

УДК 539.3

**АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ
С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ***А.И. Абдрахманова, Л.У. Султанов**Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия***Аннотация**

Работа посвящена построению вычислительного алгоритма исследования гиперупругих тел с учетом контактного взаимодействия. В рамках ранее разработанного алгоритма исследования больших деформаций трехмерных тел рассмотрено решение контактных задач на основе уравнения принципа виртуальных мощностей. Контактное взаимодействие моделируется на основе подхода “master–slave”. Для поиска зоны контакта применяется процедура проекции ближайшей точки. На основе принципа виртуальных мощностей построен контактный функционал в рамках метода штрафа. Проведена линейаризация кинематических соотношений и контактного функционала на основе мощности на возможных скоростях проникновения. Решение нелинейной системы уравнений осуществлено с помощью метода пошагового нагружения. Численная реализация основана на методе конечных элементов.

Ключевые слова: конечная деформация, контактное взаимодействие, метод штрафа

Введение

Моделирование деформирования твердых тел с учетом контактного взаимодействия является одной из актуальных задач механики твердого тела [1–8]. Такие задачи возникают в производстве и при эксплуатации элементов деталей [9–11]. В механике контактного взаимодействия получила развитие вычислительная механика, которая позволяет получать решения широкого круга контактных задач, в том числе и нелинейных [12–17]. Незвестная зона контакта определяется с помощью процедуры проекции ближайшей точки [1–6]. Эта процедура основана на так называемом подходе “master–slave” [1–3, 5, 6]. В конечноэлементной реализации контактное взаимодействие могут моделироваться основе таких подходов, как поверхность-в-поверхность, узел-в-поверхность, узел-в-узел. Для удовлетворения условия непроникновения одного тела в другое используются метод множителей Лагранжа [2, 3, 6], метод штрафных функций [2, 3, 6], метод Ницше [2], обобщенный метод множителей Лагранжа [2, 6, 18].

1. Кинематика контактного взаимодействия

Вариационная постановка контактной задачи основана на удовлетворении условию взаимного непроникновения тел. Для построения модели контактного взаимодействия используется “master–slave” алгоритм [2–6] (см. рис. 1). Функцию проникновения определим в виде

$$g_N = (\mathbf{r}^S - \mathbf{r}^M) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{r}^S - \mathbf{r}^M(\xi^1, \xi^2)) \cdot \mathbf{n}(\xi^1, \xi^2), \quad (1)$$

где \mathbf{r}^S – радиус-вектор произвольной slave-точки, $\mathbf{r}^M(\xi^1, \xi^2)$ – радиус-вектор master-поверхности, заданной параметрически, ξ^1, ξ^2 – локальные координаты,

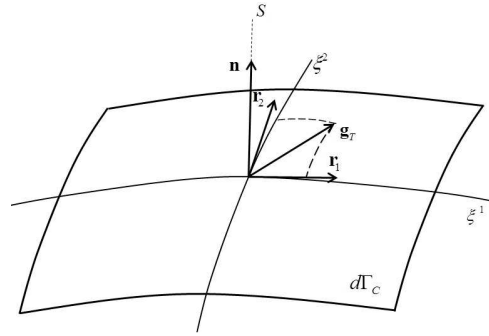


Рис. 1. Проекция slave-точки на master-поверхность

$\mathbf{n}(\xi^1, \xi^2)$ – единичная нормаль к master-поверхности, которая определяется через ковариантный базис [2]:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|}, \quad \mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}^M}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Определенная таким образом функция g_N позволяет судить о наличии контакта тел: если $g_N > 0$, то проникновения нет, то есть тела не контактируют; если $g_N < 0$, то одно тело проникает в другое; если $g_N = 0$, то выполняется условие непроникновения одного тела в другое. Условие непроникновения запишется в виде $g_N = (\mathbf{r}^S - \mathbf{r}^M) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{r}^S - \mathbf{r}^M(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2) \geq 0$, где $(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$ – координаты проекции slave-точки на master-поверхность [2, 6].

В качестве slave-точки будет выступать узел конечноэлементной сетки. Проекцию точки на master-поверхность найдем с помощью алгоритма проекции ближайшей точки, который сводится к решению следующей экстремальной задачи [2–5]:

$$F(\xi^1, \xi^2) = \|\mathbf{r}^S - \mathbf{r}^M(\xi^1, \xi^2)\|^2 = (\mathbf{r}^S - \mathbf{r}^M) \cdot (\mathbf{r}^S - \mathbf{r}^M) \rightarrow \min.$$

Предполагая, что функция F дважды непрерывно дифференцируема, для нахождения минимума функции F применим итерационный метод Ньютона [2, 4], состоящий в решении следующей задачи:

$$\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} - \left(F''(\xi^{(n)}) \right)^{-1} F'(\xi^{(n)}), \quad (2)$$

где $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ – координаты проекции slave-точки на master-поверхность, $\xi^{(0)}$ – заданное начальное приближение, n – номер итерации. Путем решения (2) определяется точка проникновения на master-поверхности $\xi = (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$, а из (1) – величина проникновения g_N .

