

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский фонд фундаментальных исследований
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

**Международная школа
«Математическое моделирование фундаментальных объектов и
явлений в системах компьютерной математики»
KAZCAS-16**

**Международный научный семинар
«Нелинейные модели в механике,
статистике, теории поля и космологии»
GRACOS-16**

Лекции школы и материалы семинара

(5 - 7 ноября 2016 г., Казань)



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2016

УДК 519.711.3+530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
М43

*Печатается по рекомендации Ученого Совета
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского*
Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г. Игнатьева

М43 Международная школа «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики - KAZCAS-2016». Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии – GRACOS-16» // Лекции школы и материалы семинара / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. – 327 с.

ISBN 978-5-9690-0322-4

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физико-математических, информационных и образовательных наук.

International school of mathematical modelling in CAS - «KAZCAS-2016». International science seminar «Nonlinear models in the mechanics, statistics, theory field and cosmology» - GRACOS-16 // Lectures of school and Proceedings of seminar. Under the general edition of Yu. G. Ignat'ev. – Kazan: Kazan University Publishing House, 2016. – 327 p.

Materials are intended for the young scientific Scientists, post-graduate students, magisters and students of older years, specializing in area physical and mathematical, information and educational sciences. Materials are recommended as the manual of post-graduate students, magisters and students of the older years specializing in area physical and mathematical, information and educational sciences, in subjects of mathematical and computer modelling.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ 16-31-10390 мол_г

**УДК 519.711.3+530.12+531.51
+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632**

ISBN 978-5-9690-0322-4

© Коллектив авторов, 2016
© Лаборатория информационных технологий в математическом образовании Института математики и механики КФУ, 2016
© Изд-во Академии наук РТ, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

<i>V.Z. Aladjev, V.K. Boiko, M.L. Shishakov, V.A. Vaganov.</i> Additional software for the Mathematica system	6
<i>Ю.С. Владимиров.</i> Воспоминания о профессоре А.З. Петрове	10
<i>D.V. Gal'tsov.</i> Sigma-model approach in General Relativity and its generalizations	29
<i>Д.П. Голоскоков.</i> Прямые методы математической физики с использованием системы Maple	44
<i>O.B. Zaslavskii.</i> High energy particle collisions near black holes	66
<i>В.М. Журавлев.</i> О топологической теории полей и частиц	73
<i>Yu.G. Ignat'ev.</i> Qualitative Analysis and Numerical Simulation of Equations of the Standard Cosmological Model: $\Lambda \neq 0$	130
<i>Ю.Г. Игнатьев.</i> Макроскопические уравнения Эйнштейна для космологической модели с λ -членом	146
<i>Ю.Г. Игнатьев, А.А. Агафонов.</i> Статистические космологические системы фермионов с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием	157
<i>M.N. Kirsanov.</i> Analytical study of the limiting properties of a suspended cable system with a rigid beam.	179
<i>А.Р. Самигуллина, Ю.Г. Игнатьев.</i> Обучение высшей математике на основе интегрирования методов математического и компьютерного моделирования в системах компьютерной математики.	191
<i>Э.В. Чеботарева.</i> Введение в конструирование и программирование электронных устройств на базе платформы Arduino	223

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-16»

<i>Т.Р. Абдульмянов.</i> Применение компьютерной системы Maple в решении краевой задачи для волнового уравнения специального вида: 3-D профили плотности протопланетных дисков	236
<i>Р.М. Авакян, Г.Г. Арутюнян.</i> Об одном аксиально-симметричном решении стационарного гравитационного поля в скалярно-тензорной теории	244
<i>А.М. Баранов.</i> О диффузии в поле логарифмического потенциала с точки зрения многомерия	245
<i>С.В. Болохов, К.А. Бронников.</i> Модели многомерной гравитации и эффект Казимира.	251
<i>Ю.С. Владимиров.</i> Реляционная концепция Лейбница-Маха	253
<i>Д.В. Гальцов, Д.И. Алферов.</i> Скрытые симметрии уравнений Эйнштейна и конформные преобразования пространства потенциалов	254
<i>А.К. Гуц.</i> Временные эффекты коллапса волнового пакета в суперпространстве Уилера	273
<i>В.М. Журавлев.</i> Материя и внешняя геометрия и топология пространства	280

<i>Ю.Г. Игнатъев, М.Л. Михайлов.</i> Космологическая эволюция слабо вырожденной несимметричной плазмы с фантомным скалярным взаимодействием	283
<i>В.В. Карбановский, К.Е. Белоушко, О.В. Мелёхина, Т.В. Каиров, С.В. Акиньшина, П.В. Родина.</i> ОТО в “полной” форме	297
<i>В.В. Карбановский, К.Е. Белоушко, О.В. Мелёхина, Т.В. Каиров, С.В. Акиньшина, П.В. Родина.</i> Полевая теория гравитации	299
<i>S.M. Kozyrev, R.A. Daishev, S.N. Andrianov.</i> Some remarks to spherically symmetric solution in relativistic theories.	300
<i>И.А. Кох.</i> Компьютерное моделирование процесса диффузии частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной	308
<i>А.Л. Круглый.</i> Теория всего как алгоритм	313
<i>В.М. Морозов, В.М. Журавлев.</i> Многозначные решения многомерных параболических уравнений.	315
<i>И.С. Нургалиев.</i> Нелинейности в передаче энергии	317
<i>А.А. Попов.</i> Effect of self-action in the wormhole spacetimes	323

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»



ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

V.Z. Aladjev, V.K. Boiko, M.L. Shishakov, V.A. Vaganov

Additional software for the Mathematica system



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

UDC 004.942

ADDITIONAL SOFTWARE FOR THE MATHEMATICA SYSTEM

V.Z. Aladjev¹, V.K. Boiko², M.L. Shishakov³, V.A. Vaganov⁴

¹ *aladjev@europe.com*; International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, Tallinn, Estonia

² *boiko@grsu.by*; Grodno State University, Grodno, Belarus

³ *mikhail.shishakov@tdf-ecotech.by*; Belarusian-Swiss company «TDF Ecotech», Gomel, Belarus

⁴ *vaganov46@yandex.ru*; International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, Tallinn, Estonia

Additional software for the Mathematica system is represented.

Keywords: computer mathematics systems, Mathematica, Maple, programming, packages.

Systems of computer mathematics find more and more broad application in a number of natural, economical and social fields. These systems are important enough tools for researchers, scientists, engineers, teachers, and engineers, well enough combining symbolical methods with advanced computing methods. One of leaders in this software class is undoubtedly Mathematica. This work focuses on such important aspect as programming supported by the Mathematica. The given aspect is of particular importance not only for appendices but also above all it is important enough in the creation of the user tools that expand the most frequently used standard tools of the system and/or eliminate its shortcomings, or complement the new facilities.

The presented software contains a number of useful and effective receptions of procedural and functional programming in the Mathematica system which extend the system software and allow sometimes much more efficiently and easily to program the program objects for different purposes first of all wearing system character. Among them there are means which are of interest from the point of view of including of their or their analogs into standard means of Mathematica, at the same time they use approaches, useful in programming of applications in the Mathematica. The above software essentially dilates the Mathematica functionality and can be useful enough for programming of many problems above all of system character. These tools are designed as a MathToolBox package containing more 870 tools of various purpose with freeware license. This software eliminates restrictions of a number of the standard functions of Mathematica system, and expands its software with new tools. In this context, the given package can serve as a certain additional facility of programming, especially useful in the numerous applications when certain nonstandard evaluations have to accompany programming. At that, tools presented in the given package have direct relationship to certain principal questions of procedure and functional programming in the Mathematica system, not only for the decision of applied problems, but, first of all, for creation of software extending the most frequently used facilities of the system and/or eliminating their defects or extending the system with new facilities. The software represented in this package contains a number of useful enough and effective receptions of programming in the Mathematica system, and extends its software which allows to program the problems of various purpose more simply and more effectively.

The procedures and functions represented in this work not only are rather useful as certain additional resources expanding standard software and eliminating some of its de-

fects but also in the context of a certain handbook concerning both the standard, and the non-standard receptions (but equally valid ones) of programming in the Mathematica system that allow to program more effectively. The undoubted advantage of the above receptions is the fact that all they are founded on the standard tools of the core built-in Mathematica system language, determining their rather essential prolongation level. Thus, the additional facilities composing the MathToolBox package embrace the following sections of the Mathematica system, namely:

- additional tools in interactive mode of the Mathematica system
- additional tools of processing of expressions in the Mathematica system
- additional tools of processing of symbols and strings in the Mathematica system
- additional tools of processing of sequences and lists in the Mathematica system
- additional tools extending the standard Mathematica functions or its software as a whole (control structures branching and cycle, etc.)
- definition of procedures in the Mathematica software
- definition of the user functions and pure functions in the Mathematica software
- tools of testing of procedures and functions in the Mathematica software
- headings of procedures and functions in the Mathematica software
- formal arguments of procedures and functions in the Mathematica software
- local variables of modules and blocks; tools of their processing
- global variables of modules and blocks; tools of their processing
- attributes, options and values by default for arguments of the user blocks, functions and modules; additional tools of their processing in the Mathematica software
- some useful additional tools for processing of blocks, functions and modules
- additional tools of the processing of internal Mathematica datafiles
- additional tools of the processing of external Mathematica datafiles
- additional tools of the processing of attributes of directories and datafiles
- additional and some special tools of processing of datafiles and directories
- additional tools of operating with packages and contexts ascribed to them
- a set of procedures for computer research of one-dimensional cellular automata in the Mathematica system and simplification of programming of tools for solution of various problems in this field.

All tools of the package are provided with usages, whereas the detailed descriptions of the tools along with typical examples and features of their use can be found in our books [1-3]. The given package, is mostly for people who want the more deep understanding in the Mathematica programming, and particularly those the Mathematica users who would like to make a transition from the user to the programmer, or perhaps those who already have some limited experience in the Mathematica programming but want to improve their possibilities in the system. The expert Mathematica programmers will probably find useful enough information too. The given package is available in the form of an archive containing 5 files of formats cdf, pdf, m, mx, nb, allowing to use the package on all operating platforms supported by the Mathematica system. The archive is supplied by freeware license and can be freely downloaded from address: <https://yadi.sk/d/sVfAaJPYvLG4V> or <https://yadi.sk/d/uAF7efoyvLG8s>.

References

1. Aladjev V. Z. Extension of the Mathematica System Functionality/ V. Z. Aladjev, V. A. Vaganov. – USA: Seattle, CreateSpace, An Amazon.com Company. – 2015. – 590 p.
2. Aladjev V. Z. Toolbox for the Mathematica Programmers/ V. Z. Aladjev, V. A. Vaganov. – USA: Seattle, CreateSpace. – 2016. – 630 p.
3. Aladjev V. Z. The Art of Programming in the Mathematica (in preparation)/ V. Z. Aladjev, V. K. Boiko, M. L. Shishakov.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

Ю.С. Владимиров

Воспоминания о профессоре А.З. Петрове



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 52:531.51; 52:530.12

ВОСПОМИНАНИЯ О ПРОФЕССОРЕ А.З. ПЕТРОВЕ

Ю.С. Владимиров¹

¹ yusvlad@rambler.ru; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт гравитации и космологии РУДН

Воспоминания о профессоре А.З. Петрове

Ключевые слова: профессор А.З.Петров, гравитация, теория относительности, алгебраическая классификация Петрова пространств Эйнштейна

1. Введение

Профессор Алексей Зиновьевич Петров (1910-1972) был до самоубийства преданным науке человеком, выдающимся геометром, воспитанным на богатых традициях казанской геометрической школы, начало которой восходит к трудам Н.И. Лобачевского. В процессе своей деятельности Петров эволюционировал от чистой геометрии сначала к общей теории относительности, а затем попытался пойти еще дальше в физику вплоть до организации экспериментов по обнаружению гравитационного излучения.

В 1960 году под его руководством в Казанском государственном университете была создана первая в стране кафедра общей теории относительности и гравитации. Создание этой кафедры явились первым шагом властей в ответ на настойчивые обращения советских ученых, особенно профессора Д.Д. Иваненко, развернуть в стране исследования в области общей теории относительности. Заметим, что в 50-х годах эта теория у нас в стране трактовалась идеалистической. Однако в конце 50-х годов за рубежом существенно активизировались исследования по гравитации. От них ожидалось важные практические следствия. По этой тематике были проведены две международные конференции, был создан международный гравитационный комитет. На второй международной конференции под Парижем от СССР присутствовали В.А. Фок, Д.Д. Иваненко и А.З. Петров.

Другим шагом явилась организация под руководством Д.Д. Иваненко гравитационной группы из 3 человек при ГАИШе (физический факультет МГУ). Третьим



Рис. 1. Профессор А.З. Петров.

шагом явилась организация летом 1961 года на базе МГУ первой Советской гравитационной конференции.

Автору этой статьи посчастливилось войти в состав гравитационной группы Иваненко и участвовать в качестве технического секретаря в подготовке первой Советской гравитационной конференции. В процессе организации и ее проведения я познакомился с Алексеем Зиновьевичем Петровым, который дважды выступал на этой конференции с докладами “Об алгебраической структуре уравнений Эйнштейна” и “Некоторые соображения о единых теориях поля” [1].

Четвертым шагом Минвуза СССР на настойчивые обращения советских ученых-гравитационистов была организации после проведения конференции секции гравитации научно-технического совета Минвуза СССР, первым председателем которой был назначен Алексей Зиновьевич. Он оставался на этом посту до своей кончины весной 1972 года. Поскольку значительное время я являлся ученым секретарем секции гравитации, то естественно общался с А.З. Петровым как по организационным, так и по научным вопросам.

Изложу сложившиеся у меня представления, прежде всего, о научных взглядах Алексея Зиновьевича, затрону некоторые моменты организационной деятельности секции, а также приведу ряд высказываний о Петрове его коллег по секции.

2. Взгляды А.З. Петрова на сущность общей теории относительности

Прежде всего, отмечу, что А.З. Петров, разделяя мнение академика В.А. Фока о том, что неверно считать, что в основе общей теории относительности лежат принципы эквивалентности и общей ковариантности, как это декларировал ее создатель А. Эйнштейн. В своих выступлениях и трудах Петров подчеркивал, что, исходя из этих принципов нельзя дедуктивным образом вывести общую теорию относительности. Он писал: “На современном уровне исследования этого вопроса можно утверждать, что для построения теории тяготения Эйнштейна, как дедуктивной теории, нужно исходить из следующих основных аксиом (или принципов): 1) аксиомы размерности пространственно-временного континуума: $n = 4$; 2) утверждения, что пространственно-временной континуум есть риманово многообразие; 3) утверждения, что поле гравитации и пространственно-временной континуум совпадают (идентификация поля и пространства-времени); 4) вида уравнений поля гравитации; 5) принципа геодезических линий и т. д.” [2].

Более подробно свое понимание сущности гравитации А.З. Петров изложил в ходе дискуссии, которая разгорелась между ведущими советскими физиками-гравитационистами на всесоюзном симпозиуме “Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии”, который состоялся в мае 1964 года в Киеве. На этой конференции четко обозначились три основные позиции, прозвучавшие в выступлениях профессоров А.З. Петрова, М.Ф. Широкова и Д.Д. Иваненко.

Алексей Зиновьевич, цитируя В.И. Ленина, утверждал, что гравитация представляет собой *особый вид материи*: “Поле гравитации - это особый вид материи, которая, как таковая, проявляет себя в движении и <не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени>¹. Поэтому при рассмотрении современного состояния

¹ В.И. Ленин. Соч., т. 14, стр. 162.



Рис. 2. На семинаре Д.Д. Иваненко в МГУ имени М.В. Ломоносова.
Слева направо: Д.Д. Иваненко, А.З. Петров, А. Траутман (Польша), А.А. Ткаченко.

учения о поле гравитации, необходимо особенно выпукло подчеркнуть, в противоположность с пониманием этого вопроса в классической механике, специфику гравитационного поля как особого вида материи, связь этого вида материи с формами своего существования и то общее, что имеется у него с другими видами материи” [3].

Судя по тексту выступления в Киеве, Петров понимал тогда гравитацию как особый вид материи, соответствующий лишь гравитационным волнам, которые, как он ожидал, описываются специальными подтипами его алгебраической классификации пространств Эйнштейна.

Однако данный подход можно было понимать и в более широком плане, - в духе ожиданий Клиффорда и Эйнштейна, - как признание того, что геометрией описываются все виды материи, в том числе и источники всевозможных полей. В своих более поздних статьях и выступлениях Петров это осознал и даже стал рисовать таблицы, в которых предлагал классификацию геометрических теорий по четырем видам.

1. Теории, в которых поля и геометрия не идентифицируются.
2. Теории, где только поле гравитации идентифицируется с геометрией пространства-времени.
3. Теории, в которых все поля идентифицируются с геометрией пространства.
4. Теории, в которых геометрия описывает лишь свойства пространства-времени.

Из его последующих выступлений и статей можно сделать вывод, что Петров относил себя к сторонникам второго типа теорий.

Взгляды А.З. Петрова на гравитаци. разделялись далеко не всеми физиками-гравитационистами. Так, профессор М.Ф. Широков в своем выступлении на симпозиуме, а потом в статье для сборника по материалам конференции остро ставил

вопрос: “Является ли инерция и гравитация материей или формой существования материи?” - и в своем выступлении прямо и лаконично ответил на него: “*Инерция и тяготение - это формы существования материи, а не материя*” [4].

А профессор Д.Д. Иваненко заявил, что *гравитация - частично новый вид материи, частично - форма существования материи*. Это утверждение опиралось на представленную им картину мира: “Физическую реальность разумно разделить на следующие категории: 1) пространство (R), 2) время (T), 3) “обычную” материю (M), 4) гравитацию (G). К ним мы добавим 5) космологические обстоятельства (C), имея в виду явления, связанные специфически со всей известной Вселенной” (там же).

Но у Петрова были более далеко идущие надежды. Опираясь на свои математические знания и богатый опыт, он пытался переосмыслить содержание общей теории относительности, исходя из смутной идеи (праидеи) о плоском пространстве-времени и о движении частиц по неким траекториям, которые мы только представляем себе как геодезические в римановом пространстве-времени. Более того, он пытался как-то смоделировать (с помощью геодезического отображения) искривленное пространство-время на фоне пространства-времени Минковского.

Как рассказывали сотрудники и родные, последние 2-3 года Алексей Зиновьевич интенсивно разрабатывал свою идею, практически не вставая из-за стола, и, уже будучи смертельно больным, трудился, как говорится, до последней минуты. По рассказам его учеников, у него была неодолимая уверенность в том, что в основе всего лежит математика и что, изошрившись, с ее помощью можно решить любую физическую проблему. Однако, его идеи в этой области так и остались незавершенными.

3. Алгебраическая классификация Петрова пространств Эйнштейна

Главным научным результатом Петрова является построение алгебраической классификации пространств Эйнштейна, т. е фактически разделение всех решений уравнений Эйнштейна по трем алгебраическим типам, каждый из которых, в свою очередь, делится на подтипы. При получении этого результата Петров использовал предшествующие работы Нордена по классификации римановых пространств, но Петров их переработал на случай решений уравнений Эйнштейна.

Известно, насколько сложны уравнения Эйнштейна. Это система из 10 нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. (Из них независимыми являются лишь шесть.) Не существует общего метода нахождения их решений: каждое из решений находится с помощью каких-то своих ухищрений. Алгебраическая классификация Петрова помогла находить некоторые специальные классы решений этих уравнений.

Известный английский физик-гравитационист Р. Пенроуз в своих исследованиях широко использовал классификацию Петрова и даже предложил ее наглядную иллюстрацию в виде диаграммы, которая носит его имя. Работы Петрова получили широкую мировую известность. Его приглашали на главные мировые гравитационные форумы³.

Петров не ограничился одной алгебраической классификацией, развивая в своих книгах “Пространства Эйнштейна” [5] и “Новые методы в общей теории отно-

³ Замечу, что Петров плохо знал английский язык и в зарубежных поездках ему помогали с переводами сначала Иваненко, потом Вавилов или другие коллеги.

сительности” [6] и другие методы классификации: по группам движения, по конформным или геодезическим соответствиям.

Произведя классификацию, Алексей Зиновьевич в духе тенденций, заложенных еще Н.И. Лобачевским, задался целью понять физический смысл решений, соответствующих различным типам.

В то время актуальной считалась проблема гравитационных волн. Было и остается до сих пор много неясностей в теоретическом определении гравитационной волны. Шел поиск критерия волнового характера решений уравнений Эйнштейна. Петров, а за ним и многие другие физики-гравитационисты пытались связать понятие гравитационной волны с принадлежностью решения (пространства Эйнштейна) к одному из алгебраических подтипов Петрова. Главными кандидатами на волновой характер были решения подтипов N и III. В 60-х - 70-х годах во всем мире было выполнено большое число работ по этой тематике, было предложено значительное число алгебраических критериев гравитационных волн.



Рис. 3. Профессор А.З. Петров.

4. Отношение Петрова к обобщениям эйнштейновской теории гравитации

Остановимся на отношении А.З. Петрова к построению единых и обобщенных теорий поля и гравитации. С одной стороны, он признавал их важность. Так, в одной из своих статей, говоря о неудачных попытках построить эти теорий, он задается вопросом: “Можно ли отсюда сделать вывод, что идеи *единой*, или *общей*, теории поля вообще несостоятельны?” И сам же на него отвечает: “Ни в коем случае! Наоборот, вся история развития физики подсказывает, что она идет по пути нахождения все более глубоких закономерностей, устанавливает связи между понятиями и объ-

ектами, ранее считавшимися совершенно несвязанными... Важность решения этой проблемы трудно переоценить, так как она имеет самое непосредственное отношение к теории элементарных частиц и ко многим конкретным, пока разобобщенным разделам современной физики, в первую очередь к квантовой электродинамике". Далее он писал: "Однако до сих пор попытки построения единых теорий представляли собой классический пример попыток с негодными средствами. Такие теории, если они возможны, требуют более тонкого анализа существа вопроса и непрямого экспериментального исследования" [3, с. 37].

В другой работе А.З. Петров писал: "Основная идея Эйнштейна - возможность искривленного, неплоского пространственно-временного многообразия - привела к большому количеству новых теорий. Некоторые из них заслуживают внимательного анализа, но в настоящий момент, несомненно, среди всех таких теорий *центральное место занимает общая теория относительности* и пока только она дает хорошее согласие с опытом, к сожалению, пока недостаточным" [2, с. 172-174].

Возвращаясь к этому вопросу, он пришел к следующему выводу: "На этом пути очень важным является правильное философское осмысление физической постановки вопросов, что влияет прямо-таки конструктивно на построение теории (например, едва ли будет приемлемой топологическая "единая теория" Уилера, содержащая в своей основе смешение философских категорий материи и пространства-времени, формы и содержания). Поэтому творческое содружество физиков и философов в разработке проблемы гравитации представляется необходимым" [2, с. 189].

На семинарах и конференциях, в вопросе обобщений ОТО он занял позицию скептика, резко критикующего работы такого рода. Так, в представленном Петровым отчете о работе секции гравитации за 1968 год в качестве положительных тенденций отечественных исследований значится "отмирание сугубо формальных исследований типа "единых теорий", основанных на формальных аналогиях".

5. Надежды Петрова на экспериментальное обнаружение гравитационных волн

В центре всех проблем гравитации Петров видел проблему гравитационных волн: "Можно думать, что главное направление - это *теоретико-экспериментальное решение проблемы гравитационных волн*, так как именно в этом вопросе скрещиваются все трудности и главные линии развития теории. Можно заранее предвидеть, что это отнюдь не простая задача, а в случае ее решения она будет по принципиальной значимости вполне сравнима с открытием электромагнитных волн Герцем. Как показали последние конференции по гравитации, на первый план выходят такие проблемы, как проблема квантования гравитации, тесно связанная с предыдущей задачей и рядом других проблем гравитации" [2, с. 189].

Как правило, в своих выступлениях и статьях Петров сетовал на недостаточность экспериментальной базы теории гравитации и призывал к развертыванию гравитационных экспериментов. В конце концов, в 1970 году, уже работая в киевском институте теоретической физики, он решил лично возглавить проведение эксперимента по обнаружению гравитационных волн на детекторе типа веберовского. По его просьбе В.Б. Брагинский помог ему обзавестись алюминиевой болванкой, подобной тем, на которых он сам производил свой эксперимент.

Отношение коллег к этой затее было неоднозначным. С одной стороны, это можно было приветствовать, воспринимая как похвальное стремление крупного ученого поставить гравитационные исследования на прочную экспериментальную основу, причем не на словах, а на деле. Однако, с другой стороны, он взялся за проведение столь тонкого эксперимента, не располагая должной квалификацией в этой области. Петров набрал группу радиофизиков и других местных специалистов. Начались мучительные попытки наладить детектор гравитационных волн, которые не увенчались искомым результатом при его жизни, а затем с этой установкой долго и безуспешно мучился уже его ученик, также физик-теоретик К.А. Пирагас.

6. Казанская гравитационная группа

Возглавляя в Казанском университете с 1960 года первую в стране (и долгое время единственную) кафедру теории относительности и гравитации, А.З. Петров подготовил плеяду талантливых учеников и последователей - физиков-гравитационистов. Среди них следует назвать В.Р. Кайгородова, А.М. Анчикова, Р.Ф. Билялова, В.И. Голикова, А.В. Аминову (Гусеву), К.А. Пирагаса, Ю.Г. Игнатьева и ряд других.

Алексей Зиновьевич серьезно заботился о воспитании преемника в руководстве своей группой. В самом начале 60-х годов он большие надежды на Н.В. Мицкевича, ученика Д.Д. Иваненко, который тогда работал в Самарканде. По рекомендации Иваненко, Петров добился его перевода в Казань, однако Мицкевич проработал в Казани недолго. Иваненко, как выяснилось, тоже хотел иметь Мицкевича в своей группе, и поспособствовал его переезду в Москву, где он был им устроен на кафедру Я.П. Терлецкого в только что образованном Университете дружбы народов. Это послужило одной из первых трещин в личных отношениях между двумя руководителями секции гравитации - Петровым и Иваненко.

После Мицкевича Петров делал ставку на другого молодого энергичного физика-гравитациониста Б.Т. Вавилова, которого он брал с собой на международную гравитационную конференцию в Варшаву, в Лондон и в другие поездки. Но и Вавилов не оправдал ожиданий, поскольку его привлекли иные направления деятельности.

В конце концов Петров выбрал своим преемником Казимира Антоновича Пирагаса, которого взял с собой в Киев, когда в самом конце 60-х годов ему предложили возглавить отдел гравитации в Киевском институте теоретической физики (на окраине Киева в Феофании, вблизи одноименного монастыря).

После отъезда Петрова некоторое время возглавлял организованную им кафедру в Казани профессор А.П. Широков (геометр), а затем - долгие годы ученик Петрова Владимир Романович Кайгородов.

Гравитационная группа Петрова в Казанском университете вела активную деятельность. На кафедре теории относительности и гравитации читался на высоком математическом уровне ряд курсов и спецкурсов. Проводились даже семинарские занятия по ряду разделов общей теории относительности, чего не было тогда ни в одном другом вузе страны.

Кроме издания двух своих монографий, Петров организовал регулярный выпуск казанского сборника "Гравитация и теория относительности", который в какой-то степени выполнял роль отечественного гравитационного журнала. В нем опублико-

вались труды гравитационистов и из других регионов страны.

Более того, в Казанском университете под руководством Петрова работал гравитационный семинар, где, кроме своих, заслушивались доклады физиков-гравитационистов из других городов.

Казалось бы, Петров, находясь в Казани, проводил активную деятельность, вполне соответствующую его должности председателя секции гравитации Минвуза СССР. Формально это было так, но в те времена реальное руководство секцией требовало пребывания в Москве, вблизи начальства, а Петров работал в Казани и за ним стоял не Московский, а Казанский университет. Кроме того, семинары Иваненко, - по теоретической физике и гравитационный, - имели общесоюзную и даже мировую известность, были признанными центральными семинарами в области теории гравитации.

Видимо, по примеру Д.Д. Иваненко, издававшему ряд сборников важных работ по гравитации зарубежных авторов, Петров издал аналогичный сборник “Гравитация и относительность”. Однако ему было затруднительно ориентироваться в зарубежной литературе без знания иностранных языков и без столь обширной информации, какой располагал Иваненко.

Но самое главное состояло в тематике гравитационных исследований, ведущихся в группе Петрова. В математическом плане они были на чрезвычайно высоком уровне, но центр тяжести мировой научной мысли в то время находился не в области математических тонкостей уравнений или пространств Эйнштейна, а в проблемах связи общей теории относительности с современной квантовой физикой, теорией элементарных частиц, релятивистской астрофизикой. А этими вопросами в группе Петрова не занимались. Они были далеки от актуальных проблем физики микромира. Поэтому к деятельности казанской группы многие относились с уважением, но считали их работы узко специальными. А группа Иваненко “сидела на двух стульях”: гравитационной тематике и проблемах физики микромира.

7. Личные воспоминания об общении с А.З. Петровым

Петров был среднего роста, довольно худощавым, с каким-то нездоровым цветом лица, постоянно носил очки и много курил. Ничто человеческое ему было не чуждо. Мог и пошутить. Помню, во время одного из заседаний секции гравитации, которое происходило в Москве в его номере гостиницы “Ленинград”, позвонила жена одного из членов секции, который в этот момент вышел в соседнюю комнату. “Кого позвать?” - переспросил Петров. - “А его здесь нет”. И положил трубку, а нам подмигнул, сказав: “Вот увидите, через полчаса его жена будет здесь”. И действительно, примерно через 40 минут взволнованная жена нашего коллеги ворвалась в номер Петрова.

В зарубежных поездках Алексей Зиновьевич интересовался всем тем, что отсутствовало в советской действительности. Конечно, А.З. Петров был членом партии со стажем, иначе бы ему не доверили кафедру, однако, как следовало из общения с ним, никаких иллюзий относительно нашего общественного устройства он не питал. Помню, когда мы ехали из аэропорта Внуково, возвращаясь с Лондонской международной гравитационной конференции, и проезжали Ленинский проспект, он обратил наше внимание на унылый в ту пору вид домов и витрин, таких непохожих

на блистательную английскую столицу. И при этом укоризненно покачал головой.

Алексей Зиновьевич отличался твердым, даже жестким характером, знал себе цену, вполне сознавая, что Иваненко его использует в качестве ширмы, осуществляя фактическое руководство секцией гравитации. На начальном этапе деятельности секции между ними поддерживались внешне нормальные отношения, и Петров неоднократно выступал в МГУ на семинарах Иваненко (см. [7]). Но год от года ситуация становилась всё более напряженной, и к началу 70-х годов дело дошло до того, что Иваненко с Петровым могли общаться друг с другом лишь через меня. Петров посылал мне письма примерно такого содержания: “Что Ваш ДД думает о том-то и том-то?” или “До каких пор Ваш ДД будет использовать наши заседания для выращивания своих цветов красноречия?” Иваненко, в свою очередь, просил меня ответить Петрову так-то и так-то... В 1971 году после инцидента в Копенгагене их отношения были окончательно разорваны.



Рис. 4. На экскурсии в Лондоне на пароходе по Темзе во время 4-й Международной гравитационной конференции (1965 г.) В первом ряду слева направо: А.З. Петров, (за ним Ю.С. Владимиров), Б.Т. Вавилов, И.Д. Новиков.

8. Конфликт в секции гравитации

В данных воспоминаниях о Петрове нельзя не упомянуть о серьезном конфликте, разразившемся в нашем гравитационном сообществе, который всем нам дорого обошелся, и который, безусловно, ускорил кончину Алексея Зиновьевича (см. [8]).

Начало этого конфликта восходит к концу 60-х годов, и было связано со стремлением профессора Д.Д. Иваненко самому возглавить секцию гравитации. Однако конфликт резко обострился в результате инцидента, случившегося в Копенгагене во время проведения 6-й Международной гравитационной конференции. Это произошло на общем собрании гравитационистов, посвященном организации международного гравитационного общества. На этом заседании один из иностранных участников допустил неподобающие выпады в адрес нашей страны. В итоге советские участники конференции, а за нами и представители социалистических стран покинули зал заседаний.

Но когда мы вышли, остро встал вопрос, что делать дальше? Мнения разделились. Петров вместе с Брагинским считали, что нужно вернуться и сделать решительное заявление протеста, а Иваненко и Соколов противились этому, полагая, что заявить протест можно на следующий день. После резкой дискуссии Петров с Брагинским вернулись в зал заседаний и Брагинский зачитал составленный ими совместно протест. Все другие, ранее покинувшие зал заседаний, за ними не последовали.

После завершения заседания Петров отправился в советское посольство и там имел беседу с советником посла. Самого посла в тот момент в посольстве не было. Со слов Петрова, советник одобрил его действия.

Оказалось, что Д.Д. Иваненко также ходил в посольство и беседовал с другим советником посла, который, судя по его словам, также одобрил позицию не вернувшихся на заседание.

После возвращения в Москву начались разборки в административных и партийных органах. Нас всех неоднократно вызывали в партком, где мы должны были давать объяснения случившемуся. Многие из нас после этого на долгое время оказались невыездными. Насколько мне потом стало известно, Петрову, как члену партии, в Киеве пришлось довольно туго. Многочисленные объяснения и оправдания стоили ему больших нервных нагрузок, что подорвало его и без того слабое здоровье.

9. Кончина Алексея Зиновьевича Петрова

На заседании секции гравитации в Москве в декабре 1971 года у Алексея Зиновьевича Петрова был жуткий вид - он был страшно худ, пиджак на нем висел как на вешалке. Черты его лица заострились, лицо было темно-серо-желтого цвета, под глазами почти чернели синяки. Похоже было, что у него рак в поздней стадии. Незадолго до приезда в Москву он перенес, если я не ошибаюсь, воспаление легких. Помню, они стояли с Михаилом Федоровичем Широковым и сетовали друг другу на свое здоровье. (Широков тоже недавно тяжело болел.) Петров ему говорил: “<Костлявая> уже держала меня за горло”.

Но “костлявая” решила немного повременить. Ему еще было отпущено неполных полгода. И он, видимо, чувствуя близкий финал, торопился завершить свои дела в этом мире. Рассказывают, что он целыми днями до позднего вечера сидел над бумагами, не вставая из-за стола. Вокруг института теоретической физики под Киевом великолепные места: дубовые рощи, балки, прекрасные аллеи, - но он в последние месяцы не выходил за пределы квартиры и института. А тут еще письма Иваненко

из Москвы в партийные органы института и в другие инстанции по поводу инцидента в Копенгагене.

Бесконечные вопросы и объяснения требовали дополнительных усилий и такого дорогого времени. В апреле Петрову стало совсем плохо. Его срочно отвезли в больницу. У него оказалась повышенная свертываемость крови - стали образовываться тромбы в крупных сосудах. Один серьезный тромб удалили. Ему полегчало. К нему стали пускать посетителей. Он уже говорил о выписке, о делах, о возвращении домой. И тут радостная весть - в 20-х числах апреля ему было присвоено звание Лауреата Ленинской премии за труды в области алгебраической классификации пространств Эйнштейна и за книгу "Новые методы в теории гравитации."

А девятого мая 1972 года у Алексея Зиновьевича образовался тромб в легких, и он скончался.



Рис. 5. В Киеве у могилы А.З. Петрова (1972 г.). Слева направо: В.С. Брежнев, И.Д. Новиков, А.В. Аминова, О.С. Иваницкая, М.Ф. Широков, вдова Петрова, дочь Петрова, Р.Ф. Полищук, К.А. Пирагас.

10. Мемориальное заседание секции гравитации

Вскоре после кончины профессора А.З. Петрова на физическом факультете было проведено мемориальное заседание секции гравитации. Председательствовал на заседании профессор Д.Д. Иваненко. Заседание прошло далеко не гладко (см. [8, с. 37-45]).

На этом заседании выступил ряд ведущих отечественных гравитационистов - членов секции гравитации.

Первым выступил профессор А.Е. Левашев, который сделал серьезный научный дооклад в духе старых классических традиций. Он начал свое выступление словами: "Я с глубоким чувством делаю здесь это сообщение. Я хорошо знаком с работами

Алексея Зиновьевича, рецензировал ряд его статей, книг.”

Затем он кратко рассказал биографию А.З. Петрова, отметил его основные научные заслуги, подробно изложил всемирно известную классификацию Петрова пространств Эйнштейна в оригинальной своей интерпретации, используя идеи Картана. Он также отметил, что последние работы Петрова по моделированию так и остались незавершенными.

После Левашева выступил профессор А.П. Широков, заведующий кафедрой теории относительности и гравитации в Казанском университете, созданной Петровым. Он изложил творческий путь Петрова, отметил основные научные методы, использованные в его исследованиях. Основной упор он сделал на научной эволюции Петрова от математика-геометра к физику-гравитационисту.

Затем слово было предоставлено Казимиру Антоновичу Пирагасу, возглавившего отдел гравитации в киевском институте после кончины Петрова.

(Все это заседание секции было тайно записано на магнитофонную ленту, поэтому некоторые выступления считаю уместным воспроизвести практически дословно.)

К.А. Пирагас сказал следующее: “Здесь сказано много теплых слов о работах Алексея Зиновьевича. Я расскажу о последнем периоде его работы, какие планы он имел на будущее. Большие надежды Алексей Зиновьевич возлагал на свои работы по моделированию полей тяготения. В последнее время он проявлял большой интерес к экспериментам в области гравитации. Он хотел дать решение вопроса - сведения языка общей теории относительности к языку физика-экспериментатора. Алексей Зиновьевич не успел завершить этот цикл работ. Часть этих работ будет завершена его учениками. Большие надежды он возлагал также на решение проблемы энергии и квантования гравитации. Он делом пытался помочь экспериментальным группам в нашей стране. Сейчас в Киеве есть экспериментальная группа, которая работает над проверкой эксперимента Вебера совместно с Владимиром Борисовичем Брагинским. Алексей Зиновьевич собирался сам дать теоретическое обоснование экспериментов Вебера, хотел сам заняться обработкой его результатов. Это все осталось незавершенным. Кроме того, у Алексея Зиновьевича были неопубликованные работы по влиянию структуры Солнца на гравитационные эффекты и вообще на наблюдения в общей теории относительности. Его ученики в Киеве занимались теорией групп, задачей Коши и группами движения некоторых пространств.

Алексей Зиновьевич Петров до конца жизни сохранял бодрость духа. Только близкие люди могли сказать, что он серьезно болен. Алексей Зиновьевич не любил, когда говорили, что он болен. На первое место он всегда ставил дело, а личные дела потом.

Информирую, какие мероприятия предполагается провести в Киевском институте теоретической физики по увековечению памяти Петрова:

1. Издание собрания сочинений А.З. Петрова.
2. Планируется организовать проведение ежегодных рабочих совещаний - Петровских чтений.

Я рад, что работал с таким замечательным человеком, каким был Алексей Зиновьевич Петров”.

После Пирагаса выступил профессор Михаил Федорович Широков (Москва,

МАИ): “Последние восемь-десять лет мы были тесно связаны с Алексеем Зиновьевичем. Связь была деловая, дружеская. Со временем она усиливалась. Почему у нас возникли взаимные симпатии? Он был замечательным человеком и ученым. Алексей Зиновьевич эволюционировал от геометра к физику, к физическому эксперименту. Все помнят, как Алексей Зиновьевич говорил: <ОТО - гигант на тоненьких ножках. Отсюда задача - сблизить ОТО с экспериментом>. Он неоднократно выражал огорчение, что общая теория относительности находится в отрыве от эксперимента. Всем известны его тесные отношения с Владимиром Борисовичем Брагинским, экспериментальной группой Кирилла Петровича Станюковича. С нами он также был близок в связи с космическими экспериментами. Отсюда его интерес к проблеме энергии-импульса в ОТО. Это его линия жизни в последние годы. Не случайно в Казани у Алексея Зиновьевича была создана экспериментальная группа. Во время моего последнего визита к Алексею Зиновьевичу он с гордостью говорил мне, что и в Киеве он собрал для гравитационной экспериментальной группы хороших радистов-приборщиков.

Алексей Зиновьевич был сильным математиком, он неоднократно замечал ошибки у Брилла, у Л.Д. Фаддеева и у других иностранных и советских физиков. Он не любил публичной полемики, но в личной беседе умел все квалифицированно объяснить. Не случайны его исследования по моделированию, - Алексей Зиновьевич стремился глобально отобразить риманово пространство в пространство Минковского. Пока он рассматривал частные случаи, но стремился от них перейти к общему. Не буду подробно говорить о его надеждах. Он хотел кривизну пространства-времени <перекачать> в реальные физические силы и энергию.

Хочу отметить его замечательные человеческие качества. В науке он был принципиален. Если у кого были ошибки, он не считался ни с рангом его, ни с ситуациями. Отсюда возникали конфликты, обусловленные научными моментами.

Позволю себе выразить сожаление, что первое заседание после смерти Алексея Зиновьевича проходит не так, как положено. Оно должно было проводиться его друзьями. Формально это заседание можно было провести и так, но всем его друзьям это доставляет большое огорчение”.

Затем несколько слов сказал профессор МГУ физик-экспериментатор В.Б. Брагинский: “Мне приходилось на протяжении некоторого времени контактировать с Алексеем Зиновьевичем. Он редкий теоретик, ясно понимавший экспериментатора. Хочу подметить два качества Алексея Зиновьевича: он был большой патриот, был человеком исключительной честности. Будучи больным, пренебрегая указаниями врачей, делал то, что было нужно для организации науки ...”.

В заключительной части заседания выступил Н.В. Мицкевич: “Я познакомился с Алексеем Зиновьевичем в Казани осенью 1961 года. Работая с ним вместе, я смог оценить его как замечательного человека. Он совершил научный подвиг, идя от математических построений к физической реальности. Нет большей радости, чем познавать, что дается Природой! Не многие математики смогли пройти такой славный путь. С полным правом мы можем сказать, что Алексей Зиновьевич отдал науке всю жизнь. Хотя бы вспомним, как во время войны Алексей Зиновьевич брал отпуск с фронта для защиты диссертации. Недаром ему была присуждена высшая награда - Ленинская премия, отмечающая его заслуги как ученого, как гражданина, патриота.

Прискорбно, что Алексей Зиновьевич в последние годы своей жизни был вынужден переживать многие неурядицы, которые были в нашей секции. Известно, что после последнего заседания он не доехал до Казани. С сердечным приступом его сняли с поезда. Мы знаем, что послужило причиной, омрачавшей последний период его жизни...”



Рис. 6. Киев. Около детектора гравитационных волн, налаживаемого по инициативе А.З. Петрова. Справа налево: К.А. Пирагас, Ю.С. Владимиров, далее киевские экспериментаторы.

11. Заключение

Спустя более 40 лет после кончины А.З. Петрова постараюсь с современных позиций взглянуть на его научное наследие.

1. Прежде всего, следует отметить, что дискуссии о природе гравитации продолжаются до сих пор. Большинство физиков- гравитационистов придерживается мнения Петрова, что гравитация представляет собой особый, геометрический вид материи. Именно с этим связан большой интерес к проблеме обнаружения гравитационных волн.

Однако имеется и даже крепнет противоположная точка зрения, - что гравитация не является первичным видом взаимодействий, а имеет вторичный характер, обусловленный иными обстоятельствами или другими физическими взаимодействиями. Эту точку зрения настойчиво высказывал А.Д. Сахаров. Она была поддержана Адлером и рядом других гравитационистов.

Отмечу также, что с точки зрения развиваемой в нашей группе реляционно-

статистической концепции Лейбница-Маха [9] гравитация является специфическим квадратичным проявлением электромагнитных взаимодействий.

2. Остались незавершенными попытки А.З. Петрова как-то смоделировать эйнштейновскую теорию гравитации на фоне пространства-времени Минковского. Как нам представляется, реализация этого замысла могла трактоваться двояко. Если при этом допускать априорный характер пространства-времени Минковского, то это бы соответствовало отходу от дуалистического характера общей теории относительности и возвращению к триалистической картине мира. Дело в том, что общая теория относительности строится на двух категориях: искривленного пространства-времени, описывающего гравитацию, и категории частиц, т. е. материи, помещенной в это пространство-время. Эта идеология отображена левой и правой частями уравнений Эйнштейна. А теории триалистической парадигмы строятся на трех физических категориях: пространстве-времени, частицах (материальных объектах) и полях переносчиков взаимодействий (в частности, гравитационного). Именно в этой парадигме чуть позже строилась релятивистская теория гравитации (РТГ) А.А. Логунова.

Если же под моделированием гравитации понимать трактовку понятий общей теории относительности на физическом языке, т. е. на языке экспериментатора (наблюдателя), то, видимо, моделирование должно было бы свестись к теории систем отсчета, развивавшихся в работах А.Л. Зельманова и ряда других авторов.

3. Алгебраическая классификация Петрова, безусловно, представляет собой выдающееся достижение в области теории гравитации. Эта классификация помогла найти ряд точных решений уравнений Эйнштейна. Однако использование лишь алгебраической классификации для формулировки критерия гравитационных волн оказалось недостаточным. В свое время Синг привел достаточно яркий пример того, как использование аналогичного алгебраического критерия для определения электромагнитных волн (фактически обращения в нуль двух электромагнитных инвариантов) оказывается ложным. К алгебраическому критерию необходимо добавлять ряд других условий.

4. Можно лишь частично согласиться с Петровым в том, что множество вариантов предлагавшихся единых геометрических теорий оказались несостоятельными. В последующие годы было показано, что наиболее плодотворными оказались многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы. В работах А. Салама даже были выделены “четыре чуда” теории Калуцы. Сейчас уже надежно установлено, что в рамках 5-мерной теории Калуцы достаточно хорошо достигается объединение гравитационного и электромагнитного взаимодействий. Для геометризации слабых (точнее, электрослабых) взаимодействий необходимо увеличить размерность до шести или семи измерений, а для геометризации еще и сильных взаимодействий необходимо перейти к 8-мерной геометрической модели.

Заметим, что в современных вариантах супергравитации широко используются 10- и 11-мерные теории.

5. Что касается больших надежд, которые возлагал Петров на открытие гравитационных волн, то с момента его кончины на решение этой проблемы были затрачены огромные усилия. Мы вместе с Петровым, находясь на международной грави-

тационной конференции в Копенгагене (1971 г.), наблюдали, с каким энтузиазмом многие относились к объявленному Дж. Вебером открытию гравитационных волн. Тогда указывалась даже их поляризация и направления, откуда они приходят. Вебер доказывал, что он принимает гравитационное излучение двумя разнесенными детекторами, информация с которых обрабатывается компьютерами и т. д. Петров не дождался буквально нескольких месяцев до опровержения этих результатов в экспериментах В.Б. Брагинского, а затем и других экспериментальных групп.

Исходя из этого, нам представляется преждевременной охватившая многих эйфория от очередных сообщений об обнаружении гравитационных волн.

6. Отечественное гравитационное сообщество многим обязано Петрову за его вклад в организацию гравитационных исследований в нашей стране. Возглавлявшаяся им секция гравитации НТС Минвуза СССР в 1988 году прекратила существование, однако вместо нее было организовано Российское гравитационное общество, которое успешно продолжает начатое в 60-х годах дело по координации и развитию гравитационных исследований в нашей стране. Регулярно каждые три года проводятся всероссийские гравитационные конференции с привлечением иностранных коллег.

На заседаниях секции гравитации и в личных беседах А.З. Петров неоднократно высказывался за создания в нашей стране специального гравитационного журнала. Однако при его жизни этого сделать так и не удалось. А уже в 90-х годах российским гравитационным обществом был создан и стал регулярно выходить на английском языке гравитационный журнал "Gravitation and Cosmology". Кроме этого, в последнее время стал издаваться журнал "Пространство, время и фундаментальные взаимодействия", в котором печатаются, главным образом, статьи по гравитационной и смежной тематике на русском языке. Философские и методологические вопросы теории пространства-времени и гравитации освещаются в журнале "Метафизике", организованной членами российского гравитационного общества.

12. Послесловие

После кончины А.З. Петрова так и не удалось издать сборник его трудов, однако в Институте теоретической физики АН УССР в Киеве, как и обещал К.А. Пирагас, возглавивший после Петрова отдел гравитации, действительно было проведено несколько совещаний по общей теории относительности. На эти Петровские чтения, приезжали коллеги из Минска, Казани, Ленинграда, Москвы и других городов. На чтениях делались доклады и сообщения, проводились оживленные дискуссии. Условия для работы и пребывания там были исключительно хорошими. Совещания проводились либо осенью, приурочено ко дню рождения Петрова (28 октября), либо весной - ко дню его ухода из жизни. Но состоялись они всего 3 или 4 раза: через 4 года отдел теории относительности и гравитации, организованный Петровым, в институте прекратил существование. Бывшие сотрудники Петрова были вынуждены покинуть институт.

По окончании совещаний каждый раз мы коллективно посещали могилу Алексея Зиновьевича, приносили на нее цветы, делились около нее воспоминаниями о нем.

После описанных выше событий отечественное гравитационное сообщество предприняло все возможные меры, чтобы пост председателя секции гравитации



Рис. 7. В Киеве на первых Петровских чтениях по гравитации. Слева направо в первом ряду: О.С. Иваницкая, К.А. Пирагас, И.Д. Новиков, М.Ф. Широков, Ю.С. Владимир, Н.В. Мицкевич.

не достался профессору Д.Д. Иваненко. Предлагалось возглавить секцию академику В.А. Фоку, однако он решительно отказался, сославшись на состояние здоровья. Тогда руководство НТС Минвуза СССР приняло решение назначить после Петрова председателем секции гравитации профессора А.А. Соколова, возглавлявшего тогда кафедру теоретической физики физфака МГУ имени М.В. Ломоносова, а его заместителями были назначены представители двух противоположных сторон конфликта: Д.Д. Иваненко и В.Б. Брагинский. Автора же этих строк назначили ученым секретарем этой секции.

Новый состав секции гравитации функционировал до 1984 года, затем секцию возглавил ректор Московского государственного университета академик А.А. Логунов. В новом виде секция просуществовала до конца 1988 года, а затем вместо него было образовано сначала Всесоюзное гравитационное общество, а затем оно изменило свое название на Российское.

Литература

1. Петров А.З. Об алгебраической структуре уравнений Эйнштейна, Некоторые соображения о единых теориях поля / А.З. Петров // 1-ая Советская гравитационная конференция: тезисы конференции. - Москва, 1961. - С. 3-6, 83.
2. Петров А.З. Гравитация и пространство-время / А.З. Петров // Пространство. Время. Движение. - 1971. - С. 178.
3. Петров А.З. Современное состояние развития теории гравитационного поля / А.З. Петров // Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. - 1965. - С. 30.

4. Широков М.Ф. Является ли инерция и гравитация материей или формой существования материи? / М.Ф. Широков // Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. - 1965. - С. 194-206.
5. Петров А.З. Пространства Эйнштейна / А.З. Петров. - М.: Физматгиз, 1961.
6. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. - М.: Наука, 1966.
7. Владимиров Ю.С. Между физикой и метафизикой. Книга вторая. По пути Клиффорда-Эйнштейна / Ю.С. Владимиров. - М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2011.
8. Владимиров Ю.С. Между физикой и метафизикой. Книга третья. Геометрическая парадигма: испытание временем / Ю.С. Владимиров. - М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2011.
9. Владимиров Ю.С. Реляционная концепция Лейбница-Маха / Ю.С. Владимиров. - М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2016.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

D.V. Gal'tsov

**Sigma-model approach in General Relativity
and its generalizations**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

UDC 530.12; 531.51

SIGMA-MODEL APPROACH IN GENERAL RELATIVITY AND ITS GENERALIZATIONS

D.V. Gal'tsov¹¹ *galtsov@physics.msu.ru, gdmv04@mail.ru*; Moscow State University

Construction of exact solutions of Einstein equations in General Relativity and its generalizations, such as supergravities and string inspired models in various dimensions is an important problem of theoretical and mathematical physics. Here we review one of the most efficient tools which is applicable to large class of theories involving metric, scalar, vector and antisymmetric form fields without higher-derivative terms, scalar potentials and cosmological constant. This includes pure gravity in arbitrary dimensions, bosonic parts of supergravities, as well as many non-supersymmetric gravity-matter systems. The method is based on dimensional reduction of D -dimensional Einstein equations assuming the solutions to depend only on three independent variables in a way that the field equations reduce to those of the three-dimensional gravity coupled scalar sigma-model. Typically this amounts to starting with the Einstein-Hilbert action coupled to scalar-vector/antisymmetric form sector with Maxwell-dilaton type action and restricting to field configurations admitting $D - 3$ commuting Killing vectors. The corresponding dimensional reduction is commonly referred as toroidal.

Keywords: general relativity, sigma-models, supergravity, Einstein equations.

1. Stationary $D=4$ vacuum Einstein equations

Consider four-dimensional spacetime admitting (at least) one Killing vector field. Such spacetime is called stationary if this field is timelike in an essential domain. The following is equally applicable if the Killing vector is spacelike (this is suggested as an exercise), but not null. The interval in appropriate coordinates (called Kaluza-Klein) can be presented as

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(dx^0 + a_i dx^i)^2 + f^{-1} h_{ij} dx^i dx^j, \quad (1)$$

where the metric function $g_{00} = f$, the three-dimensional reduced metric h_{ij} ($\mu = 0, i; i = 1, 2, 3$) and the Kaluza-Klein (KK) three-dimensional (co)vector a_i depend only on the x^i . One can introduce a 3- vector τ^i , dual to the rotation 2-form $da = \partial_i a_j dx^i \wedge dx^j$,

$$\tau^i = -f^2 \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{h}} \partial_j a_k, \quad (2)$$

assuming further that the indices of all three-dimensional quantities are raised and lowered with the metric h_{ij} while for four-dimensional tensors one still uses $g_{\mu\nu}$. Then the components of the four-dimensional Ricci tensor can be expanded as

$$R_{00} = \frac{1}{2} (f\Delta f - (\nabla f)^2 + \tau^2), \quad R_0^i = \frac{f}{2\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} \partial_j \tau_k, \quad (3)$$

$$R_{ij} = f^2 \mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2} [(\partial_i f)(\partial_j f) + \tau_i \tau_j - h_{ij} (f\Delta f - (\nabla f)^2 + \tau^2)], \quad (4)$$

where $\mathcal{R}_{ij}(h)$ is the Ricci tensor of the three-space, ∇_i denotes 3-covariant derivative, $\Delta = \nabla^2$, and 3-vector scalar products are understood with respect to the metric h_{ij} . The mixed component Einstein equation $R_0^i = 0$ can be solved by introducing the twist (pseudo)scalar potential χ :

$$\tau_i = \partial_i \chi. \quad (5)$$

Then the $R_{00} = 0$ equation reduces to

$$f\Delta f - (\nabla f)^2 + (\nabla \chi)^2 = 0, \quad (6)$$

taking $\nabla_i \tau_i$ and using this one get similar equation for χ :

$$f\Delta \chi - 2\nabla f \nabla \chi = 0, \quad (7)$$

and the remaining equation $R_{ij} = 0$ to three-dimensional Einstein equation

$$\mathcal{R}_{ij}(h) = \frac{1}{2f^2} \left(\nabla_i f \nabla_j f + \nabla_i \chi \nabla_j \chi \right). \quad (8)$$

Obviously $\nabla_i = \partial_i$ when applied to scalars.

