УДК 512.53

О СЛАБО ПРОСТЫХ ИДЕАЛАХ КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

Ю.В. Жучок, Л.В. Киртадзе

Аннотация

Доказано, что каждый максимальный идеал конусной квазиупорядоченной полугруппы является слабо простым идеалом. Найдены условия, при которых идеалы квазиупорядоченной полугруппы являются слабо простыми.

Ключевые слова: квазиупорядоченная полугруппа, слабо n-простое подмножество, слабо простой идеал, максимальный идеал.

Введение

Понятия слабо простого и слабо полупростого идеалов полугруппы являются полугрупповыми аналогами фундаментальных для теории колец понятий первичного и полупервичного идеалов (см., например, [1]). При этом некоторые важные свойства первичных и полупервичных идеалов колец являются справедливыми и для полугрупп. В коммутативных кольцах понятие первичного идеала совпадает с понятием простого идеала: идеал является первичным тогда и только тогда, когда факторкольцо по нему является областью целостности. Известно, что в коммутативных кольцах с единицей каждый максимальный идеал является простым идеалом, однако существуют такие кольца, в которых некоторые нетривиальные простые идеалы не являются максимальными [2]. Подобный результат для коммутативных упорядоченных полугрупп с единицей был получен в [3], а для коммутативных квазиупорядоченных моноидов – в [4].

В настоящей работе определено понятие конусной квазиупорядоченной полугруппы и доказано, что в таких полугруппах каждый максимальный идеал является слабо простым идеалом. Показано, что обратное утверждение в общем случае неверно. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия, при которых все идеалы квазиупорядоченной полугруппы являются слабо простыми.

1. Основные понятия

Пусть X – произвольное непустое множество и $\rho \subseteq X \times X$. Алгебраическую систему (X, ρ) называют реляционной системой. Если $H \subseteq X$, то через $(H]$ будем обозначать множество всех таких $x \in X$, что $x\rho h$ для некоторого $h \in H$.

Очевидной является следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть (X, ρ) – реляционная система. Тогда:*

(i) $A \subseteq (A]$ для всех $A \subseteq X$ тогда и только тогда, когда отношение ρ является рефлексивным;

(ii) из условия $A \subseteq B$ следует $(A] \subseteq (B]$ при любых A, $B \subseteq X$;

(iii) если $A \subseteq X$, ρ – рефлексивное отношение и для всех $x \in X$, $a \in A$ из условия $x\rho a$ следует $x \in A$, то $A = (A]$;

(iv) если отношение ρ является квазипорядком, то $(A] = ((A]]$ для любого $A \subseteq X$.

Полугруппа S называется квазиупорядоченной, если на ней определен некоторый двусторонне стабильный квазипорядок.

Пусть $(S, \trianglelefteq)$ – квазиупорядоченная полугруппа. Непустое подмножество I из S называется *левым* (*правым*) идеалом S, если $SI \subseteq I$ $(IS \subseteq I)$ и из условий $a \in I$, $b \in S$ и $b \trianglelefteq a$ следует, что $b \in I$. Если I является как левым, так и правым идеалом квазиупорядоченной полугруппы S, то его называют (*двусторонним*) *идеалом* S.

Справедливость следующего утверждения очевидна.

Лемма 2. *Пусть* $(S, \trianglelefteq)$ *– квазиупорядоченная полугруппа. Тогда:*
(i) *для всех* A, $B \subseteq S$ *имеем* $(A](B] \subseteq (AB]$*;*
(ii) $(SaS]$ *есть идеал полугруппы* $(S, \trianglelefteq)$ *для любого* $a \in S$*;*
(iii) *если* A, $B \subseteq S$ *– идеалы, то* $(AB]$, $A \cap B$ *– идеалы полугруппы* $(S, \trianglelefteq)$.

Подмножество I полугруппы (или квазиупорядоченной полугруппы) S называется *простым*, если для всех a, $b \in S$ из условия $ab \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$.

Подмножество I полугруппы (или квазиупорядоченной полугруппы) S называется *слабо простым*, если для всех идеалов $A, B \subseteq S$ из условия $AB \subseteq I$ следует, что $A \subseteq I$ или $B \subseteq I$.