Из соотношения (1) найдем радиус-вектор slave-точки

$$\mathbf{r}^S = \mathbf{r}^M + g_N \mathbf{n} = \mathbf{r}^M(\xi^1, \xi^2) + g_N \mathbf{n}(\xi^1, \xi^2). \quad (3)$$

Дифференцируя соотношение (3) по времени [2, 5], получим

$$v^S - v^M = \mathbf{r}_\alpha \dot{\xi}^\alpha + \dot{g}_N \mathbf{n} + g_N \dot{\mathbf{n}}, \quad (4)$$

из последнего соотношения можно получить соотношение в вариациях скоростей

$$\delta v^S - \delta v^M = \mathbf{r}_\alpha \delta \dot{\xi}^\alpha + \delta \dot{g}_N \mathbf{n} + g_N \delta \dot{\mathbf{n}}, \quad (5)$$

где $v^S = d\mathbf{r}^S/dt$, $v^M = \partial\mathbf{r}^M/\partial t$, $\dot{\mathbf{n}} = d\mathbf{n}/dt$.

Из условия ортогональности базисных векторов и нормали

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n}) = 0$$

в [2] получены соотношения

$$\dot{\mathbf{n}} = - \left[\mathbf{n} \cdot \left(v_{,\alpha}^M + \mathbf{r}_{\alpha,\beta} \dot{\xi}^\beta \right) \right] a^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta, \quad (6)$$

$$\delta\dot{\mathbf{n}} = - \left[\mathbf{n} \cdot \left(\delta v_{,\alpha}^M + \mathbf{r}_{\alpha,\beta} \delta\dot{\xi}^\beta \right) \right] a^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta, \quad (7)$$

где $a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$, – компоненты метрического тензора.

Из (4), (5) следует выражения для скорости проникновения и ее вариации

$$\dot{g}_N = (v^S - v^M) \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

$$\delta\dot{g}_N = (\delta v^S - \delta v^M) \cdot \mathbf{n}. \quad (9)$$

При контактном взаимодействии с учетом трения рассматриваются случаи залипания и случаи скольжения [2–6, 8]. В случае залипания slave-точка не перемещается относительно master-поверхности. В случае скольжения точка перемещается по касательной к поверхности контакта. Вектор относительной скорости и ее вариация определяются по формулам [2]

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{r}_\alpha \dot{\xi}^\alpha, \quad \delta\dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{r}_\alpha \delta\dot{\xi}^\alpha. \quad (10)$$

Из соотношений (4), (5) путем скалярного умножения на базисный вектор [2, 5] получим

$$\dot{\xi}^\alpha = H_{\alpha\beta}^{-1} [(v^S - v^M) \cdot \mathbf{r}_\beta + g_N \mathbf{n} \cdot v_{,\beta}^M], \quad \delta\dot{\xi}^\alpha = H_{\alpha\beta}^{-1} [(\delta v^S - \delta v^M) \cdot \mathbf{r}_\beta + g_N \mathbf{n} \cdot \delta v_{,\beta}^M],$$

где $H_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - g_N \mathbf{r}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{n}$.

Путем дифференцирования обеих частей (5) по времени проведем линеаризацию вариации скорости проникновения

$$\delta v_{,\alpha}^M \dot{\xi}^\alpha + v_{,\alpha}^M \delta\dot{\xi}^\alpha + \mathbf{r}_{\alpha,\beta} \dot{\xi}^\beta \delta\dot{\xi}^\alpha + \mathbf{r}_\alpha \delta\ddot{\xi}^\alpha + \delta\dot{g}_N \mathbf{n} + \delta g_N \dot{\mathbf{n}} + \dot{g}_N \delta\dot{\mathbf{n}} + g_N \delta\ddot{\mathbf{n}} = 0. \quad (11)$$

Скалярно умножив соотношение (11) на нормаль \mathbf{n} и имея в виду, что

$$\delta\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \delta\ddot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = -\delta\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0,$$

получим линеаризованное соотношение для вариации скорости проникновения:

$$\delta\dot{g}_N = \left(-\delta v_{,\alpha}^M \dot{\xi}^\alpha - \delta v_{,\alpha}^M \delta\dot{\xi}^\alpha - \mathbf{r}_{\alpha,\beta} \dot{\xi}^\beta \delta\dot{\xi}^\alpha \right) \cdot \mathbf{n} - g_N \delta\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}. \quad (12)$$

Линеаризация вариации относительной скорости будет иметь вид

$$\delta\dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{r}_\alpha \delta\ddot{\xi}^\alpha + \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} \delta\dot{\xi}^\alpha = \mathbf{r}_\alpha \delta\ddot{\xi}^\alpha + \left(v_{,\alpha} + \mathbf{r}_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta \right) \delta\dot{\xi}^\alpha, \quad (13)$$