2. Sigma-model representation

Eqs. (6), (7) and (8) can be equally derived from the three-dimensional action

$$S_\sigma = \int \left(-\mathcal{R}(h) + G_{AB}(X) \nabla_i X^A \nabla_j X^B h^{ij} \right) \sqrt{h} d^3 x, \quad (9)$$

which defines the three-dimensional gravitating sigma model based on the two-dimensional target space parameterized by coordinates X^A , $A = 1, 2$, $X^1 = f$, $X^2 = \chi$ and endowed with the metric G_{AB} , the corresponding line element being

$$dl_T^2 \equiv G_{AB} dX^A dX^B = \frac{1}{2f^2} (df^2 + d\chi^2). \quad (10)$$

Thus the g_{00} component of the four-dimensional metric and the twist potential obtained by dualization of the KK vector act as matter sources for the three-dimensional metric h_{ij} . Generally the ‘‘matter’’ equations reads:

$$\nabla_j \left(G_{AB} h^{ij} \nabla_i X^A \right) = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_j \left(G_{AB} h^{ij} \sqrt{h} \partial_i X^A \right) = 0, \quad (11)$$

This defines the harmonic map between the coordinate three space with metric h_{ij} and the target space with metric G_{AB} .

Let us show that the target space (10) is a symmetric riemannian space. Consider the Killing equations

$$K_{(A;B)} = 0, \quad (12)$$

where the semi-colon denotes the covariant derivative with respect to G_{AB} . For the metric (10) one finds three Killing vectors

$$H = 2(f\partial_f + \chi\partial_\omega), \quad E_+ = \partial_\chi, \quad E_- = (\chi^2 + f^2)\partial_\chi + 2\chi f\partial_f, \quad (13)$$

These three Killing vectors generate the Lie algebra $sl(2, R) = so(1, 2)$:

$$[H, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = H, \quad (14)$$

revealing that the target space is the symmetric coset space $SL(2, R)/SO(2)$ (this identification follows from consideration of its signature). The first Killing vector M describes scale transformation $f, \chi \rightarrow a^2(f, \chi)$, the second — gauge transformation $\chi \rightarrow \chi + b$, obvious from the dualization equation (Rfdual), the third corresponds to non-trivial Ehlers transformation :

$$(\chi - if)^{-1} \rightarrow (\chi - if)^{-1} + c, \quad (15)$$

where a, b, c are real parameters.

3. Matrix representation of the coset

In this example obtaining finite isometries of the target space is rather simple, but for larger cosets it is better to use matrix representation. For generators one can use Pauli matrices

$$H = \sigma_3, \quad E_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2). \quad (16)$$

To obtain matrix representative of the coset one can exponentiate the Borel subalgebra spanned by upper triangle matrices H, E_+ (including diagonal) with $\xi = \ln f, \chi$ as coefficients. Exponentiation of these leads again to some upper triangle matrix:

$$v = e^{\frac{1}{2}\xi H} e^{\chi E_+} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\xi} & \chi e^{\frac{1}{2}\xi} \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\xi} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Since infinitesimally

$$dvv^{-1} = \frac{1}{2}d\xi H + e^{\xi} d\chi E_+, \quad (18)$$

one can express the target space metric using square of this element. But the upper triangle gauge is not preserved by isometry transformation, so it is better to choose as the representative of the coset a gauge invariant matrix

$\mathcal{M} = v^T v$. Coming back to f , we obtain

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} f + f^{-1}\chi^2 & -f^{-1}\chi \\ -f^{-1}\chi & f^{-1} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

so the target space metric can be rewritten as

$$dl_T^2 = \frac{1}{4}\text{Tr}(\mathcal{M}^{-1}d\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}d\mathcal{M}), \quad (20)$$

and the vacuum four-dimensional Einstein equations read

$$\nabla(\mathcal{M}^{-1}\nabla\mathcal{M}) = 0, \quad (21)$$

$$\mathcal{R}(h) = \frac{1}{4}\text{Tr}(\mathcal{M}^{-1}\partial_i\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}\partial_j\mathcal{M}). \quad (22)$$

Denoting more generally the isometry group as G and its isotropy subgroup as H (not to confuse with Cartan subalgebra generator) we see, that the equations remain invariant under transformation of the coset matrix $\mathcal{M}(x) \in G/H$

$$\mathcal{M}(x) \rightarrow \mathcal{M}'(x) = U^T \mathcal{M}(x) U, \quad (U \in G), \quad (23)$$

so this symmetry can be used to generate new solution form some known one. Choosing $U \in H$ one preserve some point in the target space, this may be used to generate one asymptotically flat (AF) solution from another AF one.

4. Ernst equations

The target space (10) is Kähler. To see this it is enough to introduce the complex coordinate, the (vacuum) Ernst potential,

$$\epsilon = if - \chi, \quad (24)$$

(the original Ernst potential differs from this by i). The Kähler metric $G_{\epsilon\bar{\epsilon}}$ is generated by the Kähler potential K

$$G_{\epsilon\bar{\epsilon}} = \partial_{\epsilon}\partial_{\bar{\epsilon}}K(\epsilon, \bar{\epsilon}), \quad (25)$$

for which one obtains the following simple expression

$$K = -\ln V, \quad V = \text{Im}\epsilon = f. \quad (26)$$

Thus the Kähler potential for any stationary solution of the vacuum Einstein equation is directly related to the g_{00} component of the four-dimensional metric. The harmonic map now is effected via Ernst equation

$$(\epsilon - \bar{\epsilon})\Delta\epsilon = 2(\nabla\epsilon)^2. \quad (27)$$

The $SL(2, R)$ isometry of the target space is manifest:

$$\epsilon \rightarrow \frac{a\epsilon + b}{c\epsilon + d}, \quad ad - bc = 1, \quad (28)$$

with real a, b, c, d , while its one-parameter subgroups are

$$i) \quad \text{gauge:} \quad \epsilon \rightarrow \epsilon + b, \quad (a = d = 1, c = 0), \quad (29)$$

$$ii) \quad \text{scale:} \quad \epsilon \rightarrow a^2\epsilon, \quad (b = c = 0, d = 1/a), \quad (30)$$

preserving the r.h.s. of the three-dimensional Einstein equations, but modifies the four-dimensional metric, thus producing physically inequivalent field configurations (in particular, transforming AF solutions into non -AF);

$$iii) \quad \text{Ehlers:} \quad \epsilon^{-1} \rightarrow \epsilon^{-1} + c, \quad (d = a = 1, b = 0). \quad (31)$$

This transformation an essential part of the whole group. It is non-linear being expressed in terms of ϵ , and physically corresponds to mixing of a mass and a NUT charge (gravitational analog of electric-magnetic duality) [3].

5. Problems

1. Generate Taub-NUT metric and express it in Weyl-Papapetrou form

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2U} (dt + Ad\varphi)^2 - e^{-2U} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \\ e^{2U} &= \frac{(R_+ + R_-)^2 + 4(m^2 + n^2)}{(R_+ + R_- + 2m)^2 + 4n^2}, \quad e^{2\gamma} = \frac{(R_+ + R_-)^2 + 4(m^2 + n^2)}{4R_+R_-}, \\ A &= -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}(R_+ - R_-), \quad R_{\pm}^2 = \rho^2 + \left(z \pm \sqrt{m^2 + n^2}\right)^2, \end{aligned} \quad (32)$$

applying Ehlers transformation to Schwarzschild metric with mass m .

2. Show that γ in the Weyl-Papapetrou metric satisfies

$$\begin{aligned} 4\gamma_\rho &= \rho f^{-2} (\epsilon_\rho \bar{\epsilon}_\rho - \epsilon_z \bar{\epsilon}_z), \\ 4\gamma_z &= \rho f^{-2} (\epsilon_\rho \bar{\epsilon}_z + \epsilon_z \bar{\epsilon}_\rho). \end{aligned} \quad (33)$$

3. Express the metric (32) in prolate spheroidal coordinates $\rho^2 = l^2(x^2 - 1)(1 - y^2)$, $z = lxy$, show that the potential

$$\epsilon = \frac{ipx - qy - i}{ipx + qy + i}$$

satisfies Ernst equation and derive the corresponding 4-metric (Kerr)

6. Einstein-Maxwell: $S = \int (R - F^2) \sqrt{-g} d^4x$

Maxwell equations and Bianchi identities

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0, \quad \partial_\nu(\sqrt{-g}\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0, \quad (34)$$

where $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}E^{\mu\nu\lambda\tau}F_{\lambda\tau}$, $E^{\mu\nu\lambda\tau} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}\sqrt{-g}$ with assumption of stationarity are partially solved introducing the electric v and magnetic u potentials

$$F_{i0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_i v, \quad F^{ij} = \frac{f}{\sqrt{2}h}\epsilon^{ijk}\partial_k u. \quad (35)$$

The remaining components of the $F^{\mu\nu}$ can be expressed in terms of v and u using the relation

$$F^{i0} = F^{ij}\omega_j - h^{ij}F_{j0}, \quad (36)$$

where h^{ij} is the 3-inverse of h_{ij} . Another useful relation is

$$F_{ij} = f^{-2}h_{ik}h_{jl}F^{kl} + 2F_{0[i}\omega_{j]}. \quad (37)$$

From the mixed component of Einstein equation now with the source term $8\pi T_0^i = \frac{f}{\sqrt{h}}\epsilon^{ijk}(\nabla_j v)(\nabla_k a)$, one finds

$$\tau_i = w_i + \nabla_i \chi, \quad w_i = v\nabla_i u - u\nabla_i v, \quad (38)$$

Proceeding as before we derive three-dimensional sigma-model with the target space metric parameterized by $X^A = f, \chi, v, u$:

$$dl_T^2 = G_{AB}dX^A dX^B = \frac{1}{2f^2}(df^2 + (d\chi + vdu - udv)^2) - \frac{1}{f}(dv^2 + du^2). \quad (39)$$

Problem: Show that Killing equations for G_{AB} are solved by eight Killing vectors, form-

ing the algebra $su(1,2)$

$$\begin{aligned}
K_1 &= v\partial_u - u\partial_v, & K_2 &= 2(f\partial_f + \chi\partial_\chi) + u\partial_u + v\partial_v \\
K_3 &= \partial_u + v\partial_\chi, & K_4 &= \partial_v - u\partial_\chi, & K_5 &= 2\partial_\chi, \\
K_6 &= 2fv\partial_f + (v\chi + uF)\partial_\chi + \left(\frac{1}{2}(v^2 - 3u^2) + f\right)\partial_v + \chi_{-2}\partial_u \\
K_7 &= 2fu\partial_f + (u\chi - vF)\partial_f + \left(\frac{1}{2}(u^2 - 3v^2) + f\right)\partial_u - \chi_2\partial_v, \\
K_8 &= 2f\chi\partial_f + (\chi^2 - F^2)\partial_\chi + (v\chi - uF)\partial_v + (u\chi + vF)\partial_u,
\end{aligned} \tag{40}$$

where $F = f - (v^2 + u^2)/2$ and $\chi_n \equiv \chi - nuv$. The last three correspond to Harrison charging transformations and Ehlers transformation.

Introduce the EM Ernst potentials (in original version now)

$$\mathcal{E} = f + i\chi - \bar{\Phi}\Phi, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + iu), \tag{41}$$

in terms of which the target space metric reads

$$dl^2 = \frac{1}{2f^2} |d\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}d\Phi|^2 - \frac{2}{f} d\Phi d\bar{\Phi}. \tag{42}$$

This is the metric of the symmetric space $SU(2,1)/S(U(2) \times U(1))$. A matrix representative of this coset may be chosen as

$$M = f^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}\Phi & i(\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E} + 2\Phi\bar{\Phi})/2 \\ \sqrt{2}\bar{\Phi} & -(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}} - 2\Phi\bar{\Phi})/2 & -i\sqrt{2}\mathcal{E}\bar{\Phi} \\ i(\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E} - 2\Phi\bar{\Phi})/2 & i\sqrt{2}\bar{\mathcal{E}}\Phi & \mathcal{E}\bar{\mathcal{E}} \end{pmatrix} \tag{43}$$

Problems: 1. Derive finite transformations corresponding to Harrison and Ehlers infinitesimal ones as given by K_6, K_7, K_8

2. Derive Kerr-Newman solution from Kerr solution using $SU(2,1)$ transformations

7. Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion

Consider a four-dimensional action

$$S = \int \left\{ -R + 2|\partial z(z - \bar{z})^{-1}|^2 + \left(iz\mathcal{F}_{\mu\nu}^n \mathcal{F}^{n\mu\nu} + c.c \right) \right\} \sqrt{-g} d^4x, \tag{44}$$

where $\mathcal{F}^n = (F^n + i\tilde{F}^n)/2$, $\tilde{F}^{n\mu\nu} = \frac{1}{2}E^{\mu\nu\lambda\tau} F_{\lambda\tau}^n$, $n = 1, \dots, p$, and the sum over repeated n is understood. For $p = 6$ this is the bosonic sector of $N = 4, D = 4$ supergravity. This action is invariant under $SO(p)$ rotations of vector fields, which is an analog of T -duality of dimensionally reduced theories. The equations of motion and Bianchi identities (but not the action) are also invariant under S -duality transformations

$$\begin{aligned}
z &\rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, & ad - bc &= 1, \\
F^n &\rightarrow (c\kappa + d)F^n + ce^{-2\phi}\tilde{F}^n.
\end{aligned} \tag{45}$$

Introduce electric v^n and magnetic u^n scalar potentials for F_n as follows

$$F_{i0}^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_i v^n, \quad 2\text{Im} \left(z \mathcal{F}^{nij} \right) = \frac{f}{\sqrt{2}h} \epsilon^{ijk} \partial_k u^n. \quad (46)$$

In three dimensions the rotation one form ω_i plays a role of the graviphoton, and one can show using the standard argument that the “ T -duality” group is enlarged to $SO(1, p+1)$. Also, S -duality becomes the symmetry of the three-dimensional *action*. Moreover, both these groups turn out to be unified in a larger “ U -duality” group $SO(2, p+2)$. This can be easily checked by computing the Kähler metric of the resulting target manifold. To find the σ -model representation one has to introduce a NUT potential χ via

$$d\chi = u^n dv^n - v^n du^n - f^2 * da, \quad (47)$$

and to derive the set of equations for χ, u^n in addition to the equations for f, κ, ϕ, v^n . The full set of equations will be that of the three-dimensional gravity coupled σ -model possessing the $4+2p$ dimensional target space $SO(2, 2+p) / (SO(2) \times SO(p+2))$. One can parametrize the target manifold by complex coordinates z^α , $\alpha = 0, 1, \dots, p+1$ which have the following meaning. The components $\alpha = n = 1, \dots, p$ are complex potentials for vector fields

$$z^n = u^n - z v^n \equiv \Phi^n, \quad n = 1, \dots, p, \quad (48)$$

the $\alpha = p+1$ component is the complex axidilaton field itself, $z^{p+1} = z$, and

$$z^0 = \epsilon - v^n \Phi^n \equiv E, \quad (49)$$

is the $N = 4$ analog of the Ernst potential.

Somewhat surprisingly, the Kähler potential of dilaton gravity remains untouched by the electric and magnetic potentials:

$$K = -\ln V, \quad V = \text{Im} E \text{Im} z + (\text{Im} \Phi^n)^2 = f e^{-2\phi}. \quad (50)$$

At the same time, being expressed through complex coordinates, Kähler potential has non-trivial dependence on all of them, so that the metric of the target space is non-degenerate.

Since the Kähler metric is given by mixed derivatives over holomorphic and antiholomorphic coordinates, a multiplication of V by an arbitrary holomorphic function and its complex conjugate (to preserve reality of V) does not change the metric. Thus a transformation

$$V(z, \bar{z}) \rightarrow f(z) \bar{f}(\bar{z}) V(z, \bar{z}) \quad (51)$$

is the target space isometry. The Ernst-axidilaton duality (with Φ^n unchanged) belongs trivially to this class. Another useful discrete symmetry corresponds to

$$f(z) = (Ez + \Phi^2)^{-1}, \quad \Phi^2 \equiv \Phi^{n2}, \quad (52)$$

and consists in the following:

$$E \rightarrow \frac{z}{Ez + \Phi^2}, \quad z \rightarrow \frac{E}{Ez + \Phi^2}, \quad \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{Ez + \Phi^2}. \quad (53)$$

Three-dimensional transformations $SO(2, 2+p)$ of $N = 4$ supergravity can be listed in the following way. The most obvious symmetries include $p(p-1)/2$ $SO(p)$ rotations

acting only on vector fields, $\Phi \rightarrow \Omega\Phi$, where $\Omega^T\Omega = I_p$, as well as $2p + 1$ gauge transformations

$$\text{gravitational: } E \rightarrow E + g, \quad \Phi, z \text{ unchanged}, \quad (54)$$

$$\text{magnetic: } \Phi \rightarrow \Phi + m, \quad E, z \text{ unchanged}, \quad (55)$$

$$\text{electric: } \Phi \rightarrow \Phi + ez, \quad E \rightarrow E - 2e\Phi - e^2z, \quad z \text{ unchanged}, \quad (56)$$

and scale

$$E \rightarrow e^{2s}E, \quad \Phi \rightarrow e^s\Phi, \quad z \text{ unchanged}. \quad (57)$$

Here g, s, m, e are real scalar and vector group parameters. The remaining elements of the symmetry group include $2p + 1$ Harrison–Ehlers transformations, which can be obtained by applying the above discrete maps. Namely, applying it to the electric gauge, one gets an electric Harrison transformation (the corresponding set of parameters h_e). Similarly, one obtains a magnetic Harrison (h_m) and Ehlers (c_E) transformations. The full group is closed by the $SL(2, R)$ S -duality expressed in terms of the target space variables. This three-parametric set can be obtained by applying discrete duality to gravitational gauge, scale and Ehlers transformation.

In the particular case $p = 1$, due to local isomorphism $SO(2, 3) \sim Sp(4, R)$, there exists a simple matrix generalization of the Ernst potential. Let us form the (2×2) symmetric complex matrix collecting Kähler coordinates in the following way

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & \Phi \\ \Phi & -z. \end{pmatrix} \quad (58)$$

One can easily check that the target space metric is reproduced via

$$dl^2 = -2\text{Tr} \left\{ d\mathcal{E} (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})^{-1} d\bar{\mathcal{E}} (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})^{-1} \right\}, \quad (59)$$

which is a direct matrix analog of the vacuum gravity. Three-dimensional Einstein equations read:

$$\mathcal{R}_{ij} = -2\text{Tr} \left\{ (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})^{-1} (\partial_{(i}\mathcal{E}) (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})^{-1} \partial_{j)}\bar{\mathcal{E}} \right\}. \quad (60)$$

This is suggestive to express transformations as matrix-valued $SL(2, R)$. The gauge transformation then is

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + B, \quad (61)$$

where B is the real matrix of parameters

$$B = \begin{pmatrix} g & m \\ m & b \end{pmatrix}. \quad (62)$$

This matrix-valued transformation joins a gravitational gauge (g), magnetic gauge (m) and an axion shift (b) belonging to S -duality.

The scale transformation now is split into a symmetry preserving matrix relation:

$$\mathcal{E} \rightarrow A^T \mathcal{E} A. \quad (63)$$

Apart from the genuine $SL(2, R)$ scale (a), it includes gravitational scale (s), electric gauge (e) and electric Harrison (h_e) transformations:

$$A = \begin{pmatrix} e^s & h_e \\ -e & a \end{pmatrix} \quad (64)$$

The last subgroup is the linear shift of an inverted matrix

$$\mathcal{E}^{-1} \rightarrow \mathcal{E}^{-1} + C, \quad (65)$$

where C is a real symmetric matrix of parameters

$$C = \begin{pmatrix} c_E & h_m \\ h_m & c, \end{pmatrix} \quad (66)$$

combining c -transformation of S -duality with magnetic Harrison (h_m) and Ehlers (c_E) transformations. For pure dilaton-axion gravity without vector fields the matrices B , A , C become diagonal and correspond to the product of two $SL(2, R)$. Dilaton-axion gravity with one vector field generates $Sp(4, R)$ symmetry to make contact with the $Sp(4, R)$ group, one has merely to decompose the matrix Ernst potential into two symmetric real matrices

$$\mathcal{E} = \mathcal{Q} + i\mathcal{P}, \quad (67)$$

and then construct a 4×4 real matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} & \mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q} \\ \mathcal{Q}\mathcal{P}^{-1} & \mathcal{P} + \mathcal{Q}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q} \end{pmatrix}. \quad (68)$$

This is a symmetric symplectic matrix satisfying

$$\mathcal{M}^T J \mathcal{M} = J, \quad J = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ -I_2 & O. \end{pmatrix} \quad (69)$$

8. Five-dimensional minimal supergravity

This theory has structure similar to 11-dimensional supergravity: the action contains metric, and the two-form, with Chern-Simons term

$$S_{MSG5} = \int \left(\left[R - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \sqrt{g_5} - \frac{1}{12\sqrt{3}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} A_\lambda \right) d^5x, \quad (70)$$

with $F = dA$. We compactify on a two-torus using

$$ds_5^2 = \lambda_{ab} (dz^a + a_i^a dx^i) (dz^b + a_j^b dx^j) + \tau^{-1} h_{ij} dx^i dx^j, \quad (71)$$

$$A_{(5)\mu} dx^\mu = \sqrt{3} (\psi_a dz^a + A_i dx^i), \quad (72)$$

where $a, b = 0, 1$ and $\tau \equiv |\det\lambda|$. The $\nu = i$ components of the Maxwell-Chern-Simons equations allow to dualize the vector magnetic potential A_i to a scalar magnetic potential μ defined by

$$F^{ij} = a^{aj} \partial^i \psi_a - a^{ai} \partial^j \psi_a + \frac{1}{\tau\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} \eta_k, \quad \eta_k = \partial_k \mu + \epsilon^{ab} \psi_a \partial_k \psi_b. \quad (73)$$

The $\mu = i, \nu = a$ components of the Einstein equations are integrated by

$$\lambda_{ab} G^{bij} = \frac{1}{\tau\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} V_{ak}, \quad V_{ak} = \partial_k \omega_a - \psi_a (3\partial_k \mu + \epsilon^{bc} \psi_b \partial_k \psi_c), \quad (74)$$

where $G^b = da^b$, and ω_a is the twist two-potential. The $D = 3$ sigma model is then obtained with eight target space coordinates $\Phi^A = \{\lambda_{ab}, \omega_a, \psi_a, \mu\}$ and metric

$$dl^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda^{-1} d\lambda \lambda^{-1} d\lambda) + \frac{1}{2} \tau^{-2} d\tau^2 - \tau^{-1} V^T \lambda^{-1} V + 3(d\psi^T \lambda^{-1} d\psi - \tau^{-1} \eta^2). \quad (75)$$

This space has 14 Killing vectors. Nine manifest gauge transformations, grouped according to their transformations under $GL(2R)$ (the group of linear transformations in the (z^1, z^2) plane) into the quadruplet

$$M_a{}^b = 2\lambda_{ac} \frac{\partial}{\partial \lambda_{cb}} + \omega_a \frac{\partial}{\partial \omega_b} + \delta_a^b \omega_c \frac{\partial}{\partial \omega_c} + \psi_a \frac{\partial}{\partial \psi_b} + \delta_a^b \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \quad (76)$$

(the generators of the $gl(2, R)$ subalgebra), the doublet and the singlet associated with the the three cyclic 'magnetic' coordinates:

$$N^a = \frac{\partial}{\partial \omega_a}, \quad Q = \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad (77)$$

and the doublet generating infinitesimal gauge transformations of the ψ_a

$$R^a = \frac{\partial}{\partial \psi_a} + 3\mu \frac{\partial}{\partial \omega_a} - \epsilon^{ab} \psi_b \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + \psi_c \frac{\partial}{\partial \omega_c} \right). \quad (78)$$

The five remaining, non trivial infinitesimal isometries L_a, P_a and T closing the Lie algebra $\mathfrak{g}_{2(2)}$ are more complicated. The $L_a, M_a{}^b$ and N^a generate the vacuum subalgebra $sl(3, R)$. Assuming a spacelike two-torus, the target space (75) is identified as the coset space $G_{2(2)}/(SU(2) \times SU(2))$.

The 7×7 symmetric matrix representative of the coset obtained by exponentiation of the Borel subalgebra

The first step is to construct real matrix representatives of $O(4, 3)$, beginning with the subalgebra $O(3, 3) \sim sl(4, R)$. Rather than using the Maison parametrisation of $sl(4, R)$ in terms of 4×4 matrices (which presumably would lead to a representation of $O(4, 3)$ in terms of 8×8 matrices), we use the representation of $O(3, 3)$ in terms of 6×6 matrices, decomposed in 3×3 blocks according to

$$M_a{}^b = \begin{pmatrix} m_a{}^b & 0 \\ 0 & -\tilde{m}_a{}^b \end{pmatrix}, \quad N^a = \begin{pmatrix} 0 & n^a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -n^{aT} & 0 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

where $\tilde{}$ denotes the anti-transposition, i.e. transposition relative to the anti- (or minor) diagonal, and

$$(m_a{}^b)^\alpha{}_\beta = \delta_a^\alpha \delta_\beta^b - \delta_a^b \delta_\beta^\alpha, \quad (80)$$

$$n^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. These matrices satisfy the commutation relations.

The 7×7 matrix generators of $O(4, 3)$ contain the preceding, promoted to 7×7 matrices by the addition of a central 3-row and a central 3-column, in block form

$$M_a{}^b = \begin{pmatrix} m_a{}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{m}_a{}^b \end{pmatrix}, N^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n^a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -n^{aT} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (81)$$

together with

$$R_a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & r_a & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{r}_a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_a^T & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{r}_a^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

where r_a is the column matrix of elements

$$r_a^\alpha = \delta_a^\alpha. \quad (83)$$

Using

$$r_a \tilde{r}_b - r_b \tilde{r}_a = \epsilon_{abc} n^c, \quad (84)$$

these can be checked to satisfy the remaining commutation relations of $O(4, 3)$.

The 7×7 coset matrix representative is

$$\mathcal{M} = \mathcal{V}^T \mathcal{M}_0 \mathcal{V}, \quad (85)$$

with

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mu = \tau^{-1} \lambda, \quad (86)$$

and

$$\mathcal{V} = e^{\chi^a R_a} e^{\omega_a N^a} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}\chi & \gamma \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\tilde{\chi} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (87)$$

where

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ \chi^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \hat{\omega} - \chi \tilde{\chi}, \quad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega_2 & \omega_3 & 0 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 \\ 0 & -\omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

The resulting coset representative

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu & \sqrt{2}\mu\chi & \mu\gamma \\ \sqrt{2}\chi^T \mu & -1 + 2\chi^T \mu\chi & \sqrt{2}(\chi^T \mu\gamma + \tilde{\chi}) \\ \gamma^T \mu & \sqrt{2}(\gamma^T \mu\chi + \tilde{\chi}^T) & \gamma^T \mu\gamma - 2\tilde{\chi}^T \tilde{\chi} + \tilde{\mu}^{-1} \end{pmatrix} \quad (89)$$

is related to its inverse by

$$\mathcal{M}^{-1} = \tilde{\mathcal{M}} \quad (90)$$

(use $\tilde{\mathcal{V}}(\omega, \chi) = \mathcal{V}(-\omega, -\chi)$).

9. Six-dimensional supergravity with self-dual three-form

Our last example is six-dimensional minimal supergravity containing the metric and self-dual three-form field

$$S_{MSG6} = \int \left(\hat{R} - \frac{1}{12} \hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}} \hat{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}} \right) \sqrt{-\hat{g}} d^6 x, \quad (91)$$

where $\hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}} \equiv 3\hat{C}_{[\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\lambda}]}$, with subsidiary condition

$$\hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}} = \frac{1}{6} \sqrt{-\hat{g}} \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\tau}} \hat{G}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\tau}}, \quad (92)$$

which has to be imposed after variation of the action. The action (91) is a lowest-dimensional member of the even-dimensional sequence of actions containing self-dual form fields, the largest representative of which is the IIB ten-dimensional supergravity.

Somewhat unexpectedly, this action, being compactified on a circle, turns out to be non-locally dual to the truncated five-dimensional heterotic string effective action which belongs to another sequence of the string actions.

Simple representation of the coset $O(4,3)/(O(4) \times O(3))$ may be achieved by performing direct compactification of the six-dimensional theory on T^3 . We start with the Lagrangian (91), and assume 3 Killing vectors ∂_a ($a = 1, 2, 3$). The six-dimensional metric and 3-form may be parameterized by

$$\begin{aligned} ds_6^2 &= \lambda_{ab} (dz^a + a_i^a dx^i) (dz^b + a_j^b dx^j) + \tau^{-1} h_{ij} dx^i dx^j, \\ \hat{G}_{abc} &= 0, \quad \hat{G}_{abi} = \hat{B}_{ab,i}, \end{aligned} \quad (93)$$

($\tau \equiv -\det \lambda$, $i, j = 4, 5, 6$) and the 10 remaining components of \hat{G} related to these by self-duality. Put

$$\hat{B}_{ab} \equiv \epsilon_{abc} \chi^c. \quad (94)$$

Then,

$$\hat{G}_{abi} = \epsilon_{abc} \chi_{,i}^c, \quad \hat{G}^{aij} = -\frac{\tau}{\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} \chi_{,k}^a. \quad (95)$$

The mixed Einstein equations

$$\begin{aligned} \hat{R}_a^i &\equiv \frac{\tau}{2\sqrt{h}} \partial_j [\tau \sqrt{h} \lambda_{ab} \mathcal{F}^{bij}] \\ &= \frac{1}{2} \hat{G}^{ibj} \hat{G}_{abj} = \frac{\tau}{2\sqrt{h}} \partial_j [\epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} \chi_{,k}^b \chi^c] \end{aligned} \quad (96)$$

($\mathcal{F}^b \equiv da^b$)

are solved by

$$\lambda_{ab} \mathcal{F}^{bij} = \frac{1}{\tau \sqrt{h}} \epsilon^{ijk} V_{ak}, \quad V_{ak} \equiv \partial_k \omega_a + \epsilon_{abc} \chi_{,k}^b \chi^c. \quad (97)$$

The remaining Einstein equations then lead to the gravitating sigma model with target space metric

$$dl^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda^{-1} d\lambda \lambda^{-1} d\lambda) + \frac{1}{2} \tau^{-2} d\tau^2 - \tau^{-1} V^T \lambda^{-1} V - 2\tau^{-1} d\chi^T \lambda d\chi, \quad (98)$$

where

$$V \equiv d\omega - \chi \wedge d\chi. \quad (99)$$

The dimension of this target space is twelve: six components of the symmetric matrix λ_{ab} and two triplets ω_a, χ^a . In Appendix A we check that it admits 21 Killing vectors generating the Lie algebra $o(4,3)$. These include nine Killing vectors $M_a{}^b$ generating the algebra $gl(3, R)$ of linear transformations in the three-Killing vector space, six vectors N^a and L_a which together with the $M_a{}^b$ generate the isometry algebra $sl(4, R)$ for the target subspace corresponding to the six-dimensional vacuum sector, and six more vectors R_a and P^a which complete the algebra $o(4,3)$.

The fifteen Killing vectors $M_a{}^b, N^a$ and R_a generate generalized gauge transformations, with the N^a generating translations of the twists ω_a and the R_a generating gauge transformations of the χ^a .

The 7×7 coset matrix representative is then constructed in a standard fashion as

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^T \eta \mathcal{N}, \quad (100)$$

where \mathcal{N} is obtained by exponentiating a suitable Borel subalgebra of $o(4,3)$, and η is a suitably chosen constant matrix. The resulting coset representative is, in block form,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu & \sqrt{2}\mu\chi & \mu\gamma \\ \sqrt{2}\chi^T\mu & -1 + 2\chi^T\mu\chi & \sqrt{2}(\chi^T\mu\gamma + \tilde{\chi}) \\ \gamma^T\mu & \sqrt{2}(\gamma^T\mu\chi + \tilde{\chi}^T) & \gamma^T\mu\gamma - 2\tilde{\chi}^T\tilde{\chi} + \tilde{\mu}^{-1} \end{pmatrix} \quad (101)$$

where $\tilde{\cdot}$ denotes the anti-transposition, i.e. transposition relative to the anti- (or minor) diagonal, and

$$\begin{aligned} \mu &= \tau^{-1}\lambda = \tau^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}, \\ \chi &= \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ \chi^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\chi} = (\chi_3, \chi_2, \chi_1), \quad \gamma = \hat{\omega} - \chi\tilde{\chi}, \\ \hat{\omega} &= \begin{pmatrix} -\omega_2 & \omega_3 & 0 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 \\ 0 & -\omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (102)$$

One can check that the target space metric (98) can be expressed as usual

$$dl^2 = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathcal{M}^{-1} d\mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} d\mathcal{M}). \quad (103)$$

References

1. Kramer D. Exact solutions of Einstein's field equations / D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980. – 425 p.
2. Breitenlohner P. 4-dimensional black holes from Kaluza-Klein theories / P. Breitenlohner, D. Maison, G.W. Gibbons // Communications in Mathematical Physics. – 1988. – Vol. 120, N° 2. – P. 295. – Access mode:[arXiv:gr-qc/9806002].

3. Ernst F.J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem / F.J. Ernst // *Phys. Rev.* – 1968. – Vol. 167. – P. 1175.
4. Ehlers J. *Les theories relativistes de la gravitation* / J. Ehlers. – Paris: CNRS, 1959. – 275 p.
5. Neugebauer G. Eine methode zur konstruktion stationarer Einstein–Maxwell–Felder / G. Neugebauer, D. Kramer // *Ann. der Phys. (Leipzig)*. – 1969. – Vol. 24. – P. 62-71.
6. Kinnersley W. Generation of stationary Einstein-Maxwell fields / W. Kinnersley // *Journ. Math. Phys.* – 1973. – Vol. 14. – P. 651.
7. Mazur P.O. A Relationship Between The Electrovacuum Ernst Equations And Nonlinear Sigma Model / P.O. Mazur // *Acta Phys. Polon.* – 1983. – Vol. B 14. – P. 219.
8. Maison D. Ehlers-Harrison type transformations for Jordan's extended theory of gravitation / D. Maison // *Gen. Rel. Grav.* – Vol. 10. – P. 717.
9. Gal'tsov D.V. Ehlers-Harrison-Type Transformations in Dilation-Axion Gravity / D.V. Gal'tsov, O.V. Kechkin // *Phys. Rev. D.* – 1994. – Vol. 50. – P. 7394. – Access mode: [arXiv:hep-th/9407155];
10. Gal'tsov D.V. Integrable Systems in Stringy Gravity / D.V. Gal'tsov // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – Vol. 74. – P. 2863. – Access mode: [arXiv:hep-th/9410217]
11. Julia B. Group Disintegrations, in: *Superspace and Supergravity Eels* / B. Julia, S.W. Hawking, M. Rocek. – Cambridge: Cambridge University Press, 1981. – 331 p.
12. Marcus N. Three-dimensional supergravity theories / N. Marcus, J.H. Schwarz // *Nucl. Phys. B.* – 1983. – Vol. 228. – P. 145
13. Clement G. Solutions of Five-dimensional General Relativity Without Spatial Symmetry / G. Clement // *Gen. Rel. Grav.* – 1986. – Vol. 18. P. 861.
14. Clement G. Stationary BPS solutions to dilaton-axion gravity / G. Clement, D. Gal'tsov // *Phys. Rev. D.* – 1996. – Vol. 54. – P. 6136. – Access mode: [arXiv:hep-th/9607043]
15. Geroch R. // *Journ. Math. Phys.* – 1972. – Vol. 13. P. 394.
16. Maison D. // *Phys. Rev. Lett.* – Vol. 41. P. 521.
17. Clément G. Sigma-model approaches to exact solutions in higher-dimensional gravity and supergravity / G. Clement. – Access mode: arXiv:0811.0691 [hep-th].
18. Gal'tsov D. V. Generating solutions via sigma-models / D.V. Gal'tsov // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* – 2008. – Vol. 172. P. 121. – Access mode: [arXiv:0901.0098 [gr-qc]].
19. Gal'tsov D.V. Generating technique for $U(1)^3$ 5D supergravity / D.V. Gal'tsov, N.G. Scherbluk: *Phys. Rev. D.* – 2008. – Vol. 78. – P. 064033. – Access mode:[arXiv:0805.3924].
20. Clément G. Oxidation of $D = 3$ cosets and Bonnor dualities in $D \leq 6$ / G. Clement, D. V. Gal'tsov. // *Phys. Rev.D.* – 2013. Vol. 87. – P. 044055.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

Д.П. Голоскоков

**Прямые методы математической физики с
использованием системы Maple**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 517.958:52/59

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ MAPLE

Д.П. Голоскоков¹

¹ *dpg1954@mail.ru*; Государственный университет морского и речного флота им. адм. С.О. Макарова

Использование системы символьных вычислений Maple для реализации методов приближенного решения дифференциальных уравнений, связанных с вариационным исчислением.

Ключевые слова: вариационная задача, конечно-разностный метод Эйлера, метод Рунге, задача Дирихле в прямоугольнике, метод Бубнова-Галеркина, конформное отображение, примеры построения конформных отображений.

Под прямыми методами приближенного решения задач математической физики понимают такие методы, которые сводят эти задачи к конечным системам алгебраических уравнений. Такое определение дает С. Г. Михлин в своей книге “Прямые методы в математической физике” (ГИТТЛ, М.-Л., 1950).

Прямые методы широко используются в практике инженерных расчетов, значительна роль этих методов и в теоретических исследованиях.

Известно, что многие проблемы механики наряду с дифференциальными уравнениями управляются так называемыми минимальными принципами. Например, положение равновесия механической системы есть положение, отвечающее минимуму ее потенциальной энергии. Ввиду этого проблема решения граничной задачи для дифференциального уравнения данной механической системы оказывается эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум интеграла, которым выражается потенциальная энергия системы.

Во многих случаях краевую задачу для дифференциального уравнения можно заменить равносильной задачей об отыскании функции, доставляющей некоторому интегралу наименьшее значение. Задачи такого типа называются вариационными, а методы, позволяющие свести задачу об интегрировании дифференциального уравнения к равносильной вариационной задаче, называются вариационными методами.

Математически проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения эквивалентна задаче вариационного исчисления — о минимуме интеграла, для которого данное дифференциальное уравнение служит уравнением Эйлера. Для решения задач вариационного исчисления наряду с уравнением Эйлера могут применяться непосредственные, прямые методы, которые обходят применение дифференциальных уравнений; благодаря указанной эквивалентности, эти методы являются одновременно и методами решения краевых задач для дифференциальных уравнений. В основе этих методов лежит идея построить искомую функцию, дающую экстремум функционала, при помощи некоторого предельного процесса, исходя непосредственно из вида того интеграла, экстремум которого ищется. Наиболее известными среди таких методов являются методы Рэлея-Рунге и Бубнова-Галеркина.

В настоящей лекции мы покажем использование системы символьных вычислений Maple для реализации методов приближенного решения дифференциальных уравнений, связанных с вариационным исчислением. Использование пакета Maple при решении задач математической физики рассмотрено в книгах автора [1], [2], [3]. В связи с этим хочется также отметить книгу Ю. Г. Игнатьева по математическому моделированию с использованием системы Maple [4].

1. Простейшая вариационная задача. Конечно-разностный метод Эйлера

Мы начнем рассмотрение с простейшей вариационной задачи для одномерного интеграла: найти функцию $y(x)$, доставляющую экстремум (или просто стационарное значение) функционалу

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

где F — заданная функция трех аргументов, непрерывная вместе с производными второго порядка в некоторой области. Значения искомой функции $y(x)$ на концах промежутка интегрирования заданы:

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b.$$

Будем решать задачу одним из прямых методов — конечно-разностным методом Эйлера. Значения функционала $J[y(x)]$ станем рассматривать не на произвольных, допустимых в данной вариационной задаче кривых, а лишь на ломаных, составленных из заданного числа N прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин

$$a, a+h, a+2h, \dots, a+(N-1)h, a+Nh, h = \frac{b-a}{N}.$$

На этих ломаных функционал превращается в функцию $\Phi(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1})$ ординат Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1} вершин ломаной. Ординаты Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1} выбираются так, чтобы функция $\Phi(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1})$ достигала экстремума, т. е. они определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y_k} = 0, k = 1, 2, \dots, N-1,$$

ординаты Y_0 и Y_N известны из граничных условий $y(a) = y_a, y(b) = y_b$. Это типичный метод дискретизации, который состоит в приближенной замене функционала $J[y(x)]$ на сумму

$$I_N = h \sum_{k=0}^{N-1} F\left(X_k, Y_k, \frac{Y_{k+1} - Y_k}{h}\right),$$

зависящую от конечного числа дискретных значений $Y_k = y(X_k)$ искомой функции в заданных узлах $X_k = a + kh$.

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$J[y] = \int_{-1}^1 (\cos(x) - 2y'e^x + y'^2) dx; \quad \begin{cases} y(-1) = 2; \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Решение. Реализацию намеченного алгоритма решения поставленной задачи выполним в системе аналитических вычислений Maple.

```
> restart;
> interface(displayprecision=3):
```

Аппроксимация подынтегральной функции конечными разностями:

```
> F:=proc(Y,m,h)
  (Y[m+1]-Y[m])^2/h^2-2*(Y[m+1]-Y[m])*exp(X[m])/h+cos(X[m])
end proc:
```

Интеграл заменяем суммой по формуле прямоугольников:

```
> JN:=proc(h,F,N) options operator, arrow;
  h*(sum(F(Y,i,h),i=0..N-1))
end proc:
```

Задаем пределы интегрирования: $a = -1, b = 1$.

```
> a := -1: b := 1:
```

Выбираем число узловых точек и определяем шаг интегрирования; сначала решим задачу при небольшом числе интервалов разбиения, например, $N = 7$:

```
> N:=7: h:=(b-a)/N:
```

Вычисляем абсциссы вершин ломаной:

```
> for j from 0 to N do X[j] := h*j+a end do:
```

Функционал как функция ординат вершин ломаной:

```
> Phi:=JN(h,F,N):
```

Учет граничных условий:

```
> Y[0]:=2: Y[N]:=3:
```

Составление минимизирующей системы уравнений:

```
> for k to N-1 do
  eq[k]:=evalf(diff(Phi,Y[k]))=0:
end do:
> var:={}: eqns:={}:
  for k to N-1 do
  var:=var union {Y[k]}:
  eqns:=eqns union {eq[k]}:
end do:
```

Решение системы

```
> res:=solve(eqns,var):
> assign(res):
```

Формирование списка точек вершин ломаной:

```
> for j from 0 to N do
  P[j]:=[X[j],Y[j]]
end do:
> L:=[seq(P[k-1],k=1..N+1)]:
```

Для сравнения найдем точное решение задачи:

```
> with(VariationalCalculus):
> f:=(diff(y(x),x))^2-2*(diff(y(x),x))*exp(x)+cos(x):
```

$$f := \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy(x)}{dx} \right) e^x + \cos(x)$$

```
> ode:=EulerLagrange(f,x,y(x));
```

$$ode := \left\{ -2 \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 + 2e^x, \left(\frac{dy(x)}{dx} \right) - 2e^x = K_1 \right\}$$

```
> problem:={ode[1]} union {y(-1)=2,y(1)=3};
```

$$problem := \left\{ -2 \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 + 2e^x, y(-1) = 2, y(1) = 3 \right\}$$

```
> dsolve(problem,y(x));
```

$$y(x) = e^x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e \right) x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1}$$

```
> simplify(convert(%,trig));
```

$$y(x) = -x \sinh(1) - \cosh(1) + \cosh(x) + \sinh(x) + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

```
> y:=unapply(rhs(%),x);
```

$$y := x \rightarrow -x \sinh(1) - \cosh(1) + \cosh(x) + \sinh(x) + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Построим графики приближенного и точного решений (рис. 1):

```
> plot([L,y(x)],x=-1..1,
  title=cat("Число интервалов N = ",convert(N,string)),
  titlefont=[Helvetica,15],font=[Helvetica,14],
  linestyle=[dash,solid],gridlines=true,
  legend=["метод Эйлера","Точное решение"]);
```

Численное решение удобно представить в виде таблицы значений:

```
> fd_table1:=
  eval([seq([X[k],Y[k],evalf(y(X[k]))],k=0..N)],res):
> z:=['x','Y','y'];
> linalg[stackmatrix](z,fd_table1);
```

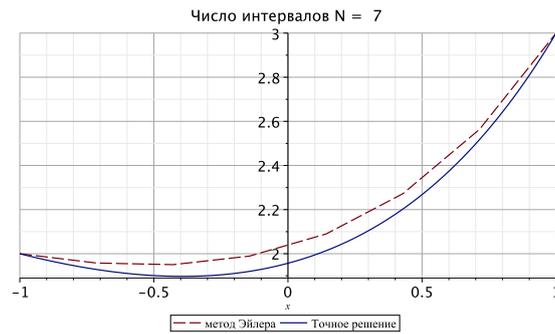


Рис. 1. Сравнение приближенного и точного решений при $N = 7$.

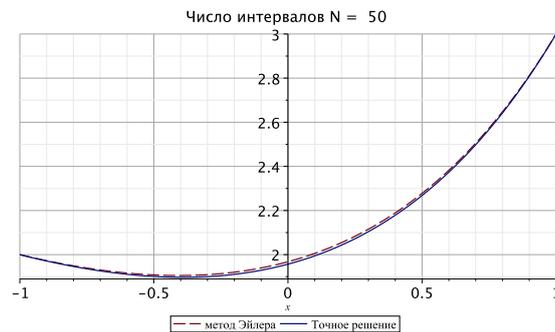


Рис. 2. Сравнение приближенного и точного решений при $N = 50$.

x	Y	y
-1	2	2.000
$-\frac{5}{7}$	1.958	1.929
$-\frac{3}{7}$	1.951	1.898
$-\frac{1}{7}$	1.989	1.920
$\frac{1}{7}$	2.090	2.014
$\frac{3}{7}$	2.272	2.203
$\frac{5}{7}$	2.564	2.517
1	3	3.000

Уточнить результат можно, увеличив N . Например, на рис. 2 показан результат при $N = 50$.

Как видим, результат не плох. Однако отметим, что приведенные рассуждения имеют скорее методическое значение, так как в вычислительном отношении процедура получается в точности такая же, как если от вариационной задачи перейти к уравнению Эйлера для исследуемого функционала, а затем решать для этого уравнения краевую задачу методом сеток.

2. Простейшая вариационная задача. Метод Ритца

Метод Ритца представляет собой один из методов построения минимизирующей последовательности.

Пусть функция $u(P)$ удовлетворяет в некоторой области Ω неоднородному урав-

нению

$$Au = f(P), \quad (1)$$

и некоторым однородным граничным условиям.

Мы знаем, что решение уравнения (1), где A — положительный оператор, сводится к нахождению минимума функционала

$$F[u(P)] = (Au, u) - 2(u, f) = \int_{\Omega} [u(P) Au(P) - 2u(P) f(P)] d\Omega \quad (2)$$

Эту последнюю задачу будем приближённо решать следующим образом. Выберем последовательность функций

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P), \dots, \quad (3)$$

принадлежащих области определения оператора A . Подчиним эти функции двум условиям: 1) последовательность (3) полна по энергии; 2) для любого n функции $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n$ линейно независимы. Функции (3) называют *координатными*, или *базисными* функциями.

Возьмем линейную комбинацию первых n координатных функций:

$$u_n(P) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(P), \quad (4)$$

где a_j — произвольные числа.

Подставим (4) вместо $u(P)$ в функционал (2); это превратит функционал $F[u(P)]$ в функцию n независимых переменных a_1, a_2, \dots, a_n :

$$F[u_n] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (A\varphi_j, \varphi_k) a_j a_k - 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_j, f) a_j \quad (5)$$

Выберем коэффициенты a_j так, чтобы функция (5) приняла минимальное значение. Необходимые условия минимума функции (5), как известно, такие:

$$\frac{\partial F[u_n]}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Отметим, что используя положительность оператора A , можно доказать, что коэффициенты a_j , удовлетворяющие системе (6), реализуют минимум величины $F[u_n]$. Выпишем явно систему (6)

$$\sum_{k=1}^n (A\varphi_i, \varphi_k) a_k = (\varphi_i, f), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Определитель системы (7) есть так называемый определитель Грамма линейно независимых функций, поэтому он отличен от нуля. Отсюда следует, что система (7) всегда разрешима, если оператор A — положительный. Найдя коэффициенты a_k из системы (7) и подставив их в (4), получим функцию $u_n(P)$, которую называют приближенным решением уравнения $Au = f(P)$ по Ритцу.

Справедлива **теорема**: приближённые решения уравнения (1) по Ритцу образуют минимизирующую последовательность для функционала (2), если только это уравнение имеет решение с конечной энергией.

Следовательно, приближённые решения по Ритцу сходятся по энергии к точному решению. Они сходятся к точному решению и в среднем, если A — положительно определённый оператор.

Пример 2. Для сравнения решим методом Ритца задачу из примера 1.

```
> restart;
```

Выбираем базисные функции и определяем аппроксимирующую функцию

```
> phi0:=x->y1+(y2-y1)*(x-x1)/(x2-x1):
> phi:=(x,n)->sin(n*Pi*(x-x1)/(x2-x1)):
> Us:=proc(x,N)option operator,arrow; local n;
  phi0(x)+sum(a[n]*phi(x,n),'n'=1..N);
end proc:
```

Разработаем процедуру для составления уравнений метода Ритца:

```
> Ritz:=proc(F,u,i0,N,a)local Fu,eqns,var,eq,i,res;
  global x1,x2;
  Fu:=simplify(int(subs(y(x)=u,F),x=x1..x2));
  eqns:={}:var:={}:
  for i from i0 to N do
    var:=var union {a[i]}:
    eq[i]:=diff(Fu,a[i])=0:
    eqns:=eqns union {eq[i]}:
  od:
  res:=solve(eqns,var);
  assign(res);
end proc:
> interface(displayprecision=3):
```

Вводим граничные точки, задаем количество членов ряда, задаем подинтегральную функцию и выполняем расчеты:

```
> x1:=-1:x2:=1:y1:=2:y2:=3:
> N:=5:c1:='cross':c2:='circle':
  c3:='box':c4:='point':c5:='diamond':
  y:='y':
  F:=(diff(y(x),x))^2-2*(diff(y(x),x))*exp(x)+cos(x):
> for j from 1 to N do
  a:=array(1..j):
  Ritz(F,Us(x,j),1,j,a);
  pu_||j:=plot(Us(x,j),x=x1..x2,color=blue,
  style=point,symbol=c||j,
  legend=cat('Метод Ритца N = ',convert(j,string)),
  gridlines=true,font=[Helvetica,14],
```

```
labelfont=[Helvetica,14],symbolsize=20,numpoints=5):
end do:
```

Точное решение мы уже получили в примере 1; определим это решение в виде процедуры-функции:

```
> y:=proc(x) options operator,arrow;
-x*sinh(1)-cosh(1)+cosh(x)+sinh(x)+(1/2)*x+5/2
end proc;
```

Построим графики приближенных решений по Рунге при разном количестве удерживаемых членов и точного решения (рис. 3 - 5):

```
> pr3:=plot(y(x),x=-1..1,
legend='Точное решение',color=black):
> plots[display]({pu_1,pr3});
```

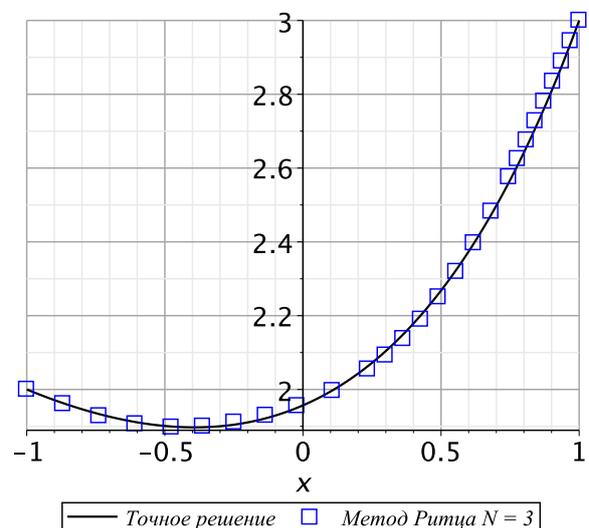
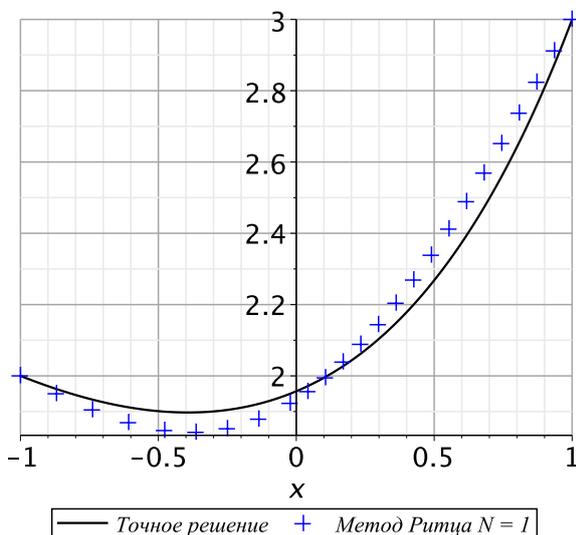


Рис. 3. Сравнение приближенного и точного решений при $N=1$.

