

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ ℝ-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Т.В. Никоненкова

Аннотация

В работе построено замкнутое аналитическое решение задачи ℝ-линейного сопряжения для бесконечной плоской гетерогенной среды, состоящей из трех различных однородных компонентов, разделенных ветвями двух софокусных гипербол.

Ключевые слова: гетерогенная среда, задача ℝ-линейного сопряжения, голоморфные функции.

Введение

Изучение плоских и цилиндрических гетерогенных структур, как известно [1], сводится к следующей математической модели: требуется построить плоскопараллельное стационарное поле $\mathbf{v}(x, y) = (v_x, v_y) = \mathbf{v}_p(x, y)$, $(x, y) \in S_p$, $p = 1, N$, являющееся потенциальным и соленоидальным в каждой изотропной фазе S_p рассматриваемой композитной среды:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_p(x, y) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_p(x, y) = 0. \quad (1)$$

Всюду на границе контакта \mathcal{L} разнородных фаз S_p и S_q нормальные составляющие предельных значений векторов \mathbf{v}_p , \mathbf{v}_q совпадают, а касательные пропорциональны:

$$[\mathbf{v}_p(x, y)]_n = [\mathbf{v}_q(x, y)]_n, \quad \rho_p [\mathbf{v}_p(x, y)]_\tau = \rho_q [\mathbf{v}_q(x, y)]_\tau, \quad (x, y) \in \mathcal{L}, \quad (2)$$

где $\rho_p \geq 0$ – коэффициент сопротивления материала фазы S_p .

В настоящей статье будет продолжено начатое в работах [2–4] изучение среды с гиперболической линией раздела разнородных компонентов. В указанных выше работах была рассмотрена двухфазная среда в случае, когда линией контакта разнородных фаз служат одна или обе ветви гиперболы. Нами будет изучена трехфазная среда в случае, когда ее разнородные компоненты сопрягаются вдоль двух ветвей, вообще говоря, различных, но софокусных гипербол.

1. Постановка задачи

В дальнейшем физическая плоскость (x, y) интерпретируется как плоскость комплексного переменного $z = x + i y$, а вектор \mathbf{v} – как комплекснозначная функция $\mathbf{v}(z) = v_x + i v_y$ комплексного аргумента $z = x + i y$.

Рассмотрим трехфазную среду в предположении, что линия раздела фаз состоит из двух ветвей софокусных гипербол, которые определены уравнениями

$$\frac{x^2}{a_j^2} - \frac{y^2}{b_j^2} = 1, \quad a_j^2 + b_j^2 = c^2, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

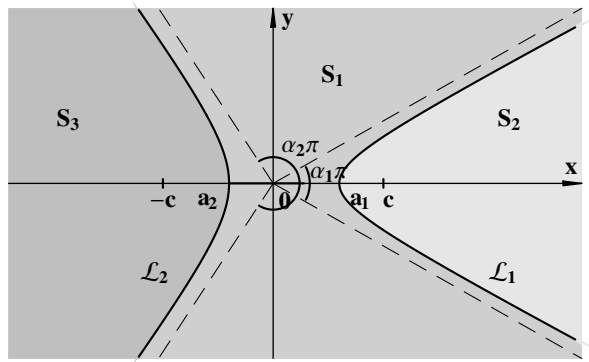


Рис. 1. Среда с двумя гиперболическими включениями

где a_j, b_j – заданные вещественные параметры, причем для удобства дальнейших выкладок будем считать, что $a_1 > 0$, $b_{1,2} > 0$, а $a_2 < 0$.

Пусть S_1, S_2, S_3 – разнородные области, указанные на рис. 1. В силу условий (1) комплексно сопряженная с $\mathbf{v}(z)$ функция $v(z) = v_p(z) = v_{px}(x, y) - i v_{py}(x, y)$ голоморфна в каждом из компонентов S_p , $p = 1, 2, 3$. В замыкании \bar{S}_p функция $v(z)$ непрерывна всюду, за исключением разве лишь бесконечно удаленной точки, где у нее допускается наличие особенности более слабой, чем полюс первого порядка.

Задача (1), (2) эквивалентна [1, с. 83] следующей задаче \mathbb{R} -линейного сопряжения:

$$\begin{cases} v_1(t) = A_{12}v_2(t) - B_{12}[t'(s)]^{-2}\overline{v_2(t)}, & t \in \mathcal{L}_1, \\ v_1(t) = A_{13}v_3(t) - B_{13}[t'(s)]^{-2}\overline{v_3(t)}, & t \in \mathcal{L}_2, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$A_{1q} = \frac{\rho_1 + \rho_q}{2\rho_1}, \quad B_{1q} = \frac{\rho_1 - \rho_q}{2\rho_1}, \quad q = 2, 3. \quad (5)$$

$t(s)$ – функция точки контура $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ от натурального параметра s , производная $t'(s) = \exp(i\alpha(s))$ совпадает с единичным вектором касательной к \mathcal{L} в точке $t = t(s)$ ($\alpha(s)$ – угол, который образует касательная к дуге \mathcal{L} в точке t с вещественной осью).