где $\delta\ddot{\xi}^\alpha$ определяется из (11)

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\xi}^\alpha = & a^{\alpha\beta} \left[\mathbf{r}_\beta \cdot \left(v_{,\gamma}^M \delta\dot{\xi}^\gamma + \delta v_{,\gamma}^M \dot{\xi}^\gamma \right) - \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\gamma,\theta} \delta\dot{\xi}^\gamma \dot{\xi}^\theta + \right. \\ & \left. + \left(\delta v^S - \delta v^M - \mathbf{r}_\theta \delta\dot{\xi}^\theta \right) \cdot \left(v_{,\beta}^M + \mathbf{r}_{\beta,\gamma} \dot{\xi}^\gamma \right) + \left(v^S - v^M - \mathbf{r}_\theta \dot{\xi}^\theta \right) \cdot \left(\delta v_{,\beta}^M + \mathbf{r}_{\beta,\gamma} \delta\dot{\xi}^\gamma \right) \right], \end{aligned}$$

$a^{\alpha\beta}$ – компоненты тензора, обратного к метрическому тензору.

2. Вариационное уравнение контактного взаимодействия

Запишем вариацию мощности контактных усилий на возможных скоростях проникновения [19]

$$\delta W_C = \delta W_C^N + \delta W_C^T = \int_{\Gamma_C} \mathbf{T} \cdot (\delta v^S - \delta v^M) d\Gamma, \quad (14)$$

где контактное усилие \mathbf{T} , определенное на Γ_C , раскладывается на нормальную и касательную составляющие [2, 6]:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} + \mathbf{T}_T = N\mathbf{n} + T_T^\alpha \mathbf{r}_\alpha.$$

Для реализации контактного взаимодействия используется метод штрафа [2, 6]. Нормальное усилие представляется в виде

$$N = -\varepsilon_N \langle -g_N \rangle = \begin{cases} \varepsilon_N g_N, & g_N \leq 0, \\ 0, & g_N > 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon_N > 0$ – параметр штрафа. Тогда контактный функционал без учета трения будет иметь вид

$$\delta W_C^N = \int_{\Gamma_C} \varepsilon_N g_N \delta \dot{g}_N d\Gamma. \quad (15)$$

При решении задачи контактного взаимодействия с учетом трения в качестве критерия скольжения используется закон сухого трения Кулона [2, 4–6]:

$$\Phi_C = \|\mathbf{T}_T\| - \mu |N| = 0, \quad (16)$$

где μ – коэффициент скольжения, который зависит от материалов контактирующих тел, $\|\mathbf{T}_T\| = \sqrt{T_{T\alpha} T_{T\beta} a^{\alpha\beta}}$.

Для решения контактной задачи с учетом трения применяется алгоритм обратного отображения [2, 4–6]. На текущем шаге решения считается, что [2, 6]

$$\frac{d\mathbf{T}_T}{dt} = \dot{\mathbf{T}}_T = \varepsilon_T \dot{\mathbf{g}}_T = \varepsilon_T \dot{\xi}^\alpha \mathbf{r}_\alpha.$$

Условие скольжения проверяется локально, для каждой контактной точки при контакте с поверхностью на шаге решения вычисляется пробное касательное усилие [2, 4–6]:

$${}^{k+1}T_{T\alpha} = {}^kT_{T\alpha} + \varepsilon_T a_{\alpha\beta} ({}^{k+1}\xi^\beta - {}^k\xi^\beta),$$

где ε_T – параметр штрафа. Пробные касательные усилия проверяются на удовлетворение условию Кулона (16). Если $\Phi_C = \|\mathbf{T}_T\| - \mu |N| \leq 0$, то точка залипла, а значит,

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \dot{\xi}^\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0.$$

Если $\Phi_C = \|\mathbf{T}_T\| - \mu |N| > 0$, то имеет случай скольжения и

$$\mathbf{T}_T = \mu |N| \mathbf{n}_T, \quad \mathbf{n}_T = \frac{\mathbf{T}_T}{\|\mathbf{T}_T\|} = -\frac{\dot{\mathbf{g}}_T}{\|\dot{\mathbf{g}}_T\|}.$$

Контактный функционал для касательных усилий в случае залипания записывается как

$$\delta W_C^T = \int_{\Gamma_C} T_{T\alpha} \delta \dot{\xi}^\alpha d\Gamma. \quad (17)$$

В случае скольжения контактный функционал будет иметь вид

$$\delta W_C^T = \int_{\Gamma_C} \frac{\mu |N|}{\|\mathbf{T}_T\|} T_{T\alpha} \delta \xi^\alpha d\Gamma. \quad (18)$$