Рис. 4. Сравнение приближенного и точного решений при $N=3$.

```
> plots[display]({pu_3,pr3});
> plots[display]({pu_5,pr3});
```

Для количественного сравнения решений удобно иметь таблицу значений в конкретных точках. Подготовим такую таблицу:

```
> M := 7:
> h := (x2-x1)/M:
> for j from 0 to M do
X[j]:=h*j+x1:Y[j]:=evalf(Us(X[j],5)):
end do:
> ftab:=eval([seq([X[k],Y[k],evalf(y(X[k]))],k=0..M)]):
> z:=['x','Y','y']:
> linalg[stackmatrix](z,ftab);
```

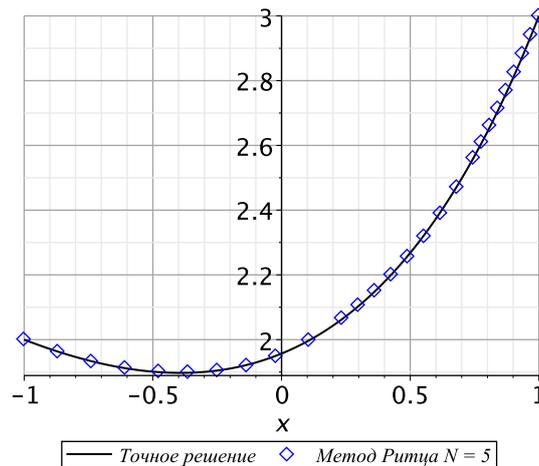


Рис. 5. Сравнение приближенного и точного решений при $N = 5$.

x	Y	y
-1	2.000	2.000
$-\frac{5}{7}$	1.927	1.929
$-\frac{3}{7}$	1.900	1.898
$-\frac{1}{7}$	1.918	1.920
$\frac{1}{7}$	2.016	2.014
$\frac{3}{7}$	2.202	2.203
$\frac{5}{7}$	2.516	2.517
1	3	3.000

Как видим, здесь результат лучше, чем в примере 1 — лучшее соответствие точному решению при значительно меньшем числе N .

3. Задача Дирихле в прямоугольнике. Метод Бубнова-Галеркина

Пусть функция $u(P)$ удовлетворяет в некоторой области Ω неоднородному уравнению (1) и некоторым однородным граничным условиям. Здесь мы не будем предполагать положительность оператора A . Выберем бесконечную последовательность координатных функций (3), которые достаточное число раз (в соответствии с данными задачи) непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$, где S — граница области Ω . Будем считать, что эти функции удовлетворяют всем краевым условиям задачи. Будем считать также, что как уравнение (1), так и краевые условия — линейные. Составим функцию (4), где a_j — произвольные числа. Эта функция удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Подставим теперь (4) в (1); получим невязку в выполнении уравнения

$$Au_n - f(P) = 0. \quad (8)$$

По методу Бубнова-Галёркина коэффициенты a_j определяются из требования, чтобы левая часть (8) была ортогональна функциям $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n$. Таким образом, метод Бубнова-Галеркина приводит к системе линейных алгебраических уравнений (7), по виду тождественной системе, к которой приводит метод Рунге.

Отсюда заключаем, что методы Бубнова-Галеркина и Ритца совпадают, если оператор A — положительно определённый. В общем же случае метод Ритца неприменим, тогда как метод Бубнова-Галеркина сохраняет силу.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения Пуассона: требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона $-\Delta u = f(x, y)$ в прямоугольнике и условию $u|_{\Gamma} = 0$ на границе \tilde{A} этого прямоугольника — граничному условию первого рода. Эта задача встречается во многих приложениях математической физики. В механике жидкости и газа она описывает стационарное течение вязкой жидкости в канале с поперечным сечением в форме прямоугольника; в электростатике — потенциал электростатического поля; в теории теплопроводности — стационарное распределение температуры; в статике упругих тел — равновесие прямоугольной мембраны, кручение стержня с поперечным сечением в форме прямоугольника и многие другие процессы.

Пример 3. Рассмотрим модельную задачу о стационарном течении вязкой жидкости в канале с поперечным сечением в форме квадрата. Уравнение для компоненты скорости, направленной вдоль канала, приведенное к безразмерной форме записи за счет надлежащего выбора масштабов, имеет вид $\Delta u = -1$; граничные условия — $u|_{x=\pm 1} = 0$, $u|_{y=\pm 1} = 0$.

Решение. Продемонстрируем применение метода Бубнова-Галеркина к решению этой задачи в системе Maple.

```
> restart;
> interface(displayprecision = 5):
```

Уравнение Пуассона определим как:

```
> pde:=diff(u(x,y),x$2)+diff(u(x,y),y$2)+1;
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + 1$$

Подготовим процедуру, реализующую алгоритм метода Бубнова-Галеркина:

```
> Bubnov_Gal := proc(pde, n, a, bol :: boolean)
  local eqns, vars, sol, i;
  eqns := {}; vars := {};
  for i from 1 to n do
    eqns := eqns union
    {int(eval(pde)*phi(i, x, y), [x=-1..1, y=-1..1])};
    vars := vars union {a[i]};
  end do;
  if bol then print(eval(eqns));
  print(eval(vars)); end if;
  sol := solve(eqns, vars);
  if bol then print(sol); end if;
  assign(sol);
end proc;
```

Определяем полиномиальные базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям:

> phi := (n, x, y) -> (1 - x^2)^n * (1 - y^2)^n;

$$\phi := (n, x, y) \rightarrow (1 - x^2)^n (1 - y^2)^n$$

Определяем аппроксимирующую функцию:

> W := (x, y, N) -> sum(a[i]*phi(i, x, y), 'i' = 1..N);

$$W := (x, y, N) \rightarrow \sum_{i=1}^N a_i \phi(i, x, y)$$

Задаем количество членов в аппроксимации и выполняем расчет

> N := 2:

> eq := value(subs(u(x, y) = W(x, y, N), pde));

> Bubnov_Gal(eq, N, a, true);

$$\left\{ -\frac{131072}{33075}a_2 - \frac{2048}{525}a_1 + \frac{256}{225}, -\frac{2048}{525}a_2 - \frac{256}{45}a_1 + \frac{16}{9} \right\}$$

$$\{a_1, a_2\}$$

$$\left\{ a_1 = \frac{37}{104}, a_2 = -\frac{105}{1664} \right\}$$

Вычислим скорость на оси канала и безразмерный расход (расход определяется как интеграл от функции скорости по области сечения)

> value(W(x, y, N)); evalf(W(0, 0, N));

0.29267

> Int(Int(u(x, y), x = -1..1), y = -1..1) =
evalf(Int(Int(W(x, y, N), x = -1..1), y = -1..1));

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(x, y) dx dy = 0.56068$$

Результат совпадает с книгой К.Флетчера “Численные методы на основе метода Галеркина”, стр. 26, таб. 1.6. Точные значения приведены в книге [1]:

$$u(0, 0) = 0.2947, \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(x, y) dx dy = 0.5623.$$

С помощью следующих команд изобразим несколько изолиний (см. рис. 6):

```
> W_b := value(W(x, y, N)):
myskyblue := ColorTools:-Color([0.8, 0.9, 1.]):
pic3 := implicitplot([W_b=0.01, W_b=0.1, W_b=0.2, W_b=0.25],
x=-1..1, y=-1..1, grid=[50, 50], color=khaki,
font=["Helvetica", 14], labelfont=["Courier", 14]),
polygonplot(ngon, font=["Helvetica", 14], color=myskyblue):
pict := textplot({[0., 1.1, "u = 0.01"],
[0., 0.9, "u = 0.1"], [0., 0.7, "u = 0.2"],
[0., 0.5, "u = 0.25"]}):
display([pic3, pict], axes=frame);
```

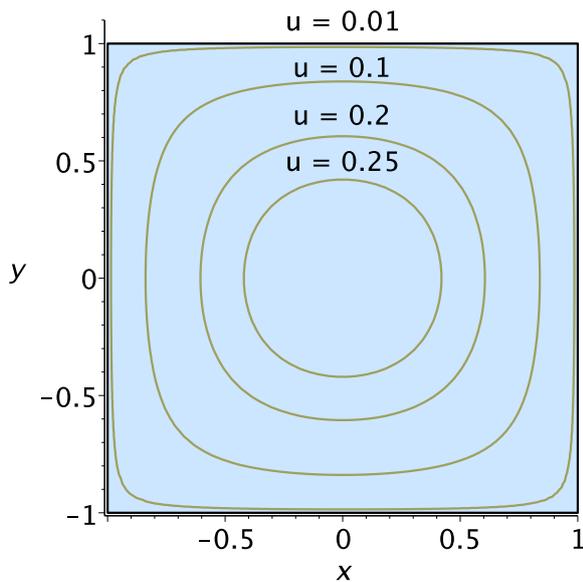


Рис. 6. Изолинии скорости.

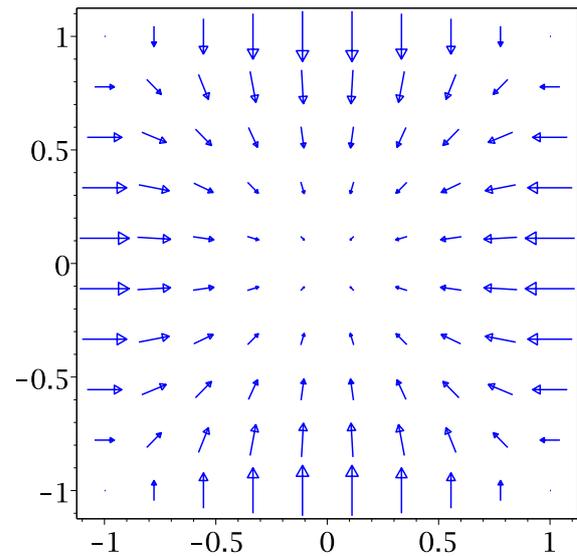


Рис. 7. Градиент векторного поля.

Изобразим график градиента векторного поля (см. рис. 7):

```
> plots[gradplot](W_b,x=-1..1,y=-1..1,grid=[10,10],style=PATCHNOGRID,
  arrows=SLIM,color=blue,axes=BOXED,symbolsize=14,
  font=[Times,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14]);
```

4. Конформное отображение. Метод Ритца

Конформные отображения имеют многочисленные приложения в механике, физике и технике, прежде всего для расчетов плоских гармонических векторных полей в гидро- и аэродинамике, теории фильтрации, теории электрических и магнитных полей, теории теплопередачи, теории упругости. Многие стационарные задачи математической физики сводятся к решению простейшего из уравнений эллиптического типа — уравнения Лапласа.

Искомая функция, решающая поставленную проблему, определяется областью, в которой она ищется, и граничными условиями, которые должны быть выполнены на контуре этой области. Для простых областей таких, как круг, прямоугольник, круговое кольцо и т. п., задача может быть сравнительно просто решена при относительно сложных граничных условиях. Если же область имеет сложное строение, то решение задачи непосредственно для этой области представляется затруднительным даже для такой простой задачи, как, например, задача Дирихле.

Один из подходов к решению такой задачи — попытаться предварительно преобразовать заданную область к простейшему виду. При таком преобразовании будет меняться, вообще говоря, область, для которой ищется решение, граничные условия, и дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция. Поэтому, большое значение будет, очевидно, иметь такое преобразование, относительно которого само дифференциальное уравнение остается инвариантным. Как известно, уравнение Лапласа остается инвариантным относительно конформных преобразований, осуществляемых аналитическими функциями ком-

плексной переменной.

Задача построения функции, отображающей одну область на другую, даже в простом случае, когда одна из областей является кругом, часто вызывает непреодолимые затруднения. Поэтому вызывают интерес методы приближенного построения отображающей функции. Как правило, пытаются аппроксимировать искомую функцию линейной комбинацией хорошо изученных функций. Простейшими и часто используемыми функциями являются многочлены. Известно, что всегда можно построить многочлен, как угодно мало отличающийся от функции (в любой внутренней части области), отображающей область на круг. Кроме того, если граница области простая кривая, то можно построить многочлен, отличающийся от отображающей функции как угодно мало всюду в области, включая и границу. Известно, что среди функций, осуществляющих конформное преобразование заданной односвязной однолистной области D на некоторую другую область, функция, отображающая на круг, обладает экстремальными свойствами: 1) свойством минимума площади при преобразовании области на круг, 2) свойством минимума длины контура при преобразовании области на круг. Указанные свойства можно использовать при построении вариационного метода приближенного конформного преобразования области на круг.

4.1. Свойство минимума площади при преобразовании области на круг.

Рассмотрим функцию

$$\zeta = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (9)$$

Пусть требуется построить конформное отображение однолистной области на круг. При этом потребуем, чтобы заданная внутренняя точка области (всегда можно считать эту точку началом координат) переходила в центр круга. Потребуем также, чтобы определенное направление в этой точке, принимаемое за положительное направление вещественной оси, совпадало бы с положительным направлением вещественной оси преобразованной области. Очевидно, эти условия равносильны требованиям:

$$f(0) = 0, f'(0) = a_1 > 0.$$

Можно считать, что $a_1 = 1$; для этого достаточно рассмотреть функцию $f(z)/a_1$, которая будет так же давать отображение D на круг, но только может быть другого радиуса, что не существенно. Поэтому будем предполагать:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1. \quad (10)$$

Функцию, дающую требуемое конформное преобразование, можно искать как решение следующей вариационной задачи: среди функций, аналитических в области D и удовлетворяющих условиям (10), найти ту, которая дает минимум функционалу

$$I = \int_D f'(z) \overline{f'(z)} dx dy \quad (11)$$

по сравнению со всеми другими функциями, которые удовлетворяют требованиям (10). Функционал (11) определяет площадь преобразованной области. Из-за трудностей, возникающих при реализации данного метода, полноценно использовать

его стало возможным лишь с появлением систем символьных вычислений таких, как Maple или Mathematica.

4.2. Свойство минимума длины контура при преобразовании области на круг

Рассмотрим всевозможные конформные преобразования области D , совершаемые при помощи аналитических в области D функций $\zeta = f(z)$, удовлетворяющих условиям (10). Вариационную задачу можно сформулировать так: среди функций, аналитических в области D и удовлетворяющих условиям (10), найти ту, которая дает минимум функционалу

$$I = \int_L |f'(z)| ds. \quad (12)$$

Функционал (12) выражает длину контура L .

4.3. Применение метода Рунца

Для решения задачи минимизации функционалов (11) и (12) будем использовать метод Рунца. При вычислениях по методу Рунца зачастую получают плохо обусловленные системы уравнений. Приближенное решение таких систем известными методами приводит к большим погрешностям, что делает результат вычислений бесполезным. Однако применение систем символьных вычислений позволяет эффективно использовать метод, устранить проблемы, связанные с плохой обусловленностью систем, и получить достаточно точное решение задачи. Среди таких систем символьных вычислений стоит отметить две наиболее мощные системы — это Maple и Mathematica.

Заметим, что используя свойство минимума площади при отображении области на круг, можно искать не непосредственно функцию $f(z)$, а ее производную $f'(z)$, так как под знак интеграла (11) функция $f(z)$ не входит, и по найденной производной $f'(z)$ восстановить функцию $f(z)$ по формуле

$$f(z) = \int_0^z f'(z) dz.$$

Используя свойство минимума длины контура при отображении области на круг, при вычислениях удобнее искать приближения не непосредственно к производной $f'(z)$, в виду линейности подынтегрального выражения относительно $|f'(z)|$, а к величине $\sqrt{f'(z)}$. Допустимыми будут все функции $\varphi(z)$, обращающиеся в единицу в начале координат. Среди них будем искать ту, которая дает наименьшее значение функционалу

$$I = \int_L |\varphi(z)|^2 ds = \int_L \varphi(z) \overline{\varphi(z)} ds \quad (13)$$

Если удастся найти решение вариационной задачи для функционала (13), то

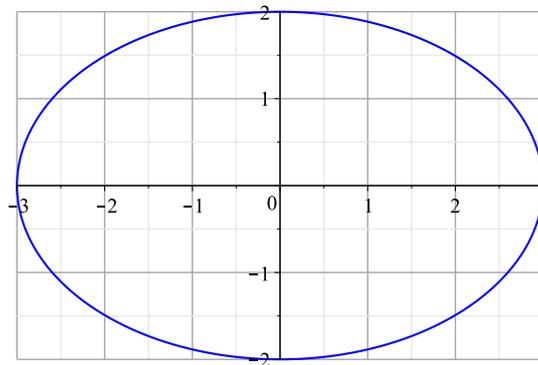


Рис. 8. Эллипс.

функция совершающая искомое отображение, определится по формуле

$$f(z) = \int_0^z \varphi^2(z) dz.$$

5. Примеры построения конформных отображений

Рассмотрим применение метода Ритца на конкретных примерах в системе Maple [25].

Задача 1. Приблизительно построить конформное отображение эллипса с полуосями $a = 3, b = 2$; начало координат — в точке пересечения осей эллипса (рис. 8). Все вычисления выполняем в Maple. Подключаем необходимые пакеты.

```
> with(VectorCalculus); with(Optimization)
```

Для наглядности можно изобразить отображаемую область (рис. 8); в данном случае это — эллипс. Набираем команду:

```
> plot([3*cos(t), 2*sin(t), t=0..2*Pi], color=blue, scaling=constrained,
      gridlines=true);
```

После нажатия клавиши “Enter” на экране монитора появится изображение эллипса (рис. 8). Задаем степень полинома n и выражения для $f'(z)$ и $\bar{f}'(z)$ — переменные P и $P1$, вычисляем подынтегральную функцию в функционале (11) — переменная Q .

```
n := 4:
P := 1+sum((a[i]+I*b[i])*(x+I*y)^i, i = 1 .. n):
P1 := 1+sum((a[i]-I*b[i])*(x-I*y)^i, i = 1 .. n):
Q := expand(P*P1):
```

Вычисляем функционал (11)

```
> J := int(Q, [x, y] = Ellipse((1/9)*x^2+(1/4)*y^2-1));
```

Минимизируем функционал:

```
> res := Minimize(J):
```

Результат выполнения последней команды появляется на экране монитора:

```
res := [16.7866843612400, [a1= 0., a2= -0.984942061510830e - 1, a3= 0.,
a4= 0.437728717667569e - 2, b1= 0., b2= 0., b3= 0., b4= 0.]]
```

Далее надо присвоить вычисленные значения коэффициентам a_i и b_i ; это осуществляется командами

```
> op(2, res): assign(%):
```

Таким образом, найдена производная отображающей функции $\overline{f'(z)}$ — обозначим ее $p1$:

```
> p1 := 1+sum((a[i]+I*b[i])*z^i, i = 1 .. n);
```

$$p1 := 1 + (-0.0984942061510830 + 0.I)z^2 + (0.00437728717667569 + 0.I)z^4$$

Восстанавливаем отображающую функцию

```
> p := int(p1, z = 0 .. z);
```

$$p := z - 0.03283140205z^3 + 0.0008754574353z^5$$

Для последующего использования удобно преобразовать полученное выражение в функцию

```
> p := unapply(p, z):
```

и функцию — отображение на единичный круг

```
> w := unapply(p(z)/abs(p(3)), z):
```

Для проверки качества полученного решения параметризуем границу области D и построим график ее образа при отображении функцией $w(z)$ (рис. 9)

```
> z1 := 3*cos(t)+(2*I)*sin(t):
```

```
pic1 := plot([evalc(Re(w(z1))), evalc(Im(w(z1))), t = 0 .. 2*Pi]:
```

```
pic2 := plot([cos(t), sin(t), t = 0 .. 2*Pi], color = blue):
```

```
plots[display]({pic1, pic2})
```

На рис. 9 голубым цветом показан точный единичный круг, красным цветом — приближение к нему. Как видим, уже многочлен пятой степени дает достаточно точное приближение к кругу. Можно оценить и погрешность вычислений

```
> assume(t, real):
```

```
absw1 := abs(expand(w(z1))):
```

```
Maximize(abs(absw1-1), {0 <= t, t <= 2*Pi});
```

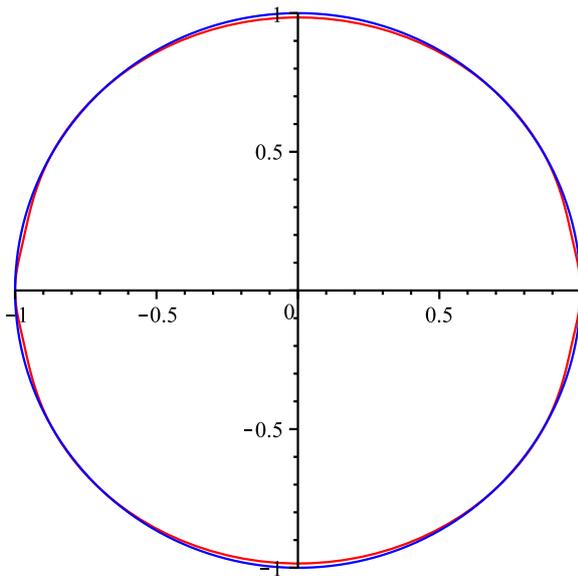


Рис. 9. Круг и образ эллипса.

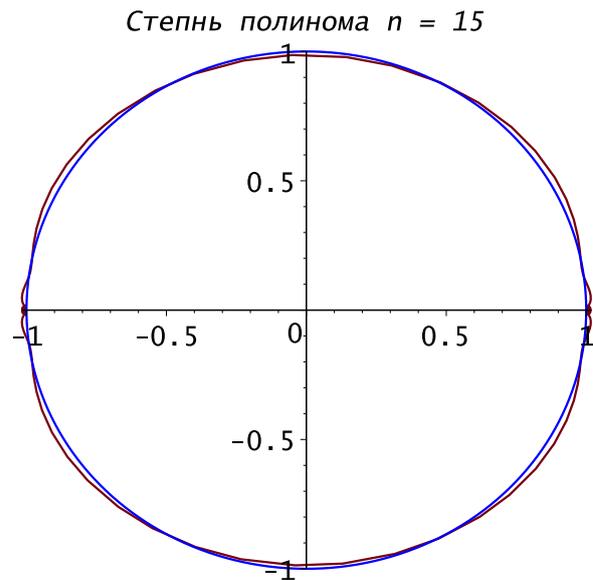


Рис. 10. Отображение эллипса с эксцентриситетом 0.96825.

$$[0.181516596201847236e-2, [t = 1.02918393864730]]$$

Погрешность в данном случае составляет не более, чем $\varepsilon = 0.002$.

Следует отметить, что точность и трудоемкость решения задачи зависит от характера отображаемой области. Так для отображения на единичный круг эллипса с большим эксцентриситетом, например, с полуосями $a = 4, b = 1$ и эксцентриситетом $\eta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0.96825$ приходится использовать комплексный многочлен более высокой степени. На рис. 10 показан результат решения задачи при степени многочлена $n = 15$. Погрешность при этом составляет не более чем $\varepsilon = 0.02$, т.е. на порядок хуже, чем в предыдущем случае.

Задача 2. Приблизительно построить конформное отображение пятиугольника с вершинами в точках $(-3, -1), (1, 3), (4, 0), (4, -2), (0, -3)$. Изобразим отображаемую область. Строим пятиугольник по его вершинам (рис. 11).

```
> display(polygon([[[-3, -1], [1, 3], [4, 0], [4, -2], [0, -3]]]), color=gray,
  thickness=2);
```

Задаем степень полинома n и выражения для $f'(z)$ и $\overline{f'(z)}$ — переменные P и $P1$, вычисляем подынтегральную функцию в функционале (11) — переменная Q . Учитывая замечание о точности и трудоемкости решения задачи в конце предыдущего примера, зададимся степенью полинома $n = 40$ и увеличим число значащих цифр при выполнении расчетов $Digits = 70$.

```
> n := 40: Digits := 70:
  P := expand(1+sum((a[i]+I*b[i])*(x+I*y)^i, i = 1 .. n)):
  P1 := expand(1+sum((a[i]-I*b[i])*(x-I*y)^i, i = 1 .. n)):
  Q := expand(P*P1):
```

Будем вычислять функционал как сумму трех интегралов по трем треугольным областям (рис. 12):

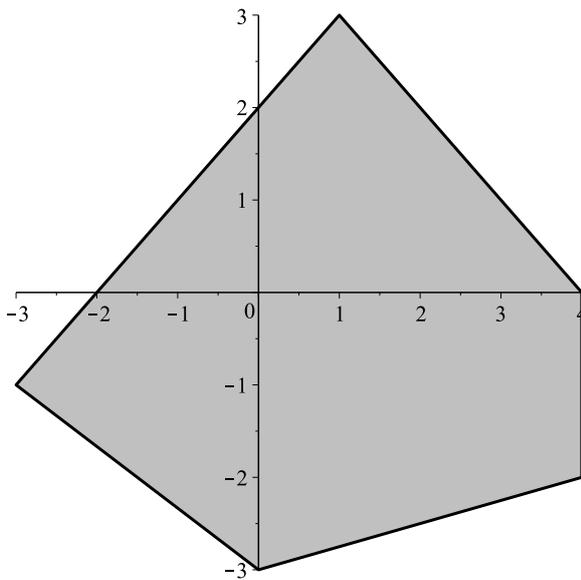


Рис. 11. Пятиугольник.

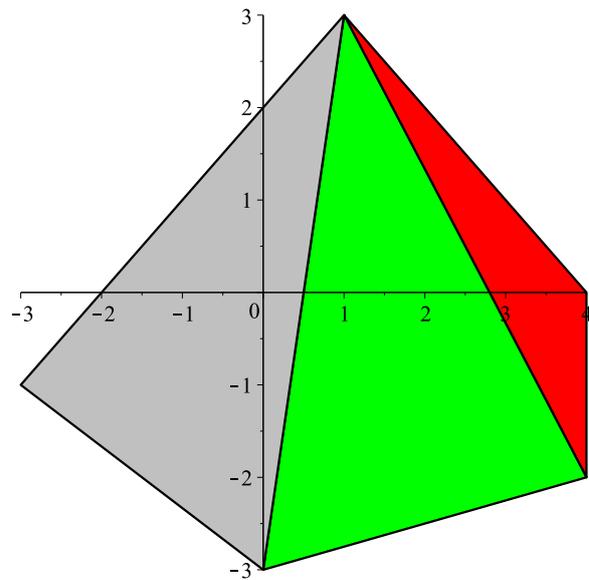


Рис. 12. Разбиение пятиугольника на треугольные области.

```
> T1 := polygon([[ -3, -1], [1, 3], [0, -3]], color = gray):
  T2 := polygon([[1, 3], [4, -2], [0, -3]], color = green):
  T3 := polygon([[1, 3], [4, 0], [4, -2]], color = red):
  display({T1, T2, T3});
```

Вычисляем функционал (11)

```
> J1:=int(Q, [x,y]=Triangle('<,>'(-3,-1), '<,>'(0,-3), '<,>'(1,3))):
  J2:=int(Q, [x,y]=Triangle('<,>'(0,-3), '<,>'(4,-2), '<,>'(1,3))):
  J3:=int(Q, [x,y]=Triangle('<,>'(1,3), '<,>'(4,-2), '<,>'(4,0))):
  J :=J1+J2+J3:
```

Минимизируем функционал и восстанавливаем отображающую функцию

```
> res := Minimize(J);
  op(2, res);
  assign(%);
  p1 := 1+sum((a[i]+I*b[i])*z^i, i = 1 .. n);
  p := int(p1, z = 0 .. z);
  p := unapply(p, z);
  w := unapply(p(z)/abs(p(4)), z);
```

Параметризуем границу области D и построим график ее образа при отображении функцией $w(z)$ (рис. 13):

```
> z1:=t+I*(t+2):z2:=t+I*(4-t):z3:=4+I*t:z4:=t+I*((1/4)*t-3):
  z5:=t-I*(2*t*(1/3)+3):
  pic1:=plot([evalc(Re(w(z1))),evalc(Im(w(z1))),t=-3..1]):
  pic2:=plot([evalc(Re(w(z2))),evalc(Im(w(z2))),t=1..4]):
  pic3:=plot([evalc(Re(w(z3))),evalc(Im(w(z3))),t=-2..0]):
```

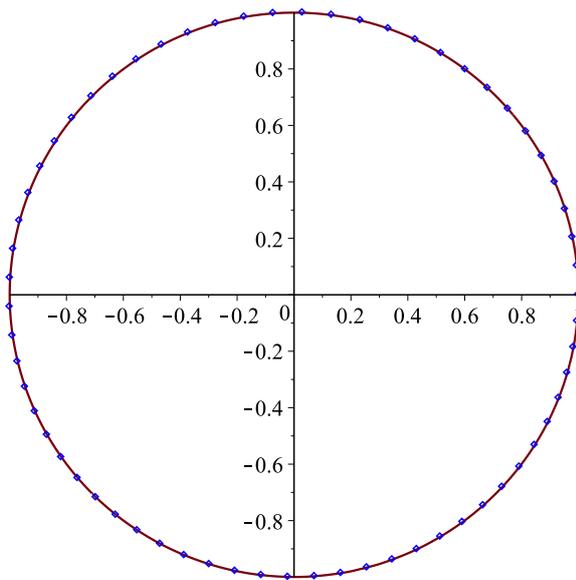


Рис. 13. Образ пятиугольника.

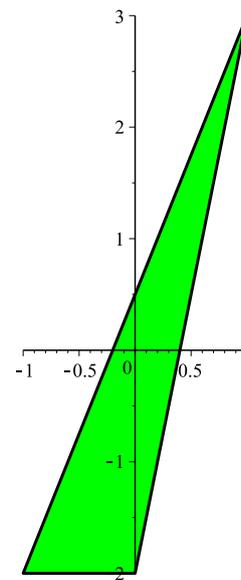


Рис. 14. Вытянутый треугольник.

```
pic4:=plot([evalc(Re(w(z4))),evalc(Im(w(z4))),t=0..4]1):
pic5:=plot([evalc(Re(w(z5))),evalc(Im(w(z5))),t=-3..0]1):
PIC:=plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],color=blue,style=point,numpoints=1):
plots[display]({PIC, pic1, pic2, pic3, pic4, pic5});
```

Как видно из рис. 13, аппроксимирующая кривая практически совпадает с окружностью! Аналогично примеру 1 можно оценить и погрешность вычислений. В данном случае она не превышает $\varepsilon = 0.0005$. Обратим внимание: для аппроксимации конформного отображения использовался полином степени $n = 40$; при этом расчеты выполнялись с числом значащих цифр $Digits = 70$.

В заключение приведем процедуру построения комплексного полинома, осуществляющего конформное отображение треугольника на круг и использующую свойство минимума длины контура:

```
> ConformPolTriangl:=proc(n,A1,B1,C1) local P,P1,Q,J1,J2,J3,J,res,A,B;
global p,w;
P:=1+sum((A[i]+I*B[i])*(x+I*y)^i,i=1..n);
P1:=1+sum((A[i]-I*B[i])*(x-I*y)^i,i=1..n);
Q:=expand(P*P1);
J1:=PathInt(Q,[x,y]=Line(A1,B1));
J2:=PathInt(Q,[x,y]=Line(B1,C1));
J3:=PathInt(Q,[x,y]=Line(C1,A1));
J:=J1+J2+J3;res:=Minimize(J);op(2,res);assign(%);
P:=subs(x+I*y=z,P);
p:=simplify(int(P^2,z=0..z));
p:=unapply(p,z);w:=unapply(p(z)/abs(p(A1[1]+I*A1[2])),z)
end proc;
```

С помощью этой процедуры построим отображение вытянутого треугольника на круг (рис. 14). Задаем вершины треугольника:

```
> x1 := -1; x2 := 1: x3 := 0: y1 := -2: y2 := 3: y3 := -2:
  A1 := '<,>'(x1, y1): B1 := '<,>'(x2, y2): C1 := '<,>'(x3, y3):
```

Изобразим этот треугольник с помощью команды (рис. 14):

```
> display(polygon([[ -1, -2 ], [ 1, 3 ], [ 0, -2 ]]), color=green, thickness=2,
  scaling=constrained);
```

Решаем задачу:

```
> Digits:=100:
  ConformPolTriangl(60, A1, B1, C1):
```

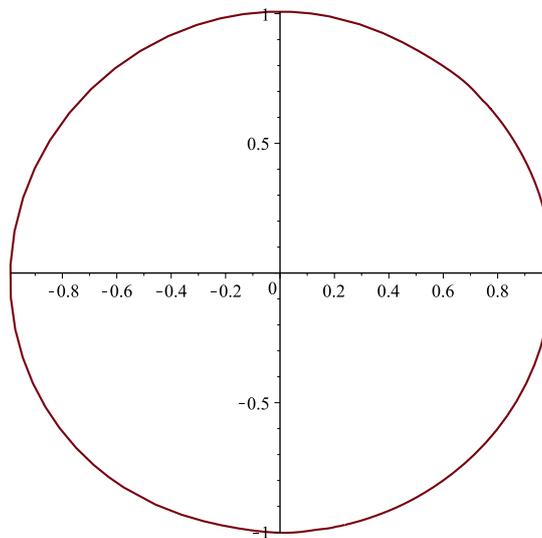


Рис. 15. Образ треугольника.

Параметризуем границу области D и построим график ее образа при отображении функцией $w(z)$ (рис. 15):

