

УДК 517.958:533.9

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЕМКОСТНОГО РАЗРЯДА

*В.Ю. Чебакова*

### Аннотация

В работе рассмотрена нелинейная задача о нахождении параметров процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с образцом, находящимся на подложке, в локальном приближении. Задача описана системой нелинейных начально-краевых задач. Предложен численный метод решения данной задачи. Приведены результаты расчетов для модельной задачи и проведен их сравнительный анализ с характеристиками высокочастотного емкостного разряда без образца.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, высокочастотный емкостный разряд, напряженность электрического поля, электронная и газовая температура, концентрация электронов, концентрация ионов, численные эксперименты.

### Введение

Низкотемпературная плазма эффективно используется для создания микро- и наноструктур, а также для модификации поверхностей (например, для обработки материалов с целью повышения срока службы и надежности изделий машиностроения, создания легких и прочных полимерных композиционных материалов, полиэтиленпластиков, получения нанодисперсионных порошков металлов и соединений и т. д.) [1–7]. Разработка установок для обработки определенных материалов связана с проведением большого количества экспериментальных исследований по подбору параметров плазменных установок. Несмотря на то что к настоящему времени разработаны научные основы различных плазмохимических процессов, в каждом конкретном случае требуется проведение специальных исследований. Экспериментальные методы, как правило, не дают детальной информации о внутренних параметрах плазмы. Поэтому для исследований применяются экспериментально-расчетные методики, которые, взаимно дополняя друг друга, позволяют решать многие задачи физики и химии низкотемпературной плазмы. Именно такой подход позволяет связать внутренние и внешние параметры разрядов. Эта задача особенно важна при оптимизации плазмохимических процессов. В этой связи большое внимание уделяется разработке моделей разного уровня для исследования механизмов процессов в плазме. Эти процессы определяются процессами в газовой фазе и взаимодействием плазмы с поверхностями.

Для получения плазмы используются различные типы разрядов, среди которых большое практическое значение имеют высокочастотные (ВЧ) разряды, и в частности высокочастотные емкостные (ВЧЕ) разряды [8–10]. В ВЧ-установках аргон является часто используемым плазмообразующим газом.

Для оптимизации режимов работы установок создаются и численно решаются математические модели, которые позволяют рассчитывать основные параметры ВЧ-разрядов. Заметим, что теоретические модели предполагают ряд ограничивающих их применение предположений [11–13].

Для моделирования разрядов используют нуль-, одно-, дву- и трехмерные модели разрядов [14–18]. Первые, как правило, служат для исследования детальной кинетики процессов в плазме и содержат кинетические схемы, включающие тысячи кинетических уравнений. Эти схемы неизбежно упрощаются при переходе к моделям высшей размерности. Двумерные и трехмерные модели позволяют детально описать пространственную структуру разрядов, однако следует отметить, что их решение требует значительных затрат машинного времени, при этом оно проводится лишь в упрощенной постановке, когда не учитывается ряд эффектов, присущих ВЧЕ-разрядам. Одномерные модели позволяют с малыми затратами описать физическую картину процессов в разряде при условии, что они адекватно описывают разряд.

Однако введение обрабатываемого материала в разряд изменяет параметры плазмы [6]. При моделировании процессов взаимодействия плазмы с поверхностью в ряде случаев изучается изменение свойств образца при воздействии плазмы без исследования изменения характеристик разряда (см., например, [19–21]).

Целью настоящей работы являлось исследование влияния характеристик образца (удельной электропроводности, теплопроводности, вторичной электронной эмиссии), помещенного на электрод, на параметры плазмы емкостного ВЧ-разряда (13.56 МГц) в аргоне при атмосферном давлении.

### 1. Постановка задачи

В настоящей работе сопоставляются результаты, полученные для двух моделей. Одна из них описывает емкостной ВЧ-разряд между двумя плоско-параллельными электродами, один из которых заземлен, а другой соединен с ВЧЕ-генератором (модель № 1). Во второй модели на заземленный электрод помещен образец (модель № 2). Обе модели описываются при следующих физических предположениях.

В разрядах такого типа электрическое поле близко к потенциальному, и разряд однороден вдоль электродов, что позволяет применить одномерную модель, которая позволит анализировать процессы в разрядах без использования больших вычислительных ресурсов [8, 22–24]).

Поскольку время диссипации энергии электронов при атмосферном давлении много меньше периода поля, параметры плазмы меняются во времени с частотой поля. Так как длина релаксации энергии электронов при атмосферном давлении много меньше размеров расчетной области, при моделировании плазмы можно использовать локальное приближение, в котором параметры электронной компоненты плазмы (коэффициенты диффузии, подвижности, средняя энергия, а также скорости процессов при электронном ударе и т. д.) зависят от локального значения приведенного электрического поля  $E/N$  (отношения напряженности электрического поля  $E$  к концентрации  $N$  тяжелых частиц – атомов аргона в основном состоянии) [25].

ВЧЕ-разряд обладает следующими существенными особенностями, которые определяют формирование математической модели.

Во-первых, существование областей, где условие квазинейтральности не выполняется, требует решения уравнения Пуассона и отказа от приближения амбиполярной диффузии. Это отличает ВЧЕ-разряд от ВЧ-разряда индукционного типа, где нарушением электронейтральности можно пренебречь и диффузия имеет амбиполярный характер [26].

Во-вторых, изменение во времени приложенного напряжения делает необходимым решение нестационарных задач баланса заряженных частиц со свободной диффузией.

В-третьих, наличие двух форм ( $\alpha$ - и  $\gamma$ -режима) существования ВЧЕ-разряда, отличающихся процессами, происходящими в приэлектродных слоях, в которых существенными являются процессы с участием метастабильных состояний, а также то что, эти процессы играют большую роль в разряде с плазмообразующим газом аргоном, делает необходимым включение в модель разряда уравнения баланса метастабильных атомов [27–29].

В настоящей работе использована упрощенная схема атома аргона, в которой четыре низших близкорасположенных электронно-возбужденных состояния (два метастабильных и два резонансных состояния) заменены единым уровнем с концентрацией  $n_m$ . Такая схема часто используется при моделировании аргоновой плазмы и обосновывается эффективным перемешиванием этих уровней электронным ударом [30].

Предполагается, что в разряде выполняется приближение идеального газа в разрядной камере  $P = kNT_a$ , где  $P$  – давление,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_a$  – атомная температура.