3. Вариационное уравнение деформирования твердого тела

Приведем алгоритм решения квазистатической задачи упругого деформирования твердого тела с учетом больших деформаций [19–24]. В качестве основного уравнения используем уравнение принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации [19]:

$$\delta W = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega - \int_{S^\sigma} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} ds - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega = 0, \quad (19)$$

где $\mathbf{d} = 0.5(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)$ – тензор деформации скорости, $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ – тензор пространственного градиента скорости, Ω – текущий объем; S^σ – часть поверхности, на которой заданы усилия; $\mathbf{t}_n^* = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = p^* \mathbf{n}$, \mathbf{f} – векторы внешнего давления и объемных сил соответственно, $\delta \mathbf{v}$ – вариация вектора скорости перемещения, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши [19],

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}, \quad (20)$$

где J – относительное изменение объема, $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ – левый тензор Коши–Грина, \mathbf{F} – градиент деформаций, ψ – функция удельной потенциальной энергии [19].

Для изотропного материала функция удельной потенциальной энергии есть [19]

$$\psi = \psi(I_{1\mathbf{B}}, I_{2\mathbf{B}}, I_{3\mathbf{B}}),$$

где $I_{1\mathbf{B}} = \text{tr}(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{I}$, $I_{2\mathbf{B}} = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$, $I_{3\mathbf{B}} = \det(\mathbf{B})$ – инварианты тензора \mathbf{B} .

Для изотропного материала, который характеризуется малой сжимаемостью, в определяющих соотношениях выделяют в отдельную группу деформации, вызывающие изменение объема. Для этого вводятся в рассмотрение меры деформации, которые не сопровождаются изменением объема, в следующей форме [19]:

$$\hat{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F}, \quad \hat{\mathbf{B}} = J^{-2/3} \mathbf{B}.$$

Для этих мер третий инвариант равен единице. Тогда удельную потенциальную энергию деформации можно представить в виде двух слагаемых, первое из которых зависит только от изменения объема, а второе – от инвариантов введенных модифицированных мер деформации, $\Psi = \Psi_0(J) + \Psi'(I_{1\hat{\mathbf{B}}}, I_{2\hat{\mathbf{B}}})$.

В частности, можно рассматривать закон умеренных давлений [19, 20], для которого

$$\Psi_0(J) = \frac{K}{2}(J-1)^2, \quad (21)$$

где K – объемный модуль упругости. Кроме того, будем проводить построение физических соотношений для потенциала упругих деформаций для малосжимаемого материала Муни [19, 20], когда

$$\Psi = \alpha_1 (I_{1\hat{\mathbf{B}}} - 3) + \alpha_2 (I_{2\hat{\mathbf{B}}} - 3) + \frac{K}{2}(J-1)^2. \quad (22)$$

Здесь α_1 , α_2 – параметры материала.

Для учета несжимаемости материала используется метод штрафа [19]. В этом случае в соотношении (22) объемный модуль упругости K является параметром штрафа. При $K \rightarrow \infty$, имеем $J \rightarrow 1$.

4. Алгоритм решения

Приравняем нулю вариацию функционала, описывающего деформирование твердого тела с учетом контактного взаимодействия

$$\delta W + \delta W_C = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) является нелинейным, и для его решения используем метод пошагового нагружения [20–25]. Запишем уравнение (23) на $(k + 1)$ -м временном слое

$$\delta^{k+1} W + \delta^{k+1} W_C = 0$$

или

$$\delta^k W + \delta^k W_C + \left(\delta^k \dot{W} + \delta^k \dot{W}_C \right) dt = 0, \quad (24)$$

где функционал (23) записан на k -м шаге нагружения.

Проводя линеаризацию функционала (19), получаем

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \dot{\mathbf{d}} + \frac{j}{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} \right) dV - \\ & - \int_V \frac{j}{J} \mathbf{f} \cdot \delta v dV + \int_{\Gamma_\sigma} \left(\mathbf{t}_n^* \cdot \mathbf{h} - \frac{j}{J} \mathbf{t}_n^* \right) \cdot \delta v d\Gamma - \int_V \dot{\mathbf{f}} \cdot \delta v dV - \int_{\Gamma_\sigma} \dot{\mathbf{t}}_n^* \cdot \delta v d\Gamma + \\ & + \frac{1}{dt} \left\{ \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \mathbf{d} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}_n^* \cdot \delta v d\Gamma - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta v dV \right\} = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\frac{j}{J} = I_{1\mathbf{d}} = \text{tr}(\mathbf{d}) = I \cdot \cdot \mathbf{d}, \quad \delta \dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left(\delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} + \dot{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \delta \dot{\mathbf{F}}^T \right), \quad \dot{\mathbf{t}}_n^* = \dot{\mathbf{p}}^* \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^*.$$

Скорость изменения напряжений Коши вычисляется по формуле

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^T - \boldsymbol{\sigma} I_{1\mathbf{d}},$$

где

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{4}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{B} \partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}.$$

Напряженное состояние находится с помощью соотношения (20). В случае потери устойчивости используется метод продолжения решения по параметру [26].