```
> z1:=x1+I*y1+t*(x2-x1+I*(y2-y1)):
  z2:=x2+I*y2+t*(x3-x2+I*(y3-y2)):
  z3:=x3+I*y3+t*(x1-x3+I*(y1-y3)):
  wpic1:=plot([evalc(Re(w(z1))),evalc(Im(w(z1))),t=0..1]):
  wpic2:=plot([evalc(Re(w(z2))),evalc(Im(w(z2))),t=0..1]):
  wpic3:=plot([evalc(Re(w(z3))),evalc(Im(w(z3))),t=0..1]):
  plots[display]({wpic1,wpic2,wpic3});
```

Как видно из рис. 15, аппроксимирующая кривая практически совпадает с окружностью!

Заключение. Рассмотренные примеры приближенного построения конформных отображений областей на круг единичного радиуса показывают эффективность применения вариационного метода в совокупности с системой аналитических вычислений Maple к решению указанных задач. В системе Maple имеются эффективные средства вычисления кратных и контурных интегралов [3]. Система Maple эффективно используется для решения различных задач математической физики —

математического моделирования в механике деформируемого твердого тела при расчете различных судовых и гидротехнических конструкций, а также при решении задач теории упругости и теплопроводности [6] - [11].

Литература

1. Голоскоков Д.П. Курс математической физики с использованием пакета Maple / Д.П. Голоскоков. - СПб.: Изд-во Лань, 2015. - 576 с.
2. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе MAPLE / Д.П. Голоскоков. - СПб: Питер, 2004. - 539 с.
3. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple: учебн. пособие для вузов / Д.П. Голоскоков. - СПб: ООО "ПаркКом", 2010. - 643 с.
4. Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию / Ю.Г. Игнатъев. - Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с.
5. Голоскоков Д.П. Моделирование конформных отображений вариационным методом в системе символьных вычислений Maple / Д.П. Голоскоков // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. - 2015. - Вып. 5(33). - С. 207-216.
6. Голоскоков Д.П. Примеры реализации в Maple энергетического метода для задач изгиба тонких плит / Д.П. Голоскоков // международный семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZCAS-2014 и международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZCAS-SCHOOL-2014: материалы конференции и труды семинара. - Казань, 2014. - С. 33-62.
7. Голоскоков Д.П. Расчет плоских затворов судоходных шлюзов на динамическое воздействие / Д.П. Голоскоков, А.В. Васин // международная научно-практическая конференция ИТОН-2014 и IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики: материалы конференции и труды семинара. Казань, 2014. - С. 295-299.
8. Goloskokov D.P. Analyzing simply supported plates using Maple system / D.P. Goloskokov // International conference on computer technologies in physical and engineering applications: materials of conference. - Saint-Petersburg, 2014, P. 57-58.
9. Goloskokov D.P. Simulation of the Dynamic Loads and Calculation of Plane Lock Bypass Galleries / D.P. Goloskokov, A.V. Vasin // International conference on computer technologies in physical and engineering applications: materials of conference. - Saint-Petersburg, 2014, P. 201-202.
10. Голоскоков Д.П. Моделирование температурных полей при частичном нарушении теплоизоляции / Д.П. Голоскоков // Журнал университета водных коммуникаций. - 2010. - Вып. 4(8). - С. 53-56.
11. Голоскоков Д.П. Математическое моделирование нестационарных температурных полей / Д.П. Голоскоков // Журнал университета водных коммуникаций. - 2011. - Вып. 1(9). - С. 79-83.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

O.B. Zaslavskii

High energy particle collisions near black holes



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

UDC 530.12

HIGH ENERGY PARTICLE COLLISIONS NEAR BLACK HOLESO.B. Zaslavskii¹¹ *zaslav@ukr.net*; Kharkov V.N. Karazin National University, Kazan Federal University

If two geodesic particles collide near a rotating black hole, their energy in the centre of mass frame $E_{c.m.}$ can become unbound under certain conditions (the so-called BSW effect). The special role is played here by so-called critical geodesics when one of particles has fine-tuned energy and angular momentum. The nature of geodesics reveals itself also in fate of the debris after collisions. One of particles moving to a remote observer is necessarily near-critical. We discuss, when such a collision can give rise not only unbound $E_{c.m.}$ but also unbound Killing energy E (so-called super-Penrose process).

Keywords: particle collision, centre of mass, Penrose process.

Investigation of high energy collisions of particles near black holes comes back to works [1] - [3]. In recent years, an interest to this issue revived after the observation made by Bañados, Silk and West (the BSW effect, after the names of its authors) that particle collision near the Kerr black hole can lead, under certain additional conditions, to the unbounded growth of the energy in their centre of mass $E_{c.m.}$ [4]. Later on, in a large series of works, this observation was generalized and extended to other objects and scenarios. The energy that appears in the BSW effect is relevant for an observer who is present just near the point of collision in the vicinity of the black hole horizon. Meanwhile, what is especially physically important is the Killing energy E of debris after such a collision measured by an observer at infinity. Strong redshift “eats” significant part of $E_{c.m.}$, so it was not quite clear in advance, to what extent the energy E may be high. If E exceeds the initial energy of particles, we are faced with the energy extraction from a black hole. This is a so-called collisional Penrose process (the Penrose process that occurs due to particle collisions). Thus there are two related but different issues: (i) investigation of the effect of unbounded $E_{c.m.}$, (ii) study of properties of E and the question about the maximum possible efficiency of the collisional Penrose process.

Consider the generic axially symmetric metric. It can be written as

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{\phi\phi}(d\phi - \omega dt)^2 + dl^2 + g_{zz} dz^2. \quad (1)$$

Here, the metric coefficients do not depend on t and ϕ . On the horizon $N = 0$. Alternatively, one can use coordinates θ and r , similar to Boyer–Lindquist ones for the Kerr metric, instead of l and z . In (1) we assume that the metric coefficients are even functions of z , so the equatorial plane $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($z = 0$) is a symmetry one.

In the space-time under discussion there are two conserved quantities $u_0 \equiv -E$ and $u_\phi \equiv L$ where $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ is the four-velocity of a test particle, τ is the proper time and $x^\mu = (t, \phi, l, z)$ are coordinates. The aforementioned conserved quantities have the physical meaning of the energy per unit mass (or frequency for a lightlike particle) and azimuthal component of the angular momentum, respectively. It follows from the symmetry reasonings that there exist geodesics in such a background which lie entirely in the plane $\theta = \frac{\pi}{2}$. We consider a pair of particles labeled by the subscript $i = 1, 2$ and having the

equal rest masses $m_1 = m_2 = m$. We also assume that both particles are approaching the horizon. Then, using the first integrals for such geodesics one can calculate the energy in the centre of mass frame $E_{c.m.} = \sqrt{2}m\sqrt{1 - u_{\mu(1)}u^{\mu(2)}}$ [4]. After simple manipulations, one obtains

$$\frac{E_{c.m.}^2}{2m^2} = \frac{X_1X_2 - Z_1Z_2}{N^2} + 1 - Y = \frac{L_1L_2}{g_{\phi\phi}}, \quad (2)$$

where $X = X_i \equiv E_i - \omega L_i$,

$$Z_i = \sqrt{(E_i - \omega L_i)^2 - N^2 b_i}, \quad b_i = 1 + \frac{L_i^2}{g_{\phi\phi}}. \quad (3)$$

In the horizon limit $N \rightarrow 0$ one obtains

$$\left(\frac{E_{c.m.}^2}{2m^2}\right)_H = 1 + \frac{b_{1(H)}(L_{2(H)} - L_2)}{2(L_{1H} - L_1)} + \frac{b_{2(H)}(L_{(1)H} - L_1)}{2(L_{2(H)} - L_2)} - \frac{L_1L_2}{(g_{\phi\phi})_H}, \quad L_{i(H)} \equiv \frac{E_i}{\omega_H}. \quad (4)$$

By a very meaning of derivation, it is supposed in (4) that $L_1 \neq L_{2(H)}$, $L_2 \neq L_{2(H)}$. If $L_1 = L_{1(H)}(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, $L_2 \neq L_{2(H)}$,

$$\left(\frac{E_{c.m.}^2}{2m^2}\right)_H \approx \frac{b_{1(H)}(L_{2(H)} - L_2)}{2L_{1(H)}\varepsilon} \quad (5)$$

becomes unbounded. This is just the BSW effect. What is important is that the effect is universal and takes place near generic rotating axially symmetric black holes [6]. Moreover, this happens near not only extremal black holes (as assumed usually) but near nonextremal one as well [7].

One can suggest a quite generic explanations based on geometric properties of the particles' trajectories near the horizon [8]. Let us consider the collision of two particles near the future horizon of a black hole. We assume that both particles move towards the horizon. Let us introduce in the point P under consideration and its vicinity the tetrad with lightlike vectors l^μ , N^μ and spacelike vectors a^μ , b^μ orthogonal to them. Here, the vectors l^μ , N^μ are normalized, say, as $l^\mu N_\mu = -1$.

Then,

$$g_{\alpha\beta} = -l_\alpha N_\beta - l_\beta N_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \quad (6)$$

where $\sigma_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha$, $l^\alpha \sigma_{\alpha\beta} = N^\alpha \sigma_{\alpha\beta} = 0$. We assume that it is the vector l^μ that becomes the generator of the future horizon. In general, we can use the decomposition of the four-velocity u^μ in the form

$$u_i^\mu = \frac{l^\mu}{2\alpha_i} + \beta_i N^\mu + s_i^\mu, \quad s_i^\mu = A_i a^\mu + B_i b^\mu \quad (7)$$

where $i = 1, 2$ labels the particles and α_i , β_i , A_i and B_i are coefficients. The time-like vector u^μ is normalized as usual, $(uu) = -1$, hereafter the symbol (...) denotes the scalar product. Then, it follows from (7) that

$$\beta_i = -(u_i l), \quad (8)$$

$$\alpha_i = -\frac{1}{2}(u_i N)^{-1}. \quad (9)$$

As vectors u^μ , l^μ , N^μ are assumed to be future-directed, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ (motion “forward in time”). The normalization condition entails

$$s_i^\mu s_{i\mu} = \frac{\beta_i}{\alpha_i} - 1. \quad (10)$$

The case $\beta_i = \alpha_i$, $s_i^\mu = 0$ corresponds to pure radial motion (see below).

Then,

$$-(u_1 u_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_2} + \frac{\beta_2}{\alpha_1} \right) - (s_1 s_2). \quad (11)$$

The energy in the centre of mass frame [4] is equal to $E_{c.m.}^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 (u_1 u_2)$ (m_i are rest masses of particles), so

$$E_{c.m.}^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 \left[\frac{\beta_1}{\alpha_2} + \frac{\beta_2}{\alpha_1} - 2(s_1 s_2) \right]. \quad (12)$$

The frame of the centre of mass falls down with both particles [4], so the possible effect of unbound acceleration is not direct manifestation of the blueshift. In general, as it is seen from (12), $E_{c.m.}^2$ remains finite even in the vicinity of the horizon for any nonzero α_1 , α_2 . However, if, say, $\alpha_1 \rightarrow 0$ that corresponds to a so-called critical particle, $E_{c.m.}^2 \rightarrow \infty$.

We can also suggest simple kinematic explanation. We consider the geodesic motion of massive particles in the equatorial plane $\theta = \frac{\pi}{2}$. Then, the relation holds [9]

$$E - \omega L = \frac{N}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (13)$$

where V is the velocity measured by a local zero angular momentum observer (ZAMO) [5]. One can observe that for generic E , L in the horizon limit $N \rightarrow 0$ the velocity $V \rightarrow 1$. But for $E = \omega_H L$ (ω_H is the horizon value), $V < 1$. Thus we have collision between one “slow” and one “rapid” particles. Their relative velocity $w \rightarrow 1$, the Lorentz factor of relative motion $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \rightarrow \infty$, the energy $E_{c.m.} \rightarrow \infty$.

Now, we turn to the question, what can see an observer at infinity. If E exceeds the initial energy of particles, we are faced with the energy extraction from a black hole. This is a so-called collisional Penrose process (the Penrose process that occurs due to particle collisions). Strong redshift “eats” significant part of $E_{c.m.}$, so it was not quite clear in advance, to what extent the energy E may be high. It turned out that energy extraction from the Kerr black hole is possible but it was found to be relatively modest [10], [11], [12]. More general situation not restricted to the Kerr metric was considered in [13] where quite general upper bounds were derived that depend on the details of the metric. But, also, indefinitely large E turned out to be impossible.

The aforementioned results on the energy extraction were obtained for the standard BSW scenario: both colliding particles move towards a black hole, one of which is “critical” with fine-tuned parameters (energy and angular momentum), the second particle is “usual” (not fine-tuned). However, numeric findings in [16] showed that if the critical particle moves away from a black hole, the efficiency of the process significantly increases

and amounts to 13,92 for the Kerr metric. In what follows, we call this Schnittman process (scenario). Later, numerically [17] and analytically [18] it was found that if colliding particles move in opposite directions and both of them are usual, a formally infinite efficiency becomes possible (so-called super-Penrose process). The problem is, however, that a usual particle with a finite energy cannot move away from a black hole although for the critical particle this is possible ([10], [13], [14]). Therefore, one could think that an outgoing usual particle could be created in some precedent collision. However, more careful treatment showed that the kind of particles under discussion cannot appear as a result of preceding collisions with finite masses and angular momenta. For a divergent mass of an initial particle this is possible but this reduces the physical value of the process [19], [20]. One is led to conclusion that starting from initial conditions in which usual outgoing particles near the black hole horizon are absent one cannot obtain them by means of additional collisions. As a result, a super-Penrose process near black holes is impossible. Account for more involved scenarios in which particles intermediate between the critical and usual ones participate, only confirmed this conclusion [14]. (There is another option when collision occurs near a white black hole [15] but we do not discuss here these rather exotic objects.)

Quite recently, the estimates of the efficiency of the energy extraction from the Kerr black hole found in [16] numerically were derived analytically for the Kerr metric [21], [22]. General approach was developed in [23]. Maximum efficiency of extraction in the Kerr metric requires heavy particles that fall into a black hole [22] but for more general metrics this is not necessarily so [23].

What is especially important is that extraction can become infinite if instead of a black hole collision happens in the background without the horizon but on the threshold of its formation. This was shown in a general form in [24] and analyzed in detail in [25].

It turns out that collisions between ingoing and outgoing particles near generic axially symmetric black holes lead to some new qualitative possibilities absent for the Kerr one. In particular, the maximum efficiency of the energy extraction becomes possible even without heavy produced particles that are necessary in the Kerr case [22].

The conservation of the energy and angular momentum gives us

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4, L_1 + L_2 = L_3 + L_4. \quad (14)$$

Let a particle move towards a centre, bounce back and collide with another ingoing particle. Examination of (14) in the background (1), where $N > 0$ but is small at some r_0 shows that there are scenarios in which formally $E_3, L_3 \rightarrow \infty$ and $E_4, L_4 \rightarrow -\infty$. Thus extraction becomes unbounded. One reservation is in order. All particles are considered in the test approximation, so self-gravitation is neglected. There exists another mechanism of the energy extraction related to the electrically charged particles [26], [27] but we did not discuss it here.

How to take into account the effect of self-gravitation for particle collision under discussion remains unresolved very interesting problem.

I thank organizers for support that made my participation in the seminar possible.

References

1. Piran T. High Efficiency of the Penrose Mechanism for Particle Collisions / T. Piran, J. Katz, J. Shaham // *Astrophys. J.* – 1975. – Vol. 196. – P. 107.
2. Piran T. Production of gamma-ray bursts near rapidly rotating accreting black holes / T. Piran, J. Shaham // *Astrophys. J.* – 1977. – Vol. 214. – P. 268.
3. Piran T. Upper bounds on collisional Penrose processes near rotating black-hole horizons / T. Piran, J. Shaham // *Phys. Rev. D.* – 1977. – Vol. 16. – P. 1615.
4. Bañados M. Kerr black holes as particle accelerators to arbitrarily high energy / M. Bañados, J. Silk, S.M. West // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol. 103. – P. 111102.
5. Bardeen J.M. Rotating black holes: Locally non-rotating frames, energy extraction and scalar synchrotron radiation / J.M. Bardeen, W.M. Press, S.A. Teukolsky // *Astrophys. J.* – 1972. – Vol. 178. – P. 347–369.
6. Zaslavskii O.B. Acceleration of particles by nonrotating charged black holes / O.B. Zaslavskii // *Phys. Rev. D.* – 2010. – Vol. 82. – P. 571-574.
7. Grib A.A. On particles collisions in the vicinity of rotating black holes / A.A. Grib, Yu.V. Pavlov // *Pis'ma v ZhETF.* – 2010. – Vol. 92. – No.147. – P. 125-129.
8. Zaslavskii O.B. Acceleration of particles by black holes-a general explanation / O. B. Zaslavskii // *Classical Quantum Gravity.* – 2011. – Vol. 28. – No.10. – P. 105010
9. Zaslavskii O.B. Acceleration of particles by black holes: Kinematic explanation / O.B. Zaslavskii // *Phys. Rev. D.* – 2011. – Vol. 84. – P. 024007.
10. Harada T. Upper limits of particle emission from highenergy collision and reaction near a maximally rotating Kerr black hole / T. Harada, H. Nemoto, U. Miyamoto // *Phys. Rev. D.* – 2012. – Vol. 86. – P. 024027.
11. Bejger M. Collisional Penrose process near the horizon of extreme Kerr black holes / M. Bejger, T. Piran, M. Abramowicz, F. Håkanson // *Physical Review Letters.* – 2012. – Vol. 109. – P. 121101.
12. Harada T. Consistent analytic approach to the efficiency of collisional Penrose process / T. Harada, K. Ogasawara, U. Miyamoto. – Access mode:[arXiv:1606.08107].
13. Zaslavskii O. Energetics of Particle Collisions Near Dirty Rotating Extremal Black Holes: Banados-Silk-West Effect Versus Penrose Process // O. Zaslavskii // *Phys. Rev. D.* – 2012. – Vol. 86. – P. 084030.
14. Zaslavskii O. Is the super-Penrose process possible near black holes? / O. B. Zaslavskii // *Phys. Rev. D.* – 2016. – Vol. 93. – P. 024056.
15. Grib A.A. Are black holes totally black? / A.A. Grib, Yu.V. Pavlov // *Gravitation and Cosmology.* – 2015. – Vol. 21. – P. 13-18.
16. Schnittman J. D. Revised upper limit to energy extraction from a Kerr black hole / J.D. Schnittman // *Phys.Rev.Lett.* – 2014. – Vol. 113. – P. 261102 .
17. Berti E. Ultrahigh-energy debris from the collisional Penrose process / E. Berti, R. Brito, V. Cardoso // *Phys. Rev. Lett.* – 2015. – Vol. 114. – P. 251103 .
18. Zaslavskii O. Unbounded Energies of Debris From Head-on Particle Collisions Near Black Holes / O. Zaslavskii // *Mod. Phys. Lett. A.* – 2015. – Vol. 30. – P. 1550076.
19. Leiderschneider E. Super-Penrose collisions are inefficient - a Comment on: Black hole fireworks: ultra-high-energy debris from super-Penrose collisions / E. Leiderschneider, T. Piran. – Access mode: [arXiv:1501.01984].
20. General limitations on trajectories suitable for super-Penrose process / O.B. Zaslavskii // *Europhys. Lett.* – 2015. – Vol. 111. – No. 5. – P. 50004.

21. Leiderschneider E. On the maximal efficiency of the collisional Penrose process / E. Leiderschneider, T. Piran // *Phys. Rev. D.* – 2016. – Vol. 93. – P. 043015. – Access mode: [arXiv:1510.06764].
22. Ogasawara K. High efficiency of collisional Penrose process requires heavy particle production / K. Ogasawara, T. Harada, U. Miyamoto // *Phys. Rev. D.* – 2016. – Vol. 93. – P. 044054.
23. Zaslavskii O.B. Maximum efficiency of the collisional Penrose process / O.B. Zaslavskii. – Access mode: [arXiv:1607.00651].
24. Zaslavskii O. B. Ultrahigh Energy Head-on Collisions Without Horizons Or Naked Singularities: General Approach / O.B. Zaslavskii // *Phys. Rev. D.* – 2013. – Vol. 88. – P. 044030.
25. Infinite efficiency of the collisional Penrose process: Can a overspinning Kerr geometry be the source of ultrahigh-energy cosmic rays and neutrinos? / M. Patil, T. Harada, Ken-ichi Nakao, P.S. Joshi, M. Kimura // *Phys. Rev. D.* – 2016. – Vol. 93. – P. 104015.
26. Zaslavskii O. B. Energy Extraction From Extremal Charged Black Holes Due to the Banados-Silk-West Effect / O.B. Zaslavskii // *Phys. Rev. D.* – 2012. – Vol. 86. – P. 124039.
27. Nemoto H. Escape of superheavy and highly energetic particles produced by particle collisions near maximally charged black holes / H. Nemoto, U. Miyamoto, T. Harada, T. Kokubu // *Phys. Rev. D.* – 2013. – Vol. 87. – P. 127502.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

В.М. Журавлев

О топологической теории полей и частиц



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 519.61

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ЧАСТИЦ

В.М. Журавлев¹

¹ zhvictorm@gmail.com; Ульяновский государственный университет

В лекции излагается новый подход к построению теории электромагнитного и гравитационного взаимодействий на основе геометрической интерпретации соответствующих полей с привлечением топологических инвариантов для описания электрических зарядов.

Ключевые слова: общая теория относительности, геометризация материи, геометризация электродинамики, квантовая теория, теория гравитации, топология, заряд, массы, элементарные частицы.

Лекция 1

Что мы знаем и чего не знаем о материи?

1. Краткая история рождения и болезней квантовой теории

1.1. Строение материи

Теория, о которой пойдет речь, является попыткой разрешить проблемы, которые встали перед физикой в XX веке, когда ученым удалось разобраться в том, что происходит на очень малых расстояниях, которые сейчас принято называть атомными и субатомными. В XX веке физикам удалось создать приборы и провести эксперименты, в которых было показано, что вещество состоит из атомов и молекул, а сами атомы и молекулы состоят из еще более “элементарных частиц”. Такие частицы иногда называют субатомными. В XX веке пришлось изобретать новый термин для частиц, из которых состоят атомы – “элементарные”, поскольку само слово “атом” в переводе с древнегреческого языка означает “неделимый”. Атом оказался делимым, а в последствие делимыми оказались и субатомные частицы.

Хотя о том, что вещество состоит из атомов и молекул, догадывались еще в Древней Греции (Левкипп и Демокрит), тем не менее даже в XIX веке еще не было абсолютно и строго доказанных фактов об атомно-молекулярном строении вещества.

В XVIII веке одним из основоположников атомно-молекулярного учения был наш великий соотечественник Михаил Васильевич Ломоносов, 300-летие которого мы отмечаем в 2013 году.

Работы ученых XVIII и XIX веков дали много оснований для того, чтобы построить атомно - молекулярную теорию вещества, но только почти сто лет назад в 1913 году на Втором Сольвеевском конгрессе было объявлено об окончательно установленных фактах, подтверждающих строго атомно-молекулярное строение веществ. Основными фактами стали - теория растворов (много авторов), объяснение броуновского движения Эйнштейном и планетарная модель атома Резерфорда. Однако успешное завершение более чем двух тысячелетней истории атомов в 1913 году по-

служило рождению новой истории о строении самих атомов, а затем и элементарных (субатомных) частиц. Первыми в этой истории появились электроны (β -лучи), затем α -частицы, и X -лучи, а затем и γ -лучи. Планетарная модель атома Резерфорда подразумевала, что атом устроен совсем не элементарно и состоит из положительно заряженного ядра и электронов, которые его окружают наподобие планет, которые вращаются вокруг Солнца. Однако первые же шаги такого представления об атомах вошли в противоречие с классическими законами, которые управляют движением вещества на привычных нам масштабах, которые принято называть - макромасштабами. Эти противоречия заставили физиков строить новую теорию движения субатомных частиц, которая в настоящее время называется квантовой теорией.

1.2. Квантовая теория

Годом создания квантовой теории считается 1926 год, когда Вернер Гейзенберг опубликовал статью, в которой объяснил то, как можно рассчитать спектры излучения атомов, основываясь на новой системе квантовых постулатов. Эта статья завершила этап возникновения квантовой теории, началом которого можно считать работу Планка о спектре излучения абсолютно черного тела, появившуюся в 1900 году. Теория бурно развивалась после 1926 года вплоть до начала Второй Мировой Войны. Эта эпоха так и называется в физике - "Эпоха бури и натиска". В это время были записаны фундаментальные постулаты квантовой теории, которых пришлось вводить намного больше, чем в классической механике. Найдены уравнения, описывающие движение субатомных частиц - электронов и некоторых других частиц. Это уравнения Шредингера и Дирака. Было обнаружено, что ядра атомов состоят из протонов и нейтронов, а все частицы должны иметь своих антиподов - античастицы. В это же время были обнаружены процессы радиоактивного распада, явления ядерного синтеза, с помощью которого удалось объяснить "горение" звезд. Но и результатом этих открытий стало создание атомной и ядерной бомб. Было открыто и объяснено множество других явлений. Однако зародившаяся новая квантовая теория была создана на основе нескольких не совсем ясных до сих пор принципов и содержит несколько фундаментальных проблем, которые не разрешены в ней до сих пор.

Неясными принципами были и остаются в квантовой теории способы интерпретации того, что же происходит с субатомной частицей, когда над ней производят измерение. До квантовой механики физик, пытаясь измерить то или иное свойство физической системы, полагал, что результат эксперимента можно заранее предсказать, если строго контролировать все внешние условия проведения эксперимента. Это иногда сделать очень сложно, например, из-за того, что установка сотрясается из-за проезжающих недалеко автомобилей. В других случаях не удается исключить воздействие молекул окружающей среды, которые находятся в постоянном тепловом движении и т.д. Но во всех этих случаях физик знал, что такого рода неконтролируемые воздействия порождены не чем-то абсолютно фундаментальным, не поддающимся пониманию, а вполне ясными взаимодействиями одних тел с другими. Поэтому считалось, что, во-первых, такое воздействие можно уменьшать с помощью разных ухищрений, а, во-вторых, его можно учесть с помощью прове-

дения множества одинаковых измерений. Однако квантовая механика смешала все карты! Выяснилось, что результат эксперимента, даже самого тщательно подготовленного, часто нельзя предсказать однозначно. Они оказываются случайными или вероятностными. Это можно интерпретировать так, как-будто “кто-то” заставляет субатомные частицы двигаться разными способами не из-за того, что они взаимодействуют по-разному с другими телами, а из-за того, что этот “кто-то” по своему усмотрению заставляет их летать по только ему известным траекториям. При этом физику позволено вычислять все возможные траектории, по которым могут летать частицы, но этот “кто-то” утаивает от экспериментатора - по какой из них он направит частицу в следующий момент.

1.3. Кто же этот “кто-то”?

Если где-то нет кого-то,
Значит кто-то где-то есть!
Только где же этот кто-то?
И куда он мог залезть?
Песенка из мультфильма

У физиков разгорелся не шуточный спор - кто же этот “кто-то”. Он продолжается до сих пор. Многие сразу подумали - а не Бог ли это? Однако идея о том, что Бог стоит за каждым экспериментом в мире и постоянно дурачит физиков, выглядит не очень привлекательной. Ее выразил Эйнштейн словами “Бог не играет в кости!”

Другие пытались на первых порах все свести к старой идее классической механики, что мы просто чего-то не в состоянии контролировать в эксперименте, поэтому и получаются случайные результаты. Однако знаменитый математик Нейман доказал, что такое объяснение не верно почти при всех условиях эксперимента. Победила в 30-х годах XX века идея Нильса Бора о том, что не стоит задумываться о том, кто же этот “кто-то”. Он сказал всем, что мир так уж устроен. В нашем мире маленькие частицы движутся по своим законам. Поэтому их надо просто изучить, научиться вычислять разные вещи, а этот “кто-то” пусть остается инкогнито. Правда Эрвин Шредингер, Луи Де-Бойль и Альберт Эйнштейн так и остались при своем мнении. Э.Шредингер придумал даже мысленный эксперимент с черной кошкой. Согласно этому эксперименту, кошка может погибнуть или остаться жить из-за того, что в эксперименте квантовая частица полетит либо одним, либо другим способом. Это означает, что законы субатомных частиц могут влиять непредсказуемым способом на жизнь кошки. Точно также они могут влиять на жизнь человека, а это уже далеко не электроны и протоны. Тут уж точно надо узнать кто же этот “кто-то”. Вот эта проблема является фундаментальной и требует решения. Хотя не она послужила в качестве толчка к созданию обсуждаемой здесь теории, но эта проблема служила постоянным фоном к восприятию других проблем современной теории частиц.

1.4. Теория гравитации Ньютона

Квантовая механика существенным образом перевернула взгляды физиков на строение мира на малых масштабах. Выявленные свойства субатомных частиц позволили понять буквально сразу множество явлений в макромире, т.е. мире, где нам привычно жить. Кроме этого, было понято множество явлений, происходящих в мире звезд. К концу XX века, основываясь на квантовых законах были установлены основные принципы, лежащие в основе эволюции звезд и галактик. Появилось объяснение таким звездам, как белые карлики или нейтронные звезды, свойства которых существенным образом зависят от квантовых законов, которые управляют движением частиц в них. Однако все эти достижения в макромире были связаны с еще одним явлением - гравитационным взаимодействием или полем, которое к квантовой механике до сих пор имело мало отношения. Понимание, что в окружающем нас мире, привычном нам, действует некая загадочная сила, которая удерживает нас на поверхности Земли, пришла в голову физикам далеко не сразу.

Первым человеком, который стал изучать действие этой силы экспериментально, стал, по всей видимости, великий Галилео Галилей - родоначальник современной физической науки! То, что на все тела вблизи Земли действует некая сила, что заставляет их падать ускоренно, если пренебречь сопротивлением воздуха, он установил с помощью прямых измерений и вычислил ускорение свободного падения тел. Объяснения этой силе он не нашел, но сам факт ее существования вошел в физику как фундаментальный факт. Следующий фундаментальный факт установил не менее великий ученый Исаак Ньютон! Из опытов Галилея следовало, что все тела притягиваются к земле (именно с малой буквы!), но откуда берется эта сила и притягивается ли она каким-либо другим телам Галилей не знал.

Как говорится в историческом мифе-анекдоте, мысль, что силой притяжения обладают все тела во Вселенной пришла в голову Ньютону вместе с уларом яблока, которое упало на голову Ньютона, когда он сидел под деревом в саду. Однако эта замечательная идея пришла в голову не только Ньютону и, возможно, другим способом. Авторство этой гипотезы оспаривал у Ньютона замечательный ученый Гук. Но в историю идея о том, что все тела притягиваются к друг к другу с силой обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и пропорционально произведению их масс вошла под именем закона Всемирного тяготения Ньютона.

Этот закон можно записать в виде формулы:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}.$$

В этой формуле m_1 и m_2 - массы частиц, r_{12} - расстояние между частицами, а G - фундаментальная постоянная, носящая название гравитационной постоянной Ньютона. Роль этой силы в окружающем нас мире переоценить не возможно. В 60-х годах наш замечательный ученый-физик К.М. Станюкович в содружестве с журналистом М.В. Васильевым написали замечательную книгу - "Сила, что движет мирами". Трудно придумать что-то более точное, чем это определение силы тяготения - Сила, что движет мирами!

1.5. Что находится между тяготеющими телами или - Что такое поле?

Теория Ньютона Всемирного тяготения определила развитие физики на последующие три столетия до нашего времени.

Во-первых, из этой теории следовало, что **тела влияют друг на друга** не через какие-то промежуточные тела, а **напрямую через пространство**. Причем воздействие от одного тела к другому передается мгновенно. Это теория дальнего действия, которой придерживался сам Ньютон.

Во-вторых, из этой формулы следует, что ее величина пропорциональна массе тел - характеристике, которая к тяготению вроде бы не имеет никакого отношения! **Инертная масса** - это параметр, который характеризует, как действие сил сказывается на движении тел и не характеризует сами силы. **Почему же эта масса определяет и то, как все тела притягиваются?**

И, в-третьих, почему **сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния?**

Эти вопросы заставили физиков активно сравнивать силу тяготения с другими силами, наблюдаемыми в природе, и по примеру формулы Ньютона стали искать аналогичные формулы для этих сил. Так в последствии появился закон Кулона.

Вместе с тем, большие разногласия стала среди физиков вызывать **теория дальнего действия**. Весь опыт физики, которая строилась на базе механики, которую построил тоже Ньютон, говорил ученым, что так не бывает, чтобы нечто мгновенно переносится в пространстве и влияет на другие тела. Во времена Ньютона или чуть позже были измерены и скорость звука и скорость света (Ремер, Бредли). Это показало, что даже загадочный свет имеет хоть и очень большую, но все же конечную скорость. Более того, свет представляет собой нечто материальное. Он может воздействовать на тела.

Поэтому теория дальнего действия была заменена на другую концепцию - **близкое действие**. Основной ее смысл состоит в том, что воздействие от одного тела к другому передается всегда с помощью чего-то материального и с конечной скоростью. Но как же быть с тяготением? Ведь мы не видим ничего материального между телами. Чтобы эта кажущаяся пустота, но заполненная чем-то, что передает тяготение от тела к телу, не требовала постоянных разъяснений, было предложено назвать это материальное нечто - полем. Понятие поля ввел в обиход физики великий физик XIX века - Майкл Фарадей. Первоначально это понятие он относил к магнитным силам, которые меняют расположение железных опилок вокруг намагниченных тел, делая поле "видимым". Затем это понятие стали относить и к электромагнитным силам и полю тяготения. С тех пор мы постоянно говорим о полях, когда нам надо сказать, что в пространстве между телами есть взаимодействие, которое невидимо передает силу от одного тела к другому. Таких полей сейчас существует множество. Но самыми главными из них являются поле тяготения и электромагнитное поле. Этим полям соответствуют два фундаментальных взаимодействия - сила гравитации и силы электромагнитного взаимодействия. Есть еще силы ядерного взаимодействия, но они не наблюдаемы на больших расстояниях, привычных нам. Однако их действие определяет то, что мы можем существовать! Но об этом мы поговорим позже.

Понятие поля очень помогло физикам в процессе общения друг с другом. Бо-

лее того, проявления некоторых простых полей можно наблюдать воочию. Так, например, железные опилки выстраиваются вдоль силовых линий магнитного поля постоянного магнита, что делает его видимым. Значит, понятие поля не такое уж несуразное. Однако, само слово поле мало что прибавляет к пониманию того, что же происходит в пространстве между телами, когда они взаимодействуют между собой с помощью полей. Особенно это относится к полю тяготения. Это поле вездесуще и пронизывает все насквозь. Оно действует на все тела и всегда только в форме притяжения. Что же это за поле? Ответ на этот вопрос был дан Эйнштейном.

2. Как устроено пространство?

2.1. Геометрия или - Где мы живем?

В предыдущем разделе мы озаботились тем, чтобы понять, что же обеспечивает передачу сил тяготения между телами. Для обозначения такого странного явления физики придумали понятие поля, т.е. чего-то невидимого, что “переносит” через пространство воздействие от одного тела к другому.

Парадоксальным здесь является то, что такое взаимодействие совершенно не зависит от наличия материи между телами. Как мы сейчас знаем, вакуум между планетами, а тем более между звездами, и уж тем более между галактиками, настолько разрежен, что его нельзя создать в земных условиях с помощью различного типа насосов. Значит - это нечто присуще самому пространству, т.е. той сущности которая введена нами для объяснения того, что между материальными телами есть какие-то расстояния.

Буквально это означает, что есть тела, которые соприкасаются, а есть такие, которые не соприкасаются между собой. Более того, есть различного рода объекты - поля, леса, горы, моря, люди, животные, деревья, которых мы не видим с того места, где находимся, но если пройти сто метров, километр, сто километров и т.д., то мы увидим новые поля, горы, реки, моря и т.д. Причем для целого ряда объектов со временем не меняется такая сущность, которую мы называем расстоянием. Мы можем, скажем ехать из одного города в другой на машине с одной скоростью, на лошади с другой, на самолете с третьей, и каждый раз мы будем добираться за разное время. Однако, если умножить скорость на время, то получим, что расстояние всегда будет одним и тем же.

Эта же сущность лежит в основе понимания того, что есть предметы разной длины. Размер клавиатуры у компьютера один, а у стола, на котором стоит компьютер, длина другая. Но опять же, если сравнить клавиатуру или стол утром и вечером, то можно прийти к выводу, что их длины не изменились. Значит, в нашем мире есть нечто постоянное, что очень важно, если мы хотим что-то делать в разных местах и с разными, но похожими предметами. Это свойство протяженности объектов и расстояний до них. Конечно, часть предметов и объектов, например, живые организмы движутся и меняют свои размеры, но это связано с какими-то процессами внутри них. А глобальная структура видимого нами привычного мира обладает жестким “скелетом” протяженностей, который не меняется со временем. Именно так себе представляли мир древние греки.

Сейчас мы знаем, что это не совсем так, но отличия от этих представлений крайне

не значительны, так что человек в обыденной жизни этого не заметит. Этот жесткий костяк мира и стали называть пространством. В работах древнегреческих математиков, в первую очередь Евклида, были установлены простые правила (аксиомы), которым подчиняются различные расстояния и длины в нашем мире. Вся совокупность таких расстояний и свойств, их связывающих, стали называть геометрией или совокупностью метрических отношений между телами. Позже появилось название евклидовой геометрии, когда понадобилось отличать различные костяки возможных миров и их частей с различными свойствами связи расстояний и длин в них. Основным свойством этих правил - аксиом Евклида, является то, что наш мир “прямой”. Конечно, в нем есть и не прямые линии и поверхности, и есть такие, которые очень сложно устроены, например, раковины моллюсков, описания всех свойств таких линий и поверхностей, достаточно вычислить все “прямые” расстояния до точек этой линии или поверхности от некоторой одной заданной точки - начала отсчета, пользуясь правилами Евклида. Поэтому можно условно назвать наше пространство “прямым”. Это, конечно, может понадобиться, если указать какие-то “кривые” миры или геометрии. На протяжении более, чем 2000 лет ученые не представляли себе, что геометрия может быть какой-то другой, отличной от “прямой” или евклидовой.

2.2. *Может ли мир быть кривым?*

Первые сомнения в том, что совокупность метрических отношений между объектами всегда подчиняется правилам Евклида, были высказаны нашим замечательным ученым-математиком Николаем Ивановичем Лобачевским. Трудно сказать, что именно послужило толчком к новому взгляду на понимание геометрии, но вполне вероятно, что этим толчком было обдумывание странного понятия “поле”, которое появилось в XIX веке. Раз поле не видимо, но как-то распределено в пространстве, то нельзя ли предположить, что поле и есть свойство самого пространства. Но такой взгляд полностью противоречит представлениям евклидовой, или “прямой” геометрии. Геометрия - это в представлениях ученых жесткий неизменный костяк метрических отношений между материальными телами. Он дан свыше таким, как он есть, и обсуждать здесь нечего.

Однако Лобачевский выяснил, что понятие параллельности прямых на самом деле может быть без особых сложностей распространено на некоторые кривые линии, лежащие на кривых поверхностях. Как определяется параллельность прямых по правилам Евклида? Если прямые разнесены на некоторое расстояние, то единственный способ проверить их параллельность - это взять какой-нибудь кусочек или отрезок одной прямой, перенести его по определенным правилам к другой прямой, и сравнить перенесенный отрезок с таким же отрезком на удаленной прямой. Если отрезки в точности совпадут, то прямые параллельны. Однако в этой методике есть одно слабое место. А как следует устанавливать правила переноса отрезков для их сравнения? При переносе, если Вы не ориентируетесь по внешним предметам, вы можете запросто случайно изменить направление отрезка и Ваше сравнение будет не верным! Как быть? Самый простой способ - это “разлиновать” ту местность, через которую Вы проносите отрезок параллельными прямыми. Тогда при переносе Вы можете постоянно сравнивать направление своего отрезка с отрезками линий, нарисованных на местности. В этом случае Вы не ошибетесь! В результате процесс

сравнения становится вроде бы понятным и ясным. Однако и здесь все не так просто. Можно себе представить такую ситуацию. Вы поручили кому-то разлиновать местность параллельными прямыми перед тем, как Вы решили проверить параллельность некоторых прямых. Но Вам попался шутник. Он взял и линии слегка сделал не параллельными, так что Вы этого без специальной проверки не обнаруживаете. В результате, проведя эксперимент, Вы можете сделать неверный вывод. Но такую ситуацию можно исключить с помощью проверки в евклидовом пространстве и пожуричь шутника. А что будет, если взять такую местность, на которой в принципе нельзя нарисовать в обычном смысле прямые? Тогда понятие параллельных становится вообще не ясным. В качестве такой местности Лобачевский взял псевдосферу (см. рис.).

Но можно было бы взять и обычную сферу. Все линии, которые можно провести на псевдосфере (сфере), являются кривыми с точки зрения зрителя, смотрящего на эту сферу из вне. Поэтому, если мы разлинуем сферу (псевдосферу) с помощью того же метода, что и в случае евклидова пространства, как это представлено на рисунке, то получим совокупность кривых, которые можно назвать параллельными. Проверка параллельности по старому рецепту переноса не выявит никаких отличий от такой же процедуры в евклидовом пространстве. Но парадоксальным при этом оказывается факт, что эти параллельные пересекутся, что явно противоречит пятому правилу-аксиоме Евклида. Лобачевский первым понял, что за этим стоит важнейший принцип, который должен быть перенесен с абстрактных поверхностей на окружающий нас мир.

Фундаментальным вопросом теперь уже не математики, а именно физики, должен стать вопрос - а можно ли вообще провести в нашем мире строго прямые параллельные, которые могли бы служить основой проверки параллельности? Лобачевский об этом и заявил - такая проверка может быть осуществлена только экспериментально. Был даже установлен простой способ такой проверки. Это вычисление суммы углов в треугольнике, стороны которого строятся по принципу прямых в евклидовой геометрии. Для псевдосферы такая сумма должна быть меньше 180° градусов, а для сферы - больше 180° .

Таким образом, впервые было заявлено, что наш мир может быть "кривым"! Но это надо проверять, чем и должна заниматься физика. Но раз геометрия может быть кривой, то она может быть кривой по - разному! А раз так, то поле вполне может оказаться свойством "кривизны" пространства. Однако для этого надо понять то, как могут отличаться друг от друга "кривые" пространства.

2.3. Что такое кривизна?

Надо отметить, что ученые - современники Лобачевского, далеко не сразу восприняли идеи Лобачевского. Однако был один замечательный ученый математик и физик XIX века - Иоганн Карл Фридрих Гаусс, который сразу понял важность открытия, сделанного Лобачевским.

Он сразу сам решил проверить - является ли наш мир прямым (сейчас часто говорят - плоским) или он является кривым. Для этого надо было измерить сумму углов треугольника, но какого? Если измерять сумму углов треугольника, нарисованного на бумаге или на другой ровной поверхности, то результат известен еще с древ-



Рис. 1. Николай Иванович Лобачевский 1792-1856

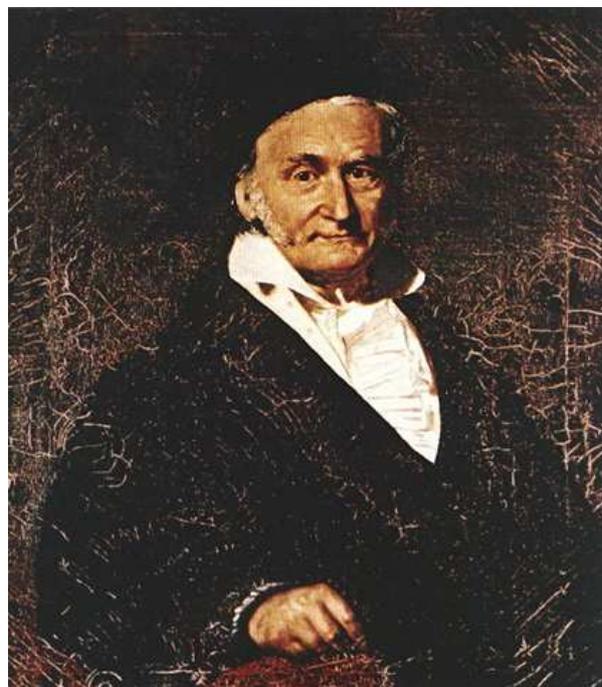


Рис. 2. Иоган Карл Фридрих Гаусс 1777-1855

ней Греции - сумма углов будет равна - 180° . Так какой же треугольник надо брать? Гаусс понял, что искать искривления надо на достаточно больших расстояниях, где нет заранее заданных поверхностей, а есть пустое пространство. Пустого пространства, т.е. то что мы сейчас называем вакуумом вблизи поверхности Земли нет. Но можно предположить, что воздух не будет сильной помехой для измерения углов треугольника больших размеров. Поэтому Гаусс расположил три небольших увеличительных (подзорные) трубы на вершинах трех гор в городе Гёттингене, где он тогда жил, работал и был директором Гёттингенской обсерватории. Расстояние между увеличительными трубами составляло примерно 40 км. С помощью этих увеличительных труб, которые сейчас принято называть в строительном деле - теодолитами, измерялась сумма углов треугольника, образованного прямыми, соединяющими увеличительные трубы. Оказалось, что сумма углов не отличается от 180° .

Таким образом Гаусс первым проверил, что наш мир евклидов на расстояниях порядка десятков километров! Следует, правда, признать, что такие измерения могут содержать существенные ошибки, если воздух между горами был нагрет не равномерно. В этом случае лучи света движутся не по прямым, а по искривленным траекториям. Это связано с изменением показателя преломления воздуха. Примером могут служить миражи, которые часто можно наблюдать в жаркую погоду над разогретой асфальтовой дорогой, или миражи, о которых сообщают путешественники, проходившие через пустыни.

Хотя результат измерений, проведенных Гауссом, дал отрицательный результат, тем не менее идея о том, что геометрии могут быть разными, а не только евклидо-

вой, постепенно стала завоевывать умы ученых. Если Лобачевского не понимали, Гаусс упоминал о работах Лобачевского и о своих трудах в этом направлении очень осторожно, то во второй половине XIX века появилась целая плеяда молодых ученых, которые не только восприняли эту идею, но и развили новую теорию. Однако заслуги Гаусса не заканчивались на проведении измерений суммы углов треугольника. Гаусс ввел понятие кривизны поверхности, которое помогает выяснять то, как различаются разные кривые геометрии.

Как показал Гаусс, существует важная количественная характеристика искривления поверхности - называемая сейчас гауссовой кривизной. Смысл ее показан на рисунке. В каждой точке поверхности можно провести две "главные" линии, пересекающиеся в этой точке. На рисунке точка, где производится вычисление гауссовой кривизны, находится на месте пересечения двух черных кривых. Вблизи этой точки кривые почти не отличаются от участков окружностей с радиусами R_1 и R_2 , соответственно. Если Вы сумели вычислить радиусы этих окружностей, а это делается по уже известным сравнительно простым правилам, то гауссова кривизна K равна по определению произведению обратных радиусов:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Другая величина H , равная сумме обратных величин радиусов:

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

называется средней кривизной поверхности в данной точке. Средняя и гауссова кривизна поверхностей быстро попали в обиход физики. Так средняя кривизна входит в формулу Лапласа для избыточного давления пара над искривленной поверхностью жидкости. Эта формула имеет прямое отношение к мыльным пузырям. Гауссова же кривизна входит в формулу для дисперсионного соотношения волн на поверхности жидкости при учете поверхностного натяжения. Это соотношение объясняет тот факт, почему рябь на поверхности жидкости почти не движется, в то время как длинные волны бегут сравнительно быстро. Это можно легко заметить на поверхности любого открытого водоема - реки, озера, моря.

Но не только этим важна гауссова кривизна. Как доказал Гаусс, если просуммировать (взять интеграл) значения гауссовой кривизны во всех точках замкнутой (не имеющей края) поверхности и разделить полученную величину на 4π , то получается всегда целое число:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S K dS = \chi(S) \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Это целое число называется эйлеровой характеристикой замкнутой поверхности. Об этой величине речь пойдет позже. Она является первым важным элементом нового раздела математики - топологии, возникшей на рубеже XIX и XX веков. Удивительным здесь является то, что все замкнутые поверхности можно отнести к одному из классов, для каждого из которых число $\chi(S)$ будет иметь определенное значение. Например, для сферы $\chi(S) = 2$. Позже мы разберем вопрос о том, почему это число носит имя великого математика XVIII века Леонарда Эйлера и какое свойство

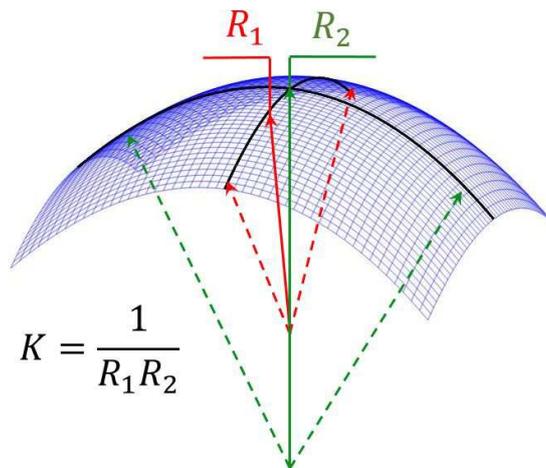


Рис. 3. Гауссова кривизна поверхности

поверхностей оно определяет. В дальнейшем мы поймем, что оно в более общем виде определяет и величину электрического заряда частиц. Для нас сейчас важно, что в обиход математики и физики XIX века был привнесен способ отличать поверхности по их кривизне. Поскольку, как установил Лобачевский и его поддержал Гаусс, геометрии могут быть разными кривыми даже у нашего физического пространства, то появился способ отличать разные кривые пространства по величине кривизны.

2.4. Как измерить кривизну нашего пространства?

Хотя идея Гаусса замечательна, но она содержит один недостаток. И этот недостаток в самой сути определения кривизны Гаусса, поскольку она является параметром внешней геометрии. Дело в том, что для вычисления ее экспериментальной величины необходимо уметь смотреть на наше пространство извне, т.е. из пространства большего числа измерений, наподобие того, как мы смотрим на поверхности в нашем пространстве. Как же быть? Ведь мы находимся в своем трехмерном пространстве и не можем увидеть себя со стороны! Мы можем лишь вычислять совокупность всевозможных расстояний от одних тел до других. Возникает вопрос - можно ли установить то, что наше пространство кривое только по этим данным, которые в совокупности и называются внутренней геометрией пространства?

Полный ответ на это вопрос был найден в конце XIX века и наиболее важный вклад в создание такой теории сделал выдающийся немецкий математик Георг Фридрих Бернхард Риман. Его именем называют теперь совокупность геометрий, которые могут быть описаны с помощью внутренних расстояний в пространстве при условии, что в малой окрестности каждой точки такого пространства оно почти не отличается от плоского (прямого или евклидова). Это так называемые римановы геометрии. Риман ввел понятие внутренней кривизны пространства, что дало возможность впоследствии использовать такой подход в приложении к физическим задачам, не пытаясь угадать - находится ли наше физическое пространство внутри другого пространства большего числа измерений. Введение кривизны Римана стало важным шагом на пути создания Общей теории относительности (ОТО), но лишило

теорию простого и наглядного представления о том, что же происходит в кривом мире, если его свойства меняются со временем. Формула для кривизны Римана выглядит намного сложнее, чем формула для кривизны Гаусса. Поэтому мы здесь ее не приводим.



Рис. 4. Георг Фридрих Бернхард Риман 1826-1866

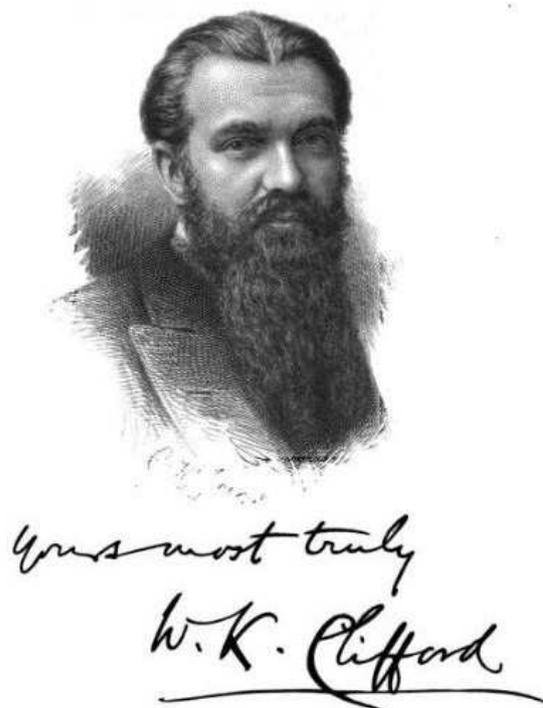