Квазиупорядоченную полугруппу $(S, \trianglelefteq)$ назовем конусной, если для любого $a \in S$ найдутся такие $x, y \in S$, что $a \trianglelefteq xy$, то есть если $S = (S^2]$.

Конусной полугруппой является, например, любой квазиупорядоченный моноид, а также всякая квазиупорядоченная полугруппа идемпотентов.

Отметим, что в упорядоченных полугруппах некоторые свойства простых и слабо простых подмножеств, которые являются идеалами, изучались, например, в работах [5–7].

Нами в терминах конусных полугрупп некоторые результаты из [7, 8] для упорядоченных полугрупп распространяются на квазиупорядоченные полугруппы.

Предложение 1. *Пусть* $(S, \trianglelefteq)$ *– квазиупорядоченная полугруппа. Тогда:*
(i) *если* S *– конусная полугруппа, то* $S = (S^n]$ *для любого натурального* $n \geq 2$*;*
(ii) *если в* S *выполняется* $S = (S^n]$ *для некоторого натурального* $n \geq 3$, *то* S *– конусная полугруппа.*

Доказательство. (i) Пусть $(S, \trianglelefteq)$ – конусная полугруппа. Предположим, что $S = (S^k]$, где $k \geq 3$. Тогда, пользуясь условием (i) Леммы 2, получаем

$$(S^{k+1}] = (S^k S] \supseteq (S^k](S] = S^2,$$

и, следовательно, $((S^{k+1}]] = (S^2]$. Из условия (iv) Леммы 1 и того, что S – конусная, имеем $(S^{k+1}] = S$. Таким образом, $(S^n] = S$ при любом натуральном $n \geq 2$.

(ii) Пусть теперь S – такая полугруппа, что $(S^n] = S$, $n \geq 3$. Предположим, что $S \neq (S^2]$. Тогда найдется такой элемент $x \in S$, что $x \notin (S^2]$, то есть при любых $a, b \in S$ имеем $x \ntrianglelefteq ab$. С другой стороны, $x \trianglelefteq a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1 \cdots a_{n-1}) a_n$ для некоторых $a_i \in S$, $1 \leq i \leq n$, откуда $x \in (S^2]$. Итак, полугруппа $(S, \trianglelefteq)$ – конусная. □

2. Слабо простые идеалы

В этом параграфе вводятся понятия n-простого и слабо n-простого подмножеств, изучаются свойства слабо n-простых идеалов в квазиупорядоченных полугруппах.

Пусть $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}, n \geq 2$. Подмножество T полугруппы (или квазиупорядоченной полугруппы) S назовем n-простым, если для любых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ из включения $A_1 A_2 \ldots A_n \subseteq T$ следует, что найдется $i \in I_n$, для которого $A_i \subseteq T$.

Подмножество T полугруппы (или квазиупорядоченной полугруппы) S назовем слабо n-простым, если для любых идеалов $A_1, A_2, \ldots,$ $A_n \subseteq S$ из включения $A_1 A_2 \ldots A_n \subseteq T$ следует, что найдется $i \in I_n$, для которого $A_i \subseteq T$.

Если $n = 2$, то 2-простое (слабо 2-простое) подмножество совпадает с простым (соответственно слабо простым) подмножеством. Простой идеал полугруппы называют также вполне первичным или вполне изолированным [9].

Предложение 2. *Пусть $(S, \trianglelefteq)$ – квазиупорядоченная полугруппа. Тогда:*

(i) если I – (слабо) простое подмножество, то I есть (слабо) n-простое подмножество для любого натурального $n \geq 2$;

(ii) если I – (слабо) n-простой правый, левый или двусторонний идеал $(S, \trianglelefteq)$ для некоторого натурального $n \geq 3$, то I есть (слабо) простое подмножество.

Доказательство. (i) Пусть I – (слабо) простое подмножество полугруппы S и (идеалы) $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$, $n \geq 2$, такие, что $A_1 A_2 \ldots A_n \subseteq I$. Тогда либо $A_1 \subseteq I$, либо $A_2 \ldots A_n \subseteq I$. Из последнего условия получаем либо $A_2 \subseteq I$, либо $A_3 \ldots A_n \subseteq I$ и т. д. Таким образом, найдется $i \in I_n$, для которого выполняется $A_i \subseteq I$.