Проводя линеаризацию контактного функционала (15), получаем

$$\delta \dot{W}_C^N = \int_{\Gamma_C} (\varepsilon_N \delta \dot{g}_N \dot{g}_N + \varepsilon_{Ng} \delta \dot{g}_N) d\Gamma. \quad (26)$$

Линеаризация контактного функционала (17) в случае залипания приводит к соотношению

$$\delta \dot{W}_C^T = \int_{\Gamma_C} \frac{dT_{T\alpha}}{dt} \delta \xi^\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma_C} T_{T\alpha} \delta \ddot{\xi}^\alpha d\Gamma, \quad (27)$$

а в случае скольжения, проводя линеаризацию контактного функционала (18), имеем

$$\delta \dot{W}_C^T = \int_{\Gamma_C} \mu \frac{d|N|}{dt} \mathbf{n}_T \cdot \delta \dot{\mathbf{g}}_T d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mu |N| \frac{d\mathbf{n}_T}{dt} \cdot \delta \dot{\mathbf{g}}_T d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mu |N| \mathbf{n}_T \cdot \delta \ddot{\mathbf{g}}_T d\Gamma. \quad (28)$$

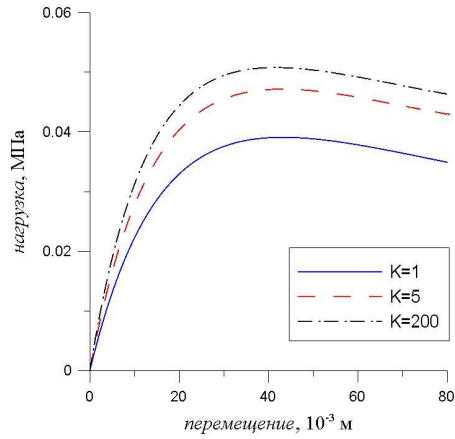


Рис. 2. Зависимость нагрузки от радиальных перемещений внутренних точек оболочки

где

$$\frac{d\mathbf{n}_T}{dt} = -\frac{\varepsilon_T}{\|\mathbf{T}_T\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n}_T \otimes \mathbf{n}_T) \cdot \dot{\mathbf{g}}_T, \quad \frac{d|N|}{dt} = \frac{d}{dt} (\varepsilon_N |g_N|) = -\varepsilon_N \dot{g}_N,$$

\mathbf{I} – единичный тензор [2, 5].

5. Численные примеры

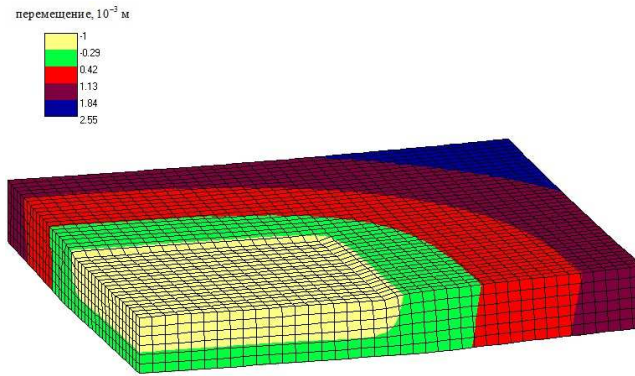
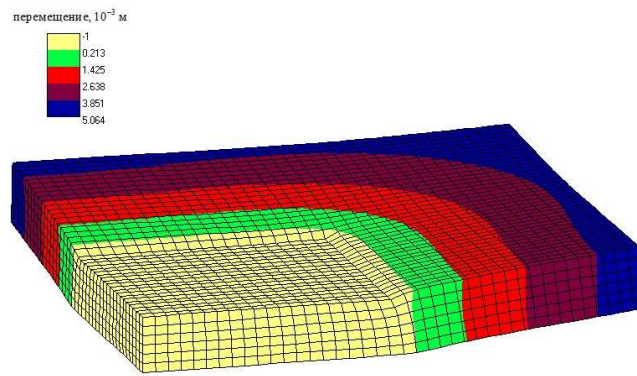
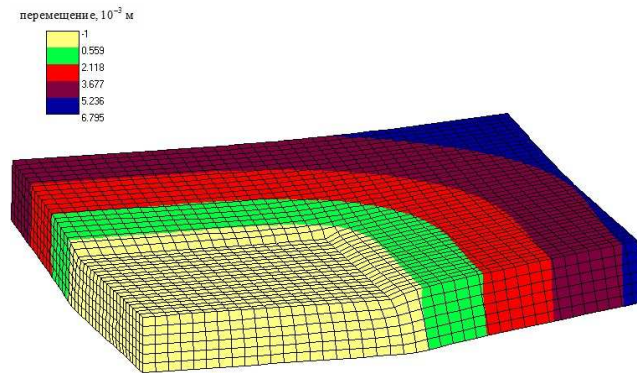
Для решения системы уравнений (25) используется метод конечных элементов [20, 28]. Рассматриваемые твердые тела дискретизируются с помощью 8-узлового конечного элемента. Контактное взаимодействие моделируется на основе пятиузлового конечного элемента, четыре узла которого принадлежат master-поверхности, а один узел является узлом slave-тела [2]. В результате конечноэлементной дискретизации получена система алгебраических уравнений в приращениях:

$$([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_C]) \{\Delta^k \mathbf{u}\} = \{\Delta^k \mathbf{P}\} - \{\mathbf{H}\} + \{\Delta^k \mathbf{P}_C\},$$

где $\Delta^k \mathbf{u} = \Delta^k \mathbf{u}^k$.

Рассмотрена задача об упругом деформировании замкнутой сферической оболочки под действием внутреннего давления, изготовленного из материала Муни со следующими параметрами материала: $\alpha_1 = 0.1863$ МПа, $\alpha_2 = 0.0098$ МПа, при различных значениях объемного модуля упругости: $K = 1$ МПа, $K = 5$ МПа, $K = 200$ МПа. Внутренний радиус оболочки 0.095 м, толщина 0.001 м. В силу симметрии рассмотрена 1/8 часть сферы с сеткой $16 \times 16 \times 4$ разбиения области на конечные элементы. На рис. 2 приведен график зависимости нагрузки от радиальных перемещений точек, лежащих на внутренней поверхности оболочки. Из рис. 2 видно, что при увеличении объемного модуля упругости значение критического давления, при котором происходит потеря устойчивости, увеличивается, а соответствующие моменту потери устойчивости значения перемещений уменьшаются.

Приведем результаты решения контактной задачи о вдавлении квадратного штампа с плоским основанием в упругую плиту, нижнее основание которой ограничено абсолютно жесткой плоскостью. Плита изготовлена из материала Муни со следующими параметрами материала: $\alpha_1 = 0.1863$ МПа, $\alpha_2 = 0.0098$ МПа, $K = 5$ МПа. Штмп рассматривается как абсолютно жесткий, μ_1 и μ_2 – коэффициенты трения между верхним штампом и плитой и между нижней плоскостью

Рис. 3. Деформированное состояние плиты $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ Рис. 4. Деформированное состояние плиты $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0$ Рис. 5. Деформированное состояние плиты $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$

и плитой соответственно. Размеры плиты и штампа $0.08 \times 0.08 \times 0.01$ м, $0.04 \times 0.04 \times 0.01$ м, соответственно. Были рассмотрены следующие случаи: 1) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$; 2) $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0$; 3) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$; 4) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. На рис. 4–6 представлены деформированные состояния четверти плиты с полем вертикальных перемещений. Из рисунков видно, что наличие трения между верхними контактирующими поверхностями увеличивает прогиб плиты, а наличие трения между нижними поверхностями, наоборот, уменьшает значение прогиба.

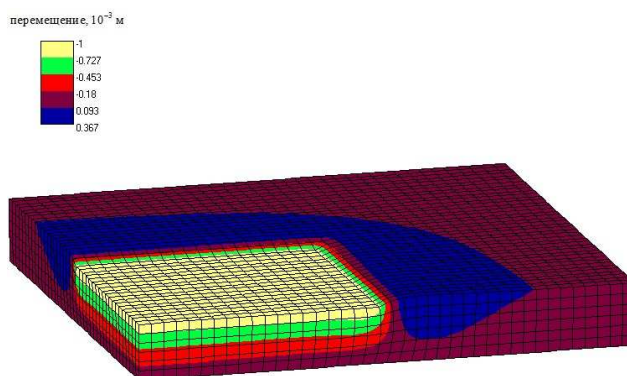


Рис. 6. Деформированное состояние плиты $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$

Заключение

Разработан вычислительный алгоритм исследования несжимаемых и слабосжимаемых гиперупругих трехмерных тел с учетом конечных деформаций в актуальном состоянии. На основе принципа виртуальных мощностей сформулирован контактный функционал на возможных скоростях проникновения одного тела в другое в актуальном состоянии. Получены линейризованные кинематические соотношения в скоростях, построена линейризация контактного функционала. Создан вычислительный алгоритм решения задачи нелинейного деформирования трехмерных тел из гиперупругих материалов с учетом контактного взаимодействия между телами.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 16-11-10299.