Рис. 5. Уильям Клиффорд Кингдом 1845-1879

В XIX веке понимали, что метод Римана приводит к очень сложным уравнениям, если мы хотим избавиться от необоснованных, с точки зрения эксперимента, размышлений о дополнительных измерениях. Поэтому многие ученые придерживались точки зрения, что кривизну пространства полезнее рассматривать именно с точки зрения внешней геометрии. Наиболее точное выражение такой точки зрения высказал еще один выдающийся математик XIX века - Уильям Клиффорд. Его точка зрения была изложена на одном из конгрессов математиков в конце XIX века следующими словами:

“Я считаю: 1. Что малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там несправедливы обычные законы геометрии.

2. Что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.

3. Что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи, будь она весома или эфирная .

4. Что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности. ”

(Цитируется по книге: Альберт Эйнштейн и теория Гравитации. М.: Изд. Мир,

1979 г.)

Эти слова стали для многих ученых путеводной звездой в построении теории материи как проявления свойств самого пространства. В том числе, так себе представлял взаимоотношения пространства и материи Альберт Эйнштейн. Однако он не сумел воплотить в жизнь подход, который озвучил Клиффорд. И причиной этому является то, что ни тогда ни даже сейчас у нас нет пока прямых доказательств, что физическое пространство является лишь малой частью невообразимо огромного другого пространства, которое фантасты часто называют гипер-пространством, некоторые физики (Блохинцев) - Метапространством (видимо, по аналогии с понятием Метагалактики), а математики называют объемлющим пространством или пространством, в которое вложено наше физическое пространство (наподобие поверхности), имеющее размерность 3.

3. Материя, пространство и гравитация

3.1. Где пусто, и где густо?

Идеи Клиффорда о том, “что в физическом мире не происходит ничего, кроме волнообразных перемещений искривленности пространства от точки к точке”, очень просты по сути, но требуют множества уточнений для того, чтобы связать их с тем, как мы видим и изучаем наш физический мир. Давайте проанализируем смысл высказываний Клиффорда и сопоставим их с тем, что мы уже знаем о мире.

Во-первых, Клиффорд утверждает, что по сути нет никаких различий между теми областями пространства, где находится материя, или там, где мы видим пустоту. Все это одна сущность, которую можно назвать пространством. С другой стороны, между областями с материей и с пустотой имеется существенная разница. Например, плотная материя, такая, как твердое тело, может абсолютно не пропускать свет, в то время как пустое пространство свет пропускает беспрепятственно. Область пустого пространства без материи (видимой) не притягивает материальные тела за счет силы тяготения, а области с материей притягивают. Можно назвать еще множество других отличительных признаков таких областей. Чем же могут определяться такие различия?

С точки зрения Клиффорда, поскольку обе области есть одна и та же сущность - физическое пространство, их различия могут быть описаны только в рамках свойств самого физического пространства. Но чем же определяются свойства самого физического пространства? Кажется, что ответ совершенно очевиден - свойства пространства определяются его геометрией, т.е. совокупностью всех расстояний между точками этого пространства. Однако мы забываем об еще одной сущности, которую пришлось вводить физикам в XIX веке - поле! Поле - это некоторая материальная сущность, не совпадающая по сути с самим пространством, но имеющая свой отличительный количественный признак в каждой его точке. В отличие от материи непосредственно поле мы не можем “видеть” где-то в отдалении. Например, материя светится или наоборот поглощает свет, а поле само по себе не “светится” без присутствия материи. Поэтому о поле мы можем судить лишь по тому, как это поле воздействует на материю в точке ее нахождения. Следовательно, поле очень похоже на само физическое пространство. Иногда даже дают такое определе-

ние: “поле - это состояние пространства”.

На самом деле, между этими двумя понятиями есть существенная разница. Принципиальным здесь является следующий момент. Если мы прибегаем к понятию поля, то пространство само по себе может быть евклидовым - “прямым, плоским”, а все различия, которыми обладают его области, заполненные материей, и без нее, должны объясняться свойствами этого поля. Это более привычный для физиков подход и более простой по существу. Действительно, ведь все расстояния в евклидовом пространстве измеряются по обычным прямым. Кроме того, поля обладают с математической точки зрения гораздо большим многообразием свойств, чем тот набор свойств, который представляет геометрия, даже риманова. Поэтому полевой подход был бы более предпочтителен для физиков с точки зрения “экономии мышления”. Однако есть несколько важнейших отличий между геометрическим и полевым подходами, которые можно проверить в эксперименте. Мы сейчас не будем приводить аргументы в пользу именно геометрического подхода. Это будет сделано в дальнейшем. Но сосредоточимся именно на нем. Тем более, что именно такой подход был избран Эйнштейном для построения Общей теории относительности.

В геометрическом подходе все свойства пространства определяются его геометрией. Отсюда сразу следует, что физическое пространство не может быть евклидовым (“прямым” или плоским). Как мы уже знаем у евклидова пространства все свойства везде одинаковы. Следовательно, с точки зрения Клиффорда пространство должно быть кривым. Наиболее простыми кривыми пространствами являются римановы пространства. основное их отличие от евклидова пространства - их кривизна, которая может меняться от точки к точке и даже переходить от точки к точке наподобие волны. Следовательно, мы можем считать, что отличие между областями, где находится материя и там где ее нет, определяется величиной кривизны пространства. Там, где материи больше - кривизна пространства больше, а в пустом пространстве, где лучи света движутся по прямым линиям, пространство практически не отличается от евклидова. Однако возникает вопрос, а какие количественные характеристики материи и, возможно, ее движения определяют величину кривизны пространства? Первый ответ на этот вопрос был дан Альбертом Эйнштейном в рамках Общей теории относительности.

3.2. Чем определяется кривизна пространства?

Альберт Эйнштейн создал при участии других ученых (Лоренц, Пуанкаре, Минковский и др.) в начале XX века новую теорию, которую стали называть Специальной теорией относительности (СТО). Эта теория провозгласила - скорость света максимальна и недостижима для всех материальных тел. С этой скоростью распространяются только электромагнитные волны, причем величина этой скорости распространения в пустом пространстве не зависит от того, с какой постоянной скоростью движется наблюдатель. Следствием этого постулата является то, что при необходимости сравнивать показания приборов в разных системах отсчета, например, на Земле и в космическом корабле, если он движется со скоростью, близкой к скорости света, смешиваются измерения длины и времени. Представим себе космический корабль, летящий к другим звездам со скоростью, близкой к скорости света. Центру управления полетами (ЦУП) необходимо договориться с космонавтами о том,

когда в следующий раз выходить на связь. Как это часто бывает в фантастических рассказах и романах, космонавты основную часть полета проводят во сне. Поэтому ЦУП предполагает, что космонавты должны проснуться в тот момент, когда корабль достигнет определенной звезды - цели полета. Космонавтам и ЦУПу необходимо рассчитать и согласовать моменты времени, когда будет включен будильник на борту космического корабля при заданном расстоянии от звезды. Пусть x - расстояние до корабля от Земли, а t - время полета космического корабля по часам в ЦУПе. Согласно СТО моменты времени включения будильника по часам на борту корабля и расстояние, на котором окажется корабль в этот момент от Земли по данным самих космонавтов будут вычисляться с помощью преобразований, которые придумал еще в XIX веке Лоренц. Они имеют вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Наиболее важным здесь является то, что момент времени t' , когда на борту корабля сигнал будильника включится, зависит не только от момента времени t в ЦУПе, но и от того, на каком расстоянии x от ЦУПа находится корабль.

Такое положение дел заставляет думать, что измерение длин всегда взаимосвязано со временем, а измерение времени с расстояниями. Их невозможно отделить. Можно сказать, что пространство и время образуют общую сущность - пространство-время. Это пространство-время в СТО "прямое", но устроено иначе, чем обычное пространство расстояний в мире, окружающем нас. Для него было придумано название - псевдо-евклидово пространство четырех измерений (3 пространственные координаты и время) или пространство Минковского. Такое объединение выглядит очень непривычно. Действительно, мы всегда можем отличить в обычной жизни прибор для измерения времени - часы, от прибора для измерения времени - линейки. И как бы мы быстро не двигались, часы у нас на руке не превращаются в линейку, а линейка в часы. Этот парадокс не единственный в СТО. Есть парадокс близнецов, есть другие парадоксальные соотношения. Для ознакомления с рядом трудностей СТО (и ОТО) можно познакомиться, читая книгу "Новый взгляд на теорию относительности" Л. Бриллюэна, о которой уже говорилось в данных заметках. Все это наводит на мысль, что, хотя СТО во многом права, но она должна будет заменена на другую теорию. Пока нет прямых указаний, как это сделать, но многим, например, кажется, что скорость света не предел. В дальнейшем мы обсудим такую возможность.

Однако СТО с самого начала содержала некоторые проблемы, которые необходимо было решать сразу, не откладывая на потом. Решение этих задач и привело Эйнштейна к созданию ОТО. Дело в том, что СТО дает исчерпывающее описание только того, как меняется облик физических процессов, если смотреть на них из разных инерциальных систем отсчета. Но в реальности наблюдатель может двигаться ускоренно, может вращаться, а может двигаться по очень замысловатому закону. В классической механике особых проблем при выводе уравнений движения в неинерциальных системах нет. В этих системах, в отличие от инерциальных, приходится вводить некоторые дополнительные силы, которые называются силами инерции. Человек реально испытывает эти силы. Такие силы вжимают пилота современного истребителя в кресло при сложных маневрах. Эти силы заставляют Вас цепляться

за поручни в трамваях и автобусах, когда они тормозят или резко увеличивают скорость. Но в СТО дело обстоит несколько иначе, чем в классической механике.

Рассмотрим в качестве примера то, как выглядят законы СТО в равномерно вращающейся системе отсчета. Во вращающейся системе отсчета точки, находящиеся на различных расстояниях от центра вращения, движутся с различными скоростями. Если система вращается со скоростью Ω , то на расстоянии r от центра вращения линейная скорость точек, которые неподвижны с точки зрения невращающегося наблюдателя, будет равна $V(r) = \Omega r$. Но в этом случае, как записать преобразования Лоренца? Ведь получается, что на различных расстояниях r от центра вращения координаты будут меняться по-разному! Это означает, что часы будут идти с различной скоростью на различных расстояниях от центра, а стандартные линейки будут иметь различную длину. Но такая ситуация как раз характерна для пространств Римана, имеющих кривизну! В римановых пространствах стандартные линейки (эталонны длины) имеют различную длину в разных точках пространства, предписываемую законами данной геометрии. Но это замечательно!

Мы впервые столкнулись с ситуацией, когда сами физические законы требуют введения пространства с различными геометрическими свойствами в разных его точках. И именно этот факт в конце концов и привел к созданию ОТО. Вращающаяся система отсчета - это одна из самых простых неинерциальных систем. А что будет, если наблюдатель движется по очень сложному закону? На эти вопросы и должна была отвечать ОТО.

Однако с самого начала при решении проблем движения в неинерциальных системах отсчета Эйнштейну было необходимо разобраться с одной странной ситуацией. Проблема состоит в следующем. Пусть некий наблюдатель свободно падает в гравитационном поле, например, движется в корабле по орбите вокруг Земли. Как известно, на борту такого космического корабля наблюдается невесомость, т.е. отсутствие каких-либо сил инерции, которые являются привычным физическим признаком инерциальной системы отсчета. Однако траектория движения такого корабля является эллипсом или окружностью, а это является основным геометрическим признаком неинерциальной системы отсчета. Ведь согласно первому закону Ньютона, если на тело не действуют какие-либо силы, то тело движется равномерно и прямолинейно! Получается, что мы имеем ситуацию, когда на тело не действуют силы, но тело движется по криволинейной траектории. Это означает, что с физической точки зрения система, связанная со свободно падающим телом - инерциальная, а с геометрической - неинерциальная. Это наблюдение позволило Эйнштейну предположить, что Первый закон Ньютона следует обобщить.

3.3. *Общая теория относительности или как материя искривляет пространство*

Обобщение первого закона Ньютона должно учитывать тот факт, что траектории свободно падающих тел могут быть очень разнообразными. Эти траектории, согласно теории тяготения Ньютона, определяются тем, как в пространстве распределена масса вещества. Но такие траектории в классической механике определяются уже вторым законом Ньютона:

$$ma = F.$$

(Для точности заметим, что последняя формула является следствием второго закона Ньютона, а не самим законом Ньютона). Поэтому получается, что теперь мы не можем вообще разделить первый и второй закон Ньютона. Они должны теперь формулироваться вместе.

Есть еще одна важная проблема. Можно поставить вопрос, а почему собственно при свободном падении тела в поле тяготения в собственной системе отсчета никаких сил мы не ощущаем? Ответ на этот вопрос очень прост - потому, что в законе Всемирного тяготения и во втором законе Ньютона масса тел одна и та же! Эти два закона относятся к описанию совершенно разных явлений и имеют разную сущность, но по каким-то причинам числовое значение масс в этих законах одно и то же. В том, что в эти формулы могут входить массы, хоть немного отличающиеся по величине задумался еще сам Ньютон, но проверку этого факта удалось провести с достаточной точностью лишь в конце XIX века.

Такую проверку осуществил Л.Этвеш с учениками. В историю физики эти работы вошли под названием эксперимент Этвеша. Познакомиться с этим экспериментом подробнее можно по статье известного физика-теоретика Дикке, опубликованной на русском языке в УФН в 1963 году (ссылка: http://ufn.ru/ufn63/ufn63_2/Russian/r632f.pdf). Этот эксперимент проводится и в настоящее время со все возрастающей точностью. Результат этих экспериментов неизменно таков - с доступной нам точностью масса, входящая во второй закон Ньютона (инертная масса), и масса, входящая в закон тяготения Ньютона (гравитационная масса), равны. С точки же зрения нашей проблемы этот результат можно интерпретировать так. В свободно падающей в гравитационном поле системе отсчета, движущейся ускоренно и по кривой траектории по отношению к удаленным звездам, возникает сила инерции, которая из-за равенства инертной и гравитационной масс в точности равна силе тяготения, но направлена строго в противоположном направлении. Поэтому эти две силы точно компенсируют друг друга, и в такой системе отсчета наблюдатель не ощущает никаких сил.

Этот экспериментальный факт очень важен и Эйнштейн включил его в качестве одного из постулатов в создаваемую им теорию. В современной ОТО этот постулат носит название принцип эквивалентности масс. Роль этого принципа в ОТО такова - если когда-нибудь удастся обнаружить отличие между инертной и гравитационной массами, то Общую теорию относительности придется менять. Она справедлива в нынешнем виде только до тех пор пока эти массы равны. Установив важный принцип, мы можем развивать теорию дальше. Цепочка наших рассуждений теперь такова. Свободно падающие в гравитационном поле тела движутся по кривым траекториям, но сами тела не испытывают никакого воздействия. Поэтому можно предположить, что кривизна траектории объясняется в этом случае не каким-то внешним воздействием, а самим искривлением пространства. Если пространство неевклидово, то в нем и нет прямых в обычном смысле.

Но чем определяется кривизна траекторий согласно Всемирному закону тяготения? - Распределением массы вещества в пространстве. Это означает, что масса прямым образом искривляет пространство. Действительно, если тело, имеет по величине скорость большую второй космической скорости для звезды или планеты, то оно будет свободно падая в поле тяготения этого тела, неограниченно удаляться

от него. При этом оно будет двигаться по траектории, которая со временем становится близкой к прямой. Это означает, что кривизна исчезает при удалении от массивных тел и увеличивается при приближении. Таким образом, мы установили, что между массой и кривизной пространства есть прямая связь. Но нам нужна точная формула. Причем надо решить вопрос о какой кривизне идет речь. О внутренней кривизне Римана или внешней кривизне Гаусса? Выбор был сделан Эйнштейном на основе соображений, которые мы уже обсуждали. У нас нет возможности увидеть наше пространство со стороны. Поэтому естественно предположить, что наблюдаемой кривизной является внутренняя. Но как связана масса и кривизна? Эта проблема оказалась очень сложной. Прямых измерений кривизны пространства мы до сих пор получить не можем и довольствуемся предсказаниями теории о движении тел и сравнением этих предсказаний с экспериментом. Поэтому Эйнштейну предстояло угадать вид уравнений новой теории, исходя из того, что дает классическая физика и из каких-то очень общих, почти философских соображений. Классическая физика указывает на закон Всемирного тяготения, поэтому этот закон должен выполняться и в новой теории при определенных упрощающих условиях. Все остальное очень туманно. Несколько подсказок Эйнштейн нашел в математике и СТО, которую он построил раньше. Математика начала XIX века представила стараниями Гильберта и Шмидта важный способ вычислять структуру римановых пространств, которые в “среднем” обладают наименьшей кривизной. Но в классической механике есть аналогичный принцип. Он говорит, что все тела движутся таким образом, что среднее значение разности кинетической и потенциальной энергии тел оказывается всегда минимальным. Этот принцип называется принципом наименьшего действия. Если предположить, что кривизна связана с энергией тел, то тогда вычисления Гильберта и Шмидта указывают на то, что реальное физическое пространство в присутствии материи искривляется в каком-то смысле минимальным образом. Однако мы уже установили, что кривизна пространства согласно закону Всемирного тяготения должна быть связана не с энергией, а с массой тел. Тут на помощь как раз и приходит СТО. В Специальной теории относительности Эйнштейном была получена замечательная формула:

$$E = mc^2.$$

Из этой формулы следует, что масса и энергия представляют собой одну и ту же сущность. А раз так, то у нас нет проблем для отождествления массы и энергии в новой теории. Да будет так! Математика еще раз пришла на помощь в вопросе получения нужных уравнений. Оказалось, что если вычислять минимальную среднюю разность обобщенных кинетической и потенциальной энергий материи в совокупности с минимальной средней кривизной пространства, таким же способом, как это было сделано Гильбертом и Шмидтом, то получаются очень красивые, но и очень сложные уравнения. Эти уравнения были получены Эйнштейном и носят его имя. Мы их выписывать не будем, а лишь поговорим об общих следствиях из этих уравнений.

После вывода этих уравнений оказалось, что из них очень легко можно получить закон Всемирного тяготения в предположении, что материя не очень сильно искривляет пространство. Для этого оказалось достаточно подобрать одну константу в уравнениях Эйнштейна так, чтобы в законе Всемирного тяготения, который по-

лучается из уравнений Эйнштейна, стояла постоянная тяготения Ньютона. Однако, при этом пришлось пожертвовать важным принципом, который был провозглашен Клиффордом - “В мире нет ничего, кроме кривизны”.

При выводе уравнений Всемирного тяготения Ньютона из уравнений Эйнштейна невозможно просто отождествить материю и кривизну пространства. Они в ОТО существуют независимо. Для того, чтобы описать движение материи по рецептам Эйнштейна, необходимо указать вид материи и ее характеристики, после этого вычислить энергию и другие характеристики ее движения, а уж после этого определить то, как будет меняться кривизна пространства. Вместе с тем построенная теория оказалась способной предсказывать эффекты, которые можно было проверить на практике, чем и занялись ученые в начале XX века и занимаются до сих пор. ОТО предсказала существование новых удивительных объектов среди тех, которые мы можем наблюдать на небе.

Были предсказаны “черные дыры” и “кротовые норы”. Теория предсказала, что Вселенная, равномерно заполненная обычным веществом, должна расширяться одинаково во все стороны, а в прошлом должна была представлять собой очень маленький, очень плотный и горячий объект. Этот вывод получил название теории Большого взрыва. Первым такую теорию построил советский ученый Фридман. К настоящему времени предсказанное уравнениями Эйнштейна расширение Вселенной открыто. Это сделал американский астроном Э.Хаббл в 20-х годах XX века.

Считается, что в Космосе обнаружены объекты очень похожие на “черные дыры”, которые ввел в ОТО Шварцшильд. “Кротовые норы” не открыты, но считается, что их существование вполне возможно. Был проведен целый ряд экспериментов по проверке ОТО в лабораториях. Эти эксперименты, если частью и не подтвердили ОТО абсолютно, но показали, что их результаты не противоречат ОТО. Но самое главное, ОТО стала основанием для создания новых теорий, связывающих кривизну пространства с материей. В том числе, предпринимались и предпринимаются попытки построить теорию, подобную ОТО, но в которой бы реализовывался принцип Клиффорда. Одной из таких теорий и является топологическая квантовая теория, к обоснованию которой мы теперь и перейдем.

4. Ручка Уилера или “Заряд без заряда”

4.1. Электричество, магнетизм и электрические заряды.

Рассматривая историю возникновения представлений о гравитации и о кривом пространстве, мы почти совсем не касались вопросов, связанных с другим важным взаимодействием материальных тел - электромагнитным. Хотя знания о существовании наэлектризованных тел появились, по всей видимости, раньше, чем о гравитации (гравитацию просто не замечали, считая ее естественным состоянием мира), но реальное ее описание появилось спустя больше ста лет после открытия Всемирного закона тяготения.

Сначала был открыт закон Кулона, который во многом повторял закон Всемирного тяготения Ньютона. Этот закон так же указывал, что сила взаимодействия между наэлектризованными телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между наэлектризованными телами. Однако, в отличие от закона Всемирного тяготения

ния, в котором взаимодействуют массы тел, в законе Кулона взаимодействуют заряды. Заряд характеризует способность наэлектризованного тела притягивать, и что более важно, отталкивать другие наэлектризованные тела. В законе тяготения массы всегда притягиваются, а в законе Кулона - могут как притягиваться, так и отталкиваться. Оказалось, что заряды могут быть двух знаков - положительный и отрицательный. Причем одноименные заряды отталкиваются, а противоположного знака притягиваются.

Это дополнительное свойство зарядов по сравнению с массами изменяет облик электрических взаимодействий по сравнению с тяготением. Например, гравитационное поле нельзя экранировать (по крайней мере сейчас), а электрическое можно. У электромагнитного поля есть еще одна важная особенность. Оно значительно интенсивнее поля тяготения. Поэтому поле тяготения проявляется на астрономических масштабах, а электромагнитное - в привычном для нас мире. Например, именно благодаря электричеству мы наблюдаем во время грозы молнии. Однако электричество обеспечивает нас не только такими красивыми, эффектными, а иногда и грозными явлениями как молнии, оно обеспечивает наш мир возможностью существования вещества, что в конце концов позволяет существовать таким сложным объектам как животные и человек. Правда, при этом законы электричества должно сочетаться с квантовыми законами.

Вторая ипостась электромагнитного взаимодействия - магнитное поле было открыто так же в древние времена. Китайские мореплаватели с древних времен использовали намагнитченные куски железа для того, чтобы определять направление на север. Это можно было сделать не по звездам или Солнцу, а по направлению, куда указывал намагнитченный кусок железа. Магнитное поле вместе с электрическим определяет такие эффектные явления в окружающем нас мире, как северные сияния. Но что более важно, магнитное поле защищает нас от заряженных частиц, приходящих из Космоса. Без земного магнитного щита жизнь навряд ли смогла появиться на Земле.

Оба явления - электричество и магнетизм - были объединены в общий тип физического взаимодействия в середине XIX века великим английским физиком Максвеллом. Теория Максвелла объяснила множество явлений, связанных с электричеством и магнетизмом, и позволила предсказывать такие явления. В совокупности с достижениями экспериментальной физики в области магнетизма и электричества, которые были сделаны многими учеными XIX века, такими как Фарадей, Герц, Эрстед и другие, теория Максвелла позволила внедрить электрические и магнитные технологии в нашу повседневную жизнь. Прочсть о напряженных и захватывающих поисках истины учеными различных столетий в описании явлений электромагнетизма можно в замечательной книге В.П.Карцева "Приключения великих уравнений". (Скачать можно отсюда <http://lib.rus.ec/b/297585pCee0a0u0i0a0i0c0a0a0u0>: <http://n-t.ru/ri/kr/pu.htm>)

Современная физика включает теорию Максвелла как фундаментальную основу наших представлений об окружающем нас мире. Дополненная квантовыми законами эта теория позволила понять как устроено вещество, как устроены атомы и частично, как устроены ядра атомов и элементарные частицы. Эта же теория позволила понять множество явлений в Космосе. Однако, хотя эта теория помогает по-

нять наш мир, но вместе с тем она содержит целый ряд загадок, которые не разгаданы и по сей день. Попытка разгадать часть этих загадок и послужила причиной к использованию необычных свойств кривых пространств в теории элементарных частиц, которые впервые ввел в обиход физики выдающийся американский физик Дж. Уилер.

4.2. Сколько энергии необходимо, чтобы создать точечный заряд?

Вопрос, который вынесен в заголовок данного раздела, возник в теории электричества не сразу после создания теории Максвеллом. Во-первых, Максвелл, создавая свою теорию, еще не подозревал о существовании такой частицы как электрон. Во-вторых, такой вопрос превратился в проблему только после попыток установить реальный размер электрона. И, в-третьих, этот вопрос тесно связан с вопросом: из чего складывается масса электрона? К этой же проблеме тесно примыкает проблема дискретности зарядов всех частиц. В чем же собственно проблема? Ответ на поставленный вопрос в классической теории Максвелла можно получить с помощью простой процедуры вычисления суммарной энергии всех элементов поля, созданного зарядом во всем пространстве.

Эти вычисления производятся с помощью математической процедуры “взятия” интеграла от плотности энергии поля. Результаты таких вычислений проверялись многократно для различных явлений и систем и давали отличное совпадение с экспериментом. Но все эти вычисления дают бессмысленный результат, если заряд частицы сосредоточен в точке. В этом случае энергия поля оказывается бесконечной. Однако, как все мы отлично понимаем, точек в природе не бывает. Точка - это математическая идеализация. Поэтому ясно, что точечных частиц не бывает и, значит, проблемы не должно быть. Просто надо поточнее измерить размер частицы, например, электрона, и после этого все станет на свои места. Например, классическая электродинамика Максвелла предсказывает, что электрон должен иметь размер (радиус), который вычисляется по формуле:

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ sm}$$

Здесь e - заряд электрона, m_e - масса электрона, c - скорость света. Пока эксперименты не позволяли заглянуть на такие расстояния, вопрос о том, сколько же энергии необходимо, чтобы создать электрон, не очень беспокоил экспериментаторов. Ответ давался массой электрона и формулой Эйнштейна $E = m_e c^2$. Однако теоретиков он начал мучить задолго до того, как экспериментаторы столкнулись с проблемой реального определения размера электрона.

Как только появилась квантовая теория, то стало ясно, что с энергией электрона что-то не ладно. Квантовая теория постулирует, что частицы, ну по крайней мере, электроны - точки. Это означает, что расчеты энергии и массы электрона по классическим формулам не возможны. Но как тогда быть? Нужно откуда-то брать размер электрона. Квантовая теория утверждает, что все частицы - волны. Но у волны есть длина волны! Может быть, надо брать в качестве характеристики электрона именно этот размер? Однако у электронов, движущихся с различными скоростями, размер будет разным, что будет приводить к энергиям, очень сильно различающимся. Но

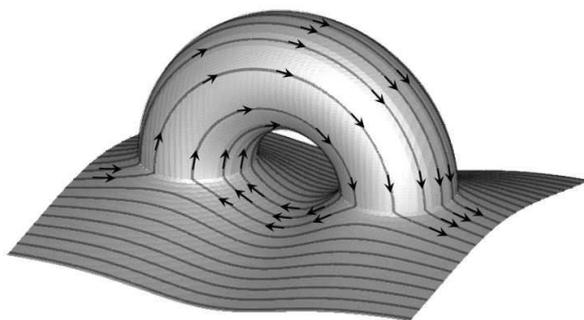


Рис. 6. Ручка Уилера

квантовая механика ничего больше предложить не может! А это означает, что энергия электрона не определена. В дальнейшем экспериментаторы пришли к неутешительному выводу, что они тоже не могут в эксперименте найти размер области, в которой сосредоточен заряд электрона. Электрон ведет себя как точка! И это означает, что проблемы с массой и энергией решить не удастся. Конечно, для создания электрона нужна небольшая масса. Но как ее вычислить?

Человек, изображенный на этой фотографии, - Джон Арчибальд Уилер, американский физик-теоретик (1911-2008). Совместно с другим известным американским физиком-теоретиком Ч. Мизнером Дж. Уилер предложил новую идеологию во взглядах на электрический заряд и новый подход к решению проблем, которые мы описали выше. Свою идею Уилер назвал "заряд без заряда". Сформулированная таким парадоксальным образом новая идея оперировала понятиями нового для физики, да и для самой математики, ее раздела - топологии. С появлением топологии в обиход математики попали такие объекты как "ручки".

Ручка - это пример поверхности с дыркой. Прообразом такой поверхности является обычная ручка, такая, как у гири, портфеля, чашки или чайника. Картинка, изображающая такую поверхность с ручкой, приведена на рисунке. Однако Уилеру нужна была ручка, которая была бы прикреплена не к поверхности, а к нашему 3-х мерному пространству. Такую ручку изобразить невозможно, как невозможно изобразить то, как выглядит наше пространство "со стороны". Однако, учитывая обстоятельство, что наши рассуждения относятся не к поверхности, а к трехмерному пространству, их можно продемонстрировать на рисунке, изображающем двумерную ручку. (Следует отметить, что еще до Уилера некоторыми физиками высказывалась идея о существовании в пространстве так называемых кротовых нор. Эти объекты появляются в Общей теории относительности как решения уравнений Эйнштейна для пространства, заполненного экзотической материей. Но кротовые норы - это не совсем то, что, имел ввиду Уилер.)

Чтобы понять идею Уилера, предположим, что пространство с ручкой заполнено электрическим полем таким образом, что силовые линии этого поля втекают в одну из гордовин ручки и вытекают из другой. Это изображено на рисунке в виде красных линий со стрелкой. Величина заряда в области может быть подсчитана как число силовых линий, которые пересекают поверхность объема с учетом знака, который определяется тем, входит (+) или выходит (-) силовая линия из объема. Если

внутри ручки нет электрических зарядов, то, как видно из рисунка, число силовых линий, входящих в одну горловину, будет в точности равно числу силовых линий, выходящих из второй горловины. Изюминкой такой конфигурации с ручкой является то обстоятельство, что для внешнего наблюдателя каждая из горловин будет восприниматься как область с зарядом, хотя в реальности никакого заряда там нет. Что видит наблюдатель? Он видит, что все силовые линии входят в какую-то область пространства, соответствующую одной горловине, и выходят из другой. Но раз линии входят в область, то это соответствует для него наличию в этой области заряда определенного знака. Другая горловина в этом случае для него является заряженным объектом другого знака. На лицо “заряд без заряда”.

Важным свойством таких зарядов “без заряда” является то, что их энергия всегда конечна. Остается предположить, что реальные частицы - это такого типа ручки и мы получаем образ частиц как областей искривленного определенным образом пространства. Очень привлекательная идея, если учесть, что в теории элементарных частиц существуют и другие заряды, например, барионный лептонный и т.д. Может быть такая идея позволит и их объяснить? Кроме этого, сразу бросается в глаза то, что идея Уилера - это воплощение идеи Клиффорда о геометрическом описании материи. Может, это и есть решение существа проблемы о представлении материи как проявлении геометрии мира. Уилер эту идею назвал “материя без материи”!

Однако при всей красоте и простоте эта идея Уилера содержит целый ряд недостатков, которые заставляют усомниться в ее реализуемости. Первая и самая очевидная проблема состоит в том, что все частицы должны быть связаны в пары с противоположными зарядами. С одной стороны, кажется, что это очень хорошо. Мы ведь знаем, что у каждой частицы есть античастица. Но по идее Уилера частица и античастица связаны ручкой. При очень большом числе частиц, которое имеется в нашем мире, число ручек будет невообразимо огромным. И поэтому сложность такого пространства становится просто чудовищной. Но этой сложности мы не наблюдаем.

Вторая проблема - это то, что величина заряда этих частиц может быть любой. Но в реальности мы наблюдаем частицы, у которых заряды строго кратны заряду электрона. Идея Уилера никак не объясняет этот факт. Уже этих двух проблем достаточно, чтобы понять, что идею Уилера необходимо модифицировать. Надо оставить ее сильные стороны - они связаны с топологией пространства, и удалить недостатки - они связаны с трактовкой заряда. Анализируя идею Уилера, можно понять, что в ней физическое содержание электрического заряда, а также электрического и магнитного полей, вообще никак не затрагивается. Они существуют сами по себе вне зависимости от строения пространства. Однако именно структура пространства в форме топологической ручки по идее Уилера и призвана “объяснить” физический смысл этих понятий. Таким образом, задача модификации идеи Уилера должна состоять именно в органичном соединении понятий топологии и понятий электромагнитной теории. Только после этого мы сможем, пользуясь такой красивой во всех отношениях идеей, ответить на вопрос - как создать электрон и сколько для этого потребуется энергии?

Лекция 2

Топология, геометрия, заряд и масса

1. Топология и электрический заряд

“... профессор Уилер сказал:
“Фейнман! Я знаю, почему у всех электронов
одинаковый заряд и одинаковая масса”.
— “Почему же?” —
“Потому что всё это один и тот же электрон”.

Р.Фейнман, Нобелевская лекция

В работах [1, 2, 3, 4] была предложена, а в работах [21, 22, 23, 24, 24] была развита концепция “классического” тополого-геометрического описания элементарных частиц и полей, включая электромагнитное и гравитационное поля. Термин “классические” относится здесь к тому, что изначально описание всех полей строится на основе абсолютного пространства, не зависящего от времени, но размерности на единицу большего, чем трёхмерное пространство классической механики. Это означает, что релятивистские эффекты при больших скоростях движения частиц материи в данной теории должны появиться не с помощью постулата конечности скорости света СТО, которое вводится “руками”, а в результате выяснения свойств частиц, которые появляются в данной концепции. То, что такая возможность появляется в рамках данного подхода, следует из того, что в её рамках [4] из простых геометрических и топологических представлений выводятся уравнения электродинамики с точечными целочисленными зарядами, движение которых описывается уравнениями Шредингера и в среднем уравнениями Ньютона. В настоящей работе решается ряд проблем, которые не были решены в рамках предыдущих работ по построению данной теории.

Предлагаемая концепция строится на новой топологической интерпретации электрического заряда в форме топологического инварианта пространства - эйлеровой характеристике выделенных геометрическим способом областей трёхмерного пространства. Развитие этой концепции в [4] позволило установить связь между построенным в её рамках описанием электромагнитных полей с квантовой теорией частиц. Последнее создало базу для обоснования предложенной в [1, 2] топологической классификации элементарных частиц, как областей пространства с геометрическим способом выделенными границами.

Идея объяснения дискретности электрического заряда с помощью его интерпретации, как некоторой топологической характеристики пространства, впервые была высказана Дж.Уилером [5, 6, 7]. Эта идея кажется сейчас вполне естественной, поскольку целочисленная величина, которая является инвариантной в физическом смысле и независимой от расположения и движения всех типов материи, должна быть инвариантом очень высокого уровня, т.е. именно топологическим инвариантом. Единственное, что необходимо выяснить при реализации такой идеи - это то, какой топологический инвариант должен быть сопоставлен электрическому заря-

ду? Во-первых, заряд может быть топологическим инвариантом конфигурации полевых структур, заданных на пространстве, или может быть топологическим инвариантом самого пространства или, возможно, пространства-времени. Дж. Уилер полагал, опираясь на идеи Общей теории относительности (ОТО), что заряд должен быть топологическим инвариантом пространства или пространства-времени. Однако в квантовой теории поля (КТП) для описания дискретных характеристик зарядовых чисел пытались использовать топологические инварианты полевых структур - топологические заряды [8, 12, 10]. Различие в выборе между этими двумя возможностями в разных теориях, очевидно, связано с трудностями объединения ОТО с КТП, но с точки зрения математики может и не иметь принципиального значения, поскольку топологические свойства полей наследуют топологические свойства самого пространства, на котором они заданы. В такой ситуации приходится опираться на какие-то фундаментальные представления о пространстве и пространстве-времени. Поскольку само понятие физического поля в форме гравитационного и электромагнитного основано на представлении о некотором состоянии окружающего нас “пустого” пространства, то более естественным и фундаментальным является подход, основанный на геометризации этих полей. Эта идея восходит к идеям Клиффорда [9] и предполагалась к реализации в ОТО, но не была воспроизведена в ней в полном объёме.

В [1, 2, 3, 4] было показано, что сочетание упрощённого по сравнению с ОТО геометрического подхода с использованием идеи о топологическом происхождении электрического заряда, а в последствии и барионного, позволяет из простых соображений построить электродинамику с целочисленным зарядом и квантовую теорию частиц [4]. Такой подход, хотя и не содержит полного решения всех проблем, связанных с современными представлениями и экспериментальными фактами теории элементарных частиц, тем не менее даёт основание надеяться получить достаточно полную их теорию. Упомянутое упрощение геометрического подхода по сравнению с ОТО состоит в том, что геометрическая часть концепции строится на предположении, что физическое трёхмерное риманово пространство может быть вложено в пространство четырёх измерений, что позволяет всю его геометрию описывать только одной функцией высоты, вместо метрического тензора псевдоевклидова пространства-времени, содержащего 10 независимых компонент.

2. Электрический заряд и геометрия пространства

Следуя работе [4], вначале рассмотрим некоторые основные элементы геометрии и топологии пространства, важные для описания физических полей. Будем пока полагать, что движения рассматриваемых объектов происходят с такими скоростями, что можно пренебречь релятивистскими эффектами. Поэтому время t является абсолютным. Необходимость введения релятивистской инвариантности будет обсуждаться по ходу изложения. Как и в [4] будем предполагать, что на малых расстояниях вблизи точечного заряда пространство имеет некоторую кривизну и является неевклидовым. Вместе с тем, локальное увеличение кривизны пространства на малых масштабах воспринимается нами, как увеличение плотности энергии материи вблизи этой точки, в то время, как наши представления о метрических свойствах самого пространства остаются связанными с “фоновым”, окружающим нас, евкли-

довым пространством P^3 размерности $d = 3$. В результате у нас возникает представление о характере пространственных изменений физических величин вблизи точечного заряда, соответствующее фоновому пространству, а не реальному - физическому. Для наглядности мы можем обратиться к представлению такой ситуации с помощью терминов внешней геометрии. Положим, что наше физическое пространство V^3 представляет собой гиперповерхность трёх измерений в объемлющем евклидовом пространстве W^4 , имеющем размерность $d = 4$. Такая гиперповерхность может быть задана с помощью функции высоты $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$, т.е. с помощью алгебраического уравнения:

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где u - дополнительная четвертая координата в объемлющем пространстве $W^4 = T_u \times P^3$, а $\mathbf{x} = (x, y, z)$ - декартовы координаты в ортогональной к направлению u гиперплоскости P^3 в объемлющем пространстве. Пример двумерной гиперповерхности приведен на рис. (7). Эта гиперплоскость P^3 рассматривается как фоновое евклидово пространство и должна быть связана с системой отсчёта. Геометрия гиперповерхности V^3 полностью определяется функцией высоты \mathcal{F} . Сама функция \mathcal{F} определяется выбором системы координат в объемлющем евклидовом пространстве W^4 . Поскольку гиперплоскость P^3 отождествляется с системой отсчёта, то при заданной системе отсчёта функция \mathcal{F} определена однозначно. Мы не будем пока обсуждать вопрос о том, как меняется функция \mathcal{F} при переходе от одной системы отсчёта к другой и физический смысл таких преобразований. Хотя этот вопрос является существенным, тем не менее его можно отложить до тех пор, пока не будут сформулированы все основные принципы описания материальных объектов и полей в рамках данной концепции.

Будем предполагать, что физическая гиперповерхность является гладкой, а ее функция высоты \mathcal{F} является функцией Морса, т.е. эта функция имеет только изолированные критические точки (т.е. экстремумы и седловые точки). Для описания конструкции частиц и полей, связанных с этой гиперповерхностью, введем несколько определений.

Определение 1 Пусть $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ - функция Морса, заданная на трехмерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 . Будем называть **топологической ячейкой**, связанной с функцией $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, открытую область пространства, ограниченную какой-либо изоповерхностью функции $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. Топологическую ячейку будем называть **простой**, если топологическая ячейка является компактной и содержит единственную критическую точку - экстремум, лежащий строго внутри топологической ячейки. Простой **предельной** топологической ячейкой будем называть простую топологическую ячейку, если её границей является особая изоповерхность функции $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, т.е. изоповерхность, на которой лежит хотя бы одна седловая точка $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. **Пустой** топологической ячейкой будем называть топологическую ячейку, в которой нет ни одной критической точки функции \mathcal{F} . В топологии простые топологические ячейки называют клетками [15], но в данной работе мы будем использовать введенный здесь термин - простые топологические ячейки. Важным является то, что согласно общей теории Морса [15, 14], любая область, ограниченная изоповерхностью функции Морса, может быть представлена объединением простых и пустых топологических ячеек, границами которых являются особые изоповерхности. По определению **особой из-**

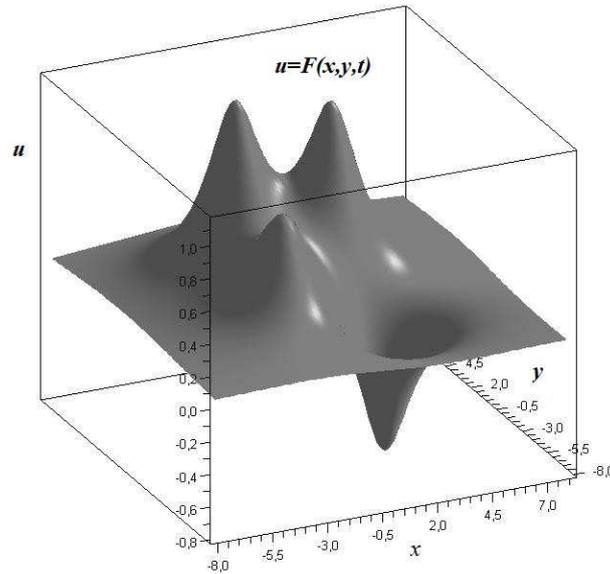


Рис. 7. Двумерный аналог гиперповерхности, заданной с помощью функции высоты $u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$

поверхностью функции Морса называется изоповерхность, на которой лежит хотя бы одна седловая точка.

Рассмотрим на физической гиперповерхности V^3 внутри одной простой топологической ячейки \mathcal{V} криволинейную систему координат $\mathbf{e} = (e^1, e^2, e^3)$, которая связана с функцией высоты \mathcal{F} с помощью уравнений:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon e^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (2)$$

Функции:

$$e^a = e^a(\mathbf{x}, t)$$

описывают отображение $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ гиперплоскости P^3 в V^3 внутри топологической ячейки \mathcal{V} . Величина $\varepsilon = \pm 1$ в (2) зависит от того, достигает ли \mathcal{F} максимума ($\varepsilon = -1$) или минимума ($\varepsilon = +1$) внутри простой ячейки в точке $P_0(\mathbf{x}_0, t)$ с координатами \mathbf{x}_0 , являющейся образом начала координат e^a , т.е. точки, в которой $e^a(\mathbf{x}_0, t) = 0$. Это означает:

$$\varepsilon = \text{sign det} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{P_0}. \quad (3)$$

Следствием (2) является соотношение:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} e^a = \varepsilon \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial x^\beta}.$$

Отсюда находим, что в окрестности точки P_0 , точнее в простой топологической ячейке V , функция \mathcal{F} имеет следующий вид:

$$\mathcal{F} = \varepsilon |\mathbf{e}(\mathbf{x})|^2 / 2 + \mathcal{F}_0, \quad (4)$$

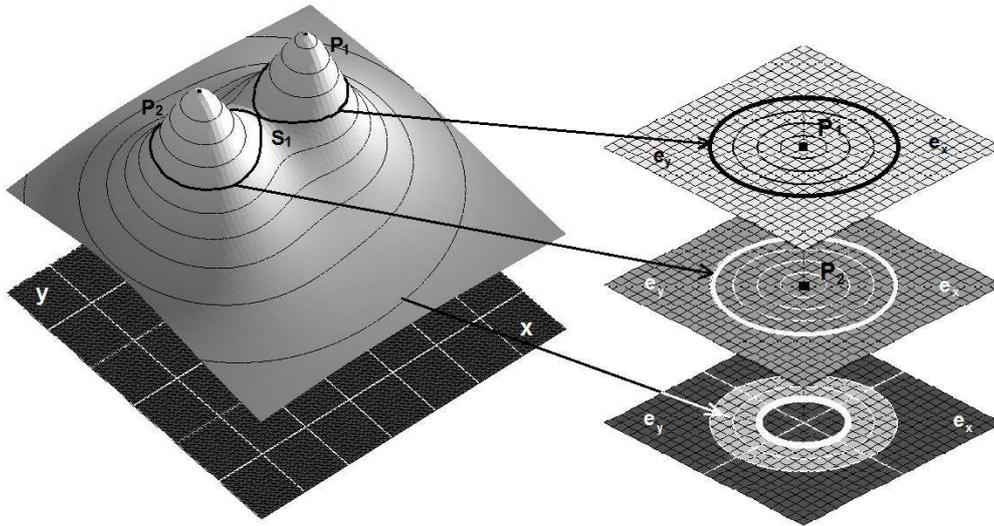


Рис. 8. Двумерный аналог функции \mathcal{F} с седловой точкой S_1 . P_1 и P_2 - экстремумы, лежащие внутри клеток, ограниченных особой изоповерхностью. Особая изоповерхность выделена жирной линией.

где \mathcal{F}_0 - значение функции \mathcal{F} в точке P_0 : $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)$, где она достигает локального экстремума: минимума или максимума, в зависимости от знака ε , что и отражает соотношение (3). Пусть \mathcal{F}_s - значение функции \mathcal{F} на границе простой топологической ячейки, а \mathcal{F}_0 - значение этой функции в экстремуме, лежащем внутри этой ячейки. Тогда каждая изоповерхность функции \mathcal{F} , соответствующая некоторому значению этой функции $\mathcal{F}_1 \in [\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_0]$, отображается в двумерную сферу радиуса:

$$R = \sqrt{2|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0|} \quad (5)$$

на декартовой карте системы координат e^a (см. рис. (8)). Поскольку соотношение (5) может быть однозначным только на каждой простой топологической ячейке, то в целом отображение $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{x}$, включающее координатные карты $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ на всех простых топологических ячейках, является многолистным. Каждый лист отображения соответствует одной и только одной простой или пустой топологической ячейке. Иллюстрация геометрического смысла отображения $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ представлена на рис. (8).

Как показано в [4], физический смысл выбора в качестве связи между функцией \mathcal{F} и $e^a(\mathbf{x}, t)$ системы уравнений (2) или её эквивалента (4) состоит в том, что при таком выборе экстремумы и седловые точки функции \mathcal{F} становятся эквивалентными системе точечных целочисленных зарядов, динамика которых описывается с помощью уравнений Максвелла.

Лемма 1. Пусть \mathcal{V} - простая топологическая ячейка функции Морса $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. Пусть $e^a(\mathbf{x})$, $a = 1, 2, 3$ - три дифференцируемые функции координат на \mathcal{V} , удовлетворяющие уравнению (4):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{e}|^2,$$

где $|\mathbf{e}|^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$, \mathcal{F}_0 - значение функции $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ в экстремуме с координатами

тами \mathbf{x}_0 :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0, \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0),$$

лежащем в \mathcal{V} ($\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$), а $\varepsilon = -1$ в случае, если экстремум - максимум, и $\varepsilon = +1$ - если минимум. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (6)$$

где:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \mathcal{K}^\alpha, \quad \mathcal{K}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a, \quad (7)$$

и

$$J = \det \left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $e^a(\mathbf{x})$ - произвольная тройка дифференцируемых функций, заданных на \mathcal{V} и удовлетворяющая соотношению (4). В качестве такой тройки функций достаточно взять тройку функций вида:

$$e^1 = R(\mathbf{x}) \cos \Phi(\mathbf{x}) \sin \Theta(\mathbf{x}), \quad e^2 = R(\mathbf{x}) \sin \Phi(\mathbf{x}) \sin \Theta(\mathbf{x}), \quad e^3 = R(\mathbf{x}) \cos \Theta(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ и $\Theta(\mathbf{x})$ - произвольные дифференцируемые функции и

$$R = \sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_0|}.$$

Рассмотрим формальное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial e^a} \frac{e^a}{|\mathbf{e}|^3} = \delta(\mathbf{e}), \quad (10)$$

где $\delta(\mathbf{x}) = \delta(e^1)\delta(e^2)\delta(e^3)$ - δ - функция Дирака. Это тождество выполняется для любой области значений функций $\mathbf{e}(\mathbf{x})$, содержащей нулевое их значение. Такие области значений соответствуют области определения $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ с $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ в окрестности точки \mathbf{x}_0 . Переходя в (10) к координатам \mathbf{e} получаем:

$$\frac{1}{|J|} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[|J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{e^a}{|\mathbf{e}|^3} \right] = \frac{1}{|J|} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где использованы известные свойства δ - функции Дирака. Отсюда следует соотношение (6), что доказывает сформулированное утверждение.

Уравнение (6) для поля \mathbf{D} с компонентами D^α можно рассматривать как уравнение для поля индукции электрического точечного заряда с величиной равной $q = \varepsilon = \pm 1$. Такая конструкция строится для каждой простой топологической ячейки. Следовательно, объединяя координатные карты на всех простых ячейках, можно построить глобальное поле \mathbf{D} с источниками в виде совокупности точечных зарядов, совпадающих с экстремумами функции \mathcal{F} на P^3 . Для решения такой задачи необходимо решить две основные проблемы. Во-первых, доказать, что внутри пустых топологических ячеек нет зарядов, а во-вторых, что точечные заряды соответствуют седловым точкам функции \mathcal{F} .

3. Заряд и эйлерова характеристика

Для того, чтобы решить обе эти проблемы, рассмотрим в качестве следующего объекта пустую топологическую ячейку. Пусть \mathcal{S} - замкнутая изоповерхность \mathcal{F} с её значением, равным \mathcal{F}_0 . Связь между изоповерхностью и значением функции на ней будем изображать в следующем виде: $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$. В силу изолированности критических точек функции Морса всегда существует такая изоповерхность $\mathcal{S}_1[\mathcal{F}_1]$ со значением функции \mathcal{F} , равным \mathcal{F}_1 , что топологическая ячейка \mathcal{V}_{01} , ограниченная одновременно изоповерхностями $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$ и $\mathcal{S}[\mathcal{F}_1]$ ($\partial\mathcal{V}_{01} = \mathcal{S}[\mathcal{F}_0] \cup \mathcal{S}[\mathcal{F}_1]$), является пустой. Для определённости будем полагать $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_1$. Условие пустоты означает, что для всех значений \mathcal{F} , лежащих на интервале $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$: $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_s < \mathcal{F}_1$, изоповерхности $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$ не являются особыми. Тогда на топологической ячейке определено отображение \mathfrak{Z} с помощью соотношения (4):