Введем ось  $Ox$  перпендикулярно поверхности электродов, тогда координата  $x = 0$  соответствует заземленному электроду,  $x = b$  – нагруженному,  $x = a$  – поверхности образца. Здесь  $b$  – расстояние между электродами,  $a$  – толщина образца. Как сказано выше, на заземленный электрод помещен образец, поэтому во второй модели область  $0 < x < a$  занята образцом. Соответственно, граничные условия для модели № 1 ставятся в точках  $x = 0$ ,  $x = b$  и в точках  $x = a$ ,  $x = b$  – для модели № 2, уравнения рассматриваются при  $0 < x < b$  для модели № 1 и при  $a < x < b$  для модели № 2, то есть при  $a(r-1) < x < b$ , где  $r$  – всюду в дальнейшем номер модели.

Процессы, происходящие в ВЧЕ-разряде, описываются с помощью следующих начально-краевых, краевых задач и задач Коши.

1. Уравнение конвекции-диффузии для электронного газа

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} - n_e \mu_e E \right) = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_e n_m - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+, \quad a(r-1) < x < b, \quad t > 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \Gamma_e = -\gamma \Gamma_+, & \text{если поле направлено в электрод или образец} \\ & (E \leq 0 \text{ при } x = a(r-1), \quad E > 0 \text{ при } x = b), \\ \frac{\partial \Gamma_e}{\partial x} = 0, & \text{если поле направлено от электрода или образца} \\ & (E > 0 \text{ при } x = a(r-1), \quad E \leq 0 \text{ при } x = b), \end{cases} \quad (2)$$

где  $n_e$ ,  $n_+$  – концентрации электронов и атомарных положительно заряженных ионов,  $n_m$  – эффективная концентрация метастабильных атомов аргона,  $\Gamma_e = -D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} - n_e \mu_e E$ ,  $\Gamma_+ = -D_+ \frac{\partial n_+}{\partial x} + \mu_+ n_+ E$  – плотности потоков электронов и ионов соответственно,  $D_e$ ,  $D_+$  – коэффициенты диффузии электронов и ионов,  $\gamma$  – коэффициент вторичной электронной эмиссии с электродов,  $\mu_e$  и  $\mu_+$  – подвижности электронов и ионов.

Здесь и далее  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , – коэффициенты скоростей плазмохимических реакций, приведенные в табл. 1.

2. Уравнение конвекции-диффузии для ионного газа

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -D_+ \frac{\partial n_+}{\partial x} + \mu_+ n_+ E \right) = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_e^2 n_+, \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma_+}{\partial x} = 0, & \text{если поле направлено в электрод или образец} \\ & (E \leq 0 \text{ при } x = a(r-1), \quad E > 0 \text{ при } x = b), \\ \Gamma_+ = 0, & \text{если поле направлено от электрода или образца} \\ & (E > 0 \text{ при } x = a(r-1), \quad E \leq 0 \text{ при } x = b); \end{cases} \quad (4)$$

3. Уравнение Пуассона для распределения потенциала электрического поля  $\varphi$  ( $E = -\partial\varphi/\partial x$ )

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{q_e}{\varepsilon_0} (n_+(x,t) - n_e(x,t)), \quad a(r-1) < x < b, \quad t > 0, \quad (5)$$

с граничными условиями для модели № 1

$$\begin{cases} \varphi(b,t) = V_a \sin(\omega t) & \text{(нагруженный электрод),} \\ \varphi(0,t) = 0 & \text{(заземленный электрод)} \end{cases} \quad (6)$$

или с граничными условиями для модели № 2

$$\begin{cases} \varphi(b,t) = V_a \sin(\omega t) & \text{(нагруженный электрод),} \\ i(a,t) = -\sigma \partial\varphi(a,t)/\partial x & \text{(образец).} \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $q_e$  – заряд электрона,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная вакуума,  $\omega$  – круговая частота электромагнитного поля,  $V_a$  – амплитуда колебания напряжения,  $\sigma$  – удельная электропроводность образца,  $i = e(\Gamma_e + \Gamma_+) + \varepsilon_0 \partial E/\partial t$  – плотность полного тока.

4. Уравнение баланса концентрации метастабильных атомов

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_m \frac{\partial n_m}{\partial x} \right) = R_6 n_e N - R_2 n_m^2 - R_3 n_m n_e - R_7 n_m - R_8 n_m N - R_9 n_m n_e - R_{10} n_m^2, \quad a(r-1) < x < b, \quad t > 0, \quad (8)$$

с граничными условиями

$$n_m(0) = n_m(a) = n_m(b) = 0. \quad (9)$$

Здесь  $D_m$  – коэффициент диффузии метастабильных атомов аргона.

5. Уравнение теплопроводности атомно-ионного газа.

При постоянном давлении температура газа в плазме является важным параметром, который определяет концентрацию тяжелых частиц в объеме, а также длину свободного пробега тяжелых частиц [26]. Вследствие того, что тяжелые частицы в силу своей большей массы обладают инерцией по отношению к изменениям поля, флуктуации атомной температуры возле средних за период изменения поля значений пренебрежимо малы. И, следовательно, уравнение баланса атомной

температуры можно рассматривать усредненным по периоду колебания электрического поля, определяемому частотой ВЧ-генератора, с усредненными за период параметрами:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial x} \right) = j_i E + Q_{\text{уп}} n_e N, \quad (10)$$

где  $j_i = e\Gamma_+$  – ионный ток,  $\lambda_a$  – коэффициент теплопроводности атомно-ионного газа,  $Q_{\text{уп}}$  – энергия, получаемая тяжелыми частицами при упругих столкновениях.

В модели № 1 на электродах ставится условие равенства атомной температуры температуре электродов

$$T_a(0) = T_s(0), \quad T_a(b) = T_s(b). \quad (11)$$

Для модели № 2 на границе образец–газ ( $x = a$ ) используются условия теплообмена

$$-\lambda_a \frac{\partial T_a(a)}{\partial x} = k_{\text{full}} (T_a(a) - T_b(a)), \quad (12)$$

где  $k_{\text{full}}$  – полный коэффициент теплоотдачи образца,  $T_b$  – температура охлаждающей электроды воды.

