 1/(\alpha\zeta) + \phi(\zeta)$, где $\alpha > 2$, $\phi'(\zeta) = (1 - 1/\alpha^2)(1 - \zeta^2/\alpha)^{-1}$ и $\phi(0) = 0$. Здесь

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\alpha\zeta/(\varphi(\zeta) + \psi(\zeta))$$

с

$$\varphi(\zeta) = 1 - \zeta^2/\alpha, \quad \psi(\zeta) = (1 - 1/\alpha^2)\zeta \int_0^\zeta t^2(1 - t^2/\alpha)^{-1}\, dt.$$

Легко проверить, что $\big|\varphi\big|_{\partial\mathbb{D}} \geq 1 - 1/\alpha > (1 + 1/\alpha)/3 \geq \big|\psi\big|_{\partial\mathbb{D}}$ при $\alpha > 2$, отсутствие полюсов f''/f' в $\overline{\mathbb{D}}$ устанавливается теперь на основе теоремы Руше.

Как резюме получается такое уточнение следствия теоремы 5 из [9].

Предложение 5. *При $f \in \mathcal{F}$ строгая оценка* В) *дает $0 \notin M_f$ и $k_f = 1$; строгая оценка* Г) *– $k_f = 3$, если $0 \in M_f$, $k_f = 1$, если $0 \notin M_f$.*

Доказательство. В обоих случаях условие $0 \notin M_f$ позволяет сразу воспользоваться предложением 3. Пусть теперь для $f \in \mathcal{F}$ справедлива строгая оценка Г) и $0 \in M_f$. Как отмечалось выше, в этом случае $|\{f, 0\}| > 2$, то есть $K_f(0) < 0$. В силу предложения 1 $\gamma_f(0) = -1$. Имеем $m_f^- = 1$ и $m_f^0 = 0$, так как при $a \in M_f \setminus \{0\}$ строгое неравенство Г) есть в точности строгое неравенство (5), то есть $K_f(a) > 0$, значит, $\gamma_f(a) = +1$. Предложение 2 дает $m_f^+ = m_f^- + 1 = 2$ и $k_f = m_f^+ + m_f^- = 3$. □

Замечание 2. Замена (9) позволила С.Р. Насырову упростить обоснование (5) в классе S^0 нормированных выпуклых функций в $\mathbb{D}$ (см. [11, 24]), а Ф.Г. Авхадиеву, обнаружившему данное свойство S^0 [25], – полностью описать класс функций с условием (2) [8].

2. Обобщение теоремы Пуанкаре – Хопфа

В монографии [26, с. 117] приведен следующий вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа для единичного круга:

Лемма 1. *Пусть векторное поле, непрерывное в $\overline{\mathbb{D}}$ и непрерывно дифференцируемое в $\mathbb{D}$, направлено наружу $\mathbb{D}$ во всех точках $\partial\mathbb{D}$ и исчезает на множестве $M \subset \mathbb{D}$. Тогда если якобиан поля положителен на M, то M одноточечно.*

Для исследуемого в настоящей статье векторного поля $\nabla \ln h_f$ с $f \in H_0$ лемму 1 можно усилить, снимая граничные условия. А именно справедливо такое обобщение Предложения 3:

Теорема 1. *Если $f \in H_0$, M_f непусто и $\gamma_f(M_f) = +1$, то $k_f = 1$.*

Нам понадобится следующий результат [13] о бифуркациях элементов множеств $M_r := M_{f_r}$ для семейства $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$ «линий уровня» функции $f \in H_0$, в котором каждая f_r определена при $|\zeta| < 1/r$, $r \in (0, +\infty)$. Обозначим $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_f = \bigcup_{r \,\in\, (0,+\infty)} M_r \times \{r\}$, $K_r = K_{f_r}$, $\gamma_r = \gamma_{f_r}$ и $g(\zeta) = \zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)$, $g_r(\zeta) = g(r\zeta)$.

Лемма 2. *Пусть $f \in H_0$ и α – изолированный элемент M_ρ, $0 < \rho \le 1$, имеющий кратность k в качестве нуля функции $g_\rho(\zeta) - g_\rho(\alpha)$.*

1) *Если $\alpha \ne 0$ либо $\alpha = 0$ и $K_\rho(\alpha) = 0$, то слоение $\mathfrak{R}$ вблизи точки (α, ρ) состоит из k ($k = 2$ при $\alpha = 0$) аналитических кривых, пересекающихся в этой точке. Кроме того, индекс $\gamma : (a, r) \mapsto \gamma_r(a)$ не исчезает на $\mathfrak{R} \setminus \{(\alpha, \rho)\}$ вблизи (α, ρ), а величина $k_r = \#\{M_r \bigcap$(достаточно малая окрестность $\alpha)\}$ равна k для всех $r \ne \rho$, близких к ρ, либо имеет скачок, равный 2, в ρ.*

2) *Соотношение $K_\rho(\alpha) \ne 0$ устойчиво относительно «возмущений» f_r функции f_ρ при r, близких к ρ: $K_r(a_r) \ne 0$, где a_r – (единственный) элемент M_r такой, что $a_\rho = \alpha$ ($a_r = 0$ при $\alpha = 0$). Если $\alpha \ne 0$, то с возрастанием r вблизи ρ модуль $|a_r|$ возрастает при $K_\rho(a_\rho) > 0$ либо убывает при $K_\rho(a_\rho) < 0$.*

3) *Пусть $K_\rho(\alpha) = 0$. При $k = 1$ (кроме «устойчивой» ситуации $k_r = 1$ для r, близких к ρ, при $|\gamma_\rho(\alpha)| = 1$) возможны «рождение» или «аннигиляция» одного максимума и одного седла в (α, ρ) при $\gamma_\rho(\alpha) = 0$. Если $\alpha = 0$, то $0 \in M_f$ для всех $r \in (0, +\infty)$ с $\gamma_r(0) = \operatorname{sgn}(\rho - r)$, $r \ne \rho$, и $k_r = 2 + \gamma_\rho(\alpha)\operatorname{sgn}(r - \rho)$ для $r \ne \rho$ вблизи ρ.*

«Рождение» стилизуется далее значком $\cup$, символ Ψ используется, когда максимум (при $r \le \rho$) распадается на два максимума и седло (при $r > \rho$). Определим $\mathfrak{R}(I) = \bigcup_{r \,\in\, I} M_r \times \{r\}$, где $I \subseteq (0, 1]$, и функционал $\overline{r} = \overline{r}_f = \sup\,\{\xi \in (0, 1] : r \in (0, \xi] \implies k_{f_r} = 1\}$ первого выхода из множества $\mathcal{H} = \{h \in H_0 : k_h = 1\}$ по «линиям уровня» функции f. Величина $\overline{r}$ отделена от нуля радиусом выпуклости функции f, поэтому $\overline{r} > 0$.