Решение задачи (4) отыскивается в классе функций, для которых в окрестности бесконечно удаленной точки справедлива оценка

$$|v(z)| = o(|z|) \quad \text{при} \quad |z| \gg 1. \quad (6)$$

2. Решение задачи (4)–(6) в случае двух разнородных софокусных гиперболических включений

Прежде всего следует отметить, что ввиду симметричности линии $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ относительно действительной оси и вещественности коэффициентов (5), наряду функцией $v(z)$, решением задачи (4), (6) будет и функция $\overline{v(\bar{z})}$. Следовательно, справедливо представление

$$v(z) = v_R(z) + v_I(z), \quad (7)$$

где $v_R(z) = (v(z) + \overline{v(\bar{z})})/2$ и $v_I(z) = (v(z) - \overline{v(\bar{z})})/2$ – решения рассматриваемой задачи, удовлетворяющие соответственно условиям

$$\overline{v_R(\bar{z})} \equiv v_R(z) \quad \text{и} \quad \overline{v_I(\bar{z})} \equiv -v_I(z). \quad (8)$$

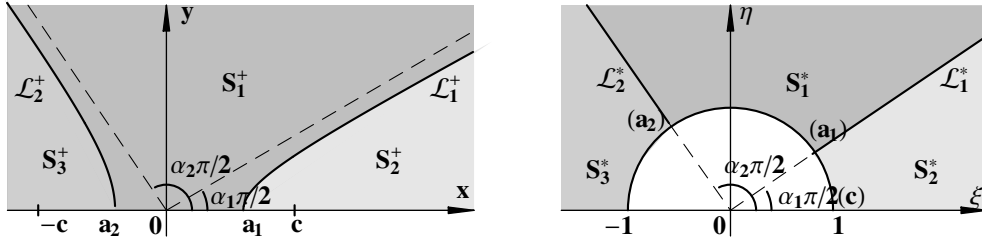


Рис. 2. Верхняя полу плоскость плоскости z (слева) и ее образ в плоскости ζ при отображении с помощью функции (9) (справа)

В силу (8) при построении решений $v_R(z)$, $v_I(z)$ достаточно рассмотреть лишь верхнюю полу плоскость $\mathbb{C}^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$. Для верхней половины $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cap \mathbb{C}^+$, определенной параметрическим уравнением:

$$\begin{aligned} t &= a_1 \text{ch } \varphi + i b_1 \text{sh } \varphi, & \mathcal{L}^+_1, & \quad 0 < \varphi < \infty, \\ t &= a_2 \text{ch } \varphi + i b_2 \text{sh } \varphi, & \mathcal{L}^+_2, & \quad 0 < \varphi < \infty, \end{aligned}$$

зависимость функции $t'(s)$ от t определяется ([3]) по формуле:

$$\frac{dt}{ds} = (t^2 - c^2)^{1/4} \left(\cos \pi \alpha_j \sqrt{t^2 - c^2} - i t \sin \pi \alpha_j \right)^{-1/2}, \quad j = 1, 2,$$

где $a_j + i b_j = c \exp(i \pi \alpha_j / 2)$, $j = 1, 2$, $a_1, b_1, b_2, c > 0$, $a_2 < 0$.

Рассмотрим функцию

$$\zeta(z) = \frac{1}{c} \left(z + \sqrt{z^2 - c^2} \right), \quad (9)$$

обратную к функции Жуковского

$$z(\zeta) = \frac{c}{2} \left(\zeta + 1/\zeta \right). \quad (10)$$

Функция (9) конформно отображает (рис. 2) полу плоскость \mathbb{C}^+ на область S^* – верхнюю полу плоскость с выброшенным единичным полукругом. Лучи $\mathcal{L}_j^* = \{\zeta : \arg \zeta = \pi \alpha_j / 2, |\zeta| > 1\}$, $j = 1, 2$ разделяют S^* на области S_k^* , $k = 1, 2, 3$, прообразами которых являются верхние половины, S_k^+ , областей S_1, S_2 и S_3 соответственно. Для функции $[t'(s)]^{-2}$ в плоскости ζ с учетом равенств

$$\sqrt{t^2 - c^2} = \frac{c}{2} (\tau - 1/\tau), \quad t = \frac{c}{2} (\tau + 1/\tau)$$

справедливо представление

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)^{-2} = \frac{(\tau - 1/\tau) \cos \pi \alpha_j - i (\tau + 1/\tau) \sin \pi \alpha_j}{\tau - 1/\tau} = \frac{\overline{\tau - 1/\tau}}{\tau - 1/\tau}, \quad \tau \in \mathcal{L}_j^*, \quad j = 1, 2.$$