Литература

1. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. – John Wiley & Sons Ltd., 2002. – 464 p.
2. *Wriggers P.* Finite element algorithms for contact problems // Archives of Computational Methods in Engineering. – 1995. – V. 2, No 4. – P. 1–49. – doi: 10.1007/BF02736195.
3. *Konyukhov A., Izi R.* Introduction to computational contact mechanics: a geometrical approach. – John Wiley & Sons Ltd., 2015. – 302 p.
4. *Konyukhov A.* Geometrically exact theory for contact interactions. – Karlsruhe: KIT Scientific Publ., 2011. – XIX, 516 p.
5. *Konyukhov A., Schweizerhof K.* Computational Contact Mechanics – Geometrically Exact Theory for Arbitrary Shaped Bodies. – Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2012. – 443 p.
6. *Laurson T.A.* Computational Contact and Impact Mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2002 – XV, 454 p.
7. *Puso M.A., Laurson T.A., Solberg J.* A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2008. – V. 197, No 6–8. – P. 555–566. – doi: 10.1016/j.cma.2007.08.009.
8. *Yang B., Laurson T.A., Meng X.* Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2005. – V. 62, No 9. – P. 1183–1225. – doi: 10.1002/nme.1222.

9. Бурого Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Анализ напряженного состояния контактной системы «диск – лопатка» газотурбинного двигателя // Вычисл. механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 5–16.
10. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core // Russ. Math. – 2017. – V. 61, No 1. – P. 69–75. – doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
11. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii J. Math. – 2017. – V. 38, No 5. – P. 779–793. – doi: 10.1134/S1995080217050055.
12. Al-Dojayli M., Meguid S.A. Accurate modeling of contact using cubic splines // Finite Elements in Analysis and Design. – 2002. – V. 38, No 4. – P. 337–352. – doi: 10.1016/S0168-874X(01)00088-9.
13. Laursen T.A. Convected description in large deformation frictional contact problems // Int. J. Solids Struct. – 1994. – V. 31, No 5. – P. 669–681. – doi: 10.1016/0020-7683(94)90145-7.
14. Parisch H., Lubbing Ch. A formulation of arbitrarily shaped surface elements for three dimensional large deformation contact with friction // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1997. – V. 40, No 18. – P. 3359–3383. – doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19970930)40:18<3359::AID-NME217>3.0.CO;2-5.
15. Puso M.A., Laursen T.A. A 3D contact smoothing method using Gregory patches // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2002. – V. 54, No 8. – P. 1161–1194. – doi: 10.1002/nme.466.
16. Yang B., Laursen T.A., Meng X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2005. – V. 62, No 9. – P. 1183–1225. – doi: 10.1002/nme.1222.
17. Izi R., Konyukhov A., Schweizerhof K. Large penetration algorithm for 3D frictionless contact problems based on a covariant form // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2012. – V. 217–220. – P. 186–196. – doi: 10.1016/j.cma.2012.01.012.
18. Simo J.S., Laursen T.A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction // Computers and Structures. – 1992. – V. 42, No 1. – P. 97–116. – doi: 10.1016/0045-7949(92)90540-G.
19. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. – 268 p.
20. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 465 с.
21. Султанов Л.У. Исследование конечных упругопластических деформаций: алгоритм решения, численные примеры // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 509–517.
22. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical algorithm for investigating large elasto-plastic deformations // J. Eng. Phys. Thermophy. – 2015. – V. 88, No 5. – P. 1280–1288. – doi: 10.1007/s10891-015-1310-7.
23. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids // Mater. Phys. Mech. – 2016. – V. 26, No 1. – P. 30–32.
24. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2013. – № 1. – P. 81–93. – doi: 10.15593/pern.mech/2013.1.81-93.
25. Абдрахманова А.И., Султанов Л.У. Численное исследование нелинейных деформаций с учетом контактного взаимодействия // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 423–434.

26. *Golovanov A.I., Sultanov L.U.* Postbuckling state analysis of three-dimensional bodies taking into account finite strains // Russ. Aeronaut. – 2008. – V. 51, No 4. – P. 362–368. – doi: 10.3103/S106879980804003X.
27. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. – Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1996. – XIV, 1037 p.
28. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. V. 1, 2. – London, N. Y.: McGraw-Hill, 1989.

Поступила в редакцию
15.03.18

Абдрахманова Алиса Ильгамовна, аспирант кафедры теоретической механики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *A061093@mail.ru*

Султанов Ленар Усманович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2018, vol. 160, no. 4, pp. 644–656

Numerical Investigation of Hyperelastic Solids with Contact Interaction

*A.I. Abdrakhmanova**, *L.U. Sultanov***

*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *A061093@mail.ru, **Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

Received March 15, 2018

Abstract

The paper is devoted to the construction of a computational algorithm for the investigation of hyperelastic solids with the contact interaction. In the framework of the previously developed algorithm for the investigation of large deformations of three-dimensional solids, the solutions of contact problems based on the equation of the principle of virtual work in velocity term have been considered. Contact interaction has been modeled on the basis of the “master-slave” approach. The closest point projection procedure has been used to find the contact area. A contact functional has been built on the basis of the principle of virtual work in velocity term within the penalty method. The linearization of the kinematic relations and contact functional are based on the capacity on the possible velocities of penetration. The solution of the nonlinear system of equations has been obtained using the method of step loading. The numerical implementation is based on the finite element method.