Пусть $R = \{r \in (0, 1) : 0 \in K_r(M_r)\}$. С помощью леммы 2 легко показать, что множество R не более чем счетно и может иметь не более одной предельной точки ($r = 1$). Далее, $\mathfrak{R}(0, \overline{r})$ – простая C^ω-кривая, допускающая параметризацию $(a(r), r)$, $r \in (0, \overline{r})$, в которой $\zeta = a(r)$ – непрерывная функция с $\lim_{r \,\to\, 0+} a(r) = 0$, $\gamma_r(a(r)) = +1$ и (кусочно при $(0, \overline{r}) \bigcap R \ne \emptyset$) вещественно аналитическими модулем и аргументом. При этом $a(r) \equiv 0$ либо $|a(r)|$ возрастает по параметру r.

Если $\overline{r} < 1$, то $M_{\overline{r}}$ состоит из точки $a(\overline{r}) = \lim_{r \,\to\, \overline{r}-} a(r)$ с $\gamma_{\overline{r}}(a(\overline{r})) = +1$ и не более чем конечного числа точек нулевого индекса. Последние, если существуют, дают бифуркации типа $\cup$. Точка $a(\overline{r})$ может порождать бифуркацию только типа Ψ (необходимо, если $M_{\overline{r}} = \{a(\overline{r})\}$). В случае $f''(0) = 0$ дополнительно определим для $\rho \ge \overline{r}$ множество $\mathfrak{R}'_\rho = \mathfrak{R}[\overline{r}, \rho] \setminus (\{0\} \times [\overline{r}, \rho])$ и величину $\mu_\rho = \inf\limits_{(a,r) \in \mathfrak{R}'_\rho} |a|$.

Лемма 3. *Пусть* $f \in H_0$, $0 \in M_f$, $\gamma_f(0) = +1$ *и* $\overline{r} < 1$. *Тогда функция* $\mu : \rho \mapsto \mu_\rho$ *непрерывна справа и убывает на* $[\overline{r}, 1]$. *Если* a_ρ *– элемент* M_ρ *с* $|a_\rho| = \mu_\rho$, $\overline{r} \le \rho \le 1$, *то* $\gamma_\rho(a_\rho) = -1$ *при* $\rho \notin R$ *и* $\gamma_\rho(a_\rho) \ne +1$ *при* $\rho \in R$.

Доказательство. Непустоту $\mathfrak{R}'_\rho$, $\rho \in [\overline{r}, 1]$, достаточно проверить при $\rho = \overline{r}$. Согласно лемме 2 ($\alpha = 0$) из условий $\gamma_f(0) = +1$ и $\overline{r} < 1$ следует, что в $M_{\overline{r}} \times \{\overline{r}\}$ есть точки типа $\cup$, то есть $M_{\overline{r}} \setminus \{0\} \ne \emptyset$. Значит, μ определена корректно и $0 \le \mu_\rho < 1$, $\rho \in [\overline{r}, 1]$. Равенство $\mu_\rho = 0$ означало бы, что $\mathfrak{R}'_\rho$ имеет предельную точку на $\{0\} \times [\overline{r}, 1]$. По лемме 2 ею могла бы быть только $(0, 1)$, что невозможно ввиду $\gamma_f(0) = +1$. Далее, возьмем $(a_n, r_n) \in \mathfrak{R}'_\rho$ с $|a_n| \to \mu_\rho$. Сходимость подпоследовательностей $a_{n'} \to a_\rho$, $r_{n'} \to r_\rho (\in [\overline{r}, \rho])$ дает $|a_\rho| = \mu_\rho \in (0, 1)$, откуда $a_\rho \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Наконец, включение $(a_\rho, r_\rho) \in \mathfrak{R}[\overline{r}, \rho]$ следует из непрерывности отображения Гахова, а поскольку $a_\rho \ne 0$, будем иметь $(a_\rho, r_\rho) \in \mathfrak{R}'_\rho$, то есть $a_\rho \in M_{r_\rho} \setminus \{0\}$ с $r_\rho \le \rho$.

Покажем, что a_ρ – элемент $M_\rho \setminus \{0\}$, $\rho \in [\overline{r}, 1]$. Предположим, что $r_\rho < \rho$. Тогда по лемме 2 имеется одна из двух следующих возможностей для некоторой окрестности $U \times V \subset \mathbb{D} \times [\overline{r}, \rho)$ точки (a_ρ, r_ρ): $1 \in \gamma_r(M_r \bigcap U)$ при всех $r < r_\rho$ из V или $-1 \in \gamma_r(M_r \bigcap U)$ при всех $r > r_\rho$ из V. В каждом из этих случаев найдется ветвь C^ω-кривой из $\mathfrak{R}$ вида $(a(r), r)$ с $a(r_\rho) = a_\rho$, где r пробегает соответствующую полуокрестность $V \bigcap \{r \gtrless r_\rho\}$. Так как (при $r \ne r_\rho$) производная $d|a(r)|/dr$ имеет знак величины $\operatorname{sgn} K_r(a(r)) = \gamma_r(a(r)) = \operatorname{sgn}(r_\rho - r)$ (см. лемму 2, п. 2, и предложение 1), то в указанной полуокрестности должно выполняться неравенство $|a(r)| < \mu_\rho$, противоречащее определению μ_ρ. Таким образом, $r_\rho = \rho$ и $a_\rho \in M_\rho \setminus \{0\}$. Кроме того, $|a_\rho| = \min\{|a| : a \in M_\rho \setminus \{0\}\}$, $\rho \in [\overline{r}, 1]$, по определению величины μ_ρ.