На основании полученного соотношения и на том, что выражение $\zeta - 1/\zeta$ вещественно на действительной оси и чисто мнимо на единичной окружности, относительно функции

$$V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta) v_R \left(\frac{c}{2} \left(\zeta + 1/\zeta \right) \right) \quad (11)$$

придем к краевой задаче

$$\begin{aligned} V_1(\tau) &= A_{12}V_2(\tau) - B_{12}\overline{V_2(\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{L}_1^*; \\ V_1(\tau) &= A_{13}V_3(\tau) - B_{13}\overline{V_3(\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{L}_2^*; \\ \operatorname{Im} V(\xi) &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]; \\ \operatorname{Re} V(\tau) &= 0, \quad |\tau| = 1, \operatorname{Im} \tau > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (6) и определения (11) следует, что решение задачи (12) необходимо отыскивать в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$|V(\zeta)| = o(|\zeta|^2), \quad |\zeta| \gg 1; \quad V(\pm 1) = 0. \quad (13)$$

Продолжим с помощью принципа симметрии Римана–Шварца функцию $V(\zeta)$ из S^* в полуплоскость \mathbb{C}^+ на основании последнего условия (12). Для продолженной кусочно-голоморфной функции сохраним прежнее обозначение:

$$\begin{aligned} V(\zeta) &= \{V_2(\zeta), 0 < \arg \zeta < \pi\alpha_1/2; \\ &V_1(\zeta), \pi\alpha_1/2 < \arg \zeta < \pi\alpha_2/2; V_3(\zeta), \pi\alpha_2/2 < \arg \zeta < \pi\}. \end{aligned}$$

Ввиду вещественности коэффициентов первых двух граничных условий (12) придем к краевой задаче

$$\begin{aligned} V_1(\tau) &= A_{12}V_2(\tau) - B_{12}\overline{V_2(\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{L}'_1 = \{\zeta : \arg \zeta = \pi\alpha_1/2\}, \\ V_1(\tau) &= A_{13}V_3(\tau) - B_{13}\overline{V_3(\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{L}'_2 = \{\zeta : \arg \zeta = \pi\alpha_2/2\}, \\ \operatorname{Im} V(\xi) &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (14)$$

с дополнительными условиями (13), и кроме них должны еще выполняться следующие два:

$$|V(\zeta)| = o(|\zeta|^{-2}), \quad |\zeta| \ll 1; \quad \overline{V(1/\bar{\zeta})} \equiv -V(\zeta). \quad (15)$$

Рассмотрим фиксированную в полуплоскости \mathbb{C}^+ ту ветвь функции $\omega(\zeta) = \zeta^\gamma$ с действительным показателем γ , которая вещественна (положительна) на положительной полуоси. Для выбранной ветви справедливо тождество $\overline{\omega(1/\bar{\zeta})} \equiv 1/\omega(\zeta)$, и поэтому, как легко видеть, функция

$$V(\zeta) = \begin{cases} V_1(\zeta) = c_{11}(e^{i\pi\varphi}\zeta^\gamma - e^{-i\pi\varphi}\zeta^{-\gamma}), & \pi\alpha_1/2 \leq \arg \zeta \leq \pi\alpha_2/2, \\ V_2(\zeta) = c_{12}(\zeta^\gamma - \zeta^{-\gamma}), & 0 \leq \arg \zeta \leq \pi\alpha_1/2, \\ V_3(\zeta) = c_{13}(e^{-i\pi\gamma}\zeta^\gamma - e^{i\pi\gamma}\zeta^{-\gamma}), & \pi\alpha_2/2 \leq \arg \zeta \leq \pi \end{cases} \quad (16)$$

удовлетворяет при произвольных вещественных $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \varphi \in (-1/2, 1/2)$ и $\gamma \in (0, 2)$ всем условиям (13)–(15), за исключением первых двух граничных условий (14). Подставляя в последние функцию (16), с учетом справедливых на \mathcal{L}'_j равенств $\omega(\tau) = r^\gamma e^{i\pi\gamma\alpha_j/2}$ получим, приравнявая коэффициенты при $r^{\pm\gamma}$, относительно неопределенных констант $\gamma, \varphi, c_{11}, c_{12}$ и c_{13} систему вида

$$\begin{cases} c_{11} \cos[\pi(\varphi + \gamma\alpha_1/2)] - (A_{12} - B_{12})c_{12} \cos[\pi\gamma\alpha_1/2] = 0, \\ c_{11} \sin[\pi(\varphi + \gamma\alpha_1/2)] - (A_{12} + B_{12})c_{12} \sin[\pi\gamma\alpha_1/2] = 0, \\ c_{11} \cos[\pi(\varphi + \gamma\alpha_2/2)] - (A_{13} - B_{13})c_{13} \cos[\pi\gamma(1 - \alpha_2/2)] = 0, \\ c_{11} \sin[\pi(\varphi + \gamma\alpha_2/2)] + (A_{13} + B_{13})c_{13} \sin[\pi\gamma(1 - \alpha_2/2)] = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $0 < \alpha_1, 2 - \alpha_2 < 1$.