## 2. Численный метод решения

Рассмотренная выше система состоит из задач разного типа: краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (5)–(7) и (8), (9), причем в первую время входит как параметр; начально-краевых задач для уравнения конвекции-диффузии (1), (2) и (3), (4). Дополнительную сложность при решении указанных задач вносит наличие разных временных масштабов изменения основных характеристик установившегося состояния ВЧЕ-разряда пониженного давления. Кроме того, характерной особенностью задачи являются большие градиенты плотности заряженных частиц и напряженности электрического поля, электронной температуры в приэлектродных слоях на границах расчетной области, то есть если в квазинейтральной области мы имеем процесс с доминированием диффузии (регулярно возмущенная задача), то в приэлектродных областях наблюдается случай сильного доминирования конвекции (сингулярно возмущенная задача). Перечисленные особенности усложняют решение данной задачи.

Для решения рассматриваемой нелинейной системы краевых и начально-краевых задач использовался приближенный метод, основанный на конечномерной аппроксимации задачи с помощью разностных схем с последующим применением для ее реализации итерационного процесса.

Неявная разностная аппроксимация строится интегро-интерполяционным методом [31] с применением метода направленных разностей [32]. Линеаризация системы проводится по методу типа Зейделя, при этом численный алгоритм основан на сnose нелинейности по входящим коэффициентам на нижний слой. Нелинейные квадратичные слагаемые в правой части линеаризовались с помощью схемы Ньютона [33]. Решение уравнения для газовой температуры проводилось один раз за период  $T$  с помощью итерационного процесса типа Якоби.

Для модели № 1 введем на отрезке  $[0, b]$  пространственные равномерные сетки  $\omega_h = \{x_l = lh, l = 1, 2, \dots, M - 1\}$ ,  $\bar{\omega}_h = \{x_l = lh, l = 0, 1, \dots, M\}$ ,  $h = (b - a)/M$ , а также временную сетку  $\omega_\tau = \{t_s = s\tau, s = 0, 1, \dots\}$ ,  $\tau$  – временной шаг. На сетках  $\omega_h \times \omega_\tau$ ,  $\bar{\omega}_h$  определим сеточные функции (для которых сохраним те же обозначения, что и для дифференциальных функций). Значения сеточных функций  $\varphi$  в точке  $x_l^s = (x_l, t_s)$  будем обозначать через  $\varphi_l^s$ . Функции  $n_e$ ,  $n_+$  зададим на  $\omega_h \times \omega_\tau$ , функции  $\varphi$ ,  $T_a$ ,  $n_m$  – на  $\bar{\omega}_h$ .

Построение разностных схем осуществлялось путем интегрирования дифференциальных уравнений по отрезку  $[x_l - h/2, x_l + h/2]$ , производные по времени аппроксимировались разностными отношениями назад, значения коэффициентов дифференциальных уравнений опускались на нижний временной слой  $t_{s-1}$ .

Разностные схемы имеют следующий вид.

1. Разностная схема для уравнения конвекции-диффузии электронного газа

$$\begin{aligned} h \frac{n_{el}^s - n_{el}^{s-1}}{\tau} - \left( D_{el+1/2}^{s-1} \frac{n_{el+1}^s - n_{el}^s}{h} - D_{el-1/2}^{s-1} \frac{n_{el}^s - n_{el-1}^s}{h} \right) - \\ - (-E)_{l-1/2}^{+s-1} \mu_{el-1}^{s-1} n_{el-1}^s + (-E)_{l+1/2}^{-s-1} \mu_{el+1}^{s-1} n_{el+1}^s + (-E)_{l+1/2}^{+s-1} \mu_{el}^{s-1} n_{el}^s - \\ - (-E)_{l-1/2}^{-s-1} \mu_{el}^{s-1} n_{el}^s = h \left( R_{1l}^{s-1} n_{el}^s N_l^{s-1} + R_{2l}^{s-1} \left( n_{ml}^{s-1} \right)^2 + R_{3l}^{s-1} n_{ml}^{s-1} n_{el}^s - \right. \\ \left. - R_{4l}^{s-1} n_{el}^s n_{+l}^s - R_{5l}^{s-1} \left( n_{el}^{s-1} \right)^2 n_{+l}^s + 2n_{el}^{s-1} \left( n_{el}^s - n_{el}^{s-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь и далее  $E^\pm = (E \pm |E|)/2$  – положительная и отрицательная составляющие поля  $E$ .

2. Разностная схема для уравнения конвекции-диффузии ионного газа

$$\begin{aligned} h \frac{n_{+l}^s - n_{+l}^{s-1}}{\tau} - \left( D_{+l+1/2}^{s-1} \frac{n_{+l+1}^s - n_{+l}^s}{h} - D_{+l-1/2}^{s-1} \frac{n_{+l}^s - n_{+l-1}^s}{h} \right) - \\ - E_{l-1/2}^{+s-1} \mu_{+l-1}^{s-1} n_{+l-1}^s + E_{l+1/2}^{-s-1} \mu_{+l+1}^{s-1} n_{+l+1}^s + E_{l+1/2}^{+s-1} \mu_{+l}^{s-1} n_{+l}^s - E_{l-1/2}^{-s-1} \mu_{+l}^{s-1} n_{+l}^s = \\ = h \left( R_{1l}^s n_{el}^s N_l^{s-1} + R_{2l}^{s-1} \left( n_{ml}^{s-1} \right)^2 + R_{3l}^{s-1} n_{ml}^{s-1} n_{el}^s - \right. \\ \left. - R_{4l}^{s-1} n_{el}^s n_{+l}^s - R_{5l}^{s-1} \left( n_{el}^s \right)^2 n_{+l}^s \right). \end{aligned}$$

3. Разностная схема для уравнения Пуассона

$$- \frac{\varphi_{l-1}^s - 2\varphi_l^s + \varphi_{l+1}^s}{h^2} = \frac{q_e}{\varepsilon_0} \left( n_{+l}^s - n_{el}^s \right).$$

4. Разностная схема для уравнения баланса концентрации метастабильных атомов

$$\begin{aligned} h \frac{n_{ml}^s - n_{ml}^{s-1}}{\tau} - \left( D_{ml+1/2}^{s-1} \frac{n_{ml+1}^s - n_{ml}^s}{h} - D_{ml-1/2}^{s-1} \frac{n_{ml}^s - n_{ml-1}^s}{h} \right) = \\ = h \left( R_{6l}^{s-1} n_{el}^s N_l^{s-1} - R_{3l}^{s-1} n_{ml}^s n_{el}^s - R_{7l}^{s-1} n_{ml}^s - R_{8l}^{s-1} n_{ml}^s N_l^{s-1} - R_{9l}^{s-1} n_{ml}^s n_{el}^s - \right. \\ \left. - \left( R_{10l}^{s-1} + R_{2l}^{s-1} \right) \left( \left( n_{ml}^{s-1} \right)^2 + 2n_{ml}^{s-1} \left( n_{ml}^s - n_{ml}^{s-1} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

5. Разностная схема для уравнения теплопроводности атомно-ионного газа

$$- \left( \lambda_{al+1/2} \frac{T_{al+1} - T_{al}}{h} - \lambda_{al-1/2}^{s-1} \frac{T_{al} - T_{al-1}}{h} \right) = \bar{j}_{il} \bar{E}_l h + \bar{Q}_{yпl} N_l \bar{n}_{el} h,$$

где  $\bar{j}_i$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{Q}_{yп}$ ,  $\bar{n}_e$  – усредненные за период значения соответствующих характеристик.