Из приведенных рассуждений следует $\gamma_\rho(a_\rho) \ne +1$, а также монотонность функции μ. Действительно, предположение $\gamma_\rho(a_\rho) = +1$ в силу леммы 2 открывает первую из указанных выше возможностей ($1 \in \gamma_r(M_r \bigcap U)$ при всех $r < r_\rho = \rho$ из V). При $\rho \notin R$ полученное неравенство уточняется до $\gamma_\rho(a_\rho) = -1$, так как в этом случае $0 \notin \gamma_\rho(M_\rho)$. Теперь докажем импликацию $r < \rho \Rightarrow \mu_r > \mu_\rho$. Выше было установлено, что если $a \in M_r \setminus \{0\}$, $r \le \rho$ и $|a| = \mu_\rho$, то $r = \rho$. Это означает, что из $a \in M_r \setminus \{0\}$ с $r < \rho$ следует $|a| > \mu_\rho$, откуда и получается, что $\mu_r = |a_r| > \mu_\rho$. Из убывания μ следует ее непрерывность справа в точках $[\overline{r}, 1) \bigcap R$. При этом используются лемма 2 и непрерывность μ вне R как нижней огибающей конечного числа C^ω-функций на каждом из интервалов, составляющих $[\overline{r}, 1) \setminus R$. $\square$

Доказательство теоремы 1. В силу предложения 1 можно считать, что $0 \in M_f$. Предположим, что $k_f > 1$. Тогда если $\overline{r} = 1$, то элементы множества $M_f \setminus \{0\}$ порождают бифуркации типа $\cup$, то есть $\gamma_f(M_f \setminus \{0\}) = 0$. Если же $\overline{r} < 1$, то согласно лемме 3 ближайший к нулю элемент из $M_f \setminus \{0\}$ будет иметь индекс, отличный от $+1$. В обоих случаях получается противоречие, которое и доказывает теорему.

Лемма 2 позволяет также установить звездообразность класса $\mathcal{H} \bigcap \{f \in H_0 : f''(0) = 0\}$ по «линиям уровня». Именно, справедливо

Следствие 1. *Если* $f \in H_0$ *с* $M_f = \{0\}$ *и* $\gamma_f(0) = +1$, *то* $k_{f_r} = 1$, $r \in (0, 1)$.

Доказательство. Предположим, что существует $\widetilde{r} \in (0, 1)$ такое, что $k_{f_{\widetilde{r}}} > 1$. Тогда $\overline{r} \le \widetilde{r} < 1$, следовательно, по лемме 3 для любого $\rho \in [\overline{r}, 1]$ множество $M_\rho \setminus \{0\}$ непусто, что заведомо не выполняется при $\rho = 1$. $\square$

Существенность условия $f''(0) = 0$ в следствии 1 демонстрирует следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим «линии уровня» функции $f(\in H_0)$ с $f''(\zeta)/f'(\zeta) = (1/2)/(1-\zeta)^2$. Несложный, но рутинный анализ показывает, что слоение $\mathfrak{R}_f$ над $(0,1]$ состоит из единственной C^ω-кривой $(\rho, r(\rho))$, $\rho \in (0,1]$. Функция $r = r(\rho)$, кроме концевых экстремумов 0 и 1, имеет два внутренних: максимум $r_m = \sqrt{3}/2$ в точке $\rho = 1/\sqrt{3}$ и минимум $\overline{r} = (2/3)\sqrt{5/3}$ при $\rho = \sqrt{3/5}$. Возьмем произвольное $r_0 \in (r_m, 1)$. Тогда $k_{f_{r_0}} = 1$, но $k_{f_{tr_0}} \ge 2$ при $\overline{r}/r_0 \le t \le r_m/r_0$.

Теорема 1 полностью подтверждает строгий вариант гипотезы М.И. Киндера:

Следствие 2. *Пусть $J : H_0\times\, \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ – функционал со свойством* (6), *и пусть функция $f \in H_0$ удовлетворяет неравенству* (8). *Тогда $k_f \le 1$.*

Доказательство. Если $M_f \ne \emptyset$, то неравенство (8) и свойство (6) с учетом (7) и предложения 1 обеспечивают дискретность M_f [27, с. 209] и выполнение условия $\gamma_f(M_f) = +1$. По теореме 1 отсюда следует $k_f = 1$. □

Следствие 3. *Пусть $J : H_0\times\, \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ – функционал со свойствами:*

1) $f \in \mathcal{J} \Rightarrow I_{1/2}(f_r, a) > 0$, $a \in M_{f_r}$, $r \in (r_0, 1)$ с некоторым $r_0 = r_0(f) \in [0,1)$;

2) $f \in \mathcal{J} \Rightarrow f\circ\phi \in \mathcal{J}$ для каждого автоморфизма ϕ круга $\mathbb{D}$.

Тогда для любой функции $f \in \mathcal{J}$ имеет место альтернатива: либо $k_f \le 1$, либо M_f содержит континуум.

Доказательство. Пусть M_f непусто $(k_f \ge 1)$ и дискретно (иначе, согласно [20] M_f содержит континуум). Покажем, что $k_f = 1$.

Сразу отметим, что в силу предложения 1 и теоремы 1 свойство 1) можно продолжить до $f \in \mathcal{J} \Rightarrow k_{f_r} = 1$, $r \in (r_0(f), 1)$.

Фиксируем произвольное $a \in M_f$. Если $K_f(a) > 0$, то $\gamma_f(a) = +1$. Пусть теперь $K_f(a) = 0$. Рассмотрим функцию $\widetilde{f} = f\circ\phi$ $(\in \mathcal{J}$ в силу условия 2) настоящего следствия), где ϕ – автоморфизм $\mathbb{D}$ с $\phi(0) = a$. Имеем $0 \in M_{\widetilde{f}}$ и $K_{\widetilde{f}}(0) = 0$ по предложению 1, а также $k_{\widetilde{f}_r} = 1$, $r \in (r_0(\widetilde{f}), 1)$, согласно отмеченному выше. По лемме 2 отсюда следует, что $\zeta = 0$ – точка бифуркации типа Ψ (при $r = 1$) в слоении $\mathfrak{R}$, а значит (вновь по предложению 1), $\gamma_f(a) = \gamma_{\widetilde{f}}(0) = +1$.

Итак, $\gamma_f(M_f) = +1$, откуда по теореме 1 $k_f = 1$. □

Замечание 3. Установленный результат сохраняется при замене импликаций 1) и 2) условиями $1'$) $J(f,a) \ge 0$ (>0) $\Rightarrow I_{1/2}(f,a) \ge 0$ (>0) , $a \in M_f$, $f \in H_0$; $1''$) $J(f_r, M_{f_r}) > 0$, $r \in (r_0, 1)$, $f \in \mathcal{J}$, и $2'$) $J(f,a) = 0 \Rightarrow g'(a) = 0$, $a \in M_f$, $f \in \mathcal{J}$ $(g = \zeta f''/f')$. Можно показать, что функционалы G_α и K_γ удовлетворяют $1''$) с $r_0 = 0$ (при попадании параметров в носители) и даже более ограничительному условию $J(f_r, \zeta) > r^2 J(f, r\zeta)$, $r \in (0,1)$, $\zeta \in \mathbb{D}$ (эквивалентному неравенству Альфорса [17] в случае $J = G_1 = K_2$). Следствие 3 и его получающийся таким образом аналог обобщают конструкции условий единственности вида (4) из [13] и [28] для функционалов $J = I_{1/2}$ и $J = 2/(1-|\zeta|^2) - |(f''/f')'(\zeta)|$ соответственно и выделяют ситуации, в которых гипотеза М.И. Киндера подтверждается с видоизменением условия (6). Очевидно, справедливость гипотезы в любом случае связана с исключением элементов $a \in M_f$ нулевого индекса.