Заметим, что данную систему можно разбить на две однородные подсистемы линейных уравнений относительно c_{11} , c_{12} и c_{11} , c_{13} соответственно. Эти подсистемы, как известно, имеют нетривиальные решения лишь в случае, когда их определители обращаются в нуль. Таким образом, приходим к следующей системе уравнений относительно γ и φ :

$$\begin{cases} \sin[\pi\varphi] - \Delta_1 \sin[\pi(\varphi + \gamma\alpha_1)] = 0, \\ \sin[\pi(\gamma + \varphi)] - \Delta_2 \sin[\pi(\varphi + \gamma(\alpha_2 - 1))] = 0, \end{cases} \quad (18)$$

где $\Delta_1 = B_{12}/A_{12}$, $\Delta_2 = B_{13}/A_{13}$. Уравнения системы (18) можно переписать в эквивалентной форме

$$\begin{cases} (1 - \Delta_1 \cos[\pi\gamma\alpha_1]) \sin[\pi\varphi] - \Delta_1 \sin[\pi\gamma\alpha_1] \cos[\pi\varphi] = 0, \\ (\cos[\pi\gamma] - \Delta_2 \cos[\pi\gamma(\alpha_2 - 1)]) \sin[\pi\varphi] + (\sin[\pi\gamma] - \Delta_2 \sin[\pi\gamma(\alpha_2 - 1)]) \cos[\pi\varphi] = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Система (19) является также линейно-однородной относительно $\sin[\pi\varphi]$, $\cos[\pi\varphi]$, и для ее нетривиальной разрешимости необходимо выполнение условия

$$\Delta_1 \Delta_2 \sin[\pi\gamma(\alpha_2 - 1 - \alpha_1)] - (\Delta_1 \sin[\pi\gamma(1 - \alpha_1)] + \Delta_2 \sin[\pi\gamma(\alpha_2 - 1)]) + \sin[\pi\gamma] = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (20) необходимо отыскивать на интервале $(0, 2)$, при этом надо учитывать, что параметры α_1 и $2 - \alpha_2$ принимают значения в интервале $(0, 1)$, а $|\Delta_j| < 1$, поскольку $A_{1j} > |B_{1j}|$, $j = 2, 3$.

Если γ есть решение уравнения (20), то величина $\varphi \in (-1/2, 1/2)$ определяется из системы (19) следующим образом:

$$\varphi = \varphi_1(\gamma) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\Delta_1 \sin[\pi\gamma\alpha_1]}{1 - \Delta_1 \cos[\pi\gamma\alpha_1]}. \quad (21)$$

Построение функции $v_I(z)$, удовлетворяющей второму условию (8), приводит к представлению

$$V(\zeta) = \begin{cases} V_1(\zeta) = i c_{21}(e^{i\pi\varphi\zeta^\gamma} - e^{-i\pi\varphi\zeta^{-\gamma}}), & \pi\alpha_1/2 \leq \arg \zeta \leq \pi\alpha_2/2, \\ V_2(\zeta) = i c_{22}(\zeta^\gamma - \zeta^{-\gamma}), & 0 \leq \arg \zeta \leq \pi\alpha_1/2, \\ V_3(\zeta) = i c_{23}(e^{-i\pi\varphi\zeta^\gamma} - e^{i\pi\varphi\zeta^{-\gamma}}), & \pi\alpha_2/2 \leq \arg \zeta \leq \pi, \end{cases} \quad (22)$$

вместо (16) отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\begin{cases} c_{21} \cos[\pi(\varphi + \gamma\alpha_1/2)] - (A_{12} + B_{12})c_{22} \cos[\pi\gamma\alpha_1/2] = 0, \\ c_{21} \sin[\pi(\varphi + \gamma\alpha_1/2)] - (A_{12} - B_{12})c_{22} \sin[\pi\gamma\alpha_1/2] = 0, \\ c_{21} \cos[\pi(\varphi + \gamma\alpha_2/2)] - (A_{13} + B_{13})c_{23} \cos[\pi\gamma(1 - \alpha_2/2)] = 0, \\ c_{21} \sin[\pi(\varphi + \gamma\alpha_2/2)] + (A_{13} - B_{13})c_{23} \sin[\pi\gamma(1 - \alpha_2/2)] = 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} (1 + \Delta_1 \cos[\pi\gamma\alpha_1]) \sin[\pi\varphi] + \Delta_1 \sin[\pi\gamma\alpha_1] \cos[\pi\varphi] = 0, \\ (\cos[\pi\gamma] + \Delta_2 \cos[\pi\gamma(\alpha_2 - 1)]) \sin[\pi\varphi] + (\sin[\pi\gamma] + \Delta_2 \sin[\pi\gamma(\alpha_2 - 1)]) \cos[\pi\varphi] = 0, \end{cases} \quad (24)$$

$$\Delta_1 \Delta_2 \sin[\pi\gamma(\alpha_2 - 1 - \alpha_1)] + \Delta_1 \sin[\pi\gamma(1 - \alpha_1)] + \Delta_2 \sin[\pi\gamma(\alpha_2 - 1)] + \sin[\pi\gamma] = 0 \quad (25)$$