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{e}|^2$$

и поле \mathbf{D} (7). Обратим теперь внимание на то, что тождество (10) выполняется внутри \mathcal{V} при произвольном выборе изоповерхности \mathcal{F}_0 . При этом носитель δ -функции в правой части после отображения в координаты \mathbf{x} сосредоточен на изоповерхности \mathcal{F}_0 . Поэтому везде внутри \mathcal{V}_{01} выполнено тождество:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}|_{\mathbf{x}\notin\mathcal{S}_0} = 0. \quad (11)$$

Исключение составляет изоповерхность со значением \mathcal{F}_0 , на которой по определению $|\mathbf{e}|^2 = 0$, что соответствует точечному носителю δ -функции в (10). В силу выполнения условия (11) можно констатировать, что поток через каждую изоповерхность внутри \mathcal{V}_{01} одинаков.

Вычислим поток поля \mathbf{D} через замкнутую изоповерхность $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$ со значением \mathcal{F} , равным $\mathcal{F}_s \in [\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1]$:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} d\sigma_\alpha.$$

Воспользуемся тождествами:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} = \frac{1}{|J|} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} d\sigma_\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{|\mathbf{e}|^3} e^a \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} d\sigma_\alpha = \\ &= s(\mathcal{V}) \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \frac{1}{|\mathbf{e}|^3} e^a d\sigma_a = s(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

Последний интеграл справа в этом соотношении берется по сфере радиуса $R_s = \sqrt{2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0|}$, в которую отображается изоповерхность $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$ в соответствии с (4). Множитель $s(\mathcal{V})$ - целочисленная величина, равная степени отображения $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ области \mathcal{V} в шар радиуса R_s . Согласно общему определению степени отображения [16],

стоящая в правой части величина есть не что иное, как индекс векторного поля e^a . Поскольку на изоповерхности величина $|\mathbf{e}|^2 = 2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0| = \text{const}$ постоянная, то выражение для Q соответствует индексу единичного векторного поля $\mathbf{e}/|\mathbf{e}|$ на изоповерхности S , что в свою очередь, равно эйлеровой характеристике \mathcal{V}_s , ограниченной изоповерхностью $S[\mathcal{F}_s]$. В силу этого число Q равно половине эйлеровой характеристике поверхности $S[\mathcal{F}_s]$ [16], а по построению является величиной заряда в ячейке, ограниченной изоповерхностью \mathcal{S} , т.е. внутри ячейки \mathcal{V} . В результате величина заряда Q равна с точностью до знака эйлеровой характеристике ячейки \mathcal{V} :

$$Q = \pm \chi(\mathcal{V}) = \pm \frac{1}{2} \chi(S[\mathcal{F}_s]). \quad (12)$$

Следовательно, доказана:

Лемма 2. Для каждой пустой топологической ячейки \mathcal{V}_{s0} , ограниченной замкнутыми изоповерхностями $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$ и $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$ ($\partial\mathcal{V}_{s0} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}$), поток векторного поля \mathbf{D} через любую изоповерхность, лежащую внутри \mathcal{V}_{s0} одинаков и равен целочисленной величине Q , определенной соотношением (12), т.е. эйлеровой характеристике области, ограниченной этой изоповерхностью.

4. Особые изоповерхности

Пусть \mathcal{V} - предельная простая топологическая ячейка функции Морса $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, с границей $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$, являющейся, по определению, особой изоповерхностью функции \mathcal{F} со значением \mathcal{F}_0 , на которой лежит в общем случае K седловых точек с координатами \mathbf{x}_j , $j = 1, \dots, K$. Введем дополнительно две изоповерхности \mathcal{S}_+ и \mathcal{S}_- , соответствующие значениям функции \mathcal{F} : $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_0 + \delta\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_- = \mathcal{F}_0 - \delta\mathcal{F}$, где $\delta\mathcal{F}$ - бесконечно малое вещественное число, такое, что выполнено условие: $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_+$, где \mathcal{V}_+ и \mathcal{V}_- - области пространства, ограниченные изоповерхностями $\mathcal{S}_+ = \partial\mathcal{V}_+$ и $\mathcal{S}_- = \partial\mathcal{V}_-$, соответственно.

В силу изолированности критических точек функции Морса ячейки \mathcal{V}_{0-} и \mathcal{V}_{0+} являются пустыми топологическими ячейками. Поэтому внутри каждой из этих топологических ячеек индексы изоповерхностей не изменяются при переходе от одного значения $\mathcal{F} \in [\mathcal{F} \pm \delta\mathcal{F}]$ к другому. Обозначим значения индекса Q для изоповерхностей, лежащих внутри \mathcal{V}_{0+} через Q_+ , для изоповерхностей вне \mathcal{V}_{0-} - через Q_- . Поскольку внутри пустых ячеек \mathcal{V}_{0+} и \mathcal{V}_{0-} значения индекса Q не меняются, то этот индекс меняется скачком от Q_- до Q_+ при переходе через особую изоповерхность \mathcal{V}_0 . Таким образом, особая изоповерхность обладает целочисленным зарядом, равным $Q_0 = Q_+ - Q_-$. Для иллюстрации на рис. (9) приведена двумерная структура топологических ячеек, ограниченных особой изоповерхностью с одной седловой точкой P_3 . На рис. (9) $\mathcal{V}_{0-}^{(1)}$ и $\mathcal{V}_{0-}^{(2)}$ - две несвязных компоненты ячейки \mathcal{V}_{0-} , а P_1 и P_2 - точки экстремумов функции $\mathcal{F}(\mathbf{x})$.

Величина заряда на поверхности, согласно классической электродинамике, определяется величиной скачка нормальной компоненты поля напряженности при переходе через эту поверхность. Отсюда следует, что, если нормальная компонента поля \mathbf{D} на особой изоповерхности непрерывна, то поверхностная плотность заряда на ней равна нулю. В этом случае единственным источником заряда, расположенного на особой изоповерхности, являются седловые точки. Седловые точки

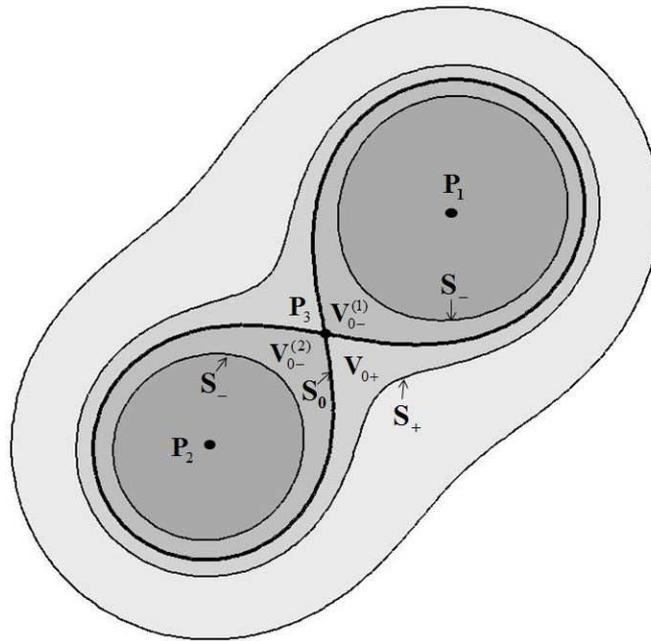


Рис. 9. Пример двумерной структуры особой изоповерхности, ограничивающей две простые ячейки

\mathcal{F} в этом случае представляют собой точечные заряды величиной ± 1 , знак которых определяется индексом Пуанкаре-Хопфа, как и в случае с экстремумами. Если на особой изоповерхности расположено M седловых точек, с индексами Пуанкаре-Хопфа ε_k , $k = 1, \dots, M$, то имеет место соотношение:

$$Q_+ - Q_- = \pm (\chi(\mathcal{V}_+) - \chi(\mathcal{V}_-)) = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k, \tag{13}$$

где сумма берется по всем седловым точкам особой изоповерхности. Примеры особых изоповерхностей приведены на рис. (10)

Из предыдущих построений следует:

Лемма 3. Величина заряда поля \mathbf{D} (7), сосредоточенная на любой особой изоповерхности функции Морса, является целочисленной величиной, значение которой вычисляется с помощью соотношения (13).

Целочисленность величины заряда, сосредоточенной на особой изоповерхности, еще не позволяет распространить уравнение (6) на всю совокупность критических точек \mathcal{F} , что является конечной точкой построений. Проблема состоит в том, что на особой изоповерхности заряд может быть распределен непрерывно. Это связано с тем, что на каждой простой ячейке и пустых топологических ячейках поле \mathbf{D} строится по отдельности с помощью введения отдельной координатной карты $e^a(\mathbf{x}, t)$. Для того, чтобы на особых изоповерхностях отсутствовали поверхностные заряды, необходимо согласовать выбор координат $e^a(\mathbf{x}, t)$ на каждой ячейке с выбором аналогичных функций на других ячейках, граничащих с данной. Это возможно сделать, поскольку $e^a(\mathbf{x}, t)$ определены с помощью соотношений (2), допускающих произвол, например, в виде произвольного выбора функций $\Phi(\mathbf{x}, t)$ и $\Theta(\mathbf{x}, t)$ в (9).

Согласно классической электродинамике, характер распределения заряда опре-

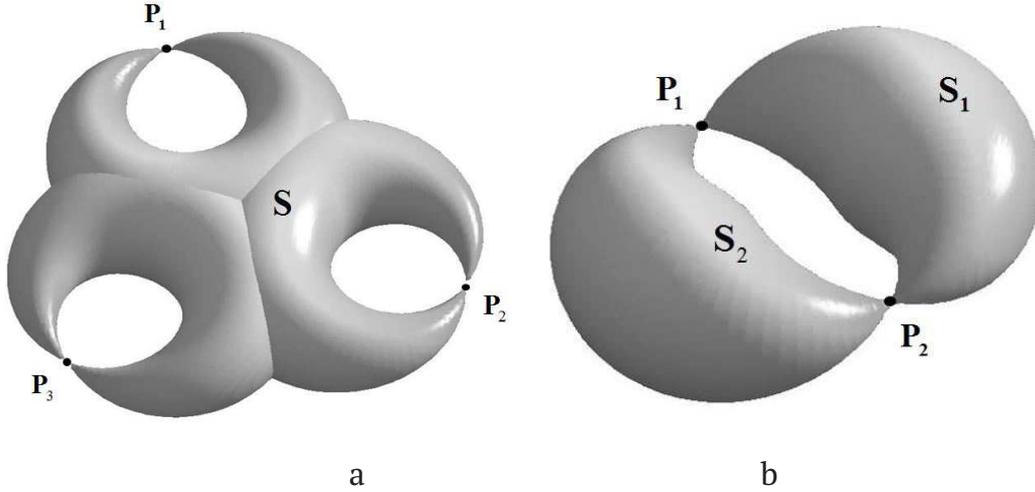


Рис. 10. Примеры предельных топологических ячеек с различным числом седловых точек каждой и разным числом компонент, *a* - предельная простая топологическая ячейка с тремя седловыми точками на границе, *b* - топологическая ячейка, состоящая из двух простых предельных ячеек с двумя седловыми точками на границе.

деляется величиной скачка нормальной составляющей поля \mathbf{D} на особой изоповерхности. Следовательно, для того, чтобы непрерывно распределенный поверхностный заряд на особой изоповерхности отсутствовал, т.е. был точечным и сосредоточен в седловых точках, необходимо и достаточно непрерывности нормальной составляющей поля \mathbf{D} при переходе через особую изоповерхность.

Используя (2), компоненты поля \mathbf{D} можно записать в виде:

$$D^\alpha = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F}, \quad (14)$$

где:

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{dx^\alpha}{de^a} \frac{dx^\beta}{de^a}. \quad (15)$$

Нормальная составляющая поля \mathbf{D} на любой изоповерхности $S_i = \partial V_i$, в том числе, особой имеет вид:

$$D_n = \frac{(\mathbf{D}, \nabla \mathcal{F})}{|\nabla \mathcal{F}|} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3 |\nabla \mathcal{F}|} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F} \nabla_\alpha \mathcal{F} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}| |\nabla \mathcal{F}|}. \quad (16)$$

Здесь использовано тождество:

$$\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F} \nabla_\alpha \mathcal{F} = |\mathbf{e}|^2,$$

следующее из соотношения (2).

Пусть особая изоповерхность S_{12} является границей двух соприкасающихся по ней топологических ячеек V_1 и V_2 , т.е. $S_{12} \subset \partial V_1 \cup \partial V_2$. Обозначим через $D_n^{(1)}$ и $D_n^{(2)}$ значения нормальной составляющей D_n в точках на особой изоповерхности, полученные предельными переходами внутри областей \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 , соответственно:

$$D_n^{(1)} = \lim_{P \in V_1 \rightarrow P_S \in S_{12}} D_n, \quad D_n^{(2)} = \lim_{P \in V_2 \rightarrow P_S \in S_{12}} D_n,$$

где пределы слева и справа берутся по последовательности точек P , лежащих внутри простых ячеек V_1 и V_2 , соответственно Условие отсутствия поверхностных зарядов эквивалентно условию непрерывности D_n :

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}.$$

Поскольку сама функция \mathcal{F} является гладкой, то функция $|\nabla \mathcal{F}|$ непрерывная всюду на P^3 . Следовательно, условие непрерывности D_n в каждой точке $P_S \in S_{12}$ эквивалентно равенству:

$$\lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_i} \frac{|J|}{\sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_1|}} \Big|_P = \lim_{P(\in V_2) \rightarrow P_S \in S_i} \frac{|J|}{\sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_2|}} \Big|_P, \quad (17)$$

где \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 - значения функции \mathcal{F} в экстремумах этих ячеек. Знак минус появляется в этом соотношении в силу того, что при пересечении особой изоповерхности всегда знак нормали меняется на обратный. Отсюда следует, что на особых изоповерхностях якобиан J должен испытывать скачок в соответствии с равенством:

$$\frac{|J_1|}{|J_2|} = \frac{\sqrt{|\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_1|}}{\sqrt{|\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_2|}}, \quad (18)$$

где $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}(\mathbf{x}_S, t)$ - значение функции \mathcal{F} на рассматриваемой особой изоповерхности: $\mathbf{x}_S \in S_i$, $J_1 = \lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_i} J$, $J_2 = \lim_{P(\in V_3) \rightarrow P_S \in S_i} J$. Этот факт крайне важен с точки зрения того, что $|J|$ фактически представляет собой модуль квадрата волновой функции, как это было показано в [4]. Этот факт будет рассмотрен далее в данной статье.

При выполнении условий (17) и (18) на всех особых изоповерхностях \mathcal{F} заряд может быть сосредоточен только в седловых точках, в которых условие непрерывности может не выполняться. В силу этого источниками поля \mathbf{D} будут исключительно критические точки \mathcal{F} .

Опираясь на эти рассуждения, устанавливаем:

Утверждение 1. Пусть поле \mathbf{D} построено на всех простых и пустых топологических ячейках функции \mathcal{F} с помощью соотношений (2) и (7) и введения на каждой из ячеек функций $e^a(\mathbf{x}, t)$. Тогда при условии выполнения соотношений (17) и (18) на всех особых изоповерхностях, поле \mathbf{D} удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} D^\alpha = \text{div} \mathbf{D} = 4\pi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (19)$$

где, кроме экстремумов, точечный заряд располагается в каждой седловой точке с соответствующим зарядом ε_k , определенным как и раньше в соответствии с формулой (3).

Правая часть уравнения (19) представляет собой плотность точечных зарядов. Каждая седловая точка будет давать δ -образный вклад в плотность заряда, равный ± 1 . Поскольку уравнение (19) при выполнении граничных условий (17) и (18) описывает поле \mathbf{D} на всей гиперплоскости P^3 , его можно рассматривать как первое уравнение Максвелла для индукции \mathbf{D} фундаментального электрического поля.

5. Геометрические маркеры и уравнения движения частиц

Для введения пространственного усреднения, аналогичного квантовой теории, введем “функцию плотности” материи, исходя из введенных выше параметров геометрического описания. Важную роль в концепции играют поля $e^a(\mathbf{x}, t)$. Смысл введения полей $e^a(\mathbf{x}, t)$ не исчерпывается только их использованием в построении электродинамики с целочисленными зарядами и классификации частиц. Эти поля позволяют ввести инвариантную плотность, которая используется для построения геометрического усреднения. Основой для этого служит формальное соотношение:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Это уравнение описывает перенос криволинейных координат e^a относительно декартовой системы координат (системы отсчёта) \mathbf{x} фонового пространства с локальной скоростью \mathbf{V} . В частности, из (59) следует:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = 0, \quad (21)$$

что означает, что точки изоповерхности функции \mathcal{F} переносятся с локальной скоростью \mathbf{V} .

Уравнение (59) во всех точках, где преобразование координат $\mathfrak{S} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ не вырождено, позволяет однозначно вычислить поле \mathbf{V} через функции $e^a(\mathbf{x}, t)$:

$$V^\alpha = -\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial t}.$$

Таким образом, $e^a(\mathbf{x}, t)$ можно рассматривать как гидродинамические маркеры, переносимые потоком с локальной скоростью \mathbf{V} . Поэтому в дальнейшем мы будем называть функции $e^a(\mathbf{x}, t)$ геометрическими маркерами, учитывая то, что в рассматриваемом подходе они связаны с геометрией физического пространства соотношениями (2).

Уравнение (59) после несложных преобразований [4] приводит к уравнению для якобиана $J = \det\{\partial \mathbf{e} / \partial \mathbf{x}\}$ отображения $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$. Дифференцируя (59) по координатам \mathbf{x} , а затем сворачивая результат с матрицей $\partial x^\alpha / \partial e^a$ по обоим индексам, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Поскольку матрицы с компонентами $J_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial e^a$ и $J_\alpha^a = \partial e^a / \partial x^\alpha$ взаимно обратны, то имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial t}, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = V^\beta \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} V^\beta.$$

Отсюда следует уравнение для якобиана J :

$$\frac{\partial}{\partial t} |J| + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(V^\beta |J| \right) = 0, \quad (22)$$

описывающее его изменения со временем и имеющее вид дифференциального закона сохранения плотности J .

Поскольку для $|J|$ выполняется закон сохранения, то это позволяет на каждой топологической ячейке ввести инвариантное геометрическое усреднение:

$$\bar{Q} = \int_{\mathcal{V}_0} Q(\mathbf{x}, t) \tilde{J} d\mathcal{V}, \quad (23)$$

с сохраняющейся нормировкой:

$$\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} |J| d\mathcal{V} = \text{const},$$

где интеграл берется по объёму топологической ячейки \mathcal{V}_0 . При этом удобно ввести нормированную плотность:

$$\tilde{J} = \frac{1}{|\mathcal{V}_0|} |J|, \quad \int_{\mathcal{V}_0} \tilde{J} d\mathcal{V} = 1. \quad (24)$$

Введение геометрического усреднения даёт возможность перейти по аналогии с квантовой механикой от описания распределённых объектов - топологических ячеек \mathcal{V}_i , к сосредоточенным параметрам - их средним координатам, скоростям и ускорениям:

$$\begin{aligned} X^\alpha &= \bar{x}^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} x^\alpha \tilde{J} dV, & U^\alpha &= \frac{dX^\alpha}{dt} = \int_{\mathcal{V}_i} v^\alpha \tilde{J} dV, \\ \frac{dU^\alpha}{dt} &= \frac{d^2 X^\alpha}{dt^2} = \int_{\mathcal{V}_i} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \tilde{J} dV = \int_{\mathcal{V}_i} \frac{dv^\alpha}{dt} \tilde{J} dV. \end{aligned}$$

При выводе этих соотношений использовалось то, что интегралы берутся по топологическим ячейкам, границами которых являются изоповерхности функции \mathcal{F} , а так же уравнения (22) и (21), т.е. то, что граница топологической ячейки переносится потоком \mathbf{V} (см. [4]).

6. Уравнения Ньютона

Появление в теории инвариантной процедуры усреднения с плотностью, подчиняющейся дифференциальному закону сохранения (22), позволяет интерпретировать поле \mathbf{V} как характеристику микромасштабного электромагнитного поля, фигурирующего в квантовой теории. Как было показано в [4], поле \mathbf{V} можно интерпретировать как линейную комбинацию векторного потенциала \mathbf{A} электромагнитного поля с градиентом некоторого скалярного поля χ , который отождествляется с функцией действия частицы:

$$\mathbf{V} = -\gamma_0 \mathbf{A} + \nabla \chi. \quad (25)$$

Здесь $\gamma_0 = e/m_e c$, где e - заряд электрона, m_e - его масса, а c - скорость света. Множитель γ_0 введен для прямого сопоставления появляющихся далее в теории уравнений уравнениям Ньютона и Шредингера. Данное представление для поля переноса геометрических маркеров \mathbf{V} является неоднозначным и определяется выбором

функции χ . Далее мы покажем, что этому выбору можно придать ясный физический смысл.

Последнее из соотношений (25) по своему смыслу представляет собой уравнение Ньютона для усреднённых координат частиц, что собственно является содержанием теоремы Зоммерфельда о средних. Необходимо лишь показать, что в правой части этого уравнения содержатся силы, которые можно интерпретировать как классические силы Кулона и Лоренца и, по возможности, тяготения. Для этого воспользуемся тождеством:

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} + \gamma_0 c \Phi \right) - \gamma_0 \left[\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A} \right]^\alpha - \gamma_0 c \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \right). \quad (26)$$

Функция Φ введена пока формально, что позволяет теперь идентифицировать элементы этого представления, как параметры некоторого микромасштабного электромагнитного поля следующим образом:

$$E^\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}, \quad B^\alpha = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Поля \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{A} отличаются от полей \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{A} фундаментальной электродинамики. Установление связи между этими полями является важной задачей, которую придется решать в дальнейшем. С помощью процедуры усреднения мы можем теперь ввести усреднённое (макроскопическое) электромагнитное поле с параметрами

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{A} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{B}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{B} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{E}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{E} \tilde{J} dV.$$

Это позволяет “микроскопические” поля \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{E} представить следующим образом:

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}', \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}', \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}'.$$

Здесь \mathbf{A}' , \mathbf{B}' , \mathbf{E}' - флуктуации, т.е. поля с нулевым средним.

Определение 3. Поля \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{A} будем в дальнейшем называть локальными или микроскопическими динамическими электромагнитными полями, а поля $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ и $\bar{\mathbf{A}}$ - макроскопическими или усреднёнными динамическими полями.

В результате перехода к усреднённым полям формула для среднего ускорения примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{V}} = \gamma_0 \bar{\mathbf{E}} - \gamma_0 \left[\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{B}} \right] - \nabla_X \bar{U} + \mathbf{F}_q. \quad (27)$$

Это соотношение выглядит как уравнение Ньютона заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле $\{\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{E}}\}$ и дополнительном консервативном поле с потенциалом \bar{U} :

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) = \sum_{|\mathbf{k}|=0} \frac{1}{|\mathbf{k}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} U(\mathbf{X}, t)}{\partial X_1^{k_1} \partial X_2^{k_2} \partial X_3^{k_3}} M_{\mathbf{k}}(t).$$

где

$$U(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 - \chi_t - \gamma_0 c \Phi, \quad (28)$$

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ - мультииндекс, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$, $|\mathbf{k}|! = k_1!k_2!k_3!$,

$$M_{\mathbf{k}} = M_{k_1 k_2 k_3}(t) = \int_{\mathcal{V}_i} (x^1 - X^1)^{k_1} (x^2 - X^2)^{k_2} (x^3 - X^3)^{k_3} \tilde{J} dV$$

Дополнительная сила \mathbf{F}_q , имеющая вид:

$$F_q^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} \gamma_0 [\mathbf{V}' \times \mathbf{B}']^\alpha \tilde{J} dV,$$

может рассматриваться как флуктуационная добавка, аналогичная добавкам, возникающим в квантовой теории при выводе усреднённых уравнений Ньютона из операторных уравнений. Подробный вывод всех этих соотношений можно найти в [4].

Утверждение 2. Средняя координата топологической ячейки, удовлетворяет уравнению Ньютона (27), имеющему вид уравнения движения точечной частицы в электромагнитном поле, которое описывается усреднёнными динамическими полями $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{E}}$, \overline{U} .

7. Квантовые уравнения

Заметим, что соотношение (28) представляет собой способ придать физический смысл функции χ в представлении (25). При заданном потенциале $U(\mathbf{x}, t)$ соотношение (28) можно рассматривать как уравнения Якоби:

$$\chi_t + \frac{1}{2} \left(|\nabla \chi|^2 + 2\gamma_0(\mathbf{A}, \nabla \chi) + \gamma_0^2 |\mathbf{A}|^2 \right) + \gamma_0 c \Phi + U = 0. \quad (29)$$

для функции χ , которая представляет собой в этом случае функцию действия для частицы в электромагнитном поле с потенциалами Φ и \mathbf{A} и в скалярном поле с потенциалом U . При такой интерпретации для замкнутого описания динамики частиц необходимо иметь способ определения потенциала U , исходя из некоторых физических соображений, которые не содержатся пока в представленном формализме. Чисто классическая форма уравнения Якоби даёт возможность интерпретировать U как потенциальную энергию поля тяготения, поскольку среди полей классической физики это единственное подходящее объяснение. Однако, для того, чтобы получить подходящее описание для потенциала U , необходимы дополнительные исследования.

Вместе с усреднённым уравнением Ньютона в рамках такого подхода, как это подробно описано в [4], естественным образом появляется и уравнение Шредингера для волновых функций:

$$\Psi = \sqrt{|\tilde{J}|} e^{i\chi/\hbar}. \quad (30)$$

Используя (29), с учетом (25), простыми вычислениями показывается, что функция (1), удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(-i\hbar \nabla - \gamma_0 \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \left(\gamma_0 \Phi - U_G \right) \Psi, \quad (31)$$

где Φ - потенциал электрического поля и

$$U_G = U - \frac{\hbar^2 \Delta |J|}{2 |J|}. \quad (32)$$

Отсюда, в частности, следует, что $|\tilde{J}|$ выполняет роль плотности вероятностного распределения квантовой механики, а соотношение:

$$|\tilde{J}| = |\Psi|^2, \quad (33)$$

имеющее здесь чисто геометрический смысл, выполняет роль статистического постулата Борна, заменяя усреднение по ансамблю геометрическим усреднением.

Как и U остаточный потенциал U_G представляет собой потенциальную энергию некоторого “остаточного” поля по отношению к электромагнитному полю. Поэтому этот остаточный потенциал так же должен быть связанным с потенциалом гравитационного поля.

Утверждение 3. Функция (1), представляющая собой аналог волновой функции частицы, но имеющая геометрический смысл, удовлетворяет уравнению Шредингера (31) частицы, движущейся в электромагнитном поле, которое описывается динамическими локальными полями \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{E} .

8. Интегралы движения динамики полей и частиц

Для того, чтобы завершить общие построения теории и перейти к анализу физических следствий из неё, полезно рассмотреть вопрос об интегралах движения построенных уравнений. В силу того, что в данной теории усреднённые уравнения Ньютона и уравнения Шредингера являются разной формой одного и того же подхода, т.е. определяются скоростью переноса \mathbf{V} и фундаментальным потенциалом \mathcal{F} , интегралы движения усреднённых уравнений будут являться интегралами движения и уравнений фундаментальных полей. Как было показано в [4], интегралами движения усреднённой системы уравнений являются все интегралы вида:

$$I = \int_{V_i} L(\mathbf{x}, t) \tilde{J} dV, \quad (34)$$

где интеграл берется по топологической ячейке, а функция $L(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (35)$$

Утверждение 4. Любая функция только геометрических маркеров является интегралом движения уравнений динамических полей как макроскопических (усреднённых), так и микроскопических (локальных).

Доказательство строится прямым дифференцированием (34) с учётом уравнения (22) для Якобиана:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_i} L(\mathbf{x}, t) |J| dV = \int_{V_i} \left(\frac{\partial L}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \right) \tilde{J} dV = 0. \quad (36)$$

В силу (59) все такие функции должны иметь следующий вид:

$$L(\mathbf{x}, t) = L\left(e^1(\mathbf{x}, t), e^2(\mathbf{x}, t), e^3(\mathbf{x}, t)\right),$$

т.е. являются функциями только координат \mathbf{e} . В частности, такими функциями являются \mathcal{F} , а так же χ .

Одним из интегралов движения является величина:

$$\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_i} |J| dV,$$

равная нормировочному коэффициенту \mathcal{V}_0 из (24). Собственно это и обеспечивает сохранение нормировки волновых функций Ψ из (1) и (33). Важным является то обстоятельство, что величина:

$$\mathcal{M} = m_0 \int_{\mathcal{V}_i} |J| dV = m_0 \mathcal{V}_0,$$

входит в усреднённые уравнения Ньютона единственным универсальным множителем, аналогичным массе частицы как топологической ячейки. Отсюда следует вывод, что эта величина в данной теории представляет, с точностью до некоторого размерного множителя m_0 , “массу” топологической ячейки. При этом величину:

$$\rho_m = m_0 |J|$$

следует рассматривать, как плотность массы материи. Масса топологической ячейки \mathcal{M} взята в кавычки по той причине, что реальная масса частицы, как это обсуждается далее, будет вычисляться, как множитель в уравнении относительного движения внутренней топологической ячейки по отношению к внешней. Поэтому реальные значения масс частиц будут некоторыми комбинациями масс топологических ячеек. Этот важный факт позволяет уже более детально сопоставлять полученные уравнения Ньютона уравнениям классической и квантовой механики.

Однако, тот факт, что интегралом движения являются все возможные функции вида $I(\mathbf{e})$, указывает на то, что масса частиц, плотность материи и сама плотность пространственного усреднения $|J|$ могут в реальности иметь более общий вид. В частности, все соотношения, касающиеся вывода уравнений Ньютона и квантовых уравнений, остаются неизменными, если в этих уравнениях $|J|$ заменить на функцию:

$$\mathcal{F} = I(\mathbf{e}) |J|. \quad (37)$$

Вместе с тем, выбор той или иной функции $I(\mathbf{e})$ определяет распределение плотности массы в пространстве, а так же конечные значения масс частиц. Эти величины теперь будут определяться соотношениями:

$$M = m_0 \int_{\mathcal{V}_0} \mathcal{F} dV \quad (38)$$

и

$$\rho_m = m_0 \mathcal{F} \quad (39)$$

на каждой топологической ячейке. Эти величины по смыслу построения обладают важными свойствами, которые связаны с их сохранением.

Утверждение 5. Любая функция ρ_m , определённая соотношением (39), удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (40)$$

а величина M (38) сохраняется при движении топологической ячейки:

$$\frac{dM}{dt} = 0.$$

Произвол в выборе $I(\mathbf{e})$ означает, что выбор функции $I(\mathbf{e})$ не может быть сделан исключительно из математических соображений и должен определяться некоторыми экспериментальными фактами или физическими принципами. Такие факты и соображения будут сформулированы в следующей части данной работы.

9. Уравнение индукции фундаментальных полей

Основой описания геометрии физического пространства в предлагаемой теории является функция высоты \mathcal{F} , называемая также фундаментальным потенциалом, которая выделяет в объемлющем пространстве W^4 гиперповерхность с помощью алгебраического уравнения:

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t),$$

где u - выделенная координата в W^4 . С этой функцией связываются геометрические маркеры $e^a(\mathbf{x}, t)$, $a = 1, 2, 3$, удовлетворяющие уравнению (I.1.4):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{e}|^2, \quad (41)$$

на каждой простой или пустой топологических ячейках (см. [21]). В этом соотношении \mathcal{F}_0 - значение в экстремуме внутри простой ячейки, а $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от того, является ли минимумом или максимумом. В структуре фундаментальных полей наиболее важным общим элементом, связанным с геометрическими маркерами $e^a(\mathbf{x}, t)$, $a = 1, 2, 3$, т.е. с геометрией физической гиперповерхности, является поле с компонентами:

$$\mathcal{K}^\alpha = |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a, \quad J = \det \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (42)$$

В дальнейшем векторное поле \mathbf{K} будем называть индукцией фундаментального поля. Изменения его со временем определяют динамику всех фундаментальных полей, как электромагнитных, так и гравитационных. Для вывода уравнения динамики этого поля представим его в несколько ином виде. Используя очевидные тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} &= \delta^\alpha_\beta, & \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial e^b}{\partial x^\alpha} &= \delta^b_a, \\ \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} &= \frac{1}{|J|} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{|J|} \varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c]^\alpha, \end{aligned} \quad (43)$$

поле \mathbf{K} можно записать так:

$$\mathbf{K} = \varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] e^a. \quad (44)$$

Вычислим производную по времени от поля \mathbf{K} :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] \frac{\partial e^a}{\partial t} + 2\varepsilon_{abc} \left[\nabla \frac{\partial e^b}{\partial t} \times \nabla e^c \right] e^a. \quad (45)$$

Рассмотрим два слагаемых в правой части последнего соотношения по отдельности. Воспользуемся еще одним очевидным тождеством:

$$\varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = |J| \delta_\beta^\alpha,$$

которое следует из (43). Имеем:

$$\varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c]^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial t} = -\varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} V^\beta = -|J| \delta_\beta^\alpha V^\beta = -|J| V^\alpha. \quad (46)$$

Для второго слагаемого в правой части (45) находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abc} \left[\nabla \frac{\partial e^b}{\partial t} \times \nabla e^c \right] e^a &= \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e^a \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[\frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} \right] = \\ &= \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[e^a \frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} \right] - \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = \text{rot} \mathbf{Z} - |J| \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь \mathbf{Z} - поле с компонентами:

$$Z_\gamma = \varepsilon_{abc} e^a \frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = -\varepsilon_{abc} e^a V^\beta \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = -V^\beta \lambda_{\beta\gamma}. \quad (48)$$

Величины

$$\lambda_{\beta\gamma} = \varepsilon_{abc} e^a \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma}$$

вычислим с помощью следующего тождества:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \lambda_{\alpha\beta} = \det \begin{vmatrix} \delta_\gamma^\alpha & \delta_\gamma^\beta & \delta_\gamma^\gamma \\ \delta_\mu^\alpha & \delta_\mu^\beta & \delta_\mu^\gamma \\ \delta_\nu^\alpha & \delta_\nu^\beta & \delta_\nu^\gamma \end{vmatrix} \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) = 2\lambda_{\mu\nu}.$$

Здесь использовалось свойство антисимметричности $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$. С другой стороны, имеем:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \lambda_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{abc} e^a \frac{\partial e^b}{\partial x^\alpha} \frac{\partial e^c}{\partial x^\beta} = \mathcal{K}^\gamma.$$

Отсюда находим:

$$\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{K}^\gamma \varepsilon_{\gamma\mu\nu}. \quad (49)$$

Подставляя это соотношение в (48), окончательно получаем:

$$Z_\gamma = -V^\beta \lambda_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} V^\beta \mathcal{K}^\mu \varepsilon_{\mu\beta\gamma}, \quad (50)$$

или в векторном виде:

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{2}[\mathbf{K} \times \mathbf{V}]. \quad (51)$$

Подставляя полученные соотношения (46), (47) и (51) в (45), окончательно находим:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = -\text{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) - 3|J|\mathbf{V}. \quad (52)$$

Это уравнение есть уравнение индукции фундаментального поля \mathbf{K} .

Утверждение 2. Векторное поле (42)

$$\mathbf{K} = |J|e^a \frac{\partial x^a}{\partial e^a},$$

при условии выполнения граничных условий (1.4.5) удовлетворяет на каждой топологической ячейке уравнениям:

$$\text{div}(\mathbf{K}) = 3|J|. \quad (53)$$

и (52).

Доказательство. Доказательство второго уравнения представлено выше, а уравнение (53), как было показано в [22], является прямым следствием тождества:

$$\frac{\partial e^a}{\partial e^a} = 3. \quad (54)$$

Переходя в этом дифференциальном тождестве к координатам \mathbf{x} на \mathbf{R}^3 , приходим к записи этого тождества в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \left(|J| \frac{\partial x^a}{\partial e^a} e^a \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^a} \mathcal{K}^a = 3|J|. \quad (55)$$

Последнее соотношение в точности совпадает с (53), что и доказывает сформулированное утверждение.

10. Следствия уравнения индукции фундаментального поля

Получим из уравнения (52) ряд соотношений, которые позволят придать новый смысл полям фундаментальной электродинамики. Для этого рассмотрим поле \mathbf{N} вида:

$$\mathbf{N} = N(\mathbf{e})\mathbf{K}, \quad (56)$$

где $N(\mathbf{e}) = N(e^1, e^2, e^3)$ - дифференцируемая функция от геометрических маркеров. Вычислим производную по времени от \mathbf{N} . Имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial t} \mathbf{K} + N(\mathbf{e}) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}. \quad (57)$$

Для того, чтобы получить более удобное следствие, вычислим компоненты следующего вектора:

$$\begin{aligned} \text{rot}([N(\mathbf{e})\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) &= N(R)\text{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) + \frac{\partial N}{\partial e^a} [\nabla e^a \times [\mathbf{K} \times \mathbf{V}]] = \\ &= N(\mathbf{e})\text{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) + \frac{\partial N}{\partial e^a} \mathbf{K}(\nabla e^a, \mathbf{V}) - \frac{\partial N}{\partial e^a} \mathbf{V}(\nabla e^a, \mathbf{K}). \end{aligned} \quad (58)$$

Вычислим теперь скалярное произведение:

$$\left(\nabla e^a, \mathbf{K}\right) = e^b |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^b} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = e^b |J| \delta_b^a = |J| e^a.$$

Используя полученное соотношение, перепишем (58) в следующем виде:

$$N(\mathbf{e}) \operatorname{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) = \operatorname{rot}([N(\mathbf{e})\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) - \frac{\partial N}{\partial e^a} \mathbf{K} (\nabla e^a, \mathbf{V}) + \frac{\partial N}{\partial e^a} e^a |J| \mathbf{V}.$$

Подставляя это соотношение в (57) и учитывая (52), получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial e^a} \left[\frac{\partial e^a}{\partial t} + (\nabla R, \mathbf{V}) \right] \mathbf{K} - 3N(\mathbf{e}) |J| \mathbf{V} - \operatorname{rot}([N(\mathbf{e})\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) - \frac{\partial N}{\partial e^a} e^a |J| \mathbf{V}.$$

Учитывая уравнение (I.6.1):

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (59)$$

и определение функции $R = |\mathbf{e}|^2$, окончательно получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{N} \times \mathbf{V}]) - \left(\frac{\partial N}{\partial e^a} e^a + 3N(\mathbf{e}) \right) |J| \mathbf{V}. \quad (60)$$

Это общее соотношение имеет один особый вариант. Другие важные варианты будут рассмотрены в следующих разделах. Этот вариант соответствует выбору функции $N(\mathbf{e})$ следующего вида:

$$N(\mathbf{e}) = \frac{\varepsilon}{R^3}, \quad (61)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ - знак заряда на данной топологической ячейке. В этом случае $\mathbf{N} = \mathbf{D}$ и:

$$\frac{\partial N}{\partial e^a} e^a + 3N(\mathbf{e}) = RN'(R) + 3N(R) = 0, \quad R \neq 0.$$

Последнее соотношение обращается в ноль везде, кроме точки $R = 0$, т.е. точки экстремума фундаментального потенциала. При этом уравнение (4) примет такой вид:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]) - 4\pi\varepsilon\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{V}, \quad (62)$$

где $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ - δ -функция Дирака в точке $R(\mathbf{x}_0) = 0$, т.е. в экстремуме фундаментального потенциала рассматриваемой топологической ячейки.

Сравнивая это соотношение с классическим уравнением электромагнитной индукции, приходим к выводу, что напряженность фундаментального магнитного поля, определенная в [21], можно записать в виде:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{c} [\mathbf{D} \times \mathbf{V}] + \nabla \Phi_H, \quad (63)$$

где Φ_H - некоторая дифференцируемая скалярная функция. Наличие потенциальной добавки в определении \mathbf{H} необходимо в связи с требованием отсутствия у магнитного поля зарядов, что эквивалентно условию:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{div}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]) + \Delta \Phi_H = 0.$$

Откуда следует, что потенциал Φ_H должен удовлетворять уравнению:

$$\Delta\Phi_h = -\frac{1}{c}\operatorname{div}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]).$$

Соответственно, плотность электрического тока можно теперь представить в виде:

$$\mathbf{j} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{V}, \quad (64)$$

что соответствует в классической электродинамике току точечного заряда. Электрический ток, определенный соотношением (I.4.5) в [21], отличается тем, что содержит чисто роторную добавку к соотношению (64). Поэтому \mathbf{j} содержит “чистый” ток точечного заряда, а поле (63) представляет собой полное поле напряженности фундаментального магнитного поля. Наличие тока точечного заряда в правой части (7) проверяется вычислением дивергенции от этого уравнения, что приводит к соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\mathbf{D}) = -\operatorname{div}(\varepsilon\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{V}) = \frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)],$$

что и соответствует закону сохранения величины точечного заряда.

Соотношение (64) верно внутри одной простой ячейки. При выполнении условий непрерывности (I.4.5), это соотношение можно распространить на сложные топологические ячейки. В результате общее уравнение для сложных топологических ячеек будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]) - \sum_{k=1}^N \varepsilon_k\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\mathbf{V}. \quad (65)$$

Следуя [22], введем напряженность \mathbf{g} гравитационного поля в соответствии с определением (II.7.2):

$$\mathbf{g} = \frac{4\pi m_0 G}{3}I(\mathbf{e})\mathbf{K} = \frac{4\pi m_0 G}{3}\sqrt{1 + R^2/R_0^2}\mathbf{K}, \quad (66)$$

где G - гравитационная постоянная Ньютона, а $I(\mathbf{e})$ - массовый множитель, имеющий согласно [22] для каждой простой или пустой топологических ячеек вид:

$$I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + R^2/R_0^2}.$$

Тогда при выборе $N(\mathbf{e}) = I(\mathbf{e})4\pi m_0 G/3$ и $\mathbf{N} = \mathbf{g}$ получаем уравнение индукции гравитационного поля в следующем виде:

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{g} \times \mathbf{V}]) - 4\pi G\zeta(R)\rho_D\mathbf{V}, \quad (67)$$

где:

$$\rho_D = m_0|J|\sqrt{1 + R^2/R_0^2}, \quad \zeta(R) = 1 + \frac{e^a}{3}\frac{\partial\ln I(\mathbf{e})}{\partial e^a} = \frac{1}{3}\frac{3 + 4R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2}. \quad (68)$$

Определение Векторное поле

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c}[\mathbf{D} \times \mathbf{V}], \quad (69)$$

представляет собой с точностью до некоторого аддитивного градиентного поля фундаментальное магнитное поле. Векторное поле

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{g} \times \mathbf{V}], \quad (70)$$

представляет собой введенное в [22] гравимагнитное поле, входящее в уравнение (67) индукции гравитационного поля.

11. Вычисление массы и вид массовой функции

Используя общий подход к вычислению средних значений по топологическим ячейкам, рассмотрим проблему выбора массовой функции $I(\mathbf{e})$, опираясь на общий принцип вычисления массы частиц. Массы частиц являются средним значением функции $f(\mathbf{x}, t) \equiv 1$:

$$M = m_0 \int_{\mathcal{V}} |J| I(\mathbf{e}) dV = - \sum_k M_k + m_0 \int_{\partial \mathcal{V}} L^\alpha d\sigma_\alpha, \quad (71)$$

где

$$M_k = 4\pi m_0 \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_k} \left[\mu_k + \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \right] \varepsilon_k, \quad (72)$$

где значения μ_k рассчитываются из условия совпадения величин M_k при вычислении их значений в седловых точках. Заметим, что в экстремумах по определению $R(\mathbf{x}_k, t) = 0$ и следовательно:

$$M_k = 4\pi m_0 \mu_k \varepsilon_k.$$

Поверхностный интеграл в правой части (71) по определению имеет следующий вид:

$$\int_{\partial \mathcal{V}} L^\alpha d\sigma_\alpha = \int_{\partial \mathcal{V}} \frac{1}{R^3} \left(\mu_0 + \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \right) |J| \mathcal{K}^\alpha d\sigma_\alpha.$$

Поверхностный интеграл берется по изоповерхности функции \mathcal{F} и, следовательно, функции R . После отображения в координаты \mathbf{e} пространства маркеров, любая изоповерхность функции \mathcal{F} , ограничивающая простую ячейку отображается в сферу, радиус которой обозначим через $R_0 = \sqrt{2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0|}$, \mathcal{F}_0 - значение функции \mathcal{F} в экстремуме, лежащем внутри простой топологической ячейки, а \mathcal{F}_s - значение на изоповерхности, по которой берется интеграл. По самому определению отображения $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ единичный вектор, ортогональный изоповерхности в пространстве P^3 , отображается в постоянный вектор, ортогональный в пространстве маркеров сфере радиуса R_0 , в которую отображается изоповерхность. Поэтому, при замене переменных $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ можно записать:

$$|J| \mathcal{K}^\alpha d\sigma_\alpha = |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a d\sigma_\alpha = \varepsilon R_0^3 \sin\theta d\varphi d\theta,$$

где $\varepsilon_0 = \pm 1$ - учитывает направление поля \mathcal{K}^α на границе, совпадающий со знаком заряда в экстремуме. Переменные φ и θ - угловые координаты на соответствующей

сфере в пространстве маркеров. В результате последнее выражение можно представить в виде:

$$\int_{\partial V} L^\alpha d\sigma_\alpha = 4\pi\mu_0\varepsilon + \varepsilon \int_{R=R_0} \int_0^R I(\mathbf{e})R^2 dR \sin\theta d\varphi d\theta.$$

Двойной интеграл в правой части последнего соотношения представляет собой интеграл по всему объему простой ячейки от функции $I(\mathbf{e})$. Аналогичный интеграл содержится в определении величин M_k (72). Следовательно, информацию о выборе величины $I(\mathbf{e})$ можно попытаться извлечь из значений масс частиц.

Отметим, что можно провести аналогию между общими рассуждениями о том, как в Специальной теории относительности (СТО) должна вычисляться масса частиц согласно рассуждениям, приведенным в работе [18]. В этой работе приводятся аргументы, что масса частиц в СТО в некотором смысле перераспределяется между частицами в зависимости от модели их строения. Эти рассуждения находятся в соответствии с общей формулой (71).

Одним из наиболее важных фактов, касающихся масс частиц, является то, что их величина во много раз превышает массу электрона. Самой простейшей после электрона заряженной частицей (см. [4]) является мюон. Его масса m_μ равна $\mu \simeq 206.7 m_e$, где m_e - масса электрона. Эта величина может служить ориентиром, с помощью которого можно подобрать подходящую функцию $I(\mathbf{e})$, чтобы вычисляемая масса частиц была близка к указанным значениям. Поскольку по значению интеграла трудно угадать вид самой функции, то необходимо привлечь и некоторые более общие соображения относительно ее формы. Такими соображениями могут быть предположения о ее общем физическом смысле.

Рассмотрим в начале случай простой топологической ячейки. По определению такая ячейка содержит один экстремум и, возможно, седловые точки на границе. Предположим, что рассматривается простая топологическая ячейка, ограниченная изоповерхностью, на которой нет седловых точек. В этом случае:

$$\mathcal{M} = m_0\varepsilon \int_{R=R_0} \int_0^R I(\mathbf{e})R^2 dR \sin\theta d\varphi d\theta,$$

где μ_0 постоянная интегрирования, а поверхностный интеграл берется по границе простой топологической ячейки. Одним из правдоподобных соображений, позволяющих найти вид $I(\mathbf{e})$ является предположение, что интеграл:

$$V = \int_{R=R_0} \int_0^R I(\mathbf{e})R^2 dR \sin\theta d\varphi d\theta \quad (73)$$

представляет собой криволинейный объем пространства геометрических маркеров, соответствующего простой ячейке. Это пространство, как указывалось ранее, является, вообще говоря, неевклидовым. Характер геометрии такого пространства определяется тем, что в координатах \mathbf{e} уравнение физической гиперповерхности V^3 можно записать в виде:

$$u = \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}^2 = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2}R^2. \quad (74)$$

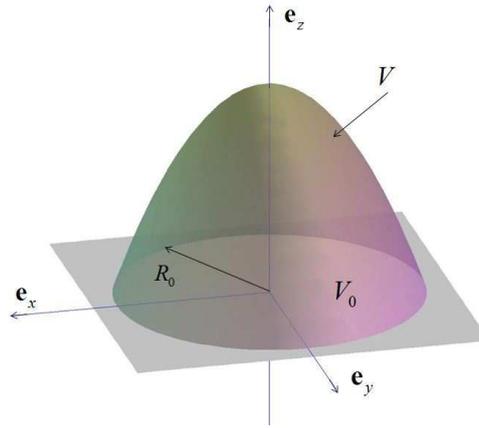


Рис. 11. Двумерный аналог области пространства маркеров, соответствующий простой ячейке

Это есть уравнение трехмерного параболоида, вложенного в четырехмерное евклидово пространство. Двумерный аналог представлен на рис.(11). На этом рисунке V обозначает криволинейный объем параболоида, а V_0 - объем сферы на декартовой карте пространства маркеров.

Исходя из (74), элемент объема пространства маркеров в простой или пустой ячейках можно записать в виде:

$$dV = \sqrt{1 + R^2/R_0^2} R^2 dR d\varphi d\theta.$$

Здесь R_0 - радиус предельной сферы ячейки в пространстве маркеров. В этом случае можно предположить, что массовая функция $I(\mathbf{e})$ в основной части своей и представляет метрический множитель в объеме ячейки в координатах \mathbf{e} , т.е.:

$$I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + \frac{R^2}{R_0^2}}. \quad (75)$$

В этом случае легко вычислить интеграл V (73):

$$V = 4\pi R_0^3 \left[\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) \right]$$

Значение этого интеграла можно представить в следующем виде:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 + R_0^3(1 + 4\pi\alpha), \quad (76)$$

где

$$\alpha = \left[\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{3} \right] - \frac{1}{4\pi}. \quad (77)$$

Первое слагаемое в выражении (76) представляет собой объем пространства в случае, если пространство маркеров было бы плоским. Второе слагаемое описывает отклонение величины объема от плоского случая и представлено в указанном виде с целью выделить число α . Числовое значение α равно:

$$\alpha = \frac{1}{137.9770423} = 0.007247582520.$$

Эта величина отличается от значения постоянной тонкой структуры

$$\alpha_0 = \frac{1}{137.0359998} = 0.0072973525698(24)$$

лишь в пятом знаке после запятой. Это совпадение, хотя и выглядит пока с теоретической точки зрения достаточно случайным, тем не менее с числовой точки зрения говорит в пользу того, что выбор массовой функции в форме (75) представляется в целом правильным, а некоторое отличие от точного значения постоянной тонкой структуры может быть объяснено более общей теорией.

В результате массу простой ячейки (взятую по модулю) можно записать в виде:

$$\mathcal{M} = R_0^3 m_0 \left[\frac{4}{3} \pi + (1 + 4\pi\alpha) \right].$$

Теперь, используя полученные соотношения, можно записать общую формулу для вычисления массы частиц:

$$M = - \sum_k M_k + 4\pi m_0 \mu_0 + V, \quad (78)$$

$$M_k = 4\pi m_0 \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_k} \left[m_k + \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \right] \varepsilon_k, \quad (79)$$

Ориентиром для дальнейших вычислений массы может быть следующее формальное совпадение массы мюона с числом:

$$m'_\mu = \frac{3}{2\alpha_0} \simeq 205.5539986,$$

которое меньше массы мюона ($m_\mu \simeq 206.7 m_e$) чуть больше, чем на 1. В то же время число

$$m''_\mu = \frac{3}{2\alpha} \simeq 206.9655635$$

ближе к значению массы мюона.

Вычисление массы реальных частиц в данной работе проводится не будет, поскольку такие вычисления связаны с установлением топологической структуры частиц. Топологическая классификация частиц с общих позиций была рассмотрена в работе [3, 4]. Однако из-за ограниченности размеров данной статьи здесь эта классификация не приводится. Дальнейшей задачей будет рассмотрение общих принципов описания гравитационного поля в рамках данной концепции и некоторые основные следствия.

12. Плотность энергии фундаментального электромагнитного поля

Наиболее важным интегралом движения, который определяет локальные и глобальные свойства динамических систем, является интеграл энергии. Одной из важнейших проблем, связанных с энергией, является бесконечность собственной энергии точечных частиц, например, электрона, находящаяся в противоречии с конечностью массы электрона. В связи с этим необходимо выяснить - можно ли в рамках