3. Линейная выпуклость областей Хартогса и неравенство Эпштейна

Рассмотрим класс $\mathcal{N}(\beta)$ $(\beta \in \mathbb{R})$ нормированных голоморфных функций f, удовлетворяющих условию $I_\beta(f,\zeta) \ge 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$, или, подробнее,

$$\left|\{f,\zeta\} + (\beta - 1/2)((f''/f')(\zeta) - 2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2))^2\right| \le 2/(1-|\zeta|^2)^2, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \qquad (11)$$

Пусть D – гиперболическая риманова поверхность, $f : \mathbb{D} \to D$ – ее голоморфная параметризация единичным кругом. Область Хартогса над D определяется как $H = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C} : |w| < \Omega(z)\}$, где функция $\Omega \in C^2(D)$ положительна и удовлетворяет неравенству $(\ln\Omega)_{z\overline{z}} < 0$ в D (то есть H строго псевдовыпукла). В качестве определяющей функции для H будем использовать $r(z,w) = \ln|w| - \ln\Omega(z)$. Одна из версий определения линейной выпуклости, восходящих к классической работе [29], применительно к H означает, что вещественный гессиан функции r, $\operatorname{Hess} r(z,w)(\lambda,\mu) \geq 0$ для любой точки $(z,w) \in r^{-1}(0) \bigcap (D \times \mathbb{C})$ и любого вектора (λ,μ) из комплексной касательной плоскости $T^{\mathbb{C}}_{(z,w)}(\partial H)$.

Имеют место соотношения $(1/2)\operatorname{Hess} r(z,w)(\lambda,\mu) = -(\ln\Omega)_{z\overline{z}}|\lambda|^2 - \operatorname{Re}\{\mu^2/2w^2 + (\ln\Omega)_{zz}\lambda^2\}$ и $T^{\mathbb{C}}_{(z,w)}(\partial H) = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 : \mu/w = 2(\ln\Omega)_z\lambda\}$ (см., например, [30]). Таким образом, согласно указанной версии $\operatorname{Re}\{[(\ln\Omega)_{zz} + 2(\ln\Omega)_z^2]\lambda^2\} \leq -(\ln\Omega)_{z\overline{z}}|\lambda|^2$, $\zeta \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, или эквивалентно

$$\left|(\ln\Omega)_{zz} + 2(\ln\Omega)_z^2\right| \leq -(\ln\Omega)_{z\overline{z}}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{12}$$

Замена $\Omega = \sqrt{R/e^s}$ ($R = R(z)$ – конформный радиус) с последующим переходом к единичному кругу, $z = f(\zeta)$, $\sigma(\zeta) := s(f(\zeta))$, преобразует оценку (12) в неравенство Эпштейна [17]

$$\left|\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_\zeta^2 - \{f,\zeta\}/2 - (2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2))\sigma_\zeta\right| \leq \sigma_{\zeta\overline{\zeta}} + 1/(1-|\zeta|^2)^2, \ \zeta \in \mathbb{D}. \tag{13}$$

Известно [17, 31], что если $|\sigma_\zeta| \leq |\zeta|/(1-|\zeta|^2)$, $r_0 \leq |\zeta| < 1$, для некоторого $r_0 \in (0,1)$, то при выполнении условия (13) функция f будет однолистной в $\mathbb{D}$. Можно высказать предположение: если область Хартогса H линейно выпукла над D (в смысле подходящей версии определения), то любое голоморфное накрытие римановой поверхности (римановой области над $\mathbb{C}^n$ в случае $n \geq 2$) D однолистно.

Вернемся к условию (12) в частном случае $\Omega = R^\beta$; при переходе к $\mathbb{D}$ имеем в точности неравенство (11).

Теорема 2. *Если $\beta \in [0,1]$, то $\mathcal{N}(\beta)$ – линейно-инвариантное семейство порядка $\operatorname{ord}\mathcal{N}(\beta) \leq (1-\beta)^{-1/2}$, содержащее класс S^0 выпуклых функций. Классы $\mathcal{N}(\beta)$ пусты при $\beta \notin [0,1]$.*

Доказательство. Линейная инвариантность классов $\mathcal{N}(\beta)$ проверяется непосредственно. Действия

$$\Lambda_{\phi_\zeta} f(z) = (f(\phi_\zeta(z)) - f(\phi_\zeta(0)))/(\phi_\zeta'(0)f'(\phi_\zeta(0))) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(f,\zeta)z^n$$

на функции $f \in \mathcal{N}(\beta)$ мебиусовыми автоморфизмами $\phi_\zeta(z) = (z+\zeta)/(1+\overline{\zeta}z)$ (см. [32]) позволяют переписать (11) в терминах коэффициентов $A_2(f,\zeta)$, $A_3(f,\zeta)$ с учетом соотношений $A_3(f,\zeta) - A_2^2(f,\zeta) = (1/6)(1-|\zeta|^2)^2\{f,\zeta\}$ и $A_2(f,\zeta) = -\overline{\zeta} + ((1-|\zeta|^2)/2)(f''/f')(\zeta)$:

$$\left|3A_3(f,\zeta) + 2(\beta-2)A_2^2(f,\zeta)\right| \leq 1, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{14}$$

Далее, при переходе от $f \in \mathcal{N}(\beta)$ к функции $f_r^\varepsilon(\zeta) = \overline{\varepsilon} f(\varepsilon r\zeta)/r$, $r \in (0,1)$, $|\varepsilon| = 1$, последнее неравенство усложняется до

$$\left|3A_3(f_r^\varepsilon,\zeta) - 3A_2^2(f_r^\varepsilon,\zeta) + (2\beta-1)[A_2(f_r^\varepsilon,\zeta) + \overline{\zeta}\gamma_r(\zeta)]^2\right| \leq r^2(1-|\zeta|^2\gamma_r(\zeta))^2, \tag{15}$$

где $\gamma_r(\zeta) = (1-r^2)/(1-r^2|\zeta|^2)$.