Уравнения (20) и (25) отличаются лишь знаком перед вторым и третьим слагаемым. Величина $\varphi \in (-1/2, 1/2)$ определяется в данном случае из соотношения

$$\varphi = \varphi_2(\gamma) = -\frac{1}{\pi} \arctan \frac{\Delta_1 \sin[\pi\gamma\alpha_1]}{1 + \Delta_1 \cos[\pi\gamma\alpha_1]}, \quad (26)$$

где $0 < \gamma < 2$ – решение уравнения (25).

Уравнения (20) и (25) в общем случае допускают лишь численное решение. Проведенный численный анализ показал, что при всех допустимых значениях параметров $\alpha_{1,2}$ и $\Delta_{1,2}$ каждое из этих уравнений имеет на интервале $(0, 2)$ от одного до двух корней, то есть в совокупности оба уравнения имеют не менее двух, но не более четырех корней.

Рассмотрим некоторые предельные случаи уравнений (20) и (25). Пусть $\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow 1$, то есть $\rho_2, \rho_3 \rightarrow 0$ или $\rho_1 \rightarrow \infty$, тогда уравнения (20) и (25) преобразуются соответственно к виду:

$$\sin[\pi\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)](\cos[\pi\gamma(2 + \alpha_1 - \alpha_2)/2] \mp \cos[\pi\gamma(2 - \alpha_1 - \alpha_2)/2]) = 0,$$

где $0 < \gamma < 2$, $0 < \alpha_1, 2 - \alpha_2 < 1$. Заметим, что при $\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow -1$ ($\rho_1 \rightarrow 0$ или $\rho_2, \rho_3 \rightarrow \infty$) последние уравнения меняются местами. Первое из рассматриваемых уравнений, соответствующее уравнению (20), имеет на интересующем нас интервале лишь один корень $\gamma = 2/(\alpha_2 - \alpha_1)$ при $1 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2$. Решение второго уравнения, соответствующего уравнению (25), в зависимости от величин α_1, α_2 определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \gamma &= 2/(\alpha_2 - \alpha_1), & \text{если } 1 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2, \\ \gamma &= 1/(2 - \alpha_2), & \text{если } 1 < \alpha_2 < 3/2, \\ \gamma &= 1/\alpha_1, & \text{если } 1/2 < \alpha_1 < 1, \end{aligned}$$

причем только два из приведенных выше условий могут выполняться одновременно.

В случае $\Delta_1 \rightarrow \mp 1, \Delta_2 \rightarrow \pm 1$ ($\rho_2 \rightarrow \infty$ & $\rho_3 \rightarrow 0$ или $\rho_2 \rightarrow 0$ & $\rho_3 \rightarrow \infty$) уравнения (20), (25) приводятся к виду:

$$\cos[\pi\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)/2](\sin[\pi\gamma(2 + \alpha_1 - \alpha_2)/2] \mp \sin[\pi\gamma(2 - \alpha_1 - \alpha_2)/2]) = 0.$$

Решения последних уравнений выписываются по формулам, аналогичным приведенным выше.

Покажем теперь, что если $1 - \alpha_1 = p_1/q_1$, $\alpha_2 - 1 = p_2/q_2$ – рациональные числа ($p_{1,2}/q_{1,2} > 0$ – правильные дроби), то уравнения (20), (25) приводятся к алгебраическим. Действительно, пусть $l = \text{НОК}\{q_1, q_2\}$, тогда $1 - \alpha_1 = p_1/q_1 = s_1/l$, $\alpha_2 - 1 = p_2/q_2 = s_2/l$, $\alpha_2 - 1 - \alpha_1 = (s_1 + s_2 - l)/l$ и относительно $x = \cos(\pi\gamma/l)$ приходим к алгебраическому уравнению следующего вида:

$$\begin{aligned} t\Delta_1\Delta_2 \sum_{m=0}^{[(tk_1-1)/2]} (-1)^m \binom{2m+1}{tk_1} x^{tk_1-2m-1} (1-x^2)^m \pm \\ \pm \left[\Delta_1 \sum_{m=0}^{[(s_1-1)/2]} (-1)^m \binom{2m+1}{s_1} x^{s_1-2m-1} (1-x^2)^m + \right. \\ \left. + \Delta_2 \sum_{m=0}^{[(s_2-1)/2]} (-1)^m \binom{2m+1}{s_2} x^{s_2-2m-1} (1-x^2)^m \right] + \\ + \sum_{m=0}^{[(l-1)/2]} (-1)^m \binom{2m+1}{l} x^{l-2m-1} (1-x^2)^m = 0. \end{aligned}$$