предлагаемой концепции решить эту проблему, не прибегая к экзотическим приемам вроде теории перенормировок.

Для этого рассмотрим выражение для плотности энергии фундаментального электрического поля, которое можно получить, исходя из уравнений фундаментальной электродинамики. Собственно говоря, вся совокупность уравнений фундаментальной электродинамики нам не понадобится. Важным является интеграл движения уравнений фундаментальной электродинамики, который можно сопоставить плотности энергии электромагнитного поля в теории Максвелла. Это означает, что необходимый интеграл энергии можно искать сразу в форме, аналогичной классической электродинамике, т.е. в виде:

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} D^\alpha E_\alpha dV. \quad (80)$$

Это выражение не содержит слагаемое, аналогичное энергии магнитной составляющей классического электромагнитного поля. Однако будет показано, что именно такая величина является интегралом движения, а соответствующая плотность удовлетворяет дифференциальному закону сохранения.

Задача, которую необходимо решить, можно сформулировать следующим образом. Необходимо при заданном фундаментальном поле индукции \mathbf{D} подобрать поле фундаментальной напряженности \mathbf{E} , при котором соотношение (80) будет являться интегралом движения. В качестве подходящей формы поля \mathbf{E} рассмотрим следующее соотношение:

$$E^\alpha = f(\mathcal{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha}, \quad (81)$$

где функция $f(\mathcal{F})$ - некоторая функция от фундаментального потенциала \mathcal{F} , которую необходимо определить. Исходя из этого и учитывая вид \mathbf{D} (I.2.7), можно установить, что соотношение

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} f(\mathcal{F}) D^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} dV \quad (82)$$

является интегралом движения. Действительно, из (I.2.2), (I.2.7) и (I.2.8) имеем:

$$f(\mathcal{F}) D^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} = \frac{f(\mathcal{F})}{4\pi R} |J| = \frac{f(\mathcal{F})}{4\pi R I(R)} \mathcal{J}.$$

Подставляя последнее соотношение в (80), находим:

$$W = \int_{V_i} \frac{f(\mathcal{F})}{4\pi R I(R)} \mathcal{J} dV. \quad (83)$$

Функция $I_f = f(\mathcal{F})(4\pi R I(R))^{-1}$ удовлетворяет уравнению (I.12.3). Поэтому W является интегралом движения. Среди всех интегралов движения вида (82) есть один наиболее простой, соответствующий $f(\mathcal{F})/I(R) = 4\pi R K$, где K - некоторая постоянная. В этом случае имеем:

$$W = K \int_{V_i} \mathcal{J} dV = KM. \quad (84)$$

Это соотношение фактически эквивалентно известной формуле Эйнштейна $E = Mc^2$ при выборе $K = c^2$, где c - скорость света. Напряженность фундаментального поля при этом будем иметь следующий вид:

$$\mathcal{E}^\alpha = \frac{4\pi R}{I(R)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} = \frac{4\pi R}{I(R)} \frac{d\mathcal{F}}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\alpha} = \frac{4\pi R^2}{I(R)} \frac{\partial R}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{I(R)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Phi_f, \quad (85)$$

где

$$\Phi_f = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (86)$$

При таком выборе интеграла движения потенциал Φ_f фундаментального поля равен объему пространства маркеров на декартовой карте, заключенному внутри шара радиуса R .

Соотношение (84) примечательно тем, что приводит к наиболее важному результату релятивистской динамики, минуя собственно всю ее идеологию, построенную на инвариантности физики относительно преобразований Лоренца. Этот факт требует отдельного обсуждения, которое будет отложено на конец данной работы. Однако особая важность соотношения (84) для данной теории состоит в том, что оно устанавливает прямую связь между энергией фундаментального поля и массой частицы, а также прямую связь между плотностью масс и плотностью энергии фундаментального поля. Исходя из того, что соотношение должно выполняться для любой простой топологической ячейки, а при определенной модификации и для всех топологических ячеек, можно вместо интегралов писать дифференциальное соотношение между энергией и массой в форме:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D}, \mathbf{E}) = c^2 \mathcal{J}. \quad (87)$$

13. Гравитационное поле

Полученное соотношение для плотности массы и энергии материи (87) позволяет теперь перейти к общему описанию поля тяготения. Представление о поле тяготения определяются законом Ньютона, который, как хорошо известно, выполняется на больших масштабах с большой точностью. Трудности возникают в основном на сверхбольших масштабах. Поэтому естественно предположить, что в рамках данной концепции в уравнения Ньютона должно входить поле тяготения, которое описывается аналогично ньютоновскому полю тяготения. Это означает, что остаточный потенциал U в уравнении (I.8.4) должен быть связан с полем тяготения. Вместе с тем, поскольку поле тяготения имеет фундаментальный характер, то в рамках теории фундаментальных электромагнитных полей должно найтись соответствующее место и для гравитационного поля.

Основой для введения гравитационного поля может служить соотношение (I.12.6), представляющее общее определение плотности энергии и массы материи, которая входит в правую часть уравнения Пуассона:

$$\Delta \phi_g = 4\pi G \rho_m, \quad (88)$$

где ϕ_g - классический потенциал гравитационного поля, G - классическая гравитационная постоянная Ньютона, ρ_m - плотность всей массы материи. Идея привлечения данного соотношения состоит в том, что из самого определения якобиана J

следует тождество:

$$J = \det \left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right) = \operatorname{div} \left(\varepsilon_{abc} e^a [\nabla e^b \times \nabla e^c] \right). \quad (89)$$

Здесь ε_{abc} - антисимметричный символ Леви-Чевитта. Это тождество можно рассматривать, как уравнение Пуассона, поскольку в левой части этого соотношения стоит якобиан, т.е. величина, равная с точностью до размерного множителя плотности массы или энергии материи. При этом поле:

$$g^\alpha = \varepsilon_{abc} e^a [\nabla e^b \times \nabla e^c], \quad (90)$$

можно рассматривать, с точностью до размерного множителя, как напряженность гравитационного поля. Однако для более точного сопоставления этих соотношений с классическим полем тяготения необходимо учесть наличие массовой функции $I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + R^2/R_0^2}$ в определении массы и плотности материи.

Кроме использования тождества (89) существует более фундаментальный подход. Этот подход, по сути эквивалентный предыдущему, основывается на использовании той же идеологии, что и введение полей фундаментальной электродинамики с помощью тождества (I.2.10). Заметим, что вместе с формальным тождеством (I.2.10) на пространстве маркеров для каждой простой или пустой топологической ячейках выполняется ещё одно очевидное тождество:

$$\frac{\partial e^a}{\partial e^a} = 3. \quad (91)$$

Преобразуя его в координаты на фоновом пространстве с помощью того же фундаментального отображения (I.2.2), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(|J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (|J| \mathcal{K}^\alpha) = 3|J|, \quad (92)$$

где $\mathcal{K}^\alpha = e^a \partial x^\alpha / \partial e^a$ имеет тот же вид, что и раньше (I.2.7). Умножим это тождество на массовую функцию так, чтобы справа появилась плотность массы в соответствии с определением (I.12.6). Используя определение плотности массы (энергии) (I.12.6), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (I(\mathbf{e}) |J| \mathcal{K}^\alpha) = 3\zeta(R) |J| I(\mathbf{e}). \quad (93)$$

Здесь

$$\zeta(R) = 1 + \frac{e^a \partial \ln I(\mathbf{e})}{3 \partial e^a} = \frac{1}{3} \frac{3 + 4R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2}, \quad (94)$$

а при выводе использовалось тождество:

$$|J| \mathcal{K}^\alpha \frac{\partial I(\mathbf{e})}{\partial x^\alpha} = |J| e^a \frac{\partial I(\mathbf{e})}{\partial e^a} = |J| \frac{R^2}{R_0^2 \sqrt{1 + R^2/R_0^2}}.$$

Умножая (93) на подходящий размерный множитель $4\pi G m_0/3$, где G - классическая постоянная тяготения Ньютона, а m_0 - размерный множитель массы, приходим к уравнению, имеющему вид уравнения Пуассона (88), но в более общем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = 4\pi G \zeta(R) \rho_m, \quad (95)$$

где $\rho_m = m_0 \sqrt{1 + R^2/R_0^2} |J|$ - плотность массы, а поле \mathbf{g} с компонентами:

$$g^\alpha = \frac{4\pi m_0 G}{3} |J| I(\mathbf{e}) \mathcal{K}^\alpha = \frac{4\pi m_0 G}{3} |J| \sqrt{1 + R^2/R_0^2} \mathcal{K}^\alpha. \quad (96)$$

играет роль напряженности гравитационного поля. Подчеркнём, что эти соотношения выполняются для простой или пустой топологических ячеек, а общее представление о поле тяготения должно дополняться условиями “срачивания” полей отдельных ячеек на их границах. Кроме этого, необходимо указать, как это поле проявляет себя в усредненной динамике частиц, описываемой усредненными уравнениями Ньютона и уравнениями Шредингера.

14. Эффективная гравитационная постоянная и тёмная материя

Уравнение (95) представляет собой уравнение Пуассона, но в отличие от классического Ньютонического поля в это уравнение входит эффективная гравитационная постоянная \tilde{G} :

$$\tilde{G} = \zeta(R) G = \frac{G}{3} \frac{3 + 4R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2}. \quad (97)$$

Постоянная тяготения \tilde{G} отличается от классической тем, что зависит от координат и времени, поскольку от координат зависит функция $R = \sqrt{2|\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)|}$. Однако форма этой зависимости такова, что эффективная постоянная тяготения меняется от значения классической G в точке $R = 0$, где располагается экстремум \mathcal{F} со значением \mathcal{F}_0 и не превышает значения $4G/3$ на границах топологических ячеек, где R заметно отличается от нуля. Этот эффект зависимости \tilde{G} от R можно интерпретировать, как наличие скрытой массы, если считать, что преобразованию подвергается не постоянная G , а именно плотность массы:

$$\tilde{\rho}_m = \rho_m \zeta(R). \quad (98)$$

В этом случае увеличение плотности массы будет обнаруживаться на краях топологических ячеек. Следует подчеркнуть, что в таком простом виде это соотношение справедливо лишь для простых топологических ячеек.

Этот эффект можно сравнить с тем, что наблюдается в астрофизических экспериментах по исследованию эффекта “тёмной материи”. Эффект тёмной материи проявляется в том, что именно на краях галактик скорость орбитального движения звезд вокруг центральных частей галактик превышает значения, которые предсказываются теорией тяготения Ньютона на основе вычисления тяготеющей массы совокупности звезд из термодинамических соображений при условии теплового равновесия звездной среды. С точки зрения соотношения (98), объяснение эффекта тёмной материи может состоять в том, что каждая галактика представляет собой топологическую ячейку, а видимое в гравитационных экспериментах увеличение массы определяется величиной:

$$\Delta M = \int_V \rho_m (\zeta(R) - 1) dV = \frac{1}{3} \int_V \rho_m \frac{R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2} dV = \frac{1}{3} \left(M - \int_V \frac{\rho_m}{1 + R^2/R_0^2} dV \right) > 0.$$

В связи с этим функцию:

$$\rho_{DM} = \rho_m (\zeta(R) - 1) = \frac{e^a}{3} \frac{\partial \ln I(\mathbf{e})}{\partial e^a}, \quad (99)$$

можно назвать плотностью темной материи. Из этого соотношения следует, что дополнительная гравитирующая масса любой топологической ячейки не будет превышать инерционную более, чем на 1/3 от ее значения. Наблюдаемые значения скрытой гравитирующей массы в галактиках имеют значения, превышающие инертную в 10 и более раз. Это говорит о том, что для галактик эффект должен описываться более общей массовой функцией, чем $I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + R^2/R_0^2}$, которая описывает массу простых и пустых топологических ячеек. Если вспомнить, что масса - это по сути объем пространства маркеров всех ячеек вместе взятых, то при большом их объединении эффект может существенно возрасти, учитывая, что барионы, в соответствии с топологической классификацией частиц, являются многосвязными объектами (ручками Уилера) [4]. Многосвязные области могут существенно увеличивать скрытую массу. Возможны и другие геометрические эффекты. Поэтому относительно слабое увеличение гравитирующей массы простых и пустых топологических ячеек лишь указывает на то, что эффект темной материи не обнаруживается в локальных экспериментах. Исходя из этого, можно предположить, что уравнения для гравитационного поля (95) и (96) на больших масштабах остаются справедливыми, но при некоторой другой функции $I(\mathbf{e})$, вид которой необходимо вычислять, усредняя по всей совокупности топологических ячеек.

15. Вихревое гравитационное поле и электромагнитные поля

Еще одним важным аспектом рассматриваемой теории гравитационного поля является то, что она приводит к необходимости рассматривать “вихревые” гравитационные поля, которые тесно связаны с фундаментальными электромагнитными полями. Продифференцировав уравнение (95) по t , в результате получим следующее уравнение:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = 4\pi G \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -4\pi G \operatorname{div}(\rho_m \mathbf{V}).$$

Здесь использовалось уравнение неразрывности (I.12.7) для ρ_m . Отсюда следует уравнение, имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -4\pi G \rho_m \mathbf{V} + \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \quad (100)$$

где \mathbf{Z} - некоторое вспомогательное поле. Это уравнение можно формально сравнить с уравнением Максвелла - дифференциальным аналогом уравнения электромагнитной индукции. При этом \mathbf{g} играет роль индукции гравитационного поля, поле $\mathbf{p} = 4\pi G \rho_m \mathbf{V}$ - роль плотности тока массы, а \mathbf{Z} - напряженности некоторого вихревого поля. В соответствии с этим поле \mathbf{Z} можно назвать гравитомагнитным полем. По своему смыслу поле $\mathbf{p} = 4\pi G \rho_m \mathbf{V}$ представляет собой плотность импульса среды, что вполне аналогично плотности тока заряда в классической электродинамике.

Отметим, что на существование описания гравитационного поля на основе аналогии между электродинамикой и ньютоновской гравитацией было обращено в ра-

боте [18]. В этой работе был рассмотрен целый ряд аналогий, связывающих электродинамику и гравитацию. Этот анализ важен для общего понимания свойств гравитационного поля. В этой работе также содержится указание на возможную прямую связь между электрическими полями и полем тяготения. В предлагаемой теории все эти связи и аналогии возникают естественным образом.

Полученное уравнение (95) имеет несколько важных отличий от классического уравнения Пуассона. Во-первых, напряженность гравитационного поля, согласно (96), не является чисто градиентным полем, как это определяется в теории тяготения Ньютона, и содержит вихревую компоненту. Во-вторых, согласно тому же соотношению (96), гравитационное поле в данном подходе оказывается связанным с фундаментальным электромагнитным полем, что объединяет эти взаимодействия в одно фундаментальное поле, связанное с геометрией физического пространства, как трехмерной гиперповерхности, вложенной в евклидово пространство W^4 размерности 4.

Формулы прямой связи параметров фундаментального электромагнитного поля и параметров гравитационного можно получить непосредственно из определения последнего соотношением (96). Имеем:

$$g^\alpha = \frac{4\pi G}{3} \rho_m \mathcal{X}^\alpha = \frac{4\pi G}{3} I(\mathbf{e}) R^3 D^\alpha = G m_0 I(\mathbf{e}) \Phi_f D^\alpha. \quad (101)$$

Отсюда следует, что компоненты поля напряженности гравитационного поля связаны с точностью до множителя $m_0 G I(\mathbf{e}) \Phi_f$ с индукцией фундаментального электромагнитного поля \mathbf{D} . Таким образом, фундаментальные электромагнитные поля являются источниками всех явлений, которые наблюдаются в форме различных типов взаимодействий - электромагнитного, гравитационного и ядерных взаимодействий (сильного и слабого). Фундаментальные поля проявляют себя как ядерные силы в случае многосвязности физической гиперповерхности пространства (сильное взаимодействие) и в случае возникновения топологических перестроек границы топологических ячеек (слабое взаимодействие), как это было описано в [4].

Литература

1. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология / В.М. Журавлев // Гравитация и электромагнетизм: тр. межд. конф. - Минск, 1998. - С. 42-50.
2. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология / В.М. Журавлев // Изв. вузов. Физика. - 2000. - № 2. - С. 134-140.
3. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами, топология и структура элементарных частиц / В.М. Журавлев // Критич. технол. и фундамент. пробл. физики конденсир. сред.: материалы конференции. - Ульяновск, 2001. - С. 42-72.
4. Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure / V.M. Zhuravlev // Gravitation and Cosmology. - 2011. - Vol. 17, № 3. - P. 201-217.
5. Misner C.W. Classical physics as geometry / C.W. Misner, J.A. Wheeler // Ann. Phys. - 1957. - №2. - P. 525-537.
6. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная / Дж. Уилер. - М.:И.Л., 1962. - 352 с.
7. Мизнер Ч. Классическая физика как геометрия / Ч. Мизнер, Дж. Уилер // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сб. статей. М.: Мир, 1979. - С. 542-554.

8. Сахаров А.Д. Топологическая структура элементарных зарядов и СРТ-симметрия / А.Д.Сахаров // Проблемы теоретической физики. - 1972. - С. 542-554.
9. Клиффорд В. О пространственной теории материи / В. Клиффорд // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сб. статей. М.: Мир, 1979. - С. 36-37.
10. Шварц А.С. Квантовая теория поля и топология / А.С. Шварц. - М.: Наука, 1989. - 400 с.
11. Милнор Дж. Дифференциальная топология. Начальный курс / Дж. Милнор, А. Уолле. - М.: Мир, 1972.
12. Шапиро И.С. Топология для физиков / И.С. Шапиро, М.А. Ольшанецкий // Элементарные частицы (Шестая школа ИТЭФ): сб. статей. - М: ИТЭФ, 1979. - № 4. - С. 5-60.
13. Фейнман Р. Характер физических законов / Р. Фейнман. - М.: Мир, 1968. - С. 193-208.
14. Постников М.М. Введение в теорию Морса / М.М. Постников. - М.: Наука, 1971. - 561 с.
15. Хирш М. Дифференциальная топология / М. Хирш. - М.: Мир, 1979. - 280 с.
16. Дубровин Б.А. Современная геометрия. Методы теории гомологий / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. - М.: Наука, 1984. - 343 с.
17. Дубровин Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. - М.: Наука, 1979. - 760 с.
18. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. - М.:Мир, 1970. - С. 142.
19. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями / В.М. Журавлев // ТМФ. - 2013. - Т. 174, № 2. - С. 236-246.
20. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения и комплексные квазилинейные уравнения первого порядка / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2013. - Вып. 4. - С. 56-67.
21. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля (Часть I) / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2014. - Вып. 4. - С. 6-24.
22. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть II). Масса и гравитация / В.М.Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2014. - Вып. 4. - С. 25-39.
23. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть III). Уравнения индукции фундаментальных полей / В.М.Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2015. - Вып. 3. - С. 44-60.
24. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть IV). Топологическая структура частиц / В.М.Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2015. - Вып. 4. - С. 1-15.
25. Журавлев В.М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типа / В.М.Журавлев // ТМФ. - 2015. - Т. 186, № 3. - С. 371-385.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

Yu.G. Ignat'ev

**Qualitative Analysis and Numerical Simulation
of Equations of the Standard Cosmological
Model: $\Lambda \neq 0$**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

UDC 530.12+531.51

QUALITATIVE ANALYSIS AND NUMERICAL SIMULATION OF EQUATIONS OF THE STANDARD COSMOLOGICAL MODEL: $\Lambda \neq 0$

Yu.G. Ignat'ev¹¹ ignatev_yu@rambler.ru; Kazan Federal University

On the basis of qualitative analysis of the system of differential equations of the standard cosmological model it is shown that in the case of zero cosmological constant this system has a stable center corresponding to zero values of potential and its derivative at infinity. Thus, the cosmological model based on single massive classical scalar field in infinite future would give a flat Universe. The carried out numerical simulation of the dynamic system corresponding to the system of Einstein - Klein - Gordon equations showed that at great times of the evolution the invariant cosmological acceleration has an oscillating character and changes from -2 (braking), to $+1$ (acceleration). Average value of the cosmological acceleration is negative and is equal to $-1/2$. Oscillations of the cosmological acceleration happen on the background of rapidly falling Hubble constant. In the case of nonzero value of the cosmological constant depending on its value there are possible three various qualitative behavior types of the dynamic system on 2-dimensional plane $(\Phi, \dot{\Phi})$, which correspond either to zero attractive focus or to stable attractive knot with zero values of the potential and its derivative. Herewith the system asymptotically enters the secondary inflation. Carried out numerical simulation showed that at cosmological constant $\Lambda < m^2 3 \cdot 10^{-8}$ the macroscopic value of the cosmological acceleration behaves itself similar to the case $\Lambda = 0$, i.e. in the course of the cosmological evolution there appears a lasting stage when this value is close to $-1/2$ which corresponds to non-relativistic equation of state.

Keywords: standard cosmological model, quality analysis, numerical simulation, computer gravitation.

This work was funded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

1. Basic Relations of the Standard Cosmological Model

Let us consider the space-flat Friedman Universe

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\ell_0^2 \quad (1)$$

($d\ell_0^2$ is a metrics of 3-dimensional Euclidean space), generated by homogenous massive scalar field whose potential $\Phi(t)$ complies with the Klein - Gordon equation:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0 \quad (2)$$

where the derivative of t is denoted with a dot. Herewith the scale factor $a(t)$ complies with a unique non-trivial Einstein equation:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda + 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2), \quad (3)$$

where Λ is a cosmological term which we further suppose non-negative:

$$\Lambda \geq 0. \quad (4)$$

These well known equations¹ (2) and (3) represent a system of autonomous ordinary differential equations the analysis of which is a subject of this research.

Let us introduce the further required scalar functions: Hubble constant

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (5)$$

and invariant cosmological acceleration:

$$\Omega(t) = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (6)$$

Let us note the following useful relation between Ω and barotropic coefficient κ in the equation of state $p = \kappa\varepsilon$:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa). \quad (7)$$

Let us also write down the expressions for the scalar field's energy density and pressure:

$$\varepsilon = \dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2; \quad p = \dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2, \quad (8)$$

so that

$$\varepsilon + p = 2\dot{\Phi}^2, \quad (9)$$

2. Qualitative Analysis of the Dynamic System of the Standard Cosmological Model

2.1. Reduction of the System of Equations to the Canonical Form

First, let us carry out scaling of the equations proceeding to new dimensionless time variable τ

$$\tau = mt, \Rightarrow \dot{f} = mf', \quad (10)$$

where $f' = df/d\tau$. Thus, from (2) and (3) we get:

$$\Phi'' + 3H_m\Phi' + \Phi = 0; \quad (11)$$

$$3H_m^2 = \Lambda_m + 8\pi(\Phi'^2 + \Phi^2), \quad (12)$$

where $H_m(\tau)$ and Λ_m are the Hubble constant and cosmological constant, both measured in Compton time units:

$$H_m(\tau) = \frac{a'}{a} = \frac{H}{m}; \quad \Lambda_m = \frac{\Lambda}{m^2}. \quad (13)$$

Let us notice that equations (11) and (12) represent a system of ordinary nonlinear differential equations. Taking into account condition

$$\dot{a} \geq 0 \Leftrightarrow H \geq 0 \quad (14)$$

¹ see e.g. [2].

and using a standard substitution this system can be reduced to the form of *normal autonomous system of ordinary differential equations on a plane*:

$$\Phi' = Z(t); \quad (15)$$

$$Z' = -3H_m Z - \Phi, \quad (16)$$

where function $H_m(\Phi, Z)$ is *algebraically* defined through the Einstein equation using functions $\Phi(\tau)$ and $Z(\tau)$:

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi(Z^2 + \Phi^2)}. \quad (17)$$

Thus, we finally get a system of autonomous differential equations of the dynamic system on the plane (Φ, Z) :

$$\begin{cases} \Phi' = Z(t); \\ Z' = -\sqrt{3\pi} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi(Z^2 + \Phi^2)} Z - \Phi; \end{cases} \quad (18)$$

or, in terms of qualitative theory of ordinary differential equations (see e.g. [3]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} x &\equiv \Phi; \quad y \equiv Z; \quad P(x, y) \equiv y; \\ Q(x, y) &\equiv -\sqrt{3\pi} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi(x^2 + y^2)} y - x. \end{aligned} \quad (20)$$

This system of equations can be investigated and asymptotic behavior of the solutions at $t \rightarrow \pm\infty$ can be defined with a help of qualitative theory of differential equations. The next property of the Standard Cosmological Model (SCM) is an important one:

The evolution of the Universe in the SCM with cosmological term in terms of time variable τ is defined by the only one parameter Λ_m and initial conditions.

2.2. Singular Points of the Dynamic System

Singular points of the dynamic system $M_0(x_0, y_0)$ (19) are defined by zeroes of the derivatives (see e.g. [3]):

$$P(x_0, y_0) = 0; \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

It is not difficult to see that the dynamic system (19) as in the case $\Lambda \equiv 0$ has a unique singular point:

$$M_0 = (0, 0) \longleftrightarrow x_0 = \Phi_0 = 0; \quad y_0 = Z_0 = 0. \quad (21)$$

2.3. A Kind of Singular Point

To define a kind of a singular point it is necessary to find the eigenvalues of the characteristic polynomial:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

where partial derivatives of functions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ are calculated in a singular point M_0 . Calculating derivatives of functions P, Q in (20), let us find:

$$P'_x(0, 0) = 0; \quad Q'_y(0, 0) = 1;$$

$$Q'_x(0, 0) = -1; \quad Q'_y(0, 0) = -\sqrt{3\Lambda_m}$$

Thus, the characteristic polynomial (22) is equal to:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda - \sqrt{3\Lambda_m} \end{vmatrix} = 0,$$

where from we find its roots

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m - 4}. \quad (23)$$

Eigenvalues satisfy the following identity:

$$\lambda_1 \lambda_2 \equiv 1. \quad (24)$$

Thus, four essentially different cases are possible (see [3]):

1. The case of zero cosmological term:

$$\Lambda_m \equiv 0 \quad (25)$$

we have two complex conjugated imaginary eigenvalues:

$$\lambda_{\pm} = \pm i. \quad (26)$$

Since eigenvalues turned to be pure imaginary ones then a *unique singular point* (21) of the dynamic system (19) is its center (see [3]). In this case at $\tau \rightarrow +\infty$ the phase trajectory of the dynamic system is winded round this center making an infinite number of turns.

2. The case of small cosmological term:

$$0 < \Lambda_m < \frac{4}{3} \quad (27)$$

we have two complex conjugated eigenvalues and it is

$$Re(\lambda) = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} < 0. \quad (28)$$

In this case in accordance with qualitative theory of differential equations, point M_0 (21) is an *attractive focus*, all phase trajectories of the dynamic system at $\tau \rightarrow +\infty$ are twisting spirals, which are winded round the singular point performing an infinite number of turns. This case effectively coincide qualitatively with the previous one.

3. The case of great value of the cosmological term:

$$\Lambda_m > \frac{4}{3} \quad (29)$$

– then we have two various real and, according to (23), negative eigenvalues $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. In such a case the singular point is a *stable attractive knot*. At $\tau \rightarrow +\infty$ all phase trajectories of the dynamic system enter the singular point and all the trajectories apart two exceptional ones, when coming to this singular point, are tangent to eigenvector \mathbf{u}_1 , which corresponds to eigenvalue, being minimal by its module, i.e. λ_1 . Two exceptional trajectories are tangent to the second eigenvector \mathbf{u}_2 . Mentioned eigenvectors are equal to:

$$\mathbf{u}_1 = (1, \lambda_1); \quad \mathbf{u}_2 = (1, \lambda_2). \quad (30)$$

The angle α between the eigenvectors is defined by means of the relation:

$$\cos \alpha \equiv \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{\sqrt{\mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2}} = \sqrt{\frac{4}{3\Lambda_m}} < 1. \quad (31)$$

At very large values of Λ_m the angle between the eigenvectors tends to $\pi/2$, at $\Lambda_m \rightarrow 4/3$ this angle tends to zero.

4. The degeneration case:

$$\Lambda_m = \frac{4}{3} \quad (32)$$

– this case effectively coincides with the previous one with an account of the circumstance that all trajectories enter the singular point tangent to unique eigenvector – this exactly corresponds to mentioned above extreme case $\alpha \rightarrow 0$. Thus, the phase trajectory of the dynamic system based on the equation of classical massive scalar field (2) and the Einstein equation (3), in the plane (Φ, Z) has a single zero singular point (attractive focus or attractive stable point) (21), where it is:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi \rightarrow 0; \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (33)$$

$$\Omega \rightarrow \begin{cases} 1, & \Lambda \neq 0; \\ 0, & \Lambda \equiv 0. \end{cases} \quad (34)$$

All that is changing is a type of the singular point and along with that the details of the approach of the phase trajectories to the singular point $\Phi = 0, \dot{\Phi} = 0$ at $\tau \rightarrow +\infty$.

2.4. *The Asymptotic Behavior of the Scale Factor*

Since at $\tau \rightarrow +\infty$ (or $t \rightarrow +\infty$) $\Phi \rightarrow 0$ and $\dot{\Phi} \rightarrow 0$, then in the absence of other forms of matter apart from the scalar field, the Universe stays alone with the Λ - term, therefore in consequence of the Einstein equation (3) the scale factor evolves by the inflation law:

$$a(t) \sim e^{H_0 t}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (35)$$

where H_0 is the Hubble constant:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \equiv m \sqrt{\frac{\Lambda_m}{3}}. \quad (36)$$

At early stages it is $\tau \rightarrow -\infty$, until:

$$\Phi(\tau) \approx \Phi_0 = \text{Const}; \rightarrow 8\pi\Phi_0^2 \gg \Lambda_m, \quad (37)$$

$$H(t) \approx H_1 = \frac{m}{\sqrt{3}} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi\Phi_+^2} > H_0 \quad (38)$$

early inflation takes place:

$$a(t) \sim e^{H_1 t}, \quad t \rightarrow -\infty \quad (39)$$

Thus, the invariant cosmological acceleration

$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (40)$$

at $\Lambda \neq 0$ tends to one at early and late stages:

$$\Omega(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (41)$$

Along with this, the Hubble “constant” has constant values in these extreme cases:

$$\begin{aligned} H(t) &\rightarrow H_1; \quad (t \rightarrow -\infty), \\ H(t) &\rightarrow H_0; \quad (t \rightarrow +\infty); \quad (H_1 > H_0). \end{aligned} \quad (42)$$

2.5. *The Phase Trajectories of the Dynamic System (18)*

It is necessary to bear in mind that time variable on all the plots is τ , i.e. the time measured at Compton scale. Since the evolution of the investigated dynamic system (19) is defined only by initial conditions and the value of normalized cosmological constant Λ_m , let us consider the dependency of the evolution details on the value of the cosmological constant and the initial conditions. Further, let us accept the assumption that $\dot{\Phi}(-\infty) = 0$. We will investigate the properties of phase trajectories in terms of the plot shown on Fig. 1:

1. The initial stage with a duration $\Delta\tau$ with $\Phi \approx \Phi_0$ – right part of the plot; this stage is characterized by a rapid fall of the potential’s derivative from 0 to “enigmatic number” -0.115 . Actually there is no any enigma in this number (see (18)):

$$Z_0 = -\frac{1}{\sqrt{24\pi}} \approx -0.1151647165. \quad (43)$$

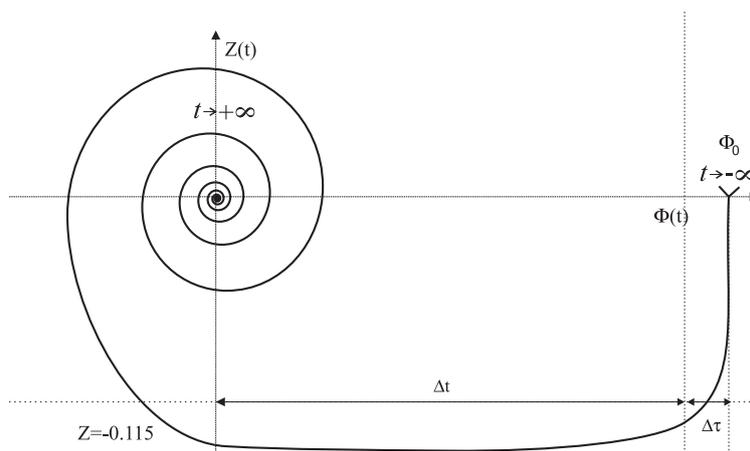


Fig. 1. The qualitative view of the phase trajectory of the dynamic system (18) at $\Lambda_m \ll 1$. On this figure $\Delta\tau$ is a characteristic time of decrease of the potential rate of change till the “bottom” of the plot, $Z_0 \approx -0.115$, Δt is a characteristic time of decrease of the potential value with a constant velocity $\Phi' \approx Z_0$. After this instant of time there start the winding of the phase trajectory round the zero center. The number of spiral turns is infinite.

Actually, inflation happens at this stage.

2. The Middle stage with duration Δt is a medium part of the plot; $Z = \Phi' \approx \text{Const} = Z_0$ at this stage. Potential falls to significantly small values at this stage.

2.6. Zero Value of Λ : $\Lambda_m = 0$

3. The final stage of evolution with infinite duration; damped oscillations of the potential and its derivative happen at this stage. The Universe stays asymptotically flat.

The plots below show the results of numerical simulation of the dynamic system (18) at various initial conditions. In this paper it is used a Rosenbrock’s method well adapted to integration of stiff systems of differential equations. Let us show the characteristic examples of phase portraits of the dynamic system (18), obtained using numerical simulation methods in the system of the applied mathematics Maple XVII.

Since characteristic properties of the system’s (18) phase portraits have incomparable scales, we show fragments of phase planes on different time intervals.

Small Values of Λ : $\Lambda_m = 0.1 < \frac{4}{3}$

In this case the final point of the phase trajectory is the attractive focus (21) $\Phi_0 = 0$; $y_0 = Z_0 = 0$.

Large Values of Λ : $\Lambda_m = 10 > \frac{4}{3}$

In this case the final point of the phase trajectory is the stable attractive knot (21) $\Phi_0 = 0$; $y_0 = Z_0 = 0$. The large-scale picture of the phase trajectory does not qualitatively differ from the previous one however the method of entry to this point is changed (Fig. 12 – 13).

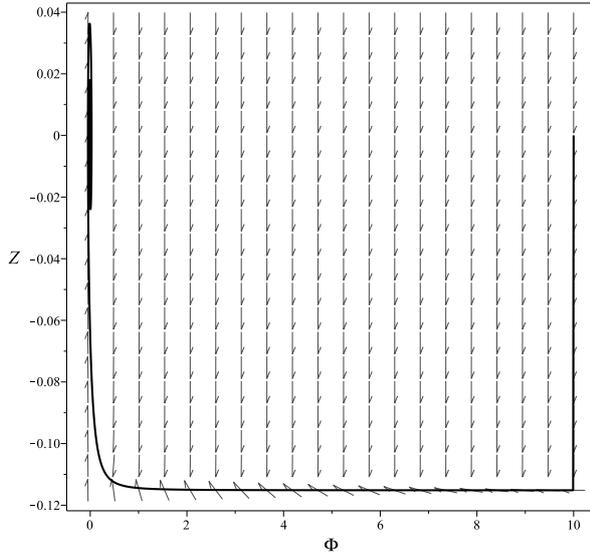


Fig. 2. The large-scale phase portrait of the dynamic system (19) $\tau \in [-1000, 1000]$; $\Phi(-1000) = 10, Z(-10000) = 0$.

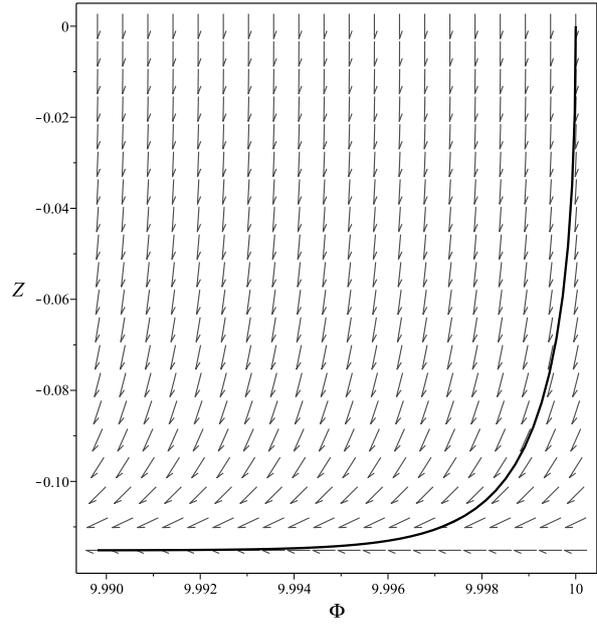


Fig. 3. The initial stage of descent of the dynamic system (18) (the right-most part of the plot on Fig. 1) $\tau \in [-1000, -999.9]$; $\Delta\tau \lesssim 10^{-1}$; $\Phi(-1000) = 10, Z(-10000) = 0$.

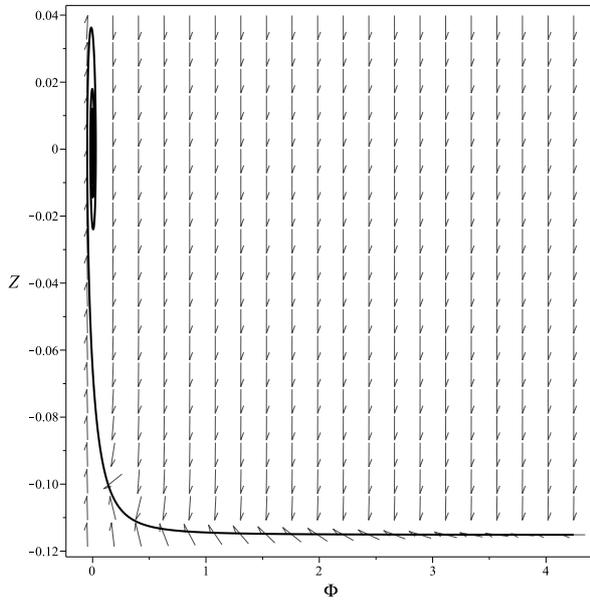


Fig. 4. The middle stage of the dynamic system (18) $\Phi' \approx \text{Const} \approx -0.115$ $\tau \in [-950, 100]$; $\Phi(-1000) = 10, Z(-10000) = 0$.

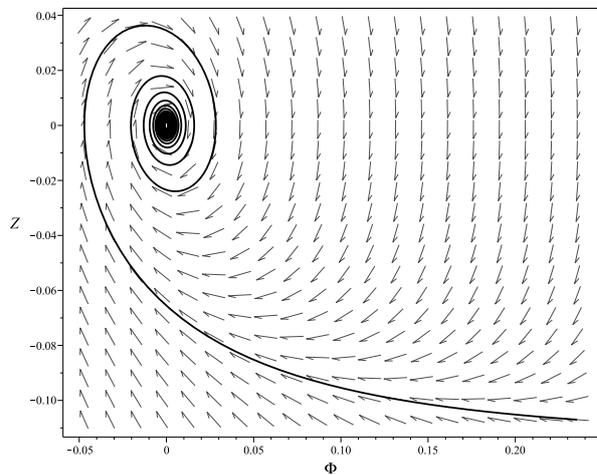


Fig. 5. Winding round the center $M_0 = (0, 0)$ of the dynamic system (18) (the left-most part of the plot shown on Fig. 1) $\tau \in [-915, -700]$; $\Phi(-1000) = 10, Z(-10000) = 0$.

3. Numerical Integration of the Dynamic Equations

However, phase portraits of the dynamic system (18) presented on Fig. 2 – 13 do not provide information about certain details of the cosmological evolution which are possible to

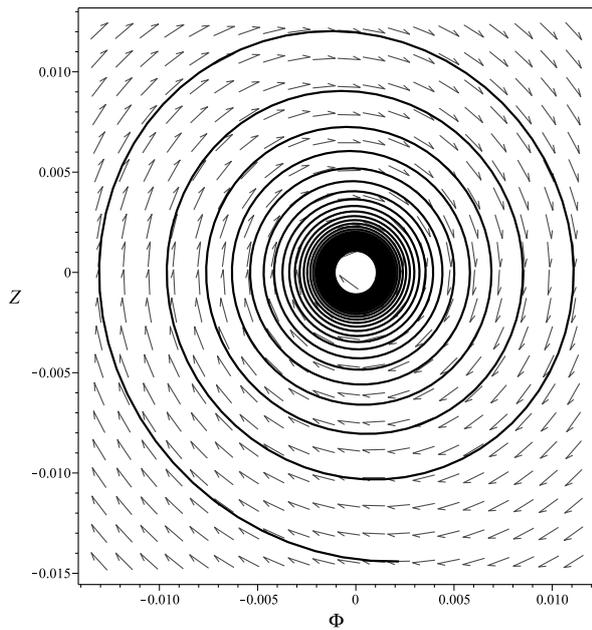


Fig. 6. The final stage of the dynamic system (18): winding round the center $M_0 = (0,0)$ at initial conditions: $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-900, -700]$.

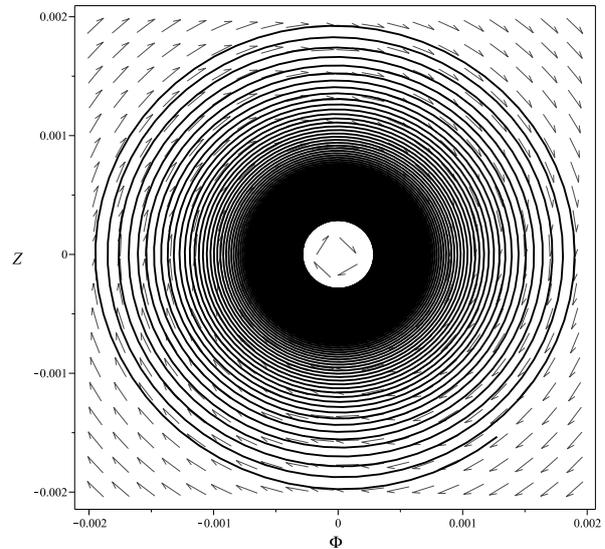


Fig. 7. The final stage of the dynamic system (18): winding round the center $M_0 = (0,0)$ of the dynamic system (18) (left part of the plot shown on Fig. 1) $\tau \in [-800, -100]$.

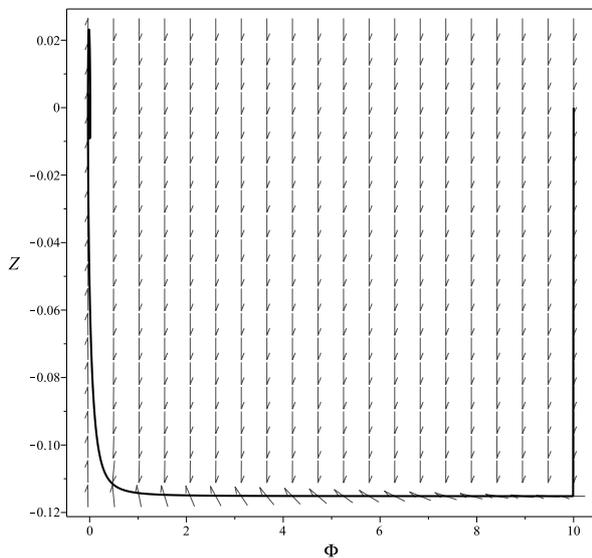


Fig. 8. The large-scale picture of the phase trajectory $\tau \in [-1000, 1000]$ at initial values: $\Phi(-1000) = 10; Z(-1000) = 0$.

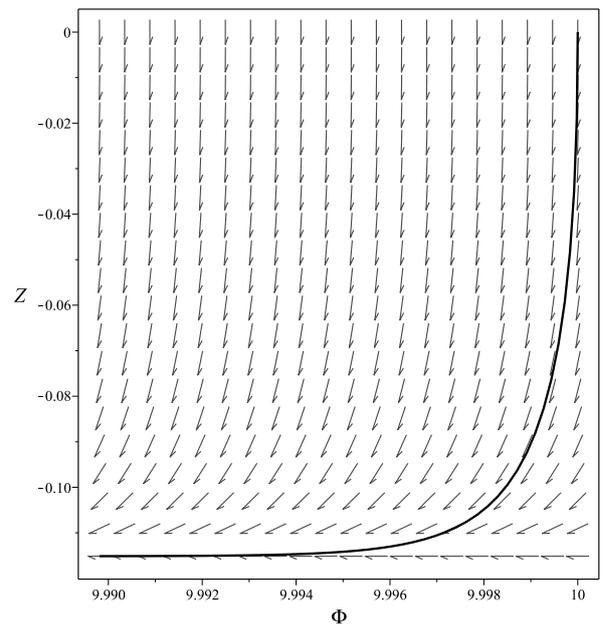


Fig. 9. The stage of the phase trajectory's descent at times $\tau \in [-1000, -999.9]$ at initial values: $\Phi(-1000) = 10; Z(-1000) = 0$.

obtain only by direct numerical integration of the original system of Einstein - Klein - Gordon equations. Moreover, they do not provide information about original 3-dimensional dynamic system which also includes the Einstein equation (3) as well as they do not provide information about observed cosmological scalars $H(t)$ and $\Omega(t)$. We should apply

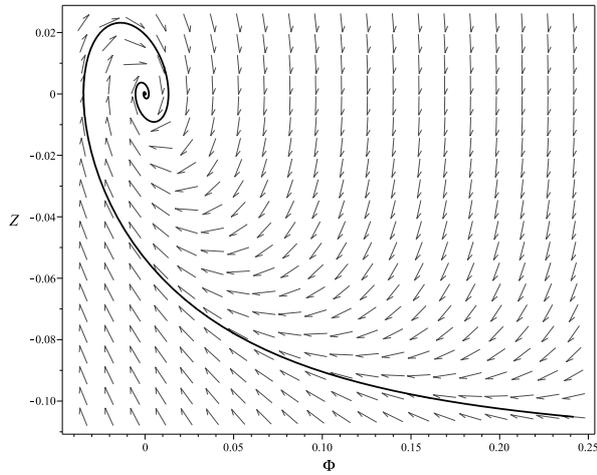


Fig. 10. The stage of winding of the phase trajectory round the attractive focus: $\tau \in [-915, -700]$ at initial values: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

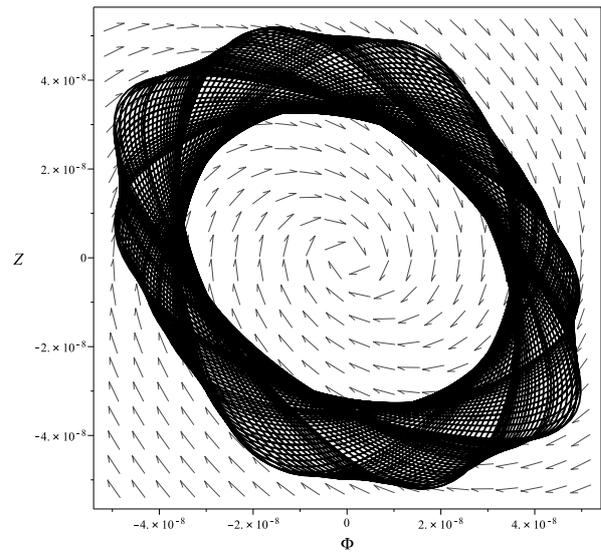


Fig. 11. The final stage of the phase trajectory – twisting spiral line: $\tau \in [-800, -100]$ at initial values: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

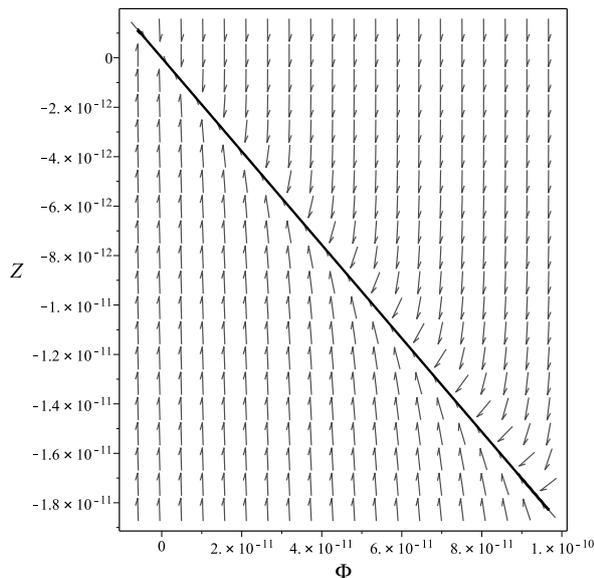


Fig. 12. Approach to the attractive knot of the phase trajectory: $\tau \in [85, 1000]$ at initial values: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

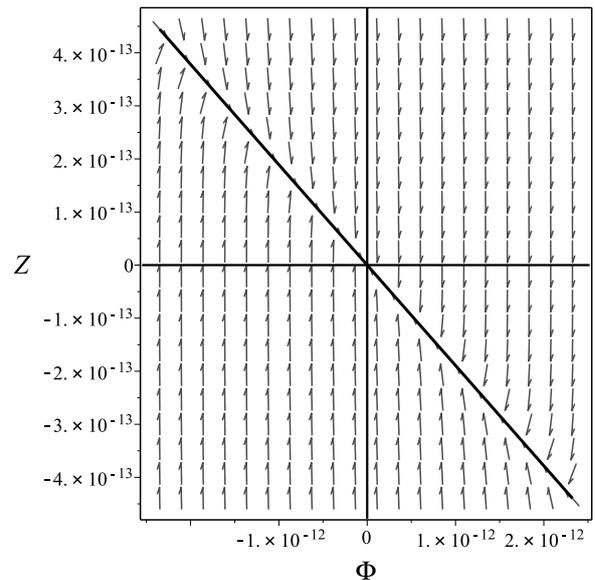


Fig. 13. Passing through the attractive knot of the phase trajectory: $\tau \in [400, 600]$ at initial values: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

methods of direct numerical integrations of the original system of differential equations to obtain this information. Below we show the results of numerical integration of these equations using Rosenbrock's method, which is well adapted for numerical integration of systems of ordinary differential equations possessing the stiffness criteria. In series of more simple cases we used the standard Runge - Kutta - Fehlberg method of 4-5 orders and in series of more complex cases- the Runge-Kutta method of 7-8 orders.

3.1. The Evolution of the Potential and its Derivative

At the initial stages $\tau \rightarrow \infty$ at large enough values of the potential the scalar field evolves the same way as in the case $\Lambda = 0$: the value of the scalar field's potential falls linearly with time. Then the transition to oscillating mode happens. Fig. 16 – 17 show the evolution

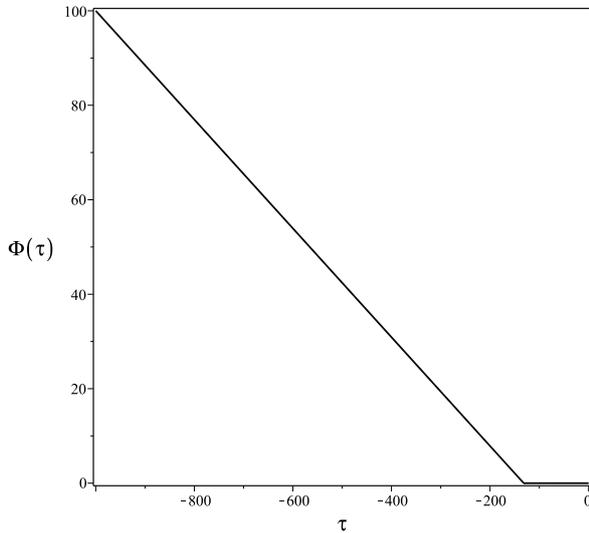


Fig. 14. The evolution of the potential at early stages at small value of the cosmological constant $\Lambda_m = 0.001$; $\Phi(-1000) = 100$.

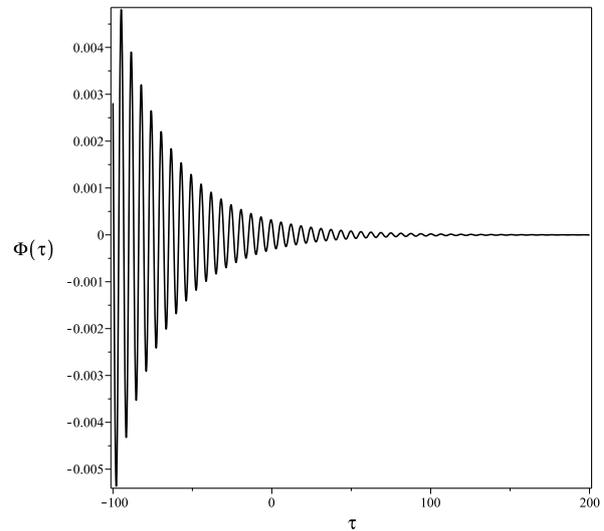


Fig. 15. The evolution of the potential at late stages at small value of the cosmological constant $\Lambda_m = 0.001$; $\Phi(-1000) = 100$.

of the potential at stage of damped oscillations in the case of zero and small values of the cosmological constant. It is seen that at the same initial values of the scalar potential at this stage the amplitude of the potential's oscillations at the same time is by order of magnitude greater in the case of zero value of the cosmological constant.

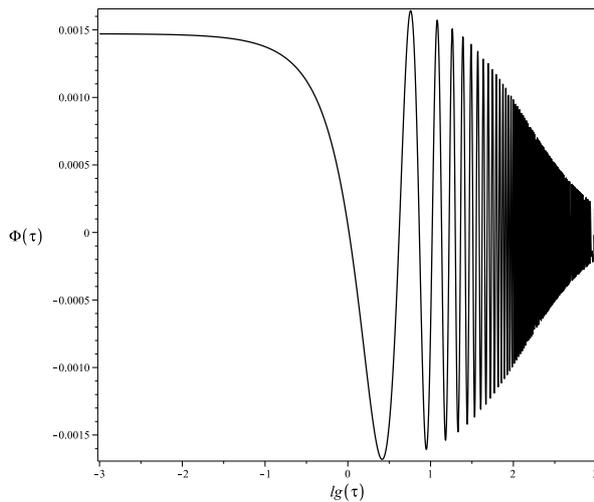


Fig. 16. The evolution of the potential at stage of oscillations at zero value of the cosmological constant $\Lambda_m = 0$ in the logarithmic time scale; $\Phi(-1000) = 100$.

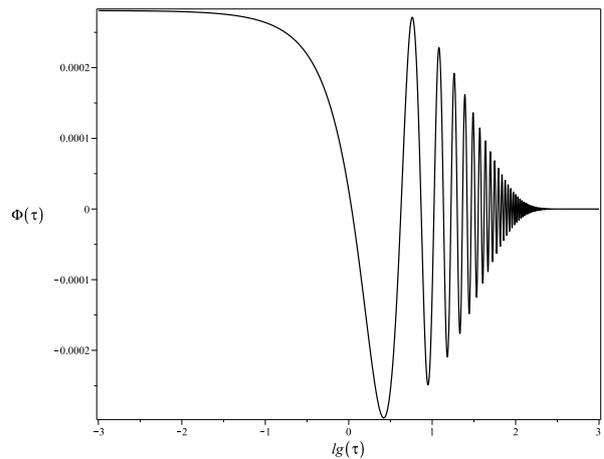


Fig. 17. The evolution of the potential at stage of oscillations in the logarithmic time scale at small value of the cosmological constant $\Lambda_m = 0.001$; $\Phi(-1000) = 100$.

3.2. The Evolution of the Hubble Constant $H(t)$

The fall of the Hubble constant from H_1 (38) till H_0 (36) starts the later, the bigger is the initial value of the scalar field's potential $\Phi_0 = \Phi(-\infty)$ (Fig. 18 – 19).

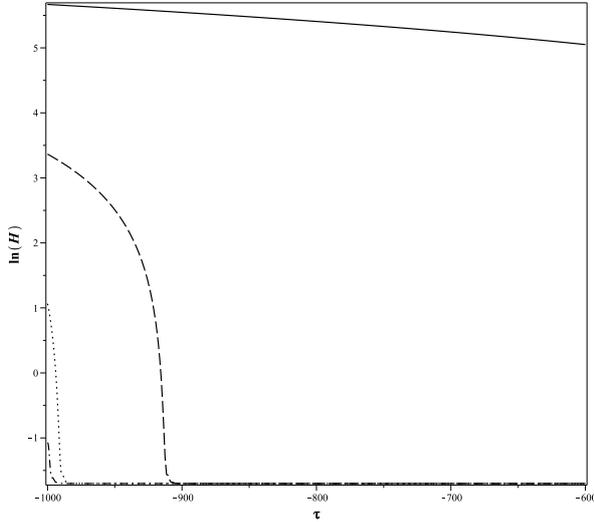


Fig. 18. The dependency of the Hubble constant's evolution on initial value of the scalar potential: bottom - up: $\Phi(-1000) = 0.1; 1; 10; 30; 100$ at small value of the cosmological constant $\Lambda_m = 0.01$.

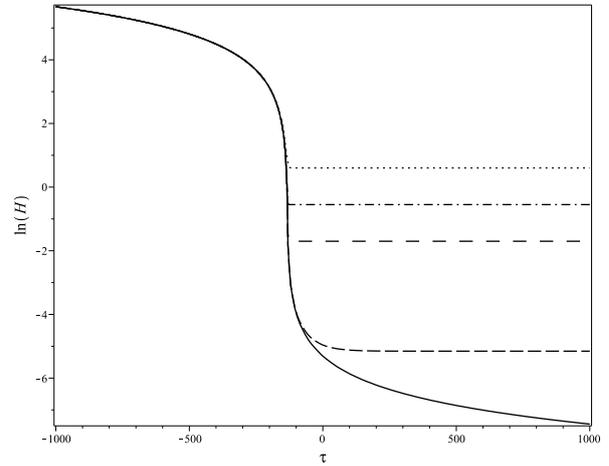


Fig. 19. The dependency of the Hubble constant's evolution on value of the cosmological constant: bottom - up: $\Lambda_m = 0; 0.0001; 0.1; 1; 10$ at initial values: $\Phi(-1000) = 100; Z(-1000) = 0$.

3.3. The Scale Factor

The evolution of the scale factor is shown on Fig. 20 – 21. The values of the \ln function are put on the Y-axis of the plots on these pictures

$$L(\tau) = \ln(a(\tau)).$$

Therefore value $\ln L = 10$ corresponds to value $L \sim 10^4$ and the value of the scale factor $a/a_0 \sim 10^{9566}$.

3.4. The Evolution of the Invariant Cosmological Acceleration

The cosmological acceleration Ω is calculated using the following formula:

$$\Omega(\tau) = 1 + \frac{H'_m(\tau)}{H_m^2(\tau)}. \quad (44)$$

The value of the cosmological acceleration also oscillates with period $\sim 2\pi$ after the stage of primary inflation. Fig. 22 – 23 show the stage of the cosmological acceleration's oscillations. In particular, Fig. 23 allows us to see how the average value of the cosmological acceleration grows approximately from $-1/2$ to 1.

It should be noted that the oscillating character of the cosmological acceleration at late stages for the case of classical massive scalar field also was discovered at numerical integration of the equations of the cosmological model with scalar charged particles [4].

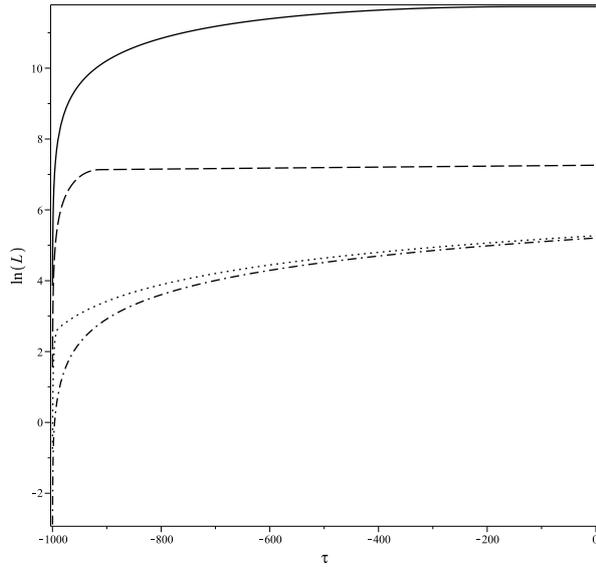


Fig. 20. The dependency of the scale factor's evolution on the initial value of the scalar potential: bottom-up: $\Phi(-1000) = 0.1; 1; 10; 100$ at small value of the cosmological constant $\Lambda_m = 0.1$.

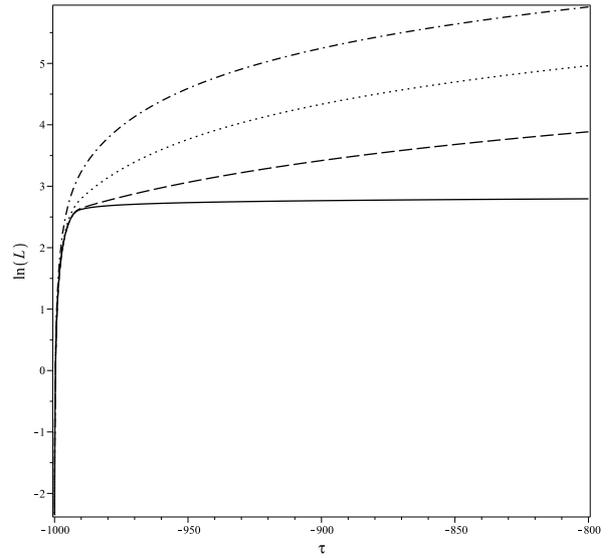


Fig. 21. The dependency of the scale factor's evolution on the cosmological constant: bottom-up: $\Lambda_m = 0; 0.1; 4/3; 10$ at initial values: $\Phi(-1000) = 1; Z(-1000) = 0$.

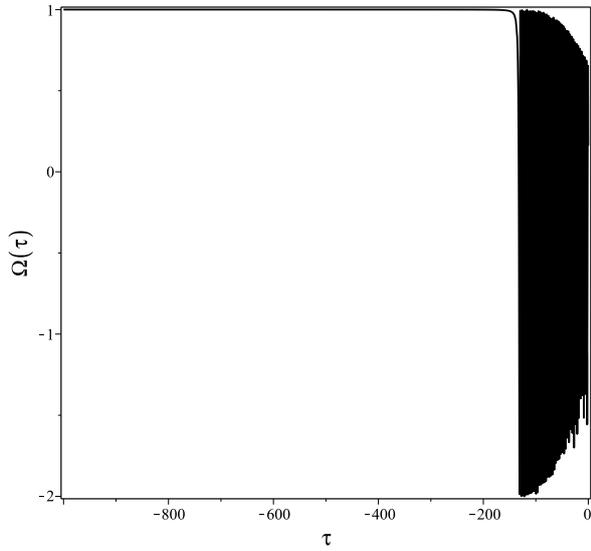


Fig. 22. The large-scale evolution of the cosmological acceleration: $\Phi(-1000) = 100$ at small value of the cosmological constant $\Lambda_m = 0.00001$. The black-painted range of the plot represent damped oscillations.

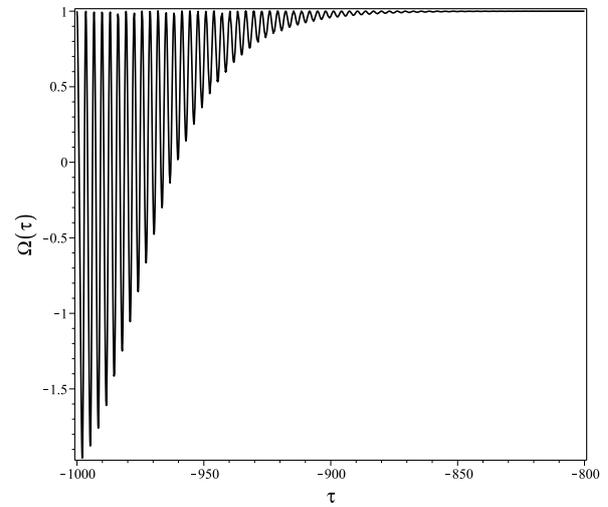


Fig. 23. The range of oscillating stage of the evolution of the cosmological acceleration $\Lambda_m = 0.001$ at initial values: $\Phi(-1000) = 0.1; Z(-1000) = 0$.

3.5. The Average of the Cosmological Acceleration

The fact that the invariant cosmological acceleration has an oscillating character at great times (Fig. 25), having the period of these oscillation on the time scale τ of the order of 2π , i.e. in the ordinary time scale $T \sim 2\pi/m$ being an obviously microscopic value, leads to

necessity of introduction of the average value of the invariant cosmological acceleration averaged by large enough number of oscillations i.e. by large enough interval $\Delta\tau = N \cdot 2\pi$, where $N \gg 1$:

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} \equiv \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Omega(\tau') d\tau'. \quad (45)$$

Using (45) in formula (44) and carrying out elementary integration, let us find the following expression for the average cosmological acceleration:

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} = 1 + \frac{1}{\Delta\tau} \left(\frac{1}{h(\tau)} - \frac{1}{h(\tau + \Delta\tau)} \right). \quad (46)$$

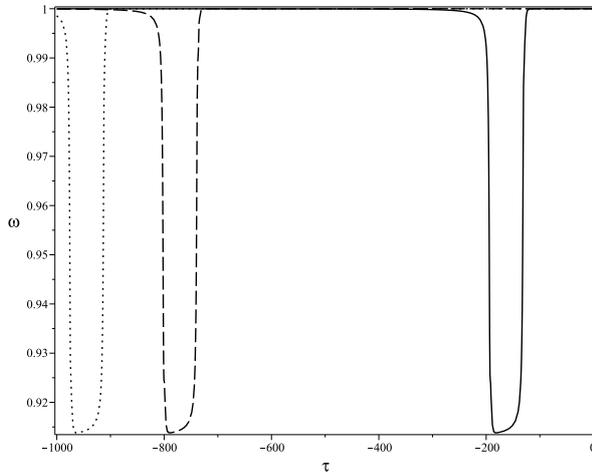


Fig. 24. The evolution of the average cosmological acceleration: $\Phi(-1000) = 100$ at cosmological constant $\Lambda_m = 0.1$. The duration of the interval of averaging $\Delta\tau = 20\pi$.

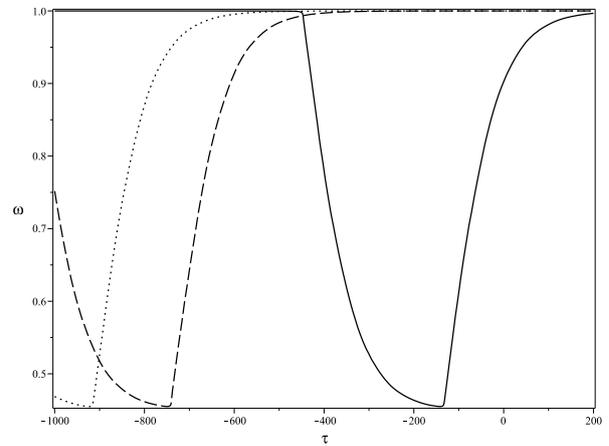


Fig. 25. The evolution of the average cosmological acceleration: $\Phi(-1000) = 100$ at cosmological constant $\Lambda_m = 0.0001$. The duration of the interval of averaging $\Delta\tau = 100\pi$.

4. The Conclusion

Thus, we can state a fact that at small values of the cosmological constant $\Lambda_m \leq 3 \cdot 10^{-8}$ the evolution of the dynamic system laid in the basis of SCM, at large time intervals very weakly differ from the evolution of the dynamic system without account of the cosmological constant. In particular, sufficiently long non - relativistic stage appears in that system.

It must be noted that if using the standard model of the elementary particles with mass of Higgs boson of order of $10 \text{ Tev} \sim 10^{-15} m_{pl}$ in the capacity of the base model, this limitation gives us $\Lambda \leq 3 \cdot 10^{-38}$. As is known, the value of the cosmological constant is estimated as 10^{-123} , so that the real cosmological situation relates exactly to the considered case, which corresponds to the first kind of a the singular point – attractive pole. As we noted above, the final stage of such a cosmological model is the inflation one while at intermediate stages of expansion there automatically appears the non-relativistic mode.

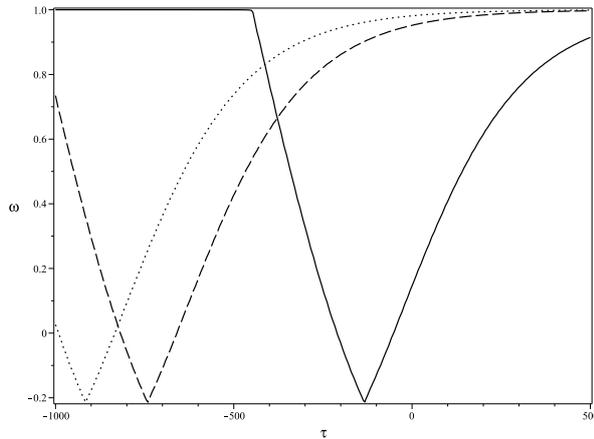


Fig. 26. The evolution of the average cosmological acceleration: $\Phi(-1000) = 100$ at cosmological constant $\Lambda_m = 0.00001$. The duration of the interval of averaging $\Delta\tau = 100\pi$.

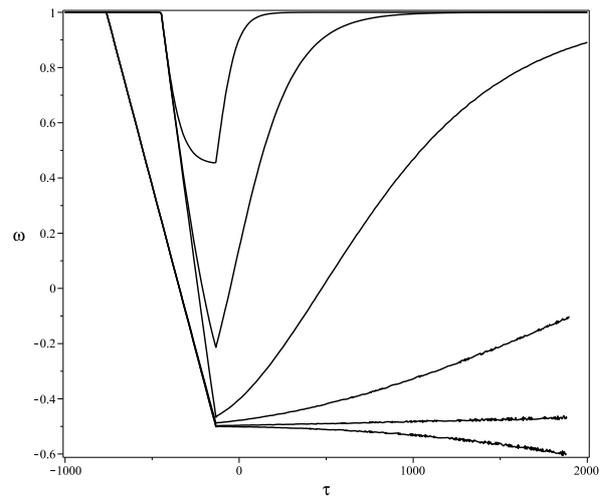


Fig. 27. The evolution of the average cosmological acceleration: $\Phi(-1000) = 100$ at cosmological constant – bottom-up: $\Lambda_m = 10^{-8}; 3 \cdot 10^{-8}; 10^{-7}; 10^{-6}; 10^{-5}; 10^{-4}$. The duration of the interval of averaging $\Delta\tau = 100\pi \div 200\pi$.

In conclusion, the Authors express their gratitude to the members of MW seminar for relativistic kinetics and cosmology of Kazan Federal University for helpful discussion of the work.

References

1. Ignat'ev Yu.G. Qualitative Analysis and Numerical Simulation of Equations of the Standard Cosmological Model / Yu.G. Ignat'ev. - 2016. - Access mode: <https://arxiv.org/abs/1609.00745/>.
2. Gorbunov D.S. Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov. - Singapore: World Scientific, 2011.
3. Bogoyavlensky O.I. Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics / O.I. Bogoyavlensky. -Moskow: Nauka, 1980. - IX, 301p.
4. Ignat'ev Yu.G. Astrophysics and Space Science / Yu.G.Ignat'ev, A.A.Agathonov, M.L.Mikhailov, D.Yu.Ignatyev. - 2015. - Access mode: <https://arxiv.org/abs/1411.6244>

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

Ю.Г. Игнатьев

**Макроскопические уравнения Эйнштейна
для космологической модели с Λ -членом**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 530.12+531.51

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С λ -ЧЛЕНОМ

Ю.Г. Игнатъев¹¹ ignatev_yu@rambler.ru; Казанский федеральный университет

Усреднением уравнений Эйнштейна по поперечным гравитационным возмущениям во втором порядке получена замкнутая система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих макроскопическую космологическую эволюцию изотропной пространственно плоской Вселенной, заполненной гравитационным излучением. Найдено асимптотическое решение линейного эволюционного уравнения для амплитуды гравитационных возмущений, подстановкой которого в уравнение Эйнштейна, усредненного по гравитационным возмущениям, получено одиночное эволюционное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно макроскопического масштабного фактора. Найдено решение эволюционного уравнения для масштабного фактора в WKB-приближении, которое аналитически описывает процесс перехода от ультрарелятивистского режима космологического расширения на инфляционный.

Ключевые слова: макроскопические уравнения Эйнштейна, поперечные гравитационные возмущения, эволюционные уравнения, инфляция.

1. Гравитационные возмущения изотропной Вселенной

Впервые гравитационные возмущения однородной изотропной Вселенной были введены, классифицированы и исследованы в пионерской работе Е.М. Lifshitz, 1946 [1] (см., например, известную монографию Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [2]). В классических работах R.A. Isaakson, 1968 [3, 4] был изложен подход к построению макроскопической теории гравитации, основанный на усреднении микроскопических (коротковолновых) флуктуации метрики. В ряде работ Автора 1985-1991 (см., например, обзор [5], 2007) разрабатывалась статистическая теория гравитационного взаимодействия, основанная на объединении идей работ R.A. Isaakson и N.N. Bogolyubov. В частности, в работе [6] эти идеи были реализованы для динамического вывода кинетического уравнения для фотонов на фоне локально флуктуирующей, но макроскопически однородной и изотропной Вселенной. В настоящей работе мы реализуем эти идеи для случая макроскопически плоской Вселенной, описываемой уравнениями Эйнштейна с космологическим членом, предполагая, что единственным видом материи в этой Вселенной являются гравитационные волны, т.е., поперечные бесследовые гравитационные возмущения. Как хорошо известно, в отсутствие этих возмущений Вселенная описывается решением де-Ситтера, или в синхронной системе координат - инфляционным решением. Поэтому весьма интересным является не только процесс получения замкнутых эволюционных уравнений, описывающих макроскопическую Вселенную, но и исследование поведения такой динамически обоснованной, макроскопической модели.

1.1. Усреднение уравнений Эйнштейна

Согласно общему подходу к процедуре получения макроскопических уравнений [5] представим метрику пространства-времени в виде:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} \sim \epsilon g_{ik} \quad (1)$$

где $\epsilon \ll 1$ и $g_{ik}^{(0)}$ - макроскопическая метрика пространства-времени, полученная с помощью некоторой операции усреднения:

$$g_{ik}^{(0)} \equiv \overline{g_{ik}}, \quad (2)$$

так что:

$$\overline{\delta g_{ik}} \equiv 0. \quad (3)$$

Предполагая операцию усреднения независимой от координат, потребуем также равными нулю и средние от всех производных возмущений:

$$\overline{\partial_j \delta g_{ik}} = 0; \quad \overline{\partial_{j_l} \delta g_{ik}} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим уравнения Эйнштейна с космологическим членом¹:

$$G_{ik} - \lambda g_{ik} = 0, \quad (5)$$

где $G_{ik} = R_{ik} - 1/2 R g_{ik}$ - тензор Эйнштейна.

Запишем далее уравнения Эйнштейна с космологическим членом во втором приближении по гравитационным возмущениям:

$$G_{ik}^{(0)} + G_{ik}^{(1)} + G_{ik}^{(2)} = \lambda g_{ik}, \quad (6)$$

где $G_{ik}^{(0)} = G_{ik} g_{ik}^{(0)}$, $G_{ik}^{(1)} = \text{Lin}[G_{ik}(\delta g_{ik})] \sim \epsilon G_{ik}^{(0)}$, $G_{ik}^{(2)} = \text{Lin}[G_{ik}(\delta^2 g_{ik})] \sim \epsilon^2 G_{ik}^{(0)}$. и усредним эти уравнения, учитывая соотношения (3), (4): Таким образом, мы получим макроскопические уравнения Эйнштейна во втором порядке по возмущениям гравитационного поля:

$$G_{ik}^{(0)} = -\overline{G_{ik}^{(2)}} + \lambda g_{ik}^{(0)}, \quad (7)$$

согласно которым поправки второго порядка можно рассматривать как тензор энергии-импульса гравитационных возмущений²:

$$T_{ik} = -\frac{1}{8\pi} \overline{G_{ik}^{(2)}}. \quad (8)$$

1.2. Поперечные возмущения пространственно плоской изотропной Вселенной

Метрику с монохроматическими поперечными гравитационными возмущениями пространственно плоской изотропной Вселенной запишем в виде (см., например, [2]):

$$ds_0^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2); \quad (9)$$

$$ds^2 = ds_0^2 + a^2(\eta) h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta; \quad (10)$$

$$h_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} S(\eta) e^{i\mathbf{nr}}, \quad (11)$$

¹ В этой статье тензор Риччи определен сверткой тензора кривизны по первому и третьему индексам, сигнатура метрики (---+).

² Это положение является одним из основных положений теории R.A. Isaakson [3, 4]