Для построения конечно-разностных аппроксимаций граничных условий для уравнений конвекции-диффузии электронного и ионного газа дифференциальные

уравнения интегрировались по отрезкам  $[h/2, x_1 + h/2]$  и  $[b - 3h/2, b - h/2]$ , после чего использовались соответствующие выражения для потоков.

При аппроксимации выражения для ионного потока считалось, что если поле  $E$  направлено от электрода, то в потоке частиц на поверхность доминирует конвективный перенос и диффузионным слагаемым можно пренебречь.

При аппроксимации граничных условий на левом электроде, если поле направлено в электрод, получаем

$$\begin{aligned} & h \frac{n_{+1}^s - n_{+1}^{s-1}}{\tau} - D_{+3/2}^{s-1} \frac{n_{+2}^s - n_{+1}^s}{h} + E_{3/2}^{+s-1} \mu_{+1}^{s-1} n_{+1}^s + E_{3/2}^{-s-1} \mu_{+2}^{s-1} n_{+2}^s - \\ & - E_{1/2}^{-s-1} \mu_{+1}^{s-1} n_{+1}^s = h \left( R_{11}^{s-1} n_{e1}^{s-1} N_1^{s-1} + R_{21}^{s-1} \left( n_{m1}^{s-1} \right)^2 + R_{31}^{s-1} n_{m1}^{s-1} n_{e1}^{s-1} - \right. \\ & \quad \left. - R_{41}^{s-1} n_{e1}^{s-1} n_{+1}^s - R_{51}^{s-1} \left( n_{e1}^{s-1} \right)^2 n_{+1}^s \right), \\ & h \frac{n_{e1}^s - n_{e1}^{s-1}}{\tau} - D_{e3/2}^{s-1} \frac{n_{e2}^s - n_{e1}^s}{h} - E_{3/2}^{+s-1} \mu_{e1}^{s-1} n_{e1}^s - E_{3/2}^{-s-1} \mu_{e2}^{s-1} n_{e2}^s = \\ & = h \left( R_{11}^{s-1} n_{e1}^{s-1} N_1^{s-1} + R_{21}^{s-1} \left( n_{m1}^{s-1} \right)^2 + R_{31}^{s-1} n_{m1}^{s-1} n_{e1}^{s-1} - \right. \\ & \quad \left. - R_{41}^{s-1} n_{e1}^{s-1} n_{+1}^s - R_{51}^{s-1} \left( n_{e1}^{s-1} \right)^2 n_{+1}^s + 2n_{e1}^{s-1} \left( n_{e1}^s - n_{e1}^{s-1} \right) \right) + \gamma \Gamma_{+3/2}^s, \\ & n_{m0}^s = 0, \quad \varphi_0^s = 0, \quad T_{a0} = T_{эл}. \end{aligned}$$

В случае, когда поле направлено от электрода, имеем

$$\begin{aligned} & h \frac{n_{+1}^s - n_{+1}^{s-1}}{\tau} - D_{+3/2}^{s-1} \frac{n_{+2}^s - n_{+1}^s}{h} + E_{3/2}^{+s-1} \mu_{+1}^{s-1} n_{+1}^s + E_{3/2}^{-s-1} \mu_{+2}^{s-1} n_{+2}^s = \\ & = h \left( R_{11}^{s-1} n_{e1}^{s-1} N_1^{s-1} + R_{21}^{s-1} \left( n_{m1}^{s-1} \right)^2 + R_{31}^{s-1} n_{m1}^{s-1} n_{e1}^{s-1} - \right. \\ & \quad \left. - R_{41}^{s-1} n_{e1}^{s-1} n_{+1}^s - R_{51}^{s-1} \left( n_{e1}^{s-1} \right)^2 n_{+1}^s \right), \\ & h \frac{n_{e1}^s - n_{e1}^{s-1}}{\tau} = h \left( R_{11}^{s-1} n_{e1}^{s-1/2} N_1^{s-1} + R_{21}^{s-1} \left( n_{m1}^{s-1} \right)^2 + R_{31}^{s-1} n_{m1}^{s-1} n_{e1}^{s-1/2} - \right. \\ & \quad \left. - R_{41}^{s-1} n_{e1}^{s-1/2} n_{+1}^s - R_{51}^{s-1} \left( n_{e1}^{s-1/2} \right)^2 n_{+1}^s \right), \\ & n_{m0}^s = 0, \quad \varphi_0^s = 0, \quad T_{a0} = T_{эл}. \end{aligned}$$

В силу симметричности граничных условий для уравнений конвекции-диффузии электронного и ионного газа уравнения баланса метастабильных атомов, уравнения теплопроводности атомно-ионного газа, граничные условия на заземленном электроде аппроксимируются аналогичным образом.