Здесь $t = \text{sign}(\alpha_2 - 1 - \alpha_1)$, $k_1 = s_1 + s_2 - l$, а квадратные скобки означают целую часть числа. Это уравнение разрешимо при $l \leq 5$, и в следующих наиболее простых случаях оно имеет вид:

$$\begin{aligned} 2x \pm (\Delta_1 + \Delta_2) &= 0 & (\alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 1/2); \\ 4x^2 \pm 2(\Delta_1 + \Delta_2)x + \Delta_1\Delta_2 - 1 &= 0 & (\alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 1/3); \\ 4x^2 \pm (\Delta_1 + \Delta_2) - \Delta_1\Delta_2 - 1 &= 0 & (\alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 2/3); \\ 4x^2 \pm (\Delta_1 + 2\Delta_2x) - 1 &= 0 & (1 - \alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 1/3); \\ 4x^2 \pm (2\Delta_1x + \Delta_2) - 1 &= 0 & (1 - \alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 2/3). \end{aligned}$$

К решению кубических уравнений сводятся случаи $1 - \alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 1/4(3/4)$; $\alpha_1 = 2 - \alpha_2 = 3/4(1/4)$; $\alpha_1 = 3/4$, $2 - \alpha_2 = 1/2(1/2, 3/4)$; $\alpha_1 = 1/2$, $2 - \alpha_2 = 1/4(1/4, 1/2)$. Для других значений α_1 , α_2 получаются уравнения более высоких порядков.

Решая систему (17) с учетом соотношения (18), найдем

$$c_{11} = c_1, \quad c_{12} = c_1 \Lambda_1(\gamma, \varphi_1(\gamma)), \quad c_{13} = c_1 \Lambda_2(\gamma, \varphi_1(\gamma)), \quad (27)$$

где γ определяется из уравнения (20).

Решение системы (23) может быть записано в виде

$$c_{21} = c_2, \quad c_{22} = -c_2 \Lambda_1(\gamma, \varphi_2(\gamma)), \quad c_{23} = -c_2 \Lambda_2(\gamma, \varphi_2(\gamma)). \quad (28)$$

Здесь γ – решение уравнения (25). В (27), (28) c_1 и c_2 – произвольные действительные параметры,

$$\Lambda_1(\gamma, \varphi) = \frac{\sin[\pi\varphi]}{B_{12} \sin[\pi\gamma\alpha_1]}, \quad \Lambda_2(\gamma, \varphi) = -\frac{\sin[\pi(\varphi + \gamma)]}{B_{13} \sin[\pi\gamma(2 - \alpha_2)]}. \quad (29)$$

Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 1. В невырожденных и во всех непередельных случаях $0 < |\Delta_{j-1}| = |B_{1j}|/A_{1j} < 1$ ($j = 2, 3$) задача (4) для двух гиперболических включений (3) при $\alpha_1/2 = \pi^{-1} \arg(a_1 + ib_1) \in (0, 1/2)$, $\alpha_2/2 = \pi^{-1} \arg(a_2 + ib_2) \in (1/2, 1)$ имеет решение вида

$$v_1(z) = \sum_{k=1}^2 C_{1k} \chi_1(z; \gamma_{1k}; \varphi_1(\gamma_{1k})) + i \sum_{k=1}^2 C_{2k} \chi_1(z; \gamma_{2k}; \varphi_2(\gamma_{2k})), \quad z \in S_1,$$

$$v_2(z) = \sum_{k=1}^2 C_{1k} \Lambda_1(\gamma_{1k}; \varphi_1(\gamma_{1k})) \chi_2(z; \gamma_{1k}) - i \sum_{k=1}^2 C_{2k} \Lambda_1(\gamma_{2k}; \varphi_2(\gamma_{2k})) \chi_2(z; \gamma_{2k}), \quad z \in S_2,$$

$$v_3(z) = \sum_{k=1}^2 C_{1k} \Lambda_2(\gamma_{1k}; \varphi_1(\gamma_{1k})) \chi_2(-z; \gamma_{1k}) - i \sum_{k=1}^2 C_{2k} \Lambda_2(\gamma_{2k}; \varphi_2(\gamma_{2k})) \chi_2(-z; \gamma_{2k}), \quad z \in S_3,$$

где γ_{1k} , $k = 1, 2$, – корни уравнения (20), а γ_{2k} , $k = 1, 2$, – корни уравнения (25); однозначные ветви функций

$$\begin{aligned} \chi_1(z; \gamma; \varphi) &= \frac{e^{i\pi\varphi}(z + \sqrt{z^2 - c^2})^\gamma - e^{-i\pi\varphi}(z - \sqrt{z^2 - c^2})^\gamma}{2\sqrt{z^2 - c^2}}, \\ \chi_2(z; \gamma) &= \frac{(z + \sqrt{z^2 - c^2})^\gamma - (z - \sqrt{z^2 - c^2})^\gamma}{2\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad \chi_2(c; \gamma) = \gamma c^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

фиксированы в соответствующих областях S_1 , S_2 , а $\chi_2(-z; \gamma)$ – в S_3 и принимают вещественные значения на действительной оси; константы Λ_1 , Λ_2 определяются соотношениями (29); $\varphi_j(\gamma)$, $j = 1, 2$, – соотношениями (21), (26). Наконец, C_{1k} , C_{2k} $k = 1, 2$, – произвольные вещественные параметры, причем если уравнение (20) (уравнение (25)) имеет лишь один корень на интервале $(0, 2)$, то параметр C_{12} (C_{22}) надо положить равным нулю.