где $S(\eta)$ - амплитуда гравитационных волн. Таким образом,

$$g_{ik}^{(0)} = a^2(\eta) \text{Diag}(-1, -1, -1, +1); \quad (12)$$

$$\delta g_{4\alpha} = 0; \quad \delta g_{\alpha\beta} = a^2(\eta) h_{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Далее:

$$h_{\beta}^{\alpha} = h_{\gamma\beta} g_0^{\alpha\gamma} \equiv -\frac{1}{a^2} h_{\alpha\beta}; \quad (14)$$

$$h \equiv h_{\alpha}^{\alpha} \equiv g_0^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{a^2} (h_{11} + h_{22} + h_{33}), \quad (15)$$

причем для поперечных возмущений:

$$h_{\beta}^{\alpha} n_{\alpha} = 0; \quad (16)$$

$$h = 0. \quad (17)$$

Вследствие (17) в линейном по h приближении:

$$\sqrt{-g} \approx \sqrt{-g_0} = a^4. \quad (18)$$

по всем направлениям волнового вектора \mathbf{n}^3

1.3. Усреднение возмущений по направлению волнового вектора

Таким образом, будем разлагать в ряд тензор Эйнштейна по малости амплитуды гравитационных волн $S(\eta)$. При этом, пользуясь изотропией невозмущенной метрики, удобно ввести локальную систему координат, в которой:

$$\mathbf{n} = n(0, 0, 1); \quad \mathbf{s} = (1, 0, 0), \quad (19)$$

где \mathbf{s} - единичный вектор поляризации поперечных возмущений. В этой системе координат

$$h_{12} = 0; \quad h_{11} = -h_{22} = S(\eta) e^{inz}, \quad (20)$$

В произвольной декартовой системе координат трехмерного евклидова пространства E_3 тензор поляризации e_{ik} формулы (15) имеет вид:

$$e_{\alpha\beta} = 2s_{\alpha}s_{\beta} + \frac{n_{\alpha}n_{\beta}}{n^2} - \delta_{\alpha\beta}, \quad (21)$$

$$\mathbf{s}^2 = 1; \quad \mathbf{sn} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = n^2. \quad (22)$$

Легко проверить, что при этом автоматически выполняется калибровочное условие (16).

Заметим, что на фоне однородного изотропного пространства операция усреднения по направлениям сводится к вычислению интеграла по двумерной сфере радиуса n :

$$\overline{\phi(n, \mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi} \int \phi(\mathbf{n}, \mathbf{r}) d\Omega_n. \quad (23)$$

Таким образом, согласно (3), (4) имеем:

$$\overline{h_{\alpha\beta}} = 0; \quad \overline{n_{\gamma} h_{\alpha\beta}} = 0; \dots \quad (24)$$

³ Можно было бы также усреднить и по всем длинам волновых векторов, но эта операция не дает дополнительной информации. О процедуре усреднения и получения макроскопических уравнений Эйнштейна см. [5, 7].

1.4. Нулевое приближение

Разлагая тензор Эйнштейна по возмущениям метрики, в нулевом приближении получим известные выражения:

$$G_{11}^{(0)} = G_{22}^{(0)} = G_{33}^{(0)} = 2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}; \quad (25)$$

$$G_{44}^{(0)} = 3\frac{a'^2}{a^2}. \quad (26)$$

Таким образом, в нулевом по гравитационным возмущениям приближении мы получили бы стандартное уравнение Эйнштейна с λ - членом

$$\frac{a''}{a^4} = \frac{1}{3}\lambda \quad (27)$$

и его инфляционное решение:

$$a = -\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}. \quad (28)$$

1.5. Уравнение для амплитуды гравитационных волн

В линейном по S приближении получим единственные нетривиальные компоненты:

$$G_{11}^{(1)} = -G_{22}^{(1)} \equiv \delta G = \frac{1}{2}e^{inz} \left[S'' + 2\frac{a'}{a}S' + S \left(n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 4\frac{a''}{a} \right) \right]. \quad (29)$$

Ковариантно обобщая результат в E_3 , запишем:

$$G_{\alpha\beta}^{(1)} = (\delta_{\alpha\beta} - 2s_\alpha s_\beta) \delta G. \quad (30)$$

Подставляя выражение (29) в уравнения Эйнштейна (5), получим уравнение для амплитуды поперечных возмущений:

$$S'' + 2\frac{a'}{a}S' + S \left(n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 4\frac{a''}{a} + \lambda a^2 \right) = 0. \quad (31)$$

Это уравнение с учетом соотношений (25) можно записать в более простом виде:

$$S'' + \frac{2}{\eta}S' + (n^2 - 2G_{11}^{(0)} + \lambda a^2)S = 0. \quad (32)$$

В частности, при подстановке сюда инфляционного решения нулевого приближения уравнений Эйнштейна (28) уравнение (32) сводится к следующему:

$$S'' - 2\frac{S'}{\eta} + S \left(n^2 - \frac{3}{\lambda\eta^2} \right) = 0, \quad (33)$$

которое имеет своим решением:

$$S = C_1\eta^{3/2}J_\mu(n\eta) + C_2\eta^{3/2}Y_\mu(n\eta), \quad (34)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3 + 4/\lambda}. \quad (35)$$

В частности, вблизи космологической сингулярности нулевого приближения $\eta \rightarrow -\infty$, стало быть, и $|\mathbf{n}\eta| \rightarrow \infty$ уравнение (32) сводится к уравнению колебаний:

$$S'' + n^2 S = 0, \quad (36)$$

имеющему своим решением обычные ВКБ-решения:

$$S = C_1 e^{in\eta} + C_2 e^{-in\eta}, \quad (37)$$

которые, кстати, можно получить и из точного решения (34) в этом пределе.

1.6. Второе приближение

Вычисляя тензор Эйнштейна второго приближения, получим его нетривиальные компоненты:

$$G_{11}^{(2)} = G_{22}^{(2)} = e^{2inz} \left(\frac{5}{4} S^2 n^2 + SS'' + \frac{1}{4} S'^2 + 2 \frac{a'}{a} SS' \right), \quad (38)$$

$$G_{33}^{(2)} = e^{2inz} \left(\frac{1}{4} S^2 n^2 + SS'' + \frac{3}{4} S'^2 + 2 \frac{a'}{a} SS' \right), \quad (39)$$

$$G_{44}^{(2)} = -e^{2inz} \left(\frac{7}{4} S^2 n^2 + \frac{1}{4} S'^2 + 2 \frac{a'}{a} SS' \right). \quad (40)$$

Ковариантно обобщая результат в E_3 , запишем:

$$G_{\alpha\beta}^{(2)} = e^{2in\mathbf{r}} \left(U \delta_{\alpha\beta} - V \frac{n_\alpha n_\beta}{n^2} \right), \quad (41)$$

где

$$U = \frac{5}{4} S^2 n^2 + SS'' + \frac{1}{4} S'^2 + 2 \frac{a'}{a} SS'; \quad (42)$$

$$V = S^2 n^2 - \frac{1}{2} S'^2. \quad (43)$$

Усредняя (41) по направлениям распространения возмущений с учетом очевидного равенства

$$\overline{n_\alpha n_\beta} \equiv \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} n^2, \quad (44)$$

получим для усредненных компонент $G_{ik}^{(2)}$ следующее выражение:

$$\overline{G_{ik}^{(2)}} = 8\pi(\mathcal{E} + \mathcal{P}) u_i u_k - 8\pi \mathcal{P} g_{ik}, \quad (45)$$

где u^i - времениподобный вектор скорости наблюдателя, а \mathcal{E} и \mathcal{P} - плотность энергии и давление поперечных гравитационных возмущений:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi a^2} \left(\frac{7}{4} S^2 n^2 + \frac{1}{4} S'^2 - 2 \frac{a'}{a} SS' \right) \quad (46)$$

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{8\pi a^2} \left(\frac{11}{12} S^2 n^2 + \frac{5}{12} S'^2 + 2SS' \frac{a'}{a} + SS'' \right) \quad (47)$$

В частности, для ВКБ-решения (37) эти формулы приводят к эффективному ультрарелятивистскому уравнению состояния:

$$\mathcal{E} \approx \frac{3}{16\pi a^2} S^2 n^2; \quad (48)$$

$$\mathcal{P} \approx \frac{1}{16\pi a^2} S^2 n^2 = \frac{1}{3} \mathcal{E}. \quad (49)$$

2. Макроскопические уравнения Эйнштейна второго порядка по гравитационным возмущениям для изотропной пространственно плоской Вселенной

2.1. Эволюционные уравнения

Объединяя полученные результаты в рамках уравнений (6) и (7), получим самосогласованную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих космологическую эволюцию пространственно плоской макроскопической Вселенной с учетом поперечных гравитационных возмущений:

$$S'' + 2\frac{a'}{a}S' + S\left(n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 4\frac{a''}{a} + 2\lambda a^2\right) = 0; \quad (50)$$

$$3\frac{a'^2}{a^2} = \frac{7}{4}S^2 n^2 + \frac{1}{4}S'^2 + 2\frac{a'}{a}SS' + \lambda a^2. \quad (51)$$

При этом уравнение (50) описывает космологическую эволюцию скалярной амплитуды $S(\eta)$ гравитационных возмущений, а уравнение (51) описывает космологическую эволюцию масштабного фактора $a(\eta)$. При этом эволюционное уравнение для гравитационных возмущений является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка относительно амплитуды этих возмущений.

Заметим, что если вместо монохроматических возмущений (11) имеется спектр возмущений:

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) \left[S_n(\eta)e^{-i\mathbf{n}\mathbf{r}} + S_n^*(\eta)e^{-i\mathbf{n}\mathbf{r}} \right] d^3\mathbf{n}, \quad (52)$$

то в эволюционном уравнении для возмущений (50) необходимо сделать замену $S \rightarrow S_n$, а в эволюционном уравнении для масштабного фактора (51) необходимо использовать выражения для средних:

$$n^2 S^2 \rightarrow \overline{n^2 S^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty S_n S_n^* n^2 dn; \quad (53)$$

$$S'^2 \rightarrow \overline{S'^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty S'_n S_n'^* dn; \quad (54)$$

$$S'S \rightarrow \overline{S'S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{2} (S'_n S_n^* + S_n S_n'^*) dn. \quad (55)$$

2.2. Асимптотическое решение эволюционного уравнения для возмущений

Заметим, что с помощью масштабного преобразования амплитуды S

$$S = \frac{\phi}{a} \quad (56)$$

в уравнении (50) можно избавиться от первой производной:

$$\phi'' + Q(n, \eta)\phi = 0, \quad (57)$$

где

$$Q(n, \eta) = n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 5\frac{a''}{a} + 2\lambda a^2. \quad (58)$$

Рассмотрим асимптотику решений этого уравнения, полагая

$$n \gg 1; \quad Q(n, \eta) > 0. \quad (59)$$

Используя теорему [8] об асимптотическом решении уравнения (57), запишем его асимптотические независимые решения:

$$\phi(\eta) \sim Q(n, \eta)^{-1/4} \exp\left\{\pm i \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{Q(n, \eta')} d\eta'\right\} \equiv Q(n, \eta)^{-1/4} e^{\pm i\Phi(n, \eta)}, \quad (60)$$

а также асимптотические значения производных (с учетом уравнения (58)):

$$\phi'(\eta) \sim \pm i Q(n, \eta)^{1/4} \exp\left\{\pm i \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{Q(n, \eta')} d\eta'\right\} \equiv \pm i Q(n, \eta)^{1/4} e^{\pm i\Phi(n, \eta)}; \quad (61)$$

$$\phi''(\eta) \sim -Q(n, \eta)^{3/4} \exp\left\{\pm i \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{Q(n, \eta')} d\eta'\right\} \equiv -Q(n, \eta)^{3/4} e^{\pm i\Phi(n, \eta)}. \quad (62)$$

В дальнейшем в эволюционном уравнении для макроскопического масштабного фактора (51) нам понадобятся значения квадратов амплитуд S и их производных. Для этого нам необходимо вычислить вещественную часть соответствующих величин и кроме того, учитывая случайный характер фазы колебаний, усреднить полученные величины по этой фазе. Поступая таким образом, найдем:

$$\begin{aligned} \phi^2 &\rightarrow \frac{1}{2} |\phi_0|^2 Q(n, \eta)^{-1/2}; \\ \phi'^2 &\rightarrow -\frac{1}{2} |\phi_0|^2 Q(n, \eta)^{1/2}; \\ \phi\phi' &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Учитывая теперь соотношение (56), получим окончательно асимптотические выражения для средних квадратов амплитуд S :

$$\begin{aligned} S^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{S_0^2}{a^2(\eta) \sqrt{Q(n, \eta)}}; \\ SS' &\rightarrow -\frac{1}{2} \frac{S_0^2}{a^2(\eta) \sqrt{Q(n, \eta)}} \frac{a'}{a}, \\ S'^2 &\rightarrow -\frac{S_0^2}{2} \frac{\sqrt{Q(n, \eta)}}{a^2} + \frac{S_0^2}{2} \frac{a'^2}{a^4(\eta) \sqrt{Q(n, \eta)}}. \end{aligned} \quad (64)$$

где S_0 - вещественная константа.

Подставляя эти выражения в уравнение эволюции масштабного фактора (51), получим окончательно макроскопическое уравнение эволюции в асимптотическом приближении:

$$3 \frac{a'^2}{a^4} - \lambda = \frac{S_0^2}{a^4} \left(\frac{7}{8} \frac{n^2}{\sqrt{Q(n, \eta)}} - \frac{1}{8} \sqrt{Q(n, \eta)} + \frac{7}{8} \frac{a'^2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{Q(n, \eta)}} \right). \quad (65)$$

Таким образом, мы получили замкнутое обыкновенное существенно нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка⁴, асимптотически точно описывающее макроскопическую космологическую эволюцию Вселенной, заполненной слабыми поперечными гравитационными возмущениями. В принципе, это уравнение можно исследовать методами качественной теории дифференциальных уравнений. К этому вопросу мы намерены вернуться в дальнейших публикациях. Пока же рассмотрим ВКБ-приближение уравнения (65).

2.3. ВКБ-решение эволюционного уравнения для масштабного фактора

Рассмотрим теперь следующее ВКБ-приближение эволюционных уравнений:

$$n \gg \frac{a'}{a}; \quad n^2 \gg \frac{a''}{a} \Rightarrow n\eta \gg 1. \quad (66)$$

В этом приближении

$$Q(n, \eta) \approx n^2, \quad (67)$$

уравнение (65) примет предельно простой вид:

$$3 \frac{a'^2}{a^4} - \lambda = \frac{3S_0^2 n}{4a^4} \quad (68)$$

Решение этого уравнения можно записать в элементарных функциях, переходя к физическому времени t , так что $ad\eta = dt$. Проводя элементарное интегрирование, получим:

$$a(t) = \left(\frac{3S_0^2 n}{4\lambda} \right)^{1/4} \sqrt{\sinh\left(2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} t\right)}. \quad (69)$$

Решение такого вида было получено ранее Автором (см., например, [9]). Это решение описывает плавный переход с ультрарелятивистской стадии расширения Вселенной на инфляционную стадию при $t > t_c = \sqrt{3/4\lambda}$.

Действительно, при $t \rightarrow 0$ получим из (69):

$$a(t) \approx (S_0^2 n)^{1/4} \sqrt{t}, \quad (70)$$

а при $t \rightarrow \infty$ получим из (69):

$$a(t) \approx \left(\frac{3S_0^2 n}{32\lambda} \right)^{1/4} e^{\sqrt{\lambda/3} t}. \quad (71)$$

⁴ напомним, что функция $Q(n, \eta)$ зависит от a, a', a''

3. Обсуждение результатов

Суммируя результаты статьи, отметим из них наиболее существенные:

1. С помощью процедуры разложения метрики по малым поперечным возмущениям относительно фонового решения Фридмана из уравнений Эйнштейна с λ -членом получены уравнения второго порядка по амплитуде возмущений.
2. Полученные уравнения усреднены по направлениям волнового вектора возмущений.
3. В результате получена замкнутая математическая модель, описывающая космологическую эволюцию Вселенной, заполненной гравитационным излучением. Эта модель состоит из двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые мы для краткости называем эволюционными уравнениями.
4. Первое уравнение эволюции амплитуды монохроматической моды гравитационных возмущений является линейным однородным дифференциальным уравнением.
5. Второе эволюционное уравнение описывает эволюцию макроскопического масштабного фактора Вселенной Фридмана. Это уравнение является существенно нелинейным и определяется решениями эволюционного уравнения для амплитуды гравитационных возмущений.
6. Найдено асимптотическое решение эволюционного уравнения для амплитуды гравитационных возмущений.
7. С помощью найденного решения вычислены макроскопические средние квадраты амплитуды возмущений и их производных.
8. В результате получено замкнутое существенно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее космологическую эволюцию макроскопического масштабного фактора. Параметрами этого уравнения являются энергетический спектр гравитационных возмущений и космологическая постоянная.
9. Найдено WKB-решение этого эволюционного уравнения, аналитически описывающее переход от ультрарелятивистской стадии расширения Вселенной на стадии инфляции.

Таким образом, как отмечалось в работе Автора [10], учет гравитационных возмущений в балансе энергии Вселенной на ее ранних стадиях действительно снимает первичную инфляционную стадию расширения и ставит ее на второе место после ультрарелятивистской стадии.

Заметим, что в недавней работе Chiu Man Ho and Stephen D.H. [11], посвященной квантовой неустойчивости Вселенной де-Ситтера благодаря рождению частиц, получен аналогичный вывод.

В дальнейшем мы намерены, во-первых, исследовать решение эволюционных уравнений численными методами и, во-вторых, построить аналогичную математическую модель, учитывающую другие типы гравитационных возмущений и физических полей.

4. Благодарности

This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

В заключении Автор выражает благодарность членам ВС - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

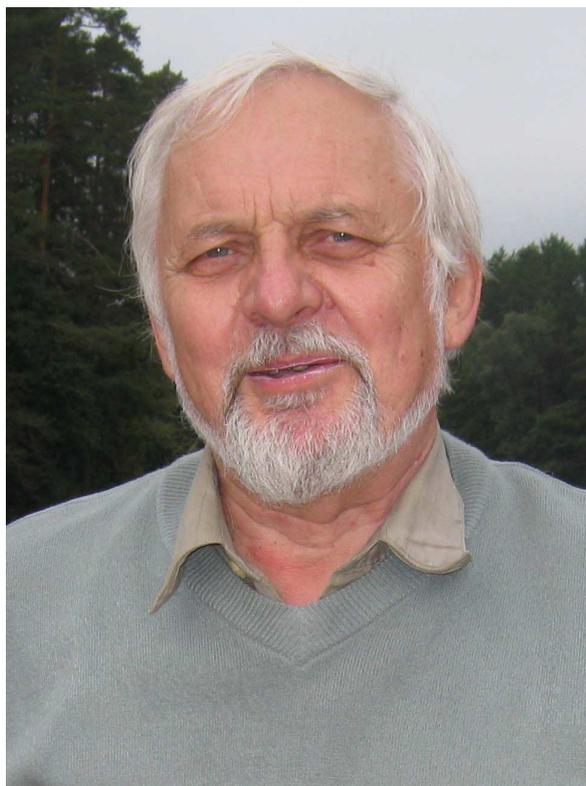
Литература

1. Lifshitz E.M. Journal of Experimental and Theoretical Physics. - 1946. - № 16.- P.697.
2. Landau L.D. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press / L.D. Landau, E.M. Lifshitz.- Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, 1971.
3. Isaakson R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics / R.A. Isaakson // Physical Review. - 1966, № 166, 1263.
4. Isaakson R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor/ R.A. Isaakson// Physical Review.- 1966, №166, 1272.
5. Ignat'ev Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field / Yu.G. Ignat'ev// Gravitation and Cosmology. - 2007. - №13(1). - P. 59-81
6. Ignat'ev Yu.G. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson-Walker universe and isotropization of RELICT radiation by gravitational interactions / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Popov// Astrophysics and Space Science.- 1990, № 163. - P. 153-174
7. Ignatyev Yu.G Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields / Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) // Foliant-Press. - 2010. - Access mode: <http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf>.
8. Fedoruk M.V. Ordinary differential equations / M.V. Fedoruk.- Moskow: Lan, 2003.
9. Ignat'ev Yu. G. EXACT KINETIC MODEL OF RESTORATION OF THERMODYNAMIC EQUILIBRIUM IN AN ACCELERATING UNIVERSE / Yu. G. Ignat'ev // Russian Physics Journal.-2013. - №56 (6). - P. 693 - 706.
10. Ignat'ev Yu.G. Instability Model of the Universe with De Sitter Beginning / Yu.G. Ignat'ev.- 2015.- Access mode: <https://arxiv.org/abs/1508.05375/>.
11. Ho C.M. Instability of Quantum de Sitter Spacetime / C.M. Ho, S.D.H. Hsu. - 2015. - Access mode: <https://arxiv.org/abs/1501.00708/>.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов

**Статистические космологические системы
фермионов с межчастичным фантомным
скалярным взаимодействием**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 530.12+531.51

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ФЕРМИОНОВ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатъев¹, А.А. Агафонов²

¹ ignatov_yu@rambler.ru; Казанский федеральный университет

² a.a.agathonov@gmail.com; Казанский федеральный университет

Исследуется космологическая эволюция статистических систем фермионов с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, в котором вклад в полную энергию скалярного поля “кинетического” члена отрицателен. В результате аналитического и численного моделирования таких систем выявлено наличие четырех возможных сценариев в зависимости от параметров системы и начальных условий. Среди выявленных сценариев присутствуют сценарии с ранней, промежуточной и поздней нерелятивистской стадией космологической эволюции при одновременном наличии необходимой инфляционной стадии.

Ключевые слова: физика ранней Вселенной, связь физики элементарных частиц и космологии, инфляция, фантомное скалярное взаимодействие.

1. Введение

Фундаментальные скалярные поля играют важную роль в понимании динамики ранней Вселенной (см., например, [1], [2]) и с помощью различных модификаций теории гравитации, предложенных как самим А. Эйнштейном [4] (космологический Λ - член), так впоследствии Р. Утиями и Т. Фукуяма [4], А. Минкевич [5], [6] (Poincaré gauge theory of gravity), А. Старобинский [7] ($f(R)$ - гравитация), по-видимому, способны объяснить некоторые основные наблюдательные факты космологии. Тем не менее, некоторые важные факты наблюдательной космологии до сих пор не нашли достаточно убедительного объяснения в рамках стандартного космологического сценария. К таким очевидным фактам, относится, например, существование нерелятивистского этапа расширения Вселенной, необходимого для образования ее структуры. В связи, в частности, и с этим обстоятельством в настоящее время рассматривается широкий спектр феноменологических теорий фундаментального неминимально связанного скалярного поля, в которых вводятся различные связи между скалярным и гравитационным полями (потенциальная, кинетическая, комбинированная). Соответствующие теоретико - полевые конструкции преследуют обычно следующую цель: подобрать такой феноменологический Лагранжиан взаимодействия и его параметры, который обеспечивает космологический сценарий всеми необходимыми этапами: инфляция \rightarrow ультрарелятивистский этап \rightarrow нерелятивистский этап \rightarrow вторичное ускорение. При этом, предшествующий стандартный космологический сценарий, общепринятый в 60-80-е годы XX-го столетия (горячая модель Гамова) встраивается между этапами раннего и позднего космологического ускорения.

В этой статье мы рассматриваем космологические модели, построенные на фундаментальном скалярном взаимодействии. В отличие от феноменологических

неминимальных моделей скалярного взаимодействия мы рассмотрим динамические модели статистических систем скалярно заряженных частиц, в которых некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный *скалярный заряд*. Статистическая система, обладая, скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1982 г одним из авторов статьи [8]-[11] и несколько позже - Г.Г. Ивановым [12].

Перейдем теперь к вопросам численного моделирования космологической эволюции статистических систем с межчастичным *фантомным скалярным взаимодействием*, обладающим отрицательной «кинетической» энергией. С математической точки зрения система дифференциальных уравнений, описывающих космологическую эволюцию таких динамических систем относится к классу жестких систем, численное моделирование которых сопряжено с весьма большими вычислительными трудностями. Жесткий характер системы обусловлен, в первую очередь, уравнениями Эйнштейна, в левой части которых содержится квадрат «постоянной» Хаббла, а в правой содержится знакопеременное выражение, знак которого определяется игрой двух факторов - отрицательной кинетической энергии и положительной потенциальной. Некоторые результаты численного моделирования таких систем были получены в работах [17] (космологическая эволюция вырожденного Ферми-газа), [18] (космологическая эволюция однокомпонентного Больцмановского газа), [19] (комплексное исследование).

2. Математическая модель статистических систем с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием

2.1. Микроскопическая динамика скалярно заряженных частиц

Канонические уравнения движения релятивистской частицы в фазовом пространстве Γ имеют вид (см., например, [9]):

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (1)$$

где $H(x, P)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона. $u^i = dx^i/ds$ - вектор скорости частиц. Вычисляя полную производную от функции динамических переменных $\Psi(x^i, P_k)$, с учетом (1) найдем:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi], \quad (2)$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \Psi] = \frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (3)$$

Отметим, что скобка Пуассона (3) может быть переписана в явно ковариантной форме с помощью оператора ковариантного дифференцирования по Картану, $\tilde{\nabla}_i$:

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ij}^k P_k \frac{\partial}{\partial P_j}, \quad (4)$$

где ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования по Риччи, а Γ_{ij}^k - символы Кристоффеля второго рода относительно метрики g_{ij} базы X . Оператор $\tilde{\nabla}$ определяется таким образом, что

$$\tilde{\nabla}_i P_k \equiv 0 \quad (5)$$

и выполняется следующее *символическое* правило дифференцирования функций:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \nabla_i [\Psi(x), P]. \quad (6)$$

Это правило означает, что для вычисления производной по Картану от функции $\Psi(x, P)$ достаточно вычислить обычную ковариантную производную функции при ковариантном постоянстве вектора импульса. Вследствие этого равенства введенный оператор удобен для выполнения дифференциальных и интегральных операций в фазовом пространстве Γ . Перепишем скобки Пуассона (3) в явно ковариантной форме:

$$[H, \Psi] \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i H, \quad (7)$$

Функция Гамильтона и соотношение нормировки для обобщенного импульса принимают вид¹:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [m_*^{-1}(x)(P, P) - m_*] = 0, \quad (8)$$

$$H(x, P) = 0 \Rightarrow (P, P) = m_*^2, \quad (9)$$

где $m_* = m_*(\Phi)$ - *эффективная масса частиц*.

Инвариантный функционал действия классической частицы в скалярных полях $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ имеет вид

$$S = \int m_* ds, \quad (10)$$

где $m_*(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - *инвариантная эффективная масса частицы* в скалярных полях. Вследствие аддитивности функции Лагранжа эффективная масса частицы должна иметь вид:

$$m_* = m_0 + \sum_r q^{(r)} \Phi_r, \quad (11)$$

где m_0 - некоторая начальная масса покоя и $q^{(r)}$ - заряд частицы относительно скалярного поля Φ_r , которые мы предполагаем функционально независимыми. В частности, для скалярного синглета $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \equiv \Phi$

$$m_* = m_0 + q\Phi. \quad (12)$$

2.2. Макроскопические средние и уравнения переноса динамических средних

Пусть $f_a(x, p)$ есть инвариантная функция распределения a -го сорта частиц в семи-мерном фазовом пространстве $\Gamma = X \times P$, причем

$$dP = \sqrt{-g} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_4} \quad (13)$$

¹ Здесь и в дальнейшем принята универсальная система единиц $\hbar = c = G = 1$.

есть инвариантный элемент объема 3-х мерного пространства импульсов, где p_4 есть положительный корень уравнения (9). С помощью инвариантной функции распределения определяются макроскопические средние некоторой динамической скалярной функции $\psi(x, p)$:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_V U_i dV \int_{P(X)} p^i dP \psi(x, p) f(x, p), \quad (14)$$

где U^i есть вектор скорости макроскопического поля наблюдателей, а τ есть время, измеряемое по часам этих наблюдателей. Внутренний интеграл по импульсному пространству в (14) представляет собой вектор потока динамической величины ψ . В частности, при $\psi = 1$ мы получим из (14) вектор плотности потока частиц:

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(X)} p^i f(x, p) dP, \quad (15)$$

так что:

$$N(\tau) = \int_V n^i U_i dV \quad (16)$$

есть полное число частиц в объеме V в момент времени τ .

Пусть в статистической системе протекают реакции:



где a_A - символы частиц, а ν_A - их числа в каждом канале реакции. Таким образом, обобщенные импульсы начального (I) и конечного (F) состояний равны:

$$p_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha}^{\nu_A} p_A^{\alpha}, \quad p_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\alpha'}^{\nu'_B} p_B^{\alpha'} \rightarrow p_I = p_F. \quad (18)$$

Далее, строгими следствиями общерелятивистских кинетических уравнений являются уравнения переноса динамических величин:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_a \int_{P_0} \psi_a f_a p^i dP_a - \sum_a \int_{P_0} f_a m_* [H_a, \psi_a] dP_a = \\ & - \sum_{\text{by channels}} \int \left(\sum_{A=1}^m \nu_A \psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \psi'_B \right) \times \delta^4(p_F - p_I) (Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F} dP, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4 |M_{IF}|^2 2^{-\sum \nu_A + \sum \nu'_B}$$

- матрица рассеяния канала реакций (17), ($|M_{IF}|$ - инвариантные амплитуды рассеяния);

$$Z_{IF} = \prod_I f(p_A^{\alpha}) \prod_F [1 \pm f(p_B^{\alpha'})];$$

$$Z_{FI} = \prod_I [1 \pm f(p_A^{\alpha})] \prod_F f(p_B^{\alpha'}),$$

знак “+” соответствует бозонам, “-” - фермионам (подробности см. в [10, 11]).

Полагая в (19) $\Psi_a = g_a$, где g_a - некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (17), получим уравнения переноса плотностей потоков числа частиц статистической системы:

$$\nabla_i J_G^i = 0, \quad (20)$$

где:

$$J_G^i = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_P f_a(x, p) p^i dP. \quad (21)$$

- вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a . В частности, закон сохранения (20) всегда имеет место для каждого сорта частиц b ($g_a = \delta_a^b$) при условии упругости их столкновений.

Положим в (19) $\Psi_a = P^k$. Тогда в результате закона сохранения импульса при столкновениях (17), подынтегральное выражение в больших скобках (19) становится равным:

$$\sum_{A=1}^m v_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} v'_B \Psi'_B \equiv P_I - P_F = 0.$$

Тогда, получим уравнения переноса энергии-импульса статистической системы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sum_r \sigma^{(r)} \nabla^i \Phi_r = 0, \quad (22)$$

где введен тензор энергии-импульса статистической системы

$$T_p^{ik} = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_P f_a(x, p) p^i p^k dP \quad (23)$$

и скалярная плотность заряда статистической системы относительно скалярного поля Φ_r , $\sigma^{(r)}$:

$$\sigma^{(r)} = \sum_a \sigma_a^{(r)}, \quad (24)$$

где $\sigma_a^{(r)}$ скалярная плотность заряда a - компоненты статистической системы относительно скалярного поля Φ_r :

$$\sigma_a^{(r)} = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_a^* q_a^{(r)} \int_P f_a(x, p) dP_0. \quad (25)$$

В частности, для синглета (q, Φ) закон сохранения (22) принимает вид:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \quad (26)$$

где (см. [10]):

$$\sigma = \Phi \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int_P f(x, p) dP. \quad (27)$$

Следует отметить, что форма (ТЭИ) (23), а также скалярной плотности заряда (25), найденная для скалярно заряженных частиц при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием канонических уравнений и предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

2.3. Фантомные скалярные поля с притяжением

Функция Лагранжа массивного фантомного скалярного поля с притяжением одновременно заряженных частиц имеет вид [13]:

$$L_s = -\frac{1}{8\pi}(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} + m_s^2\Phi^2), \quad (28)$$

а соответствующий тензор энергии-импульса равен:

$$T_s^{ik} = \frac{1}{8\pi}(-2\Phi^{,i}\Phi^{,k} + g^{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + g^{ik}m_s^2\Phi^2). \quad (29)$$

В этой статье мы будем рассматривать скалярный синглет. В этом случае закон сохранения суммарного тензора энергии-импульса системы “скалярно заряженные частицы + скалярное поле” $T^{ik} = T_p^{ik} + T_s^{ik}$ имеет вид:

$$\nabla_k T^{ik} = -\frac{1}{4\pi}(\square\Phi - m_s^2\Phi - 4\pi\sigma)\nabla^i\Phi = 0, \quad (30)$$

откуда мы получаем уравнение для скалярного поля с источником (31):

$$\square\Phi - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma. \quad (31)$$

2.4. Локально равновесные статистические системы скалярно взаимодействующих частиц

В случае локального термодинамического равновесия (ЛТР), который только и будет рассматриваться в данной статье², функция распределения частиц имеет локально - равновесный вид:

$$f_{(a)}^0(x, p_a) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}, \quad (32)$$

где знаки $-$ и $+$ соответствуют частицам с целым и полуцелым спином, v^i - временноподобный вектор макроскопической скорости статистической системы, так что:

$$(v, v) = 1, \quad (33)$$

θ - локальная температура статистической системы. Далее, μ_a - химический потенциал a -го сорта частиц, при этом химические потенциалы должны удовлетворять условиям химического равновесия:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A \mu_A = \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \mu'_B. \quad (34)$$

2.5. Моменты равновесного распределения

Моменты распределения (32) равны:

$$n_{(a)}^i(x) = n_{(a)}(x) v^i; \quad (35)$$

$$T_p^{ik}(x) = (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^i v^k - \mathcal{P}_p g^{ik}, \quad (36)$$

² Бесстолкновительная кинетическая модель рассматривалась в работах [14], [15].

где $n_{(a)}$ есть плотность числа частиц сорта “ a ”, $\mathcal{E}_p = \sum \mathcal{E}_{(a)}$ и $\mathcal{P}_p = \sum \mathcal{P}_{(a)}$ есть суммарные плотность энергии и давление статистической системы:

$$n_{(a)} = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x \pm 1}}; \quad (37)$$

$$\mathcal{E}_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x \pm 1}}; \quad (38)$$

$$\mathcal{P}_p = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x \pm 1}}; \quad (39)$$

$$T_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x \pm 1}}; \quad (40)$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_{(a)} \Phi)^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x \pm 1}}, \quad (41)$$

где введены две безразмерные скалярные функции:

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_{(a)} = \frac{\mu_{(a)}}{\theta}, \quad (42)$$

а макроскопические скаляры \mathcal{E}_p , \mathcal{P}_p , T_p и σ получаются суммированием соответствующих величин по компонентам системы.

Заметим, что химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа ν_A^a таких частиц, участвующих в реакциях (17), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение:

$$\underline{\mu}_{(a)} = -\mu_{(a)}. \quad (43)$$

Заметим также, что релятивистский химический потенциал связан с импульсом Ферми p_f стандартным релятивистским соотношением:

$$\mu = \sqrt{m_*^2 + p_f^2}. \quad (44)$$

3. Математическая модель локально равновесной самогравитирующей статистической системы скалярно заряженных частиц

3.1. Полная система уравнений

Полная система самосогласованных макроскопических уравнений, описывающих самогравитирующую статистическую систему скалярно заряженных частиц, состоит:

- Во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = 8\pi (T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (45)$$

где T_p^{ik} - определенный выше тензор энергии - импульса статистической системы (36), (38), (39), а T_s^{ik} тензор энергии - импульса скалярного поля (29).

- Во-вторых, из уравнений переноса тензора энергии - импульса частиц (26).
- В-третьих, из уравнения скалярного поля с источником (31).
- В-четвертых, из закона сохранения частиц (20):

$$\nabla_i \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}^i = 0. \quad (46)$$

Выясним, к чему приводят законы сохранения (26) и (46) в условиях LTE (см. [19]). С помощью (35) приведем закон сохранения числа частиц (46) к виду:

$$\nabla_k (\Delta n v^k) = 0, \quad \Delta n \equiv \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}. \quad (47)$$

Из соотношения нормировки вектора скорости (33) вытекает известное тождество:

$$v^k_{,i} v^k \equiv 0. \quad (48)$$

Далее, с учетом определения (36) законы сохранения тензора энергии - импульса статистической системы (26) можно привести к виду:

$$(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^i_{,k} v^k = (g^{ik} - v^i v^k) (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}); \quad (49)$$

$$\nabla_k (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^k = (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}) v^k. \quad (50)$$

Таким образом, формально на 3 макроскопические скалярные функции $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e$ и 3 независимые компоненты вектора скорости v^i макроскопические законы сохранения дают 5 независимых уравнений (47) - (50), так как одно из уравнений (49) является зависимым от остальных вследствие тождества (48). Однако, не все указанные макроскопические скаляры функционально независимы, поскольку все они определяются локально равновесными функциями распределения (32). При разрешенной серии условий химического равновесия, когда независимым остается лишь один химический потенциал, разрешенном уравнении массовой поверхности и заданных скалярном потенциале и масштабном факторе четыре макроскопические скаляра, $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e, \sigma$, определяются двумя термодинамическими скалярами — некоторым химическим потенциалом μ и локальной температурой θ . Таким образом, система уравнений (47) - (50) оказывается полностью определенной.

3.2. Космологическая модель

Рассмотрим сформулированную выше самосогласованную математическую модель применительно к космологической ситуации для пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

В этом случае все термодинамические функции зависят только от времени. Нетрудно убедиться, что законы сохранения сводятся к двум дифференциальным уравнениям относительно двух термодинамических функций μ и θ :

$$\dot{\mathcal{E}}_p + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma \dot{\Phi}; \quad (51)$$

$$\dot{\Delta}n + 3\frac{\dot{a}}{a}\Delta n = 0 \Rightarrow \Delta n a^3 = \text{Const.} \quad (52)$$

При $\Phi = \Phi(t)$ тензор энергии - импульса скалярного поля также принимает вид тензора энергии - импульса изотропной однородной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s)v^i v^k - \mathcal{P}_s g^{ik}, \quad (53)$$

где

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2); \quad (54)$$

$$\mathcal{P}_s = -\frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2), \quad (55)$$

так что:

$$\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{4\pi}. \quad (56)$$

Уравнение скалярного поля в метрике Фрийдмана принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2 \Phi = 4\pi\sigma. \quad (57)$$

К этим уравнениям необходимо добавить нетривиальное уравнение Эйнштейна:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E}, \quad (58)$$

где \mathcal{E} - суммарная плотность энергии фермионов и скалярного поля. Эта система уравнений (51), (52), (57) и (58) относительно переменных $\theta(t)$, $\mu(t)$, $\Phi(t)$, $a(t)$ описывает замкнутую математическую модель космологической эволюции статистической системы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием (см. [13]). В этих уравнениях одно, (52), является алгебраическим, два, (51) и (58), являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка и одно уравнение, (57), является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Таким образом, при приведении этой системы к нормальному виду мы получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с алгебраической связью относительно пяти функций:

$$\mu(t); \theta(t); \Phi(t); Z(t) = \dot{\Phi}; a(t). \quad (59)$$

В условиях полного вырождения макроскопические скаляры однокомпонентной теперь статистической системы равны:

$$n = \frac{p_f^3}{3\pi^2} \equiv \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2}; \quad (60)$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (61)$$

$$\mathcal{P}_p = \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (62)$$

$$\sigma = q \frac{m_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})], \quad (63)$$

причем:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{p_f}{m_*} \quad m_* = |m_0 + q\Phi|; \\ p_f &= \frac{p_0}{a}, \quad p_0 = p_f|_{a=1}. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким образом, в условиях полного вырождения все макроскопические скаляры явно определяются элементарными скалярными функциями $\Phi(t)$ и $a(t)$.

В свою очередь, скалярные функции $\Phi(t)$ и $a(t)$ определяются системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений, (57) и (58):

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma; \quad (65)$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (66)$$

где \mathcal{E}_p - плотность энергии Ферми - системы (61), а \mathcal{E}_s - плотность энергии фантомного скалярного поля (54):

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2). \quad (67)$$

Вводя переменные:

$$Z(t) = \dot{\Phi}; \quad \Lambda(t) = \ln a \Leftrightarrow a = e^\Lambda, \quad (68)$$

приведем уравнения (65) и (67) к виду:

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z + m^2\Phi + 4\pi\sigma(\Lambda, \Phi); \quad (69)$$

$$\dot{\Lambda} = 8\pi\mathcal{E}_p(\Lambda, \Phi) - Z^2 + m_s^2\Phi^2. \quad (70)$$

Для того, чтобы получить из этой системы нормальную систему дифференциальных уравнений, удобную для численного моделирования, необходимо подставить в левую часть уравнения (69) выражение для $\dot{\Lambda}$ из уравнения (70).

3.3. Анализ математической модели

Как указано выше, мы рассматриваем космологические модели с ультрарелятивистским стартом, в котором инфляционный режим расширения может реализовываться на более поздних стадиях. В самом крайнем, ультрарелятивистском пределе $\psi \rightarrow \infty$ для макроскопических скаляров принимают вид:

$$\mathcal{E}_p = \frac{p_F^4}{4\pi^2}; \quad \mathcal{P}_p = \frac{p_F^4}{12\pi^2}; \quad \sigma = 0. \quad (71)$$

Далее, ранним стадиям соответствует условие:

$$m_s t \ll 1. \quad (72)$$

В этом случае уравнение поля принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} = 0. \quad (73)$$

Фантомное поля вблизи сингулярности:

$$\Phi = \Phi_0 = \text{Const}, \quad (m_s t \ll 1). \quad (74)$$

В этом случае уравнение Эйнштейна принимает вид:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = m_s^2 \Phi_0^2 + \frac{2p_0^4}{a^4} \quad (75)$$

и имеет своим решением

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{2} p_0^2}{m_s \Phi_0}} \sqrt{\sinh\left(\frac{2 m_s \Phi_0}{\sqrt{3}} t\right)}. \quad (76)$$

Решение (76) принадлежит к классу решений, полученных в [20] и описывающих плавный переход с ультрарелятивистской стадии $a \sim t^{1/2}$ на стадию инфляции $a \sim e^{v_0 t}$. Как видно из решения (75), переход на инфляционную стадию происходит во времена порядка:

$$t \gtrsim t_{inf} = \frac{\sqrt{3}}{4 m_s \Phi_0}. \quad (77)$$

С другой стороны, условием корректности рассматриваемого приближения является (72). Отсюда можно сделать следующий вывод: при $t_{inf} m_s < 1$ инфляция может развиваться на рассматриваемом промежутке времени, в противном случае вся ранняя эпоха вселенной является ультрарелятивистской. Итак, условием возникновения ранней инфляции (во времена, меньшие m_s^{-1}) в случае системы с фантомным полем является малость начального скалярного потенциала³:

$$\Phi_0 \ll \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (78)$$

Очевидно, что к случаю малого времени $m_s t \ll 1$ целиком относится и случай безмассового фантомного поля. Замечательным является тот факт, что масса скалярного поля m_s выпадает из условия (78). В частности, для безмассового скалярного поля, полагая в (76) $m_s \rightarrow 0$ получим:

$$a(t) = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/4} \sqrt{t} \quad (79)$$

ультрарелятивистскую асимптотику ($\Omega = -1$). Как видно из предыдущего анализа, ультрарелятивистская асимптотика будет справедлива для безмассового фантомного поля до тех пор, пока фермионы остаются ультрарелятивистскими.

Пусть теперь $m_s \neq 0$. Рассмотрим поведение космологической модели при больших временах

$$m_s t \gg 1, \quad (80)$$

предполагая, что на этих временах Ферми - система уже станет нерелятивистской. Поскольку, однако, на таких временах масштабный фактор станет большой величиной, то плотность скалярного заряда σ снова станет малой величиной, и ее можно

³ как это ни представляется, на первый взгляд, парадоксальным

отбросить. Но в уравнении поля (65) при этом нельзя отбросить первые и вторые производные по сравнению с массивным членом, так как мы получили бы $m^2\Phi = 0$.

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 0. \quad (81)$$

В уравнении Эйнштейна (66) по этой же причине можно отбросить вклад частиц в плотность энергии:

$$3\dot{\Lambda}^2 = -\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2. \quad (82)$$

Эта система имеет следующее асимптотическое при $m_s t \rightarrow \infty$ решение:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(t) &= \frac{m_s t}{\sqrt{3}} + \Phi_0, \quad (m_s \neq 0); \\ \Lambda^{(0)}(t) &= \frac{m_s^2 t^2}{6} + \Phi_0 \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $\Phi_0 = \text{Const}$ - произвольная константа. Отметим, что решение (83) обращает в тождество уравнение поля (81), а при подстановке в уравнение Эйнштейна (82) приводит к относительной погрешности порядка $(m_s t)^{-2}$.

Вычислим инвариантное космологическое ускорение относительно найденного решения:

$$\Omega = \frac{\ddot{a}^{(0)} a^{(0)}}{\dot{a}^{(0)2}} = 1 + \frac{\ddot{\Lambda}^{(0)}}{\dot{\Lambda}^{(0)2}} = 1 + \frac{1}{(\Phi^{(0)}(t))^2}. \quad (84)$$

Таким образом, при больших временах ($m_s t \rightarrow \infty$) система выходит на режим инфляционного расширения ($\Omega \rightarrow 1$). Отметим, что можно доказать устойчивость полученного асимптотического решения при больших временах.

Нетрудно видеть, что эффективная масса фермионов при этом растет линейно со временем:

$$m_* \equiv |m + q\Phi| \approx q \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \quad (85)$$

так что фермионы быстро становятся нерелятивистскими ($\Psi \rightarrow 0$). В связи с этим сделаем следующие важные замечания:

1. Холодная полностью вырожденная Ферми - система с очень большими эффективными массами скалярно заряженных фермионов может стать хорошей моделью темной материи.
2. На определенном этапе космологической эволюции гравитационные неустойчивости в нерелятивистской материи могут привести к возникновению обособленных областей с темной материей.
3. Стандартные Куперовские механизмы в Ферми - системах с притяжением частиц могут привести к образованию бозонов из пар фермионов и, тем самым, к сверхтекучести областей темной материи.
4. При росте эффективных масс фермионов выше планковского значения, т.е., согласно (85) при

$$m_* \gg m_{\text{Pl}} \Leftrightarrow q \frac{m_s t}{\sqrt{3}} \gg 1, \quad (86)$$

массивные фермионы могут, в принципе, могут образовать устойчивые первичные черные дыры, скорее всего, с учетом теорем Хоукинга о черных дырах, в варианте со сверхтекучими квази-бозонами с нулевым спином.

4. Численное моделирование космологической эволюции

Итак, перейдем теперь к результатам численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (65), (66) с начальными условиями и определениями плотностей энергии и скалярного заряда (61), (63) и (67). На представленных ниже графиках эта перекалибровка произведена, так что всюду время отсчитывается от момента космологической сингулярности в Планковской шкале времени. Все представленные на графиках величины также измеряются в Планковских единицах. Далее, коэффициентом баратропы, κ , мы будем называть отношение полного давления системы к ее полной плотности энергии:

$$\kappa = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_s}{\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s}. \quad (87)$$

Как известно (см., например, [19]), величина инвариантного космологического ускорения Ω связана с коэффициентом баратропы κ соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa), \quad (88)$$

так что ультрарелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 1/3$ соответствует значение $\Omega = -1$; нерелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 0$ соответствует $\Omega = -1/2$; значению $\kappa = -1/3$ соответствует $\Omega = 0$; инфляционному (вакуумному) уравнению состояния $\kappa = -1$ соответствует $\Omega = +1$, значениям $\kappa < -1$ соответствует гиперинфляция $\Omega > 1$.

Введем следующие характерные моменты времени, важные для понимания механизма космологической эволюции системы фермионов с фантомным скалярным полем:

1. Комптоновский момент времени по отношению к массе квантов скалярного поля:

$$t_s = \frac{1}{m_s}, \quad m_s \neq 0. \quad (89)$$

2. Для безмассового скалярного поля с источником можно определить аналогичный момент времени по отношению к эффективной массе скалярного поля. В работах [14], [15] (а также в [16]) аналитическими методами показано, что плотность скалярного заряда σ при определенных условиях может играть роль массивного члена в уравнении скалярного поля. При этом можно ввести эффективную массу скалярного поля даже в случае $m_s = 0$:

$$m_s^* = \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\Phi}}. \quad (90)$$

Поэтому, даже при нулевой массе квантов скалярного поля при наличии функции источника σ скалярное поле ведет себя во многих случаях как массивное

скалярное поле с той лишь разницей, что эффективная масса (90) зависит от космологического времени $m_s^*(t)$. Соответственно эффективной массе введем комптоновский момент времени:

$$t_s^* = \frac{1}{m_s^*}, \quad m_s = 0. \quad (91)$$

3. Момент времени t_η , когда становятся равными плотности энергии фермионов и скалярного поля:

$$\mathcal{E}_s(t_\eta) = \mathcal{E}_p(t_\eta) \Leftrightarrow \eta_s(t_\eta) = 1. \quad (92)$$

Заметим, что таких момента времени может быть два.

4. Момент времени t_r перехода фермионов от ультрарелятивистского состояния к нерелятивистскому:

$$\psi(t_r) = 1. \quad (93)$$

4.1. *Случай массивного фантомного скалярного поля с минимальным взаимодействием ($\sigma = 0$)*

Численное интегрирование выявило три характерные стадии космологической эволюции в этом случае:⁴

1. $t \lesssim t_s$: доминирование фермионов;
2. $t_s \lesssim t \lesssim t_\eta$: конкуренция фермионов и скалярного поля;
3. $t_\eta \lesssim t < +\infty$: доминирование скалярного поля.

Ниже приведены графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 100$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Всюду на графиках Рис. 1 - Рис. 4: жирная линия - $m_s = 10^{-2}$, тонкая линия - $m_s = 10^{-4}$, средне - пунктирная линия - $m_s = 10^{-6}$, мелко - пунктирная линия - $m_s = 10^{-8}$. Также всюду на этих графиках, как и на всех остальных, по оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма времени от момента космологической сингулярности в Планковской шкале, $\log_{10} t$.

4.2. *Случай безмассового ($m_s = 0$) фантомного скалярного поля с источником*

В этом случае система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - 4\pi\sigma = 0; \quad (94)$$

$$\dot{\Lambda}^2 = \frac{8\pi}{3}(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (95)$$

где плотность энергии скалярного поля равна

$$\mathcal{E}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{8\pi} \quad (96)$$

⁴ Основные закономерности эволюции на ранних и поздних стадиях подтверждают приведенные выше результаты аналитического исследования.

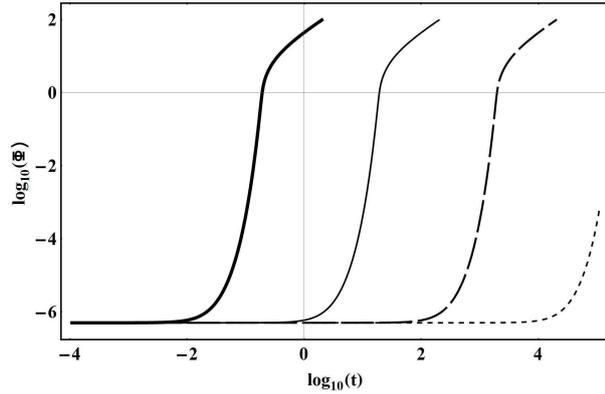


Рис. 1. Эволюция потенциала Φ . По оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

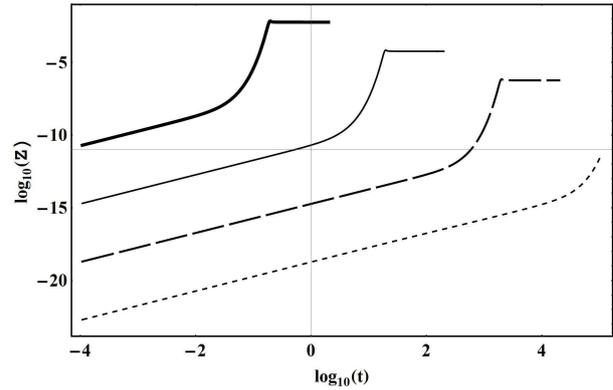


Рис. 2. Эволюция производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

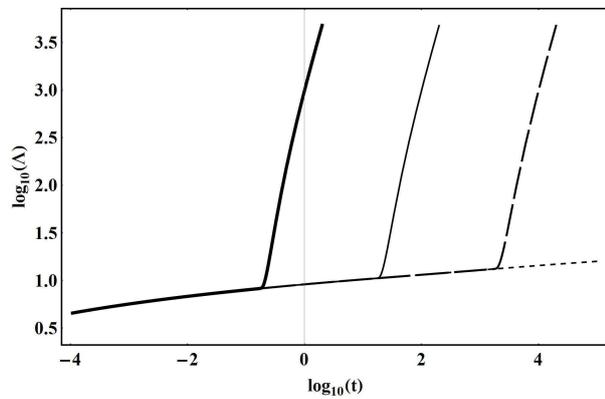


Рис. 3. Эволюция логарифма масштабной функции $\Lambda(t) = \exp a(t)$. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма, $\log_{10} \Lambda$, т.е., $\log_{10}(\ln a(t))$.

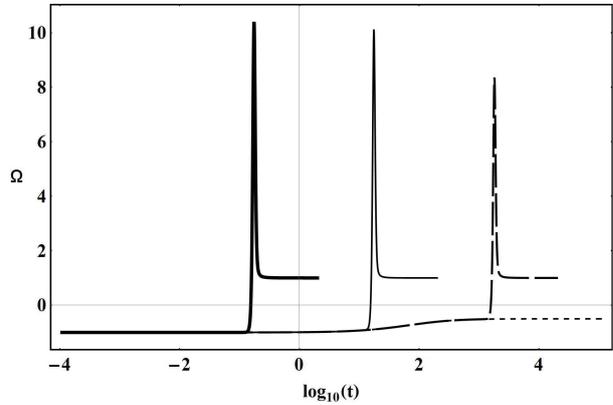


Рис. 4. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

и может быть только отрицательной, причем в начальный момент времени $t = 0$ она равна нулю. В результате, космологический сценарий для массивного скалярного поля раздела 4.1 изменился, в нем по-прежнему присутствуют три стадии, но на последней стадии доминируют фермионы:

1. $t \lesssim t_s^*$: доминирование ультррелятивистских фермионов;
2. $t_s^* < t \lesssim t_r$: доминирование скалярного поля;
3. $t_r < t < +\infty$: доминирование нерелятивистских фермионов.

На приведенных ниже графиках (Рис. 5 - Рис. 8) представлены результаты численного моделирования космологической эволюции системы вырожденных фермионов с безмассовым фантомным скалярным полем. Ввиду на указанных графиках приняты следующие значения параметров:

$p_0 = 0.01$, $m_0 = 0$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Жирная линия - $q = 0.01$, тонкая линия - $q = 0.1$, средне - пунктирная линия - $q = 1$, мелко - пунктирная линия - $q = 5$.

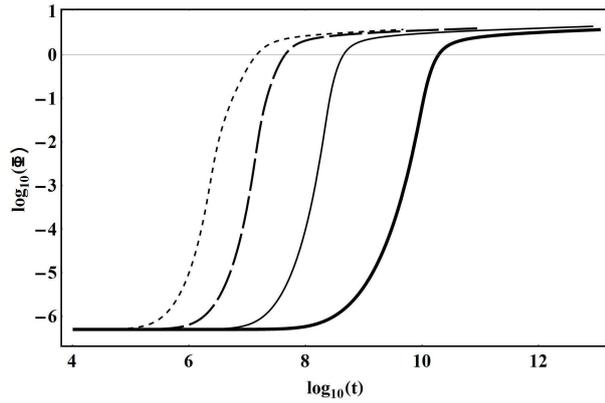


Рис. 5. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

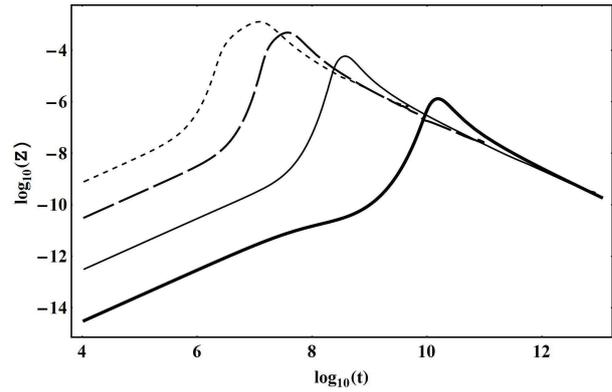


Рис. 6. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$

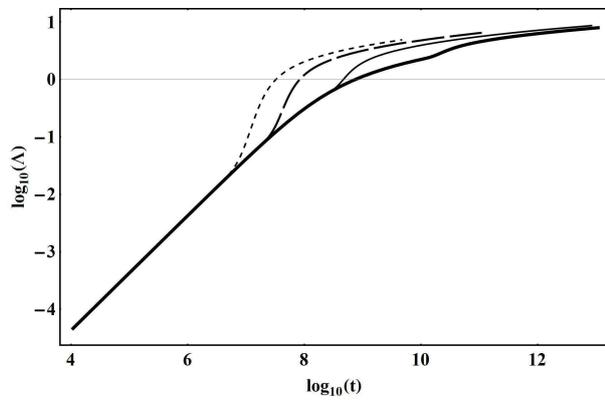


Рис. 7. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

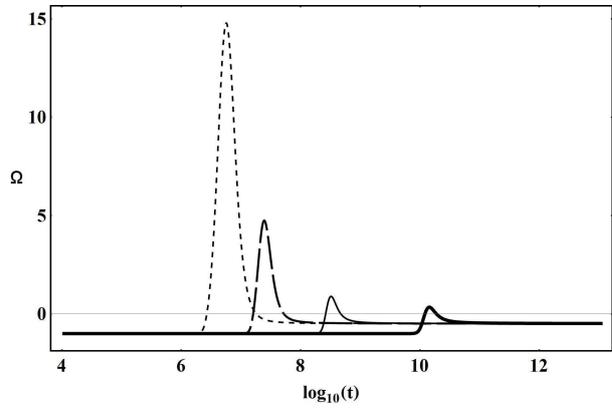


Рис. 8. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

4.3. Случай перехода от релятивистской стадии к инфляции через нерелятивистское плато для массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником ($\sigma \neq 0$)

При малых значениях m_s переход к инфляционной стадии отодвигается на поздние времена и ферми - система успевает к этому моменту стать нерелятивистской. На графике коэффициента баротропии появляется характерное нерелятивистское плато ($\kappa = 0$) перед фантомным всплеском. При увеличении m_s всплеск сдвигается к малым временам, обрезая плато вплоть до его полного исчезновения. В этом случае происходит переход от релятивистской стадии к инфляции через фантомный всплеск.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 1, m_0 = 0.1, q = 0.001, \Phi(0) = 0.05$. Жирная линия - $m_s = 10^{-8}$, тонкая линия - $m_s = 10^{-6}$, средне - пунктирная линия - $m_s = 10^{-3}$, мелко - пунктирная линия - $m_s = 10^{-1}$.

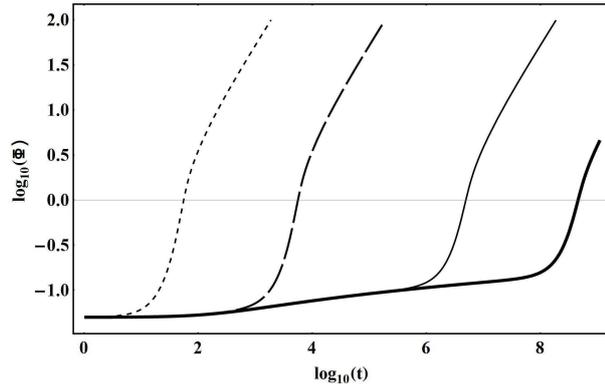


Рис. 9. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

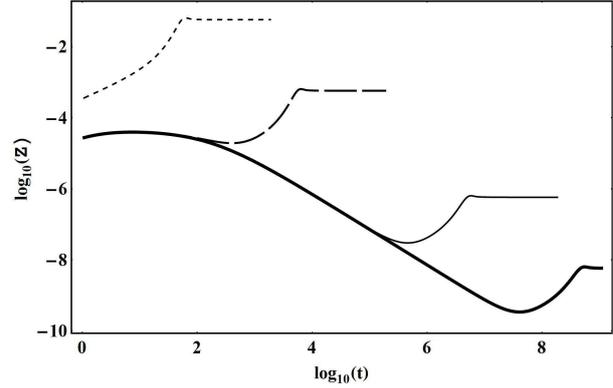


Рис. 10. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

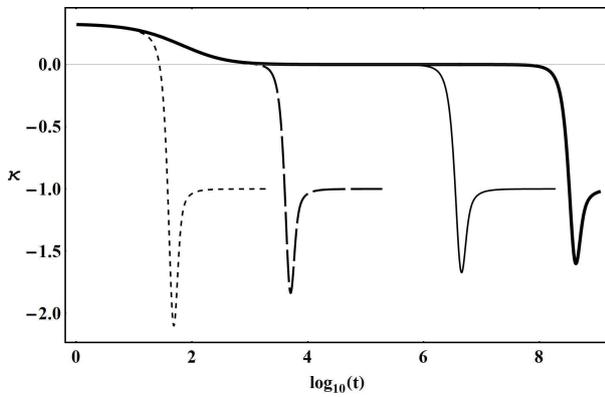


Рис. 11. Эволюция коэффициента баротропы κ .