Покажем, что порядок $\operatorname{ord} f = \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} |A_2(f,\zeta)|$ любой функции $f \in \mathcal{N}(\beta)$ конечен при любом $\beta \neq 1$ с непустым $\mathcal{N}(\beta)$. Зафиксируем произвольное $\beta \in \mathbb{R}$ и предположим, что существует $f \in \mathcal{N}(\beta)$, такое что $\alpha = \operatorname{ord} f = +\infty$. В этом случае, как и при конечном α [33], для растяжений $f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r$ имеет место предельный переход $\alpha_r := \operatorname{ord} f_r \to \alpha$ при $r \to 1-$. На основе легко проверяемого соотношения $A_2(f^\varepsilon, \overline{\varepsilon}\zeta) = \varepsilon A_2(f,\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, $|\varepsilon| = 1$, где $f^\varepsilon(\zeta) = \overline{\varepsilon} f(\varepsilon\zeta)$, позволяющего «овеществить» второй коэффициент, условие $\alpha_r > 1$, справедливое при $r < 1$, близких к 1, обеспечивает существование точек $\zeta_r \in \mathbb{D}$ и $\varepsilon_r \in \partial\mathbb{D}$ таких, что $A_2(f_r^{\varepsilon_r}, \zeta_r) = \alpha_r (< +\infty)$. Тогда в силу теоремы 2.3a из [32] выполняется соотношение $A_3(f_r^{\varepsilon_r}, \zeta_r) = (2\alpha_r^2 + 1)/3$. Подстановка полученных выражений для коэффициентов в (15) с $\varepsilon = \varepsilon_r$ и $\zeta = \zeta_r$ приводит к выполнению неравенства $|1 - \alpha_r^2 + (2\beta - 1)[\alpha_r + \overline{\zeta}_r \gamma_r(\zeta_r)]^2| \leq r^2(1 - |\zeta_r|^2 \gamma_r(\zeta_r))^2$ для всех $r < 1$, близких к 1. Разделив обе его части на α_r^2 и переходя к пределу при $r \to 1-$, с учетом ограниченности $\gamma_r(\zeta)$ в $\mathbb{D}$ и сходимости $\alpha_r \to +\infty$ будем иметь $\beta = 1$. Таким образом, для любого $\beta \neq 1$ из $f \in \mathcal{N}(\beta)$ следует, что $\operatorname{ord} f < +\infty$.

Теперь выясним, при каких β классы $\mathcal{N}(\beta)$ непусты. Предположим, что класс $\mathcal{N}(\beta)$, $\beta \neq 1$, непуст, и покажем, что в этом случае β лежит в промежутке $[0,1)$. Отметим, что непустота $\mathcal{N}(\beta)$, $\beta \in [0,1]$, следует из включения $S^0 \subset \mathcal{N}(\beta)$, $\beta \in [0,1]$, устанавливаемого на основе известной оценки $|A_3 - A_2| \leq (1 - |A_2|^2)/3$ для коэффициентов $A_2 = A_2(f,\zeta)$ и $A_3 = A_3(f,\zeta)$ при $f \in S^0$ ([25]).

Итак, пусть в $\mathcal{N}(\beta)$ при $\beta \neq 1$ содержится функция f с $\operatorname{ord} f = \alpha < +\infty$. Принцип компактности для последовательности $\{f_n = \Lambda_{\phi_{\zeta_n}} f : n \in \mathbb{N}\}$ с $|A_2(f,\zeta_n)| \to \alpha$, $\zeta_n \in \mathbb{D}$, при $n \to \infty$, и $|A_2(f_n,\zeta)| \leq \alpha$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и линейная инвариантность класса $\mathcal{N}(\beta)$ обеспечивают существование функции $g(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots \in \mathcal{N}(\beta) \bigcap \mathfrak{A}_\alpha$ такой, что $a_2 = \alpha$, где $\mathfrak{A}_\alpha$ – универсальное линейно-инвариантное семейство порядка α [32]. Тогда, вновь применяя теорему 2.3a из [32], но к $a_2 = \alpha = A_2(g,0)$ и $a_3 = A_3(g,0)$, и подставляя получающееся соотношение $a_3 = (2\alpha^2 + 1)/3$ в (14) с g вместо f и с $\zeta = 0$, получим неравенство $|2(\beta - 1)\alpha^2 + 1| \leq 1$, то есть $0 \leq (1 - \beta)\alpha^2 \leq 1$, откуда сразу следует оценка $\beta < 1$ (напомним, что $\beta \neq 1$), а с учетом $\alpha \geq 1$ (см. [32]) – оценка $\beta \geq 0$.

Кроме того, если $f \in \mathcal{N}(\beta) \bigcap \mathfrak{S}_\alpha$ с $\beta \in [0,1)$, где $\mathfrak{S}_\alpha = \{h \in \mathfrak{A}_\alpha : \operatorname{ord} h = \alpha\}$, то $\alpha = \operatorname{ord} f \leq (1 - \beta)^{-1/2}$, то есть пересечения $\mathcal{N}(\beta) \bigcap \mathfrak{S}_\alpha$ пусты при $\beta \in [0,1)$ и $\alpha > (1 - \beta)^{-1/2}$. Поскольку, как показано выше, в $\mathcal{N}(\beta)$ при $\beta \in [0,1)$ функций бесконечного порядка нет, то отсюда следует, что $\operatorname{ord} \mathcal{N}(\beta) \leq (1 - \beta)^{-1/2}$, $\beta \in [0,1]$. Теорема 2 доказана. □

Замечание 4. Соотношение $\mathcal{N}(0) = S^0$, попутно обоснованное в приведенном доказательстве, получено другим методом в работе [34].

Следствие 4. *Функционал* $I : (f,\zeta,\beta) \mapsto I_\beta(f,\zeta)$ *является жестким по параметру* β *с носителем* $[0,1]$.

Частичное достижение равенства в оценке $\operatorname{ord} \mathcal{N}(\beta) \leq (1 - \beta)^{-1/2}$ иллюстрирует

Пример 2. Функция $f_q(\zeta) = [((1+\zeta)/(1-\zeta))^q - 1]/(2q)$, $q \geq 1$, с $\operatorname{ord} f_q = q$ принадлежит классу $\mathcal{N}(\beta)$ при $q \leq (1 - \beta)^{-1/2}$, если $\beta \in [0, 2/3]$, и при $q \leq \sqrt{H(\beta)}$, если $\beta \in [2/3, 1]$, где $H(\beta) = \beta/(8\beta^2 - 11\beta + 4)$. Указанные оценки неулучшаемы.

Теорема 3. *Если* $\beta \in [0,1]$ *и* $f \in \mathcal{N}(\beta)$, *то* $k_f \leq 1$ *либо* $f(\mathbb{D})$ *– полоса.*

Доказательство. Случай $k_f = 0$ содержателен: функции (10) принадлежат $\mathcal{N}(\beta)$ при любом $\beta \in [0,1]$. Предположим $k_f \geq 1$ и рассмотрим следующие варианты (ср. с [13]).