Утверждения теоремы вытекают из представлений (22), (16), (11), (9) и (8).

Замечание 1. В частном случае, когда $\alpha_1 = 2 - \alpha_2$, $\rho_2 = \rho_3$ должны выполняться дополнительные условия симметрии относительно мнимой оси:

$$\text{а) } \overline{V_2(-\bar{\zeta})} = -V_3(\zeta), \quad \overline{V_1(-\bar{\zeta})} = -V_1(\zeta), \quad \text{при } V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta) v_R \left(\frac{c}{2} \left(\zeta + 1/\zeta \right) \right),$$

$$\text{б) } \overline{V_2(-\bar{\zeta})} = V_3(\zeta), \quad \overline{V_1(-\bar{\zeta})} = V_1(\zeta), \quad \text{при } V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta) v_I \left(\frac{c}{2} \left(\zeta + 1/\zeta \right) \right).$$

Эти условия и представления (16), (22) приводят к равенствам $\varphi = (1 - \gamma)/2$, $c_{12} = -c_{13}$, $c_{22} = -c_{23}$ и, соответственно, к решению полученному в работе [4].

Замечание 2. Если $\rho_1 = \rho_3$, то трехфазная среда вырождается в двухфазную с линией раздела, состоящей только из одной ветки гиперболы (3). Из (5) тогда следует, что $\Delta_2 = 0$, и на основании (18) и (24) придем к решению, ранее полученному в работе [3].

Замечание 3. Построенное выше решение задачи (4) справедливо и в том случае, когда обе ветви гипербол (3) находятся в одной полуплоскости, то есть $0 < a_2 < a_1$.

Замечание 4. Приведенное в теореме 1 решение является в общем случае четырехпараметрическим. Возникает естественный вопрос о дополнительных условиях, позволяющих выделить единственное решение. Этого можно добиться, если, например, взять только наименьшие из решений уравнений (20) и (25) и, кроме того, задать значение скорости в точке $z = 0$:

$$v_1(0) = V_0 = V_{0x} - iV_{0y}. \quad (30)$$

При сделанных ограничениях исследуемая задача для всех возможных параметров будет иметь единственное решение:

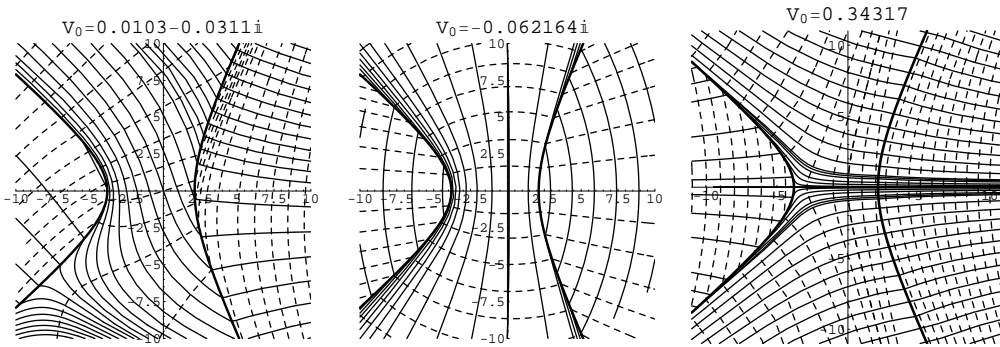
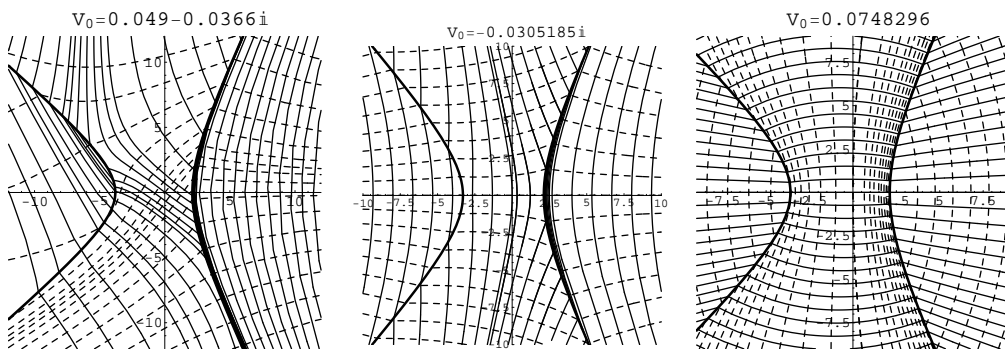
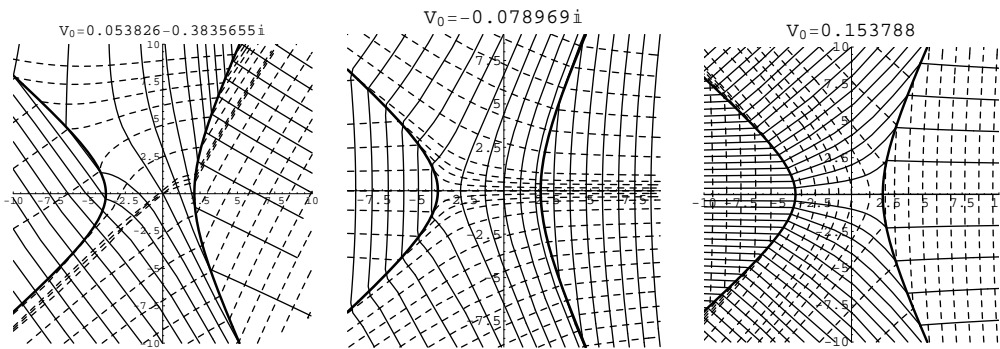
$$\begin{aligned} v_1(z) &= V_{0x} C_1 \chi_1(z; \gamma_1; \varphi_1(\gamma_1)) - iV_{0y} C_2 \chi_1(z; \gamma_2; \varphi_2(\gamma_2)), \\ v_2(z) &= V_{0x} C_1 \Lambda_1(\gamma_1; \varphi_1(\gamma_1)) \chi_2(z; \gamma_1) + iV_{0y} C_2 \Lambda_1(\gamma_2; \varphi_2(\gamma_2)) \chi_2(z; \gamma_2), \\ v_3(z) &= V_{0x} C_1 \Lambda_2(\gamma_1; \varphi_1(\gamma_1)) \chi_2(-z; \gamma_1) + iV_{0y} C_2 \Lambda_2(\gamma_2; \varphi_2(\gamma_2)) \chi_2(-z; \gamma_2), \end{aligned} \quad (31)$$

где γ_1 , γ_2 – наименьшие решения уравнений (20), (25) соответственно, а

$$C_k = c^{1-\gamma_k} / \sin[\pi(\varphi_k(\gamma_k) - \gamma_k/2)], \quad k = 1, 2.$$

В заключение рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть ветви гиперболы (3) определяются следующими параметрами: $a_1 = 2, 12$, $a_2 = -3, 8$, $c = 5$. Коэффициенты сопротивления, характеризующие фазы S_1 , S_2 , S_3 равны $\rho_1 = 10$, $\rho_2 = 0.1$, $\rho_3 = 1, 6$ соответственно. Тогда уравнение (20) имеет на интересующем нас интервале $(0, 2)$ единственное решение $\gamma_1 = 0.4$, а наименьшим корнем уравнения (25) является $\gamma_2 = 1.38$. Решение поставленной задачи, удовлетворяющее условию (30) задается формулами (31).

Рис. 3. $\rho_1 = 0.1$, $\rho_2 = 1.6$, $\rho_3 = 10$ Рис. 4. $\rho_1 = 10$, $\rho_2 = 0.1$, $\rho_3 = 1.6$ Рис. 5. $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$, $\rho_3 = 0.1$

На рис. 3–5 изображены эквипотенциалы и линии тока, определяемые полученным решением для трех различных направлений вектора скорости (30).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-97008-р_поволжье_a).

Summary

T. V. Nikonenkova. Solution of a Three-phase Problem of \mathbb{R} -linear Conjugation.

An explicit analytical solution is presented for the \mathbb{R} -linear conjugation problem in a heterogeneous infinite planar medium consisting of three dissimilar homogeneous components with branches of two confocal hyperbolas as an interface.

Key words: heterogeneous media, \mathbb{R} -linear conjugation problem, holomorphic functions.

Литература

1. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. – Киев: Наук. думка. – 1987. – 254 с.
2. *Голубева О.В., Шпилевой А.Я.* О плоской фильтрации в средах с непрерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – № 2. – С. 174–179.
3. *Обносов Ю.В.* Решение задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения в случае гиперболической линии разделения разнородных фаз // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 7. – С. 53–62.
4. *Obnosov Yu.V., Nikonenkova T.V.* Solution of an \mathbb{R} -linear conjugation problem on the case of hyperbolic interface // Lithuanian Math. J. – 2008. – V. 48, No 3. – P. 322–331.

Поступила в редакцию
28.11.08

Никоненкова Татьяна Владимировна – аспирант кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: nikaatv@rambler.ru