(ii) Теперь пусть I – (слабо) n-простой правый идеал из S, $n \geq 3$, и (идеалы) $A, B \subseteq S$ такие, что $AB \subseteq I$. Домножая последнее включение справа на B^{n-2}, получаем:

$$AB \cdot B^{n-2} \subseteq I \cdot B^{n-2} \subseteq IS \subseteq I.$$

Поскольку I есть (слабо) n-простое подмножество и $AB^{n-1} \subseteq I$, то по крайней мере один из n сомножителей произведения AB^{n-1} содержится в I, то есть $A \subseteq I$ либо $B \subseteq I$.

Аналогично доказывается утверждение для левых и двусторонних идеалов. □

Следствие 1. *Пусть I – правый, левый или двусторонний идеал квазиупорядоченной полугруппы $(S, \trianglelefteq)$. Тогда I является (слабо) n-простым подмножеством в том и только в том случае, если I – (слабо) простое подмножество.*

Заметим, что для подмножеств квазиупорядоченных полугрупп, не являющихся идеалами, Следствие 1 в общем случае неверно.

Действительно, пусть Z – мультипликативная полугруппа всех целых чисел, $F = Z \times Z$ и $T = Z \times \{1\}$. Понятно, что T есть подполугруппа F, не являющаяся ее идеалом. Возьмем $m = 2k+1$, где k – натуральное. Тогда для любых $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq F$ из условия $A_1 A_2 \ldots A_m \subseteq T$ следует, что существует хотя бы одно $i \in I_m$, для которого $A_i \subseteq T$. Значит, T является $(2k+1)$-простым подмножеством при любом натуральном k.

Положим теперь $m = 2k$, где k – натуральное, и $B_i = X_i \times \{-1\}$, где $X_i \subseteq Z$, $i \in I_m$ – непустые подмножества. Тогда $B_1 B_2 \ldots B_m \subseteq T$, при этом $B_i \nsubseteq T$ при любом $i \in I_m$. Таким образом, T не является $2k$-простым подмножеством при любом натуральном k, будучи при этом $(2k+1)$-простым подмножеством.

Напомним, что собственный идеал I полугруппы (или квазиупорядоченной полугруппы) S называется *максимальным*, если не существует идеала J из S такого, что выполняется $I \subset J \subset S$.

Теорема 1. *Пусть $(S, \trianglelefteq)$ – конусная квазиупорядоченная полугруппа. Если I есть максимальный идеал полугруппы S, то I является слабо простым подмножеством полугруппы S.*

Доказательство. Пусть I – максимальный идеал полугруппы S и A, B – такие идеалы из S, что $AB \subseteq I$. Предположим, что ни одно из включений $A \subseteq I$, $B \subseteq I$ не выполняется, и пусть $S \setminus I = P$.

Понятно, что $A \cup I$ есть идеал S. Поскольку I – максимальный идеал и $A \not\subset I$, $A \neq I$, то $A \cup I = S$. Учитывая, что $P \cup I = S$, $P \bigcap I = \varnothing$, получаем $P \subseteq A$. Аналогично доказывается, что $P \subseteq B$. Отсюда, $P^2 \subseteq AB$, а тогда и $P^2 \subseteq I$. По условию (ii) Леммы 1 имеем $(P^2] \subseteq (I]$, где $(I] = I$ согласно условия (iii) той же леммы.

Так как полугруппа $(S, \trianglelefteq)$ – конусная, то

$$S = (S^2] = ((P \cup I)^2] = (P^2 \cup I] = (P^2] \cup (I] = (P^2] \cup I.$$

Учитывая равенство $P = S \setminus I$, получаем $P \subseteq (P^2]$, что вместе с условием $(P^2] \subseteq I$ дает включение $P \subseteq I$. А это противоречит тому, что $P \cap I = \varnothing$. Таким образом, $A \subseteq I$ либо $B \subseteq I$. □

Естественно возникает вопрос о справедливости обратного утверждения к данной теореме.