1. *M_f дискретно в $\mathbb{D}$.*

Подставляя $\zeta = ra$, $a \in M_{f_r}$, в условие (11), получим $\big|\{f_r, a\} + 2(2\beta - 1)\gamma_r(a)^2\overline{a}^2/(1-|a|^2)^2\big| \le 2r^2/(1-r^2|a|^2)^2$, откуда $I_{1/2}(f_r, a) > 0$ при $r \in (0,1)$, $\beta \in [0,1]$, и остается лишь воспользоваться следствием 3.

2. *M_f содержит свои предельные точки.*

Как известно [20], любая предельная точка M_f в $\mathbb{D}$ содержится в аналитической дуге $\{\zeta = \zeta(t),\ t \in T \subset \mathbb{R}\} \subset M_f$. Таким образом, $(\ln h_f)_{\zeta}\big|_{\zeta=\zeta(t)} \equiv 0$, $t \in T$, или $(f''/f')(\zeta(t)) \equiv 2\overline{\zeta}(t)/(1-|\zeta(t)|^2)$, $t \in T$, откуда

$$\{f, \zeta(t)\}\zeta'(t) \equiv 2\overline{\zeta}'(t)/(1-|\zeta(t)|^2)^2, \quad t \in T. \tag{16}$$

Подстановкой двух последних тождеств в (11) убеждаемся в том, что функция $\varkappa_f(\zeta) = (1-|\zeta|^2)^2\big|\{f,\zeta\} + 2(2\beta-1)(\ln h_f)_\zeta^2\big|$ достигает своего максимума, равного 2, в точках $\zeta = \zeta(t)$, $t \in T$, которые удовлетворяют уравнению $(\ln \varkappa_f)_\zeta = 0$:

$$\{f,\zeta\}'/\{f,\zeta\}\big|_{\zeta=\zeta(t)} \equiv 4\overline{\zeta}(t)/(1-|\zeta(t)|^2), \quad t \in T. \tag{17}$$

Без ограничения общности считаем, что $\zeta(t_0) = \overline{\zeta}(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in T$, а ввиду аналитичности дуги имеем $\zeta'(t_0) \ne 0$.

Для интегрирования системы (16), (17) с приведенными начальными данными перейдем к комплексификациям вещественно аналитических в T функций $\zeta(t)$ и $\overline{\zeta}(t)$, то есть голоморфным в полоске $T \subset \mathfrak{T} \subset \mathbb{C}$ функциям $u(\tau)$ и $u(\tau)$ таким, что $u\big|_T = \zeta$ и $v\big|_T = \overline{\zeta}$. Условия $u(t_0) = v(t_0) = 0$ и $u'(t_0) \ne 0$ позволяют перейти к суперпозиции $w(u) := v(\tau(u))$, голоморфной в некоторой окрестности точки $u = 0$ и удовлетворяющей условию $w(0) = 0$. Комплексификация тождеств (16) и (17) в терминах $w = w(u)$ приводит соответственно к соотношениям

$$\{f,u\} = 2w'(u)/(1-uw(u))^2 \quad \text{и} \quad \{f,u\}'/\{f,u\} = 4w(u)/(1-uw(u)). \tag{18}$$

Первое из них дает $|w'(0)| = (1/2)\big|(1-uw(u))^2\{f,u\}\big|\big|_{u=0} = 1$ (в силу $\varkappa_f(\zeta(t)) = 2$), это позволяет принять без ограничения общности $w'(0) = 1$.

Из тождеств (18) следует, что $w''(u)/w'(u) = 2(w(u) - uw'(u))/(1-uw(u))$. Поэтому $w''(0) = 0$ и $\{w, u\} = 0$, откуда с учетом $w(0) = 0$ и $w'(0) = 1$ будем иметь $w(u) = u$, что влечет за собой заключение $f(\mathbb{D})$ – полоса. Теорема 3 доказана. □

Несложной модификацией метода, обеспечившего первое доказательство импликации «(5)$\Rightarrow k_f \le 1$ либо $f(\mathbb{D})$ – полоса» [10, 11], устанавливается

Теорема 4. *Пусть $a > 0$ и для $f \in H_0$ выполнены условия $f''(0) = 0$ и*

$$\mathrm{Re}\left(e^{i2\theta}\{f,\zeta\}\right) \le 2/(1-r^2)^2 + 4(a-1)\big[\mathrm{Re}\, e^{i\theta}(\ln h_f(\zeta))_\zeta\big]^2 + 2\big|(\ln h_f(\zeta))_\zeta\big|^2 \tag{19}$$

при $\zeta = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Тогда если $f(\mathbb{D})$ не является полосой, то

$$\mathrm{Re}\, e^{i\theta}(f''/f')(\zeta) < 2r/(1-r^2), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{20}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции $g(t,\theta) = f(r(t)e^{i\theta})$ и $u(t,\theta) = |g_t'(t,\theta)|^{-a}$, где $r = r(t)$ – обратная к $t = f_s(r)$ (в [10] зависимость от θ не использовалась). Тогда при $a > 0$ условие (19) эквивалентно неравенству

$$a^{-1}u_{tt}/u \equiv -\mathrm{Re}\,\{g,t\} + (a-1/2)\big(\mathrm{Re}\,(g_{tt}/g_t)\big)^2 + (1/2)\big(\mathrm{Im}\,(g_{tt}/g_t)\big)^2 \ge 0, \tag{21}$$

$(t,\theta)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Вместе с $f''(0)=0$ оно обеспечивает неубывание функции u по t для любого фиксированного θ. В терминах g это означает, что выполняется

$$\operatorname{Re} g_{tt}/g_t \le 0, \quad (t,\theta)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}, \tag{22}$$

– нестрогое неравенство (20). Равенство в (22) в некоторой точке (t_0,θ_0), $t_0\neq 0$, благодаря (21) распространяется на отрезок $[0,t_0]\times\{\theta_0\}$, где, таким образом, $u\equiv$ $\equiv c(=|f'(0)|^{-a})$. Предположение о существовании $\overline{t}\in(0,t_0)$ с $\operatorname{Im}(g_{tt}/g_t)(\overline{t},\theta_0)\neq 0$ в силу $u_\theta/u=(ar/(1-r^2))\operatorname{Im} g_{tt}/g_t$ приводит к неравенству $u(\overline{t},\theta)<c(=u(0,\theta))$ для θ, «примыкающих» к θ_0 с одной из сторон. Последнее, очевидно, противоречит установленному выше условию неубывания u (по t). Таким образом, равенство в (22) при $(t,\theta)=(t_0,\theta_0)$ влечет за собой тождество $g_{tt}/g_t\equiv 0$ на $[0,t_0]\times\{\theta_0\}$, откуда, по теореме единственности, $f(\mathbb{D})$ – полоса. □

Теорема 3 может быть получена на основе такого утверждения.