Keywords: finite deformations, contact interaction, penalty method

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10299).

Figure Captions

- Fig. 1. The projection of slave point on the master surface.
Fig. 2. Deformed state of the plate $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$.
Fig. 3. Dependence of the load on the radial displacements of the inner points of the shell.
Fig. 4. Deformed state of the plate $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0$.
Fig. 5. Deformed state of the plate $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$.
Fig. 6. Deformed state of the plate $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$.

References

1. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons Ltd., 2002. 464 p.
2. Wriggers P. Finite element algorithms for contact problems. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 1995, vol. 24, no. 4, pp. 1–49. doi: 10.1007/BF02736195.
3. Konyukhov A., Izi R. *Introduction to Computational Contact Mechanics: A Geometrical Approach*. John Wiley & Sons Ltd., 2015. 302 p.
4. Konyukhov A. *Geometrically Exact Theory for Contact Interactions*. Karlsruhe, KIT Sci. Publ., 2011. XIX, 516 p.
5. Konyukhov A., Schweizerhof K. *Computational Contact Mechanics – Geometrically Exact Theory for Arbitrary Shaped Bodies*. Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2012. 443 p.
6. Laursen T.A. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2002. XV, 454 p.
7. Puso M.A., Laursen T.A., Solberg J. A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2008, vol. 197, nos. 6–8, pp. 555–566. doi: 10.1016/j.cma.2007.08.009.
8. Yang B., Laursen T.A., Meng X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2005, vol. 62, no. 9, pp. 1183–1225. doi: 10.1002/nme.1222.
9. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Analysis of stress state of GTE contact system “disk-blade”. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 5–16. (In Russian)
10. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 69–75. doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
11. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 779–793. doi: 10.1134/S1995080217050055.
12. Al-Dojayli M., Meguid S.A. Accurate modeling of contact using cubic splines. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2002, vol. 38, no. 4, pp. 337–352. doi: 10.1016/S0168-874X(01)00088-9.
13. Laursen T.A. Convected description in large deformation frictional contact problems. *Int. J. Solids Struct.*, 1994, vol. 31, no. 5, pp. 669–681. doi: 10.1016/0020-7683(94)90145-7.
14. Parisch H. A formulation of arbitrarily shaped surface elements for three dimensional large deformation contact with friction. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1997, vol. 40, no. 18, pp. 3359–3383. doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19970930)40:18<3359::AID-NME217>3.0.CO;2-5.

15. Puso M.A. A 3D contact smoothing method using Gregory patches. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2002, vol. 54., no. 8, pp. 1161–1194. doi: 10.1002/nme.466.
16. Yang B., Laursen T.A., Meng X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2005, vol. 62, no. 9, pp. 1183–1225. doi: 10.1002/nme.1222.
17. Izi R., Konyukhov A., Schweizerhof K. Large penetration algorithm for 3D frictionless contact problems based on a covariant form. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2012, vols. 217–220, pp. 186–196. doi: 10.1016/j.cma.2012.01.012.
18. Simo J.S., Laursen T.A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comput. Struct.*, 1992, vol. 42, no. 1, pp. 97–116. doi: 10.1016/0045-7949(92)90540-G.
19. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997. 268 p.
20. Oden J.T. *Finite Elements of Nonlinear Continua*. New York, McGraw-Hill, 1972. 442 p.
21. Sultanov L.U. Analysis of large elastic-plastic deformations: Integration algorithm and numerical examples. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 509–517. (In Russian)
22. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical algorithm for investigating large elasto-plastic deformations. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2015, vol. 88, no. 5, pp. 1280–1288. doi: 10.1007/s10891-015-1310-7.
23. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids. *Mater. Phys. Mech.*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 30–32.
24. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by FEM. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ.: Mekh.*, 2013, no. 1, pp. 81–93. doi: 10.15593/perm.mech/2013.1.81-93. (In Russian)
25. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of nonlinear deformations with contact interaction. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 423–434. (In Russian)
26. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Postbuckling elastoplastic state analysis of three-dimensional bodies taking into account finite strains. *Russ. Aeronaut.*, 2008, vol. 51, no. 4, pp. 362–368. doi: 10.3103/S106879980804003X.
27. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1996. XIV, 1037 p.
28. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method*. Vols. 1, 2. London, New York, McGraw-Hill, 1989.

⟨ **Для цитирования:** Абдрахманова А.И., Султанов Л.У. Алгоритм исследования гиперупругих тел с учетом контактного взаимодействия // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 644–656. ⟩

⟨ **For citation:** Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of hyperelastic solids with contact interaction. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 644–656. (In Russian) ⟩