При этом если поле направлено в электрод, то конечно-разностная аппроксимация граничных условий имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & h \frac{n_{+n-1}^s - n_{+n-1}^{s-1}}{\tau} + D_{+n-3/2}^{s-1} \frac{n_{+n-1}^s - n_{+n-2}^s}{h} - \\ & - E_{n-3/2}^{+s-1} \mu_{+n-2}^{s-1} n_{+n-2}^s - E_{n-3/2}^{-s-1} \mu_{+n-1}^{s-1} n_{+n-1}^s + E_{n-1/2}^{-s-1} \mu_{+n-1}^{s-1} n_{+n-1}^s = \\ & = h \left( R_{1n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} N_{n-1}^{s-1} + R_{2n-1}^{s-1} \left( n_{mn-1}^{s-1} \right)^2 + R_{3n-1}^{s-1} n_{mn-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} - \right. \\ & \quad \left. - R_{4n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} n_{+n-1}^s - R_{5n-1}^{s-1} \left( n_{en-1}^{s-1} \right)^2 n_{+n-1}^s \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & h \frac{n_{en-1}^s - n_{en-1}^{s-1}}{\tau} + D_{e\ n-3/2}^{s-1} \frac{n_{en-1}^s - n_{en-2}^s}{h} + E_{n-3/2}^{+s-1} \mu_{en-1}^{s-1} n_{en-1}^s + \\
 & + E_{n-3/2}^{-s-1} \mu_{en-2}^{s-1} n_{en-2}^s = h \left( R_{1n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} N_{n-1}^{s-1} + R_{2n-1}^{s-1} \left( n_{mn-1}^{s-1} \right)^2 + R_{3n-1}^{s-1} n_{mn-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} - \right. \\
 & \left. - R_{4n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} n_{+n-1}^s - R_{5n-1}^{s-1} \left( n_{en-1}^{s-1} \right)^2 n_{+n-1}^s + 2n_{en-1}^{s-1} \left( n_{en-1}^s - n_{en-1}^{s-1} \right) \right) + \gamma \Gamma_{+n-3/2}^s, \\
 & n_{mn}^s = 0, \quad T_{an} = T_{эл}.
 \end{aligned}$$

Если же поле направлено от заземленного электрода, то получаем

$$\begin{aligned}
 & h \frac{n_{+n-1}^s - n_{+n-1}^{s-1}}{\tau} + D_{+n-3/2}^{s-1} \frac{n_{+n-1}^s - n_{+n-2}^s}{h} - E_{n-3/2}^{+s-1} \mu_{+n-2}^{s-1} n_{+n-2}^s - \\
 & - E_{n-3/2}^{-s-1} \mu_{+n-1}^{s-1} n_{+n-1}^s = h \left( R_{1n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} N_{n-1}^{s-1} + R_{2n-1}^{s-1} \left( n_{mn-1}^{s-1} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + R_{3n-1}^{s-1} n_{mn-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} - -R_{4n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1} n_{+n-1}^s - R_{5n-1}^{s-1} \left( n_{en-1}^{s-1} \right)^2 n_{+n-1}^s \right), \\
 & h \frac{n_{en-1}^s - n_{en-1}^{s-1}}{\tau} = h \left( R_{1n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1/2} N_{n-1}^{s-1} + R_{2n-1}^{s-1} \left( n_{mn-1}^{s-1} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + R_{3n-1}^{s-1} n_{mn-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1/2} - R_{4n-1}^{s-1} n_{en-1}^{s-1/2} n_{+n-1}^s - R_{5n-1}^{s-1} \left( n_{en-1}^{s-1/2} \right)^2 n_{+n-1}^s \right), \\
 & n_{mn}^s = 0, \quad T_{an} = T_{эл}.
 \end{aligned}$$

Для уравнения Пуассона имеем  $\varphi_n^s = V_a \sin(\omega t^s)$ .

При аппроксимации граничных условий модели № 2 изменятся следующие граничные условия на образце для потенциала электрического поля:

$$(1 - 2\sigma\varepsilon_0) \frac{\phi_1^s - \varphi_0^s}{h} = \sigma e \left( \Gamma_{+1/2}^s + \Gamma_{e1/2}^s \right) - \frac{\sigma\varepsilon_0}{\tau E_{1/2}^{s-1}} + \frac{\sigma\varepsilon_0}{\tau h q_e (n_{+1}^s - n_{e1}^s)},$$

а для газовой температуры имеем

$$-k_{\text{full}}(T_{a0} - T_{\text{в}}) - \lambda_{a1} \frac{T_{a1} - T_{a0}}{h} = e \bar{\Gamma}_{+1/2} \bar{E}_{1/2} h + \bar{Q}_{\text{уп}1} N_1 \bar{n}_{el} h.$$

### 3. Результаты расчетов

При проведении расчетов в качестве системы единиц выбрана система СИ. Данные для аппроксимации коэффициента диффузии  $D_e$ , подвижности электронов  $\mu_e$ , коэффициентов скоростей процессов прямой ионизации  $R_1$  и возбуждения метастабильных атомов  $R_6$ , вклада, вносимого упругими соударениями в нагрев газа  $Q_{\text{уп}}$ , средней энергии  $\bar{\varepsilon} = 3kT_e/2$  определяются с учетом зависимости от приведенной напряженности электрического поля и наличия электрон-электронных соударений с помощью пакета BOLSIG+ версия 1.2, физические принципы которого описаны в [32]. Здесь  $T_e$  – электронная температура. Для удобства указанные и остальные зависимости сведены в табл. 1.

Анализ результатов решения модельной задачи с неидеальным проводником в качестве одного из электродов показал, что включение образца с конечной теплопроводностью у одного из электродов вносит асимметрию в разряд и приводит к смещению области максимальной газовой температуры к образцу (ср. рис. 1 и 2). Изменение коэффициента вторичной эмиссии не влияет на асимметрию профиля