Следствие 5. *Пусть $\beta\in(-\infty,1]$, $f\in H_0$, $f''(0)=0$ и*

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i2\theta}\{f,\zeta\}+(\beta-1/2)(e^{i\theta}(f''/f')(\zeta)-2r/(1-r^2))^2\right\}\le 2/(1-r^2)^2 \tag{23}$$

при $\zeta=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$. Тогда выполняется утверждение теоремы 4.

Доказательство. При $\beta\le 1$ оценка (23) влечет за собой (19) с $a\ge 1-\beta$. □

Обоснование теоремы 3 получается просто: условие $f\in\mathcal{N}(\beta)$, $\beta\in[0,1]$, обеспечивает выполнение неравенства (23), оценка (20) – выполнение равенства $k_f=1$, а соотношение $f''(0)=0$ достигается за счет линейной инвариантности класса $\mathcal{N}(\beta)$.

Отметим, что рассмотренный подход не «работает» для условия $G_\alpha(f,\zeta)\ge 0$, $\zeta\in\mathbb{D}$ ($|2\alpha-3|\le 1$), за исключением случая $G_{3/2}=I_{1/2}$. Пока можно утверждать лишь справедливость заключения $k_{f_r}=1$, $r\in(0,1)$, при выполнении указанного неравенства, а также следствия 2 для $J=G_\alpha$.

4. Неравенство $K_\gamma(f,\zeta)\ge 0$, $\zeta\in\mathbb{D}$

Лемма 4. *Пусть вещественнозначная функция $\Omega\in C^2(\mathbb{D})$ удовлетворяет условию*

$$\left|\Omega_{\zeta\zeta}(\zeta)\right|\le -\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta),\ \zeta\in\mathbb{D}. \tag{24}$$

Тогда если Ω_ζ исчезает в двух различных точках ζ_0, $\zeta_1\in\mathbb{D}$, то $\Omega_\zeta=0$ на прямолинейном отрезке, соединяющем ζ_0 и ζ_1.

Доказательство. Полагая $\Phi(\rho,\theta)=\Omega(\zeta_0+\rho e^{i\theta})$, получим $\Phi_\rho-i\Phi_\theta/\rho=2e^{i\theta}\Omega_\zeta$, $\Phi_{\rho\rho}-i(\Phi_\theta/\rho)_\rho=2[e^{i2\theta}\Omega_{\zeta\zeta}+\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}]$. Пусть $\zeta_1=\zeta_0+\rho_1e^{i\theta_1}$. Тогда из условия равенства значений Ω_ζ в точках ζ_0 и ζ_1 получаем, что $\Phi_\rho(\rho_1,\theta_1)=\Phi_\rho(0,\theta_1)$, откуда следует равенство нулю интеграла по отрезку $T=\{\zeta_0+\tau e^{i\theta_1}:\tau\in[0,\rho_1]\}$ от неположительной функции $\operatorname{Re} e^{i2\theta_1}\Omega_{\zeta\zeta}+\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}$, которая, таким образом, исчезает на нем. Поэтому, в силу (24), имеем $\operatorname{Re} e^{i2\theta_1}\Omega_{\zeta\zeta}=\left|e^{i2\theta_1}\Omega_{\zeta\zeta}\right|=-\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}$, следовательно, и $\operatorname{Im} e^{i2\theta_1}\Omega_{\zeta\zeta}=$ $=0$ на T. Интегрируя итоговое тождество $e^{i2\theta_1}\Omega_{\zeta\zeta}+\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}=0$ (при $\zeta\in T$) по τ от 0 до $\rho\in[0,\rho_1]$, приходим к требуемому заключению $\Omega_\zeta=0$, $\zeta\in T$. □

Справедлива

Теорема 5. *Если функция $f\in H$ удовлетворяет условию*

$$\left|(1-|\zeta|^2)^2(f''/f')'(\zeta)-\gamma\overline{\zeta}^2\right|\le 2,\ \zeta\in\mathbb{D}, \tag{25}$$

$-2\le\gamma\le 2$, то $k_f\le 1$. При $|\gamma|>2$ условия (25) и $f\in H$ несовместны.

Доказательство. Жесткость функционала K_γ по параметру γ с носителем $[-2,2]$ устанавливается так же, как и в предложении 4.

Пусть $\Omega = \ln h_f$. Тогда условие (25) при $\zeta = \rho e^{i\theta}(\in \mathbb{D})$ приобретает вид $\left|2e^{i2\theta}\Omega_{\zeta\zeta} + (2-\gamma)\rho^2/(1-\rho^2)^2\right| \le -2\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}$, откуда $\operatorname{Re} e^{i2\theta}\Omega_{\zeta\zeta} + \Omega_{\zeta\overline{\zeta}} \le 0$ в $\mathbb{D}$, если $\gamma \le 2$.

Предположим, что $\Omega_\zeta = 0$ в точках ζ_0, $\zeta_1 \in \mathbb{D}$ ($\zeta_0 \ne \zeta_1$). Как и в лемме 4, при $\zeta \in T$ второе из двух последних неравенств оказывается тождеством, подстановка которого в первое приводит к оценке $\left|-2\Omega_{\zeta\overline{\zeta}} + 2i \operatorname{Im} e^{i2\theta_1}\Omega_{\zeta\zeta} + (2-\gamma)\rho^2/(1-\rho^2)^2\right| \le -2\Omega_{\zeta\overline{\zeta}}$, $\zeta \in T$, заведомо не выполняющейся при $\gamma < 2$. Таким образом, $k_f \le 1$, если $\gamma \in [-2,2)$.

Пусть $\gamma = 2$. Тогда (25) есть в точности (24), и согласно лемме 4 $\Omega_\zeta = 0$ на T. Это означает, что $(f''/f')(\zeta(\tau)) \equiv 2\overline{\zeta}(\tau)/(1-|\zeta(\tau)|^2)$, где $\zeta(\tau) = \zeta_0 + \tau e^{i\theta_1}$, $\tau \in [0,\rho_1]$, – параметрическое представление отрезка T.