Пусть $\{(S_\alpha, \trianglelefteq_\alpha) | \alpha \in Y\}$ – непустое семейство квазиупорядоченных полугрупп. На прямом произведении $\prod\limits_{\alpha \in Y} S_\alpha$ полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, определим отношение $\preceq$ следующим образом:

$$(x_\alpha)_{\alpha \in Y} \preceq (y_\alpha)_{\alpha \in Y} \Leftrightarrow x_\alpha \trianglelefteq_\alpha y_\alpha \quad \forall \alpha \in Y.$$

Ясно, что $(\prod\limits_{\alpha \in Y} S_\alpha, \preceq)$ – квазиупорядоченная полугруппа. Кроме того, если J_α является идеалом S_α при любом $\alpha \in Y$, то прямое произведение $\prod\limits_{\alpha \in Y} J_\alpha$ есть идеал полугруппы $\prod\limits_{\alpha \in Y} S_\alpha$.

Тогда, рассматривая мультипликативную полугруппу Z всех целых чисел, которая является квазиупорядоченной относительно обычного отношения делимости, получаем, что $(Z \times Z, \preceq)$ также квазиупорядоченная полугруппа, причем конусная.

Понятно, что $Q = Z \times \{0\}$ является идеалом полугруппы $(Z \times Z, \preceq)$. Более того, Q является слабо простым идеалом.

В самом деле, если $(x_1; y_1), (x_2; y_2) \in Z \times Z$ такие, что $(x_1; y_1)(x_2; y_2) \in Q$, то $(x_1; y_1)(x_2; y_2) = (x_1 x_2; y_1 y_2)$, откуда $y_1 y_2 = 0$, и тогда $y_1 = 0$ или $y_2 = 0$. Таким образом, $(x_1; y_1) \in Q$ или $(x_2; y_2) \in Q$. Значит, Q есть простой и, следовательно, слабо простой идеал $(Z \times Z, \preceq)$.

Пусть $k \in Z \setminus \{1, -1, 0\}$ – фиксированное число. Поскольку kZ – собственный идеал полугруппы Z, то $Z \times kZ$ есть собственный идеал $(Z \times Z, \preceq)$. Тогда имеют место строгие включения:

$$Q \subset Z \times kZ \subset Z \times Z,$$

откуда следует, что Q не является максимальным идеалом $(Z \times Z, \preceq)$.

Итак, обратное утверждение к Теореме 1 в общем случае неверно.

Далее через $Id(S)$ будем обозначать множество всех идеалов квазиупорядоченной полугруппы $(S, \trianglelefteq)$.

Заметим, что любой идеал I квазиупорядоченной полугруппы $(S, \trianglelefteq)$ можно рассматривать как квазиупорядоченнную полугруппу относительно ограничения квазипорядка $\trianglelefteq$ на идеал I.

Для описания необходимых и достаточных условий, при которых все идеалы квазиупорядоченной полугруппы являются слабо простыми идеалами, докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $(S, \trianglelefteq)$ – *квазиупорядоченная полугруппа. Тогда все идеалы из* $Id(S)$ *являются конусными полугруппами в том и только в том случае, если для всех* $A, B \in Id(S)$ *выполняется* $A \bigcap B = (AB]$.

Доказательство. Пусть в полугруппе $(S, \trianglelefteq)$ все идеалы – конусные. Тогда для любых $A, B \in Id(S)$ имеем

$$(AB] \subseteq (A] = A \quad \text{и} \quad (AB] \subseteq (B] = B,$$

откуда $(AB] \subseteq A \cap B$. С другой стороны, согласно условию (iii) Леммы 2 $A \cap B$ есть идеал $(S, \trianglelefteq)$, поэтому

$$A \cap B = ((A \cap B)^2] = ((A \cap B)(A \cap B)] \subseteq (AB].$$

Обратно, для каждого $A \in Id(S)$ получаем $A = A \cap A = (A^2]$. □

Бинарное отношение ρ на множестве X называется линейным, если для всех $a, b \in X$ условие $a \neq b$ влечет $a\rho b$ или $b\rho a$.

Упорядоченное множество $(X, \leq)$, в котором порядок $\leq$ является линейным отношением, называется цепью.