Табл. 1

№	Процесс/характеристика	Значение параметра	Источник
1	Прямая ионизация $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$	$R_1$ <sup>1)</sup>	[34]
2	Пеннинговая ионизация $\text{Ar}^* + \text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}^+ + e$	$R_2 = \text{const} = 6.2 \cdot 10^{-16}$ $R_2 = 7 \cdot 10^{-16} (T_a/300)^{0.5}$	[35] [36]
3	Ступенчатая ионизация $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$	$R_3 = 2 \cdot 10^{-11} \exp(-25524.4/T_e)$	[36]
4	Рекомбинация фото $\text{Ar}^+ + e \rightarrow \text{Ar} + h\nu$	$R_4 = 2.7 \cdot 10^{-19} (T_e/11602)^{-3/4}$	[27]
5	Тройная рекомбинация $\text{Ar}^+ + 2e \rightarrow \text{Ar} + e$	$R_5 = 8.75 \cdot 10^{-39} (T_e/11602)^{-9/2}$	[27]
6	Возбуждение метастабильных атомов $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^* + e$	$R_6$ <sup>1)</sup>	[34]
7	Излучение $\text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar} + h\nu$	$R_7 = \text{const} = 2.5 \cdot 10^{-11}$	[29]
8	$\text{Ar}^* + \text{Ar} \rightarrow 2\text{Ar}$	$R_8 = \text{const} = 3 \cdot 10^{-21}$	[35]
9	$\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar} + e$	$R_9 = \text{const} = 10^{-11}$	[35]
10	Хемоионизация $\text{Ar}^* + \text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar}_2^+ + e$	$R_{10} = \text{const} = 1.2 \cdot 10^{-11}$	[29]
11	Коэффициент диффузии ионов	$D_+ = 1 \cdot 10^{23} (T_a)^{1/2} / N$ $D_+ = 2.07 \cdot 10^{20} / N$ $D_+ = 0.11029 \cdot 10^{25} / N$	[37] [35] [38]
12	Теплопроводность атомно-ионного газа	$\lambda_a = 3.5 \cdot 10^{-4} (T_a^{0.68})$ $\lambda_a = 1.78 \cdot 10^{-2} (T_a/300)^{0.66}$	[36] [39, с. 61]
13	Подвижность атомных ионов	$\mu_+ = 4.65 \cdot 10^{20} / N$ $\mu_+ = 0.044 / T_a$	[35] [40]
14	Коэффициент диффузии метастабильных атомов	$D_m = 0.18023 \cdot 10^{20} / N$ $D_m = 2.42 \cdot 10^{20} / N$	[38] [35]
15	Коэффициент диффузии электронов	$D_e$ <sup>1)</sup>	[34]
16	Коэффициент вторичной эмиссии электрода	$\gamma = 0.01$	Варьируемый параметр
17	Коэффициент вторичной эмиссии образца	$\gamma = 0.1$ (на рис. 2, 4) $\gamma = 0.001$ (на рис. 5)	Варьируемый параметр
18	Удельная электропроводность образца	$\sigma = 0.01$	Варьируемый параметр
19	Полный коэффициент теплоотдачи образца	$k_{\text{full}} = 0.5$	Варьируемый параметр
20	Давление	$P = 101080$	Варьируемый параметр
21	Амплитуда колебания напряжения	$V_a = 100$	Варьируемый параметр
22	Круговая частота электромагнитного поля	$\omega = 2\pi \cdot 13.76$	Варьируемый параметр

<sup>1)</sup> Рассчитывается с помощью программы BOLSIG+ версия 1.2 [34].

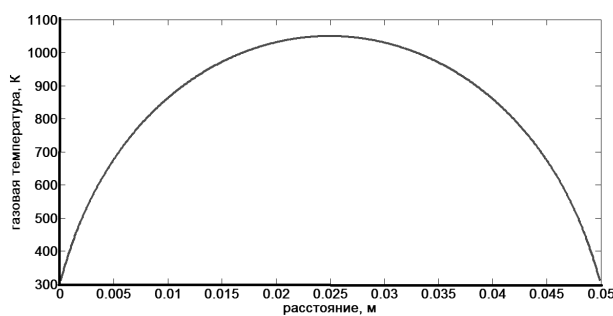


Рис. 1. Распределение газовой температуры между симметричными электродами (модель № 1)

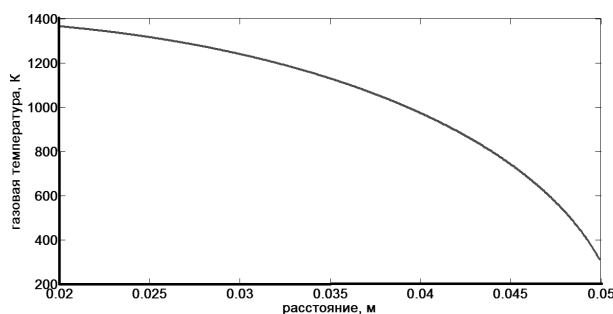


Рис. 2. Распределение газовой температуры между образцом и электродом (модель № 2)

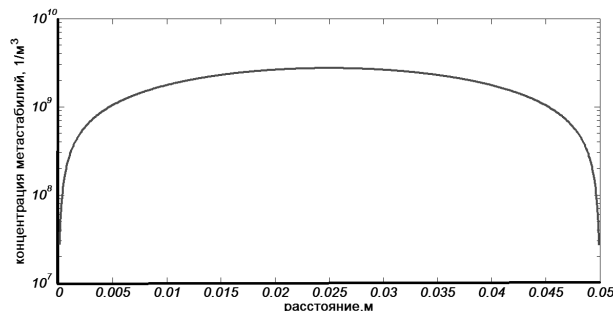


Рис. 3. Распределение усредненной концентрации метастабильных атомов между электродами (модель № 1)

газовой температуры в модели № 2. Из рис. 1, 2 видно, что в модели с образцом максимальное значение температуры газа на 250 К больше, чем в модели без образца. Кроме того, максимум температуры смещается в сторону образца.

Распределение концентрации метастабильных атомов также становится несимметричным (сравни рис. 3–5). Асимметрия пространственного распределения метастабильных атомов зависит от коэффициента вторичной эмиссии, если коэффициент вторичной эмиссии образца больше, чем у электрода, то максимум смещается в сторону образца (рис. 4). При значении коэффициента вторичной электронной эмиссии с поверхности образца, меньшем по сравнению со вторичной эмиссией с поверхности электрода, наблюдается сдвиг максимума концентраций заряженных частиц, а также метастабильных атомов к электроду (рис. 5).

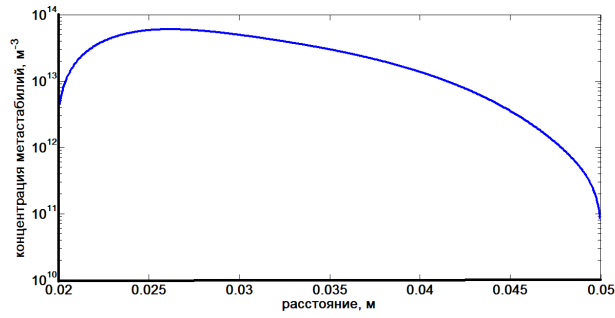


Рис. 4. Распределение усредненной концентрации метастабильных атомов между образцом и электродом, меньшей при вторичной эмиссии электрода, чем у образца (модель № 2)

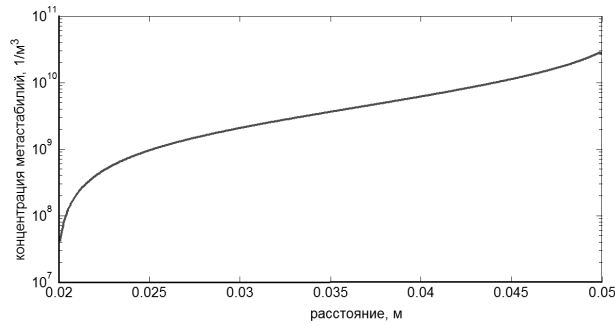


Рис. 5. Распределение усредненной концентрации метастабильных атомов между образцом и электродом, большей при вторичной эмиссии электрода, чем у образца (модель № 2)