Аналитическое продолжение последнего тождества по τ в круг $\zeta^{-1}(\mathbb{D})$, распространяющее отрезок T критических точек функции h_f до хорды $S = \zeta(\zeta^{-1}(\mathbb{D}) \bigcap \mathbb{R})$, устанавливает явный вид предшварциана f''/f'. С точностью до вращений в плоскости ζ можно считать, что $\zeta_0 = ih$ и $S = \{ih + \tau : \tau \in (-\sqrt{1-h^2}, \sqrt{1-h^2})\}$ ($h \in (-1,1)$), тогда $(f''/f')(\zeta) = 2(\zeta - ih)/(1-\zeta(\zeta - ih))$. Громоздкий анализ показывает, что для любой функции $f(\zeta)$ с указанным предшварцианом (а значит, и для всех ее «вращений» $\varepsilon^{-1}f(\varepsilon\zeta)$, $|\varepsilon| = 1$) неравенство (25) теряет силу в точках $\mathbb{D}$, близких к $(\sqrt{1-h^2} + ih)(\overline{\varepsilon}) \in \partial\mathbb{D}$. Таким образом, функции f с $k_f > 1$, не входят в класс, определяемый условием (25), что и требовалось доказать. $\square$

Часть результатов настоящей работы анонсировалась в [35, 36].

Summary

A.V. Kazantsev. Bifurcations and New Uniqueness Criteria for the Critical Points of Hyperbolic Derivatives.

The article describes bifurcation picture for the gradient zeros in the unit disk of the hyperbolic derivative of the holomorphic function imbedded in the family of its “level lines”. The dependence of the motion of zeros on the curvature of the hyperbolic derivative allows us to extend the Poincare – Hopf theorem to construct a new class of zero uniqueness criteria as the non-negativity of the curvature-like functionals. This class contains one-parameter series of Epstein inequalities, which are the reformulations of the Behnke – Peschl condition for the special Hartogs domains. A new rigidity phenomenon occurs: the inequalities mentioned above are contensive only for certain segment of parameters.

Key words: hyperbolic derivative, conformal (inner mapping) radius, bifurcations of the critical points, linear invariance, Behnke – Peschl condition.

Литература

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

2. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.

3. *Haegi H.R.* Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen // Compositio Math. – 1950. – V. 8, F. 2. – P. 81–111.

4. *Garnett J., Nicolau A.* Interpolating Blaschke products generate H^∞ // Pacific J. Math. – 1996. – V. 173, No 2. – P. 501–510.

5. *Yamashita S.* The Schwarzian derivative and local maxima of the Bloch derivative // Math. Japonica. – 1992. – V. 37, No 6. – P. 1117–1128.

6. *Аксентьев Л.А.* Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3–11.

7. *Kawohl B.* Rearrangements and convexity of level sets in PDE // Lect. Notes Math. – 1985. – V. 1150. – 136 p.

8. *Авхадиев Ф.Г.* Конформно-инвариантные неравенства и их приложения: Препринт НИИММ им. Н.Г. Чеботарева. – Казань: Казан. фонд «Математика», 1995. – 26 с.

9. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киндер М.И., Киселев А.В.* О классах единственности внешней обратной краевой задачи // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 24. – С. 39–62.

10. *Gehring F.W., Pommerenke Ch.* On the Nehari univalence criterion and quasicircles // Comment. Math. Helv. – 1984. – V. 59. – P. 226–242.

11. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51. (Краткое сообщение в Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 8. – С. 69–72.)

12. *Авхадиев Ф.Г.* Конформные отображения и краевые задачи. – Казань: Казан. фонд «Математика», 1996. – 216 с.

13. *Kazantsev A. V.* On a problem of Polya and Szegö // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 9. – P. 37–46. (URL: http://www.kcn.ru/tat en/science/ljm/contents.html).

14. *Казанцев А.В.* Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 6. – С. 69–73.

15. *Киндер М.И.* О числе решений уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязной области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 8. – С. 69–72.

16. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.

17. *Epstein C.L.* The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflections // J. Reine Angew. Math. – 1986. – Bd. 372. – S. 96–135.

18. *Avhadiev F.G., Kayumov I.R.* Estimates for Bloch functions and their generalization // Complex Variables. – 1996. – V. 29. – P. 193–201. (Краткое сообщение в Докл. РАН. – 1996. – Т. 349, № 5. – С. 583–585.)

19. *Казанцев А.В., Киндер М.И.* Условия единственности решения внешней обратной краевой задачи // Программа итог. науч. конф. КГУ за 1985 г. – Казань: Казан ун-т, 1985. – С. 21.

20. *Ruscheweyh St., Wirths K.-J.* On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.

21. *Киселев А.В., Насыров С.Р.* О структуре множества корней уравнения Ф.Д. Гахова для односвязной и многосвязной областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 24. – С. 105–115.

22. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972. – 279 с.

23. *Plessner A.I.* Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs // J. Reine Angew. Math. – 1927. – Bd. 158 . – S. 219–227.

24. *Насыров С.Р., Хохлов Ю.Е.* Единственность решения внешней обратной краевой задачи в классе спиралеобразных областей // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 8. – С. 24–27.

25. *Авхадиев Ф.Г.* Об условиях однолистности аналитических функций // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 11. – С. 3–13.

26. *Pommerenke Ch.* Boundary behavior of conformal maps. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. – IX + 300 p.

27. *Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е.* Введение в дифференциальную геометрию «в целом». – М.: Наука, 1973. – 440 с.

28. *Казанцев А.В.* Гиперболические производные с предшварцианами из пространства Блоха // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2002. – Т. 14. – С. 135–144.

29. *Behnke H., Peschl E.* Zur theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und grossen // Math. Ann. – 1935. – Bd. 111, H. 2. – S. 158–177.

30. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1985. – Ч. 2. – 464- с.

31. *Chuaqui M.* A unified approach to univalence criteria in the unit disc // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 123, No 2. – P. 441–453.

32. *Pommerenke Ch.* Linear-invariante Familien analytischer Funktionen // Math. Ann. – 1964. - Bd. 155, H. 2. – S. 108–154.

33. *Campbell D.M.* Locally univalent functions with locally univalent derivatives // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 162. – P. 395–409.

34. *Аксентьев Л.А.* Локальное строение поверхности внутреннего конформного радиуса для плоской области // Изв. вузов. Матем. – 2002. – № 4. – С. 3–12.

35. *Казанцев А.В.* Линейная выпуклость областей Хартогса в $\mathbb{C}^2$ и новые классы плоских дисков с единственным экстремумом гиперболической производной // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2003. – Т. 19. – С. 113.

36. *Казанцев А.В.* К гипотезе М.И. Киндера // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2004. – Т. 23. – С. 97.

Поступила в редакцию
23.11.10

Казанцев Андрей Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *kazandrey0363@rambler.ru*