Теорема 2. *Все идеалы квазиупорядоченной полугруппы* $(S, \trianglelefteq)$ *являются слабо простыми тогда и только тогда, когда* $(Id(S), \subseteq)$ – *цепь, элементы которой суть конусные полугруппы.*

Доказательство. Пусть все идеалы полугруппы $(S, \trianglelefteq)$ – слабо простые и A, $B \in Id(S)$. По условию (iii) Леммы 2 $(AB]$ – идеал $(S, \trianglelefteq)$. Поскольку $AB \subseteq \subseteq (AB]$, то

$$A \subseteq (AB] \subseteq (SB] \subseteq (B] = B \quad \text{или} \quad B \subseteq (AB] \subseteq (AS] \subseteq (A] = A.$$

Значит, $(Id(S), \subseteq)$ – цепь.

Согласно условия (i) Леммы 1 имеем $A^2 \subseteq (A^2]$ для всех $A \in Id(S)$. Так как $(A^2] \in Id(S)$, то $A \subseteq (A^2]$. Пусть $x \in (A^2]$, тогда $x \trianglelefteq a_1 a_2$ для некоторых $a_1, a_2 \in A$. Поскольку $a_1 a_2 \in AS \subseteq A$, то $x \in A$, следовательно, $(A^2] \subseteq A$ и, как следствие, полугруппа A конусная.

Пусть теперь $(Id(S), \subseteq)$ – такая цепь, что $A = (A^2]$ для всех $A \in Id(S)$. Обозначим через A, B, I – идеалы $(S, \trianglelefteq)$ такие, что $AB \subseteq I$. Если $A \subseteq B$, то согласно Лемме 3 имеем

$$A = A \cap = (AB] \subseteq (I] = I.$$

Если же $B \subseteq A$, то

$$B = A \cap = (AB] \subseteq (I] = I.$$

Таким образом, идеал I является слабо простым. □

Summary

Yu.V. Zhuchok, L.V. Kirtadze. On Weakly Prime Ideals of Quasi-Ordered Semigroups.

We prove that every maximal ideal of a cone quasi-ordered semigroup is a weakly prime ideal. We found necessary and sufficient conditions under which all ideals of a quasi-ordered semigroup are weakly prime.

Key words: quasi-ordered semigroup, weakly n-prime subset, weakly prime ideal, maximal ideal.

Литература

1. *Faith C.* Algebra. II. Ring theory, Grundlehren Math. Wiss. 191. – Berlin; N. Y.: Springer-Verlag, 1976. – 319 p.
2. *Burton D.M.* A First Course in Rings and Ideals. – Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1970. – 309 p.
3. *Kehayopulu N., Ponizovskii J., Tsingelis M.* A note on maximal ideals in ordered semigroups // Algebra Discrete Math. – 2003. – No 1. – P. 32–35.
4. *Жучок Ю.В.* Квазіупорядковані напівгрупи та їх зображення // Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – No 11. – С. 42–48.
5. *Kehayopulu N.* On weakly prime ideals of ordered semigroups // Math. Japan. – 1990. – V. 35, No 6. – P. 1051–1056.
6. *Kehayopulu N.* Weakly prime and prime fuzzy ideals in ordered semigroups // Lobachevskii J. Math. – 2007. – V. 27. – P. 31–40.
7. *Kehayopulu N.* On prime, weakly prime ideals in ordered semigroups // Semigroup Forum. – 1992. – V. 44, No 1. – P. 341–346.
8. *Kehayopulu N., Ponizovskii J., Tsingelis M.* A note on maximal ideals in ordered semigroups // Algebra Discrete Math. – 2003. – No 1. – P. 32–35.
9. *Шеврин Л.Н.* Полугруппы // Общая алгебра. Т. 2 / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – Гл. IV. – С. 11–191.

Поступила в редакцию
28.12.11

Жучок Юрий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и алгебры Луганского национального университета имени Тараса Шевченко, г. Луганск, Украина.

E-mail: *zhuchok_y@mail.ru*

Киртадзе Леван Варламович – кандидат физико-математических наук, доцент Абхазского государственного университета, г. Сухум, Республика Абхазия.

E-mail: *levanik2@rambler.ru*