Табл. 2

№	Процесс/характеристика	Значение параметра	Источник
1	Хемоионизация $\text{Ar}^* + \text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar}_2^+ + e$	$R_{10} = \text{const} = 1.2 \cdot 10^{-11}$	[29]
2	Конверсия ионов $2\text{Ar} + \text{Ar}^+ \rightarrow \text{Ar}_2^+ + \text{Ar}$	$R_{11} = \text{const} = 1.2 \cdot 10^{-43}$ $R_{11} = \text{const} = 2.25 \cdot 10^{-43} (T_a/300)^{-0.4}$	[29] [37]
3	$\text{Ar}_2^+ + \text{Ar}^+ \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}^+ + e$	$R_{12} = 1 \cdot 10^{-11} \exp(-23204/T_e)$	[36]
4	$\text{Ar}_2^+ + e \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}$	$R_{13} = 1 \cdot 10^{-13} T_e^{-0.6} (T_a/300)^{-0.6}$ $R_{13} = \text{const} = 1.1 \cdot 10^{-13} (T_e/11602)^{-0.5}$	[36] [27]
5	$\text{Ar}_2^* \rightarrow 2 \text{Ar} + h\nu$	$R_{14} = \text{const} = 1 \cdot 10^{-11}$	[36]
6	$\text{Ar}^* + 2\text{Ar} \rightarrow \text{Ar}^* + \text{Ar}$	$R_{15} = \text{const} = 1.1 \cdot 10^{-43}$	[35, 42]
7	$\text{Ar}_2^* + \text{Ar}_2^* \rightarrow e + 2\text{Ar} + \text{Ar}_2^+$	$R_{16} = 7 \cdot 10^{-16} (T_a/300)^{0.5}$	[36]
8	$\text{Ar}_2^* + \text{Ar}^* \rightarrow e + \text{Ar} + \text{Ar}_2^+$	$R_{17} = 7 \cdot 10^{-16} (T_a/300)^{0.5}$	[36]
9	$e + \text{Ar}_2^* \rightarrow 2\text{Ar}^* + e$	$R_{18} = 1 \cdot 10^{-13} \exp(-11602/T_e)$	[36]
10	Образование димеров $\text{Ar}^* + 2\text{Ar} \rightarrow \text{Ar}_2^* + \text{Ar} \rightarrow 3\text{Ar} + h\nu$	$R_{19} = \text{const} = 1.5 \cdot 10^{-44}$	[29]
11	$\text{Ar}_2^+ + \text{Ar} \rightarrow 2\text{Ar} + \text{Ar}^+$	$R_{20} = 5.22 \cdot 10^{-16} \times$ $\times \exp(-15129.008/T_a) (T_a/11602)$	[36]
12	Подвижность молекулярных ионов	$\mu_{2+} = 1.79 (T_a/300)$	[41]

При большой разнице в температуре газа при сильной зависимости молекулярных и атомарных ионов от значения газовой температуры схема кинетических процессов в дальнейшем должна быть усложнена введением в схему молекулярных ионов [35]. Следовательно, эта схема должна учитывать процессы, приведенные в табл. 2. Кроме того, она должна быть дополнена уравнением диффузии-конвекции для молекулярных ионов и задачей Коши для димеров аргона.

### Заключение

В статье приведена модель взаимодействия ВЧЕ-разряда с образцом, позволяющая рассчитать характеристики ВЧЕ-разряда в промежутке между образцом и нагруженным электродом. Модель включает в себя уравнения конвекции-диффузии для электронного и ионного газа, уравнение Пуассона для потенциала электрического поля, уравнения баланса метастабильных атомов и нейтральных атомов, а также стационарное уравнение теплопроводности атомно-ионного газа. Данная модель обладает следующими особенностями, осложняющими ее решение: большие градиенты в приэлектродных слоях, нелинейность системы и отдельных входящих в нее уравнений, наличие быстрых и медленных физических процессов.

Для реализации модели был предложен численный метод решения, учитывающий перечисленные особенности модели.

Получены результаты решения модельной задачи с неидеальным проводником. Установлено, что в модели с образцом возникает асимметрия в профилях концентрации частиц, которая вызвана различиями в значениях вторичной электронной эмиссии, а также граничными условиями, связанными с необходимостью учета теплопроводности и проводимости образца. Включение в модель образца с конечной теплопроводностью у одного из электродов вносит асимметрию в разряд и приводит к смещению области максимальных газовой температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проекты № 15-41-02569, 15-41-02672).

### Summary

*V. Yu. Chebakova.* Numerical Simulation of the High-Frequency Capacitive Discharge.

The nonlinear problem of determining the interaction parameters between the high-frequency capacitive discharge and the sample placed on a substrate in the local approximation is considered. The problem is described by a system of nonlinear initial-value problems. A numerical method for solving this problem is suggested. The results of numerical experiments for the model problem are given. Comparative analysis of these results with the characteristics of the high-frequency capacitive discharge without the sample is carried out.

**Keywords:** mathematical simulation, high-frequency capacitive discharge, electric field strength, electronic and gas temperature, concentration of electrons, concentration of ions, numerical experiments.

### Литература

1. Очерки физики и химии плазмы / Под ред. Л.С. Полака. – М: Наука, 1971. – 433 с.
2. Низкотемпературная плазма. Т.3. Химия плазмы / Под ред. Л.С. Полака, Ю.А. Лебедева. – Новосибирск: Наука, 1991. – 328 с.
3. *Fridman A.* Plasma chemistry. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 978 p.
4. *Оулет Р., Барбье М., Черемисинов П. и др.* Технологическое применение низкотемпературной плазмы. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 144 с.

5. Моссе А.Л., Буров И.О. Обработка дисперсионных материалов в плазменных реакторах. – Минск: Наука и техника, 1980. – 205 с.
6. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф. Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2000. – 348 с.
7. Амиров Р.Х., Исакаев Э.Х., Шавелькина М.Б., Юсупов Д.И., Шаталова Т.Б., Эмиров Р.М. Плазмоструйный синтез углеродных наноструктур и устройство для его реализации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 4. – С. 112–119.
8. Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н., Яценко Н.А. Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения. – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 320 с.
9. Савинов В.П. Физика высокочастотного емкостного разряда. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 308 с.
10. Chebert P., Braithwaite N. Physics of radio-frequency plasmas. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. – 394 p.
11. Головицкий А.П., Цендин Л.Д. Простые аналитические формулы для оценки параметров положительного столба тлеющего разряда в электроотрицательных газах // Журн. техн. физики. – 2014. – Т. 84, Вып. 3. – С. 44–49.
12. Желтухин В.С., Соловьев С.И., Соловьев П.С., Чебакова В.Ю. Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма-Лиувилля // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 3. – С. 91–104.
13. Dautov G., Dautov I., Fayrushin I., Kashaпов N. Calculation of distribution of potential near the surface of metal particle in the dust-electron thermal plasma // J. Phys.: Conf. Ser. – 2014. – V. 567. – Art. 012005, P. 1–5. – doi: 10.1088/1742-6596/567/1/012005.
14. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Высокочастотный емкостной разряд: моделирование (обзор) // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 9–14.
15. Лебедев Ю.А., Татаринцов А.В., Титов А.Ю., Эпштейн И.Л. Двумерная модель неравновесного сильно неоднородного СВЧ-разряда во внешнем постоянном поле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 4. – С. 120–132.
16. Суржиков С.Т. Численный анализ структуры двух типов тлеющих разрядов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2008. – Т. 7. – <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/464/>.
17. Тихонова Н.В., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Бородаев И.А. Математическая модель высокочастотной плазменной обработки многослойных материалов заготовки верха обуви // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т. 15, № 17. – С. 36–39.
18. Salabas A., Gousset G., Alves L.L. Two-dimensional fluid modelling of charged particle transport in radio-frequency capacitively coupled discharges // Plasma Sources Sci. Technol. – 2002. – V. 11, No 4. – P. 448–465.
19. Горбачев Ю.Е., Затевахин М.А., Каганович И.Д. Моделирование роста пленок гидрированного аморфного кремния из ВЧ-разрядной плазмы // Журн. техн. физики. – 1996. – Т. 66, Вып. 12. – С. 89–110.
20. Мокров М.С., Райзер Ю.П. Применение метода Монте-Карло для нахождения коэффициентов ионизации и вторичной эмиссии и вольт-амперной характеристики таунсендовского разряда в водороде // Журн. техн. физики. – 2008. – Т. 78, Вып. 4. – С. 47–54.

21. Мемнонов В.П., Ульянов П.Г. Экспериментальная оценка параметров распределений для шероховатости поверхности в каналах наноразмеров // Журн. техн. физики. – 2011. – Т. 81, Вып. 2. – С. 104–109.
22. Yonetura Sh., Nanbu K., Iwata N. Synthesis of sheath voltage drops in asymmetric radio-frequency discharges // J. Appl. Phys. – 2004. – V. 96, No 1. – P. 127–132.
23. Wang S., Xu X., Song Y.H., Wang Y.N. Frequency matching effects on characteristics of bulk plasmas and sheaths for dual-frequency capacitively coupled argon discharges: One-dimensional fluid simulation // Plasma Sci. Technol. – 2008. – V. 10, No 1. – P. 57–60.
24. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн 2. – С. 123–130.
25. Кудрявцев А.А., Смирнов А.С., Цендин Л.Д. Физика тлеющего разряда. – СПб.: Лань, 2010. – 512 с.
26. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2009. – 736 с.
27. Epstein I.L., Gavrilović M., Jovircević S., Konjević N., Lebedev Yu.A., Tatarinov A.V. The study of a homogeneous column of argon plasma at a pressure of 0.5 torr, generated by means of the Beenakker's cavity // Eur. Phys. J. D. – 2014. – V. 68. – Art. 334. – doi: 10.1140/epjd/e2014-50182-7.
28. Байсова Б.Т., Струнин В.И., Струнина Н.Н., Худайбергенов Г.Ж. Абсолютные заселенности метастабильных состояний аргона в плазме высокочастотного разряда // Журн. техн. физики. – 2003. – Т. 73, Вып. 8. – С. 30–33.
29. Дятко Н.А., Ионих Ю.З., Мещанов А.В., Напартович А.П. Исследование темной фазы на стадии развития положительного столба тлеющего разряда в аргоне // Физика плазмы. – 2005. – Т. 31, № 10. – С. 939–953.
30. Ferreira C.M., Loureiro J., Ricard A. Populations in the metastable and the resonance levels of argon and stepwise ionization effects in a low-pressure argon positive column // J. Appl. Physics. – 1985. – V. 57, No 1. – P. 82–90. – doi: 10.1063/1.335400.
31. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
32. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.
33. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с.
34. Hagelaar G.J.M., Pitchford L.C. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models // Plasma Sources Sci. Technol. – 2005. – V. 14, No 4. – P. 722–733.
35. Lymberopoulos D.P., Economou D.J. Fluid simulations of glow discharge: Effect of metastable atoms in argon // J. Appl. Phys. – 1993. – V. 73, No 8. – P. 3668–3679.
36. Zhu X.-M., Pu Y.-K. A simple collisional-radiative model for low-temperature argon discharges with pressure ranging from 1 Pa to atmospheric pressure: kinetics of Paschen 1s and 2p levels // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2010. – V. 43, No 1. – Art. 015204, P. 1–17. – doi: 10.1088/0022-3727/43/1/015204.
37. Castanos Martinez E., Kabouzi Y., Makasheva K., Moisan M. Modeling of microwave-sustained plasmas at atmospheric pressure with application to discharge contraction // Phys. Rev. E. – 2004. – V. 70, No 6, Pt. 2. – Art. 066405. – doi: 10.1103/PhysRevE.70.066405.

38. *Смирнов Б.М.* Возбужденные атомы. – М.: Энергоиздат, 1982. – 232 с.
39. *Фастовский В.Г., Ровинский А.Е., Петровский Ю.В.* Инертные газы. – М.: Атомиздат, 1972. – 352 с.
40. *Мак-Даниель И.* Процессы столкновений в ионизированных газах. – М.: Мир, 1967. – 832 с.
41. *Смирнов Б.М.* Диффузия и подвижность ионов в газе // Усп. физ. наук. – 1967. – Т. 92, Вып. 1. – С. 75–103.
42. *Karoulina E., Lebedev Yu.* Computer simulation of microwave and DC plasmas comparative characterization of plasmas // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1992. – V. 25, No 3. – P. 401–412.

Поступила в редакцию  
26.02.15

---

**Чебакова Виолетта Юрьевна** – ассистент кафедры математической статистики,  
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.  
E-mail: *vchebakova@mail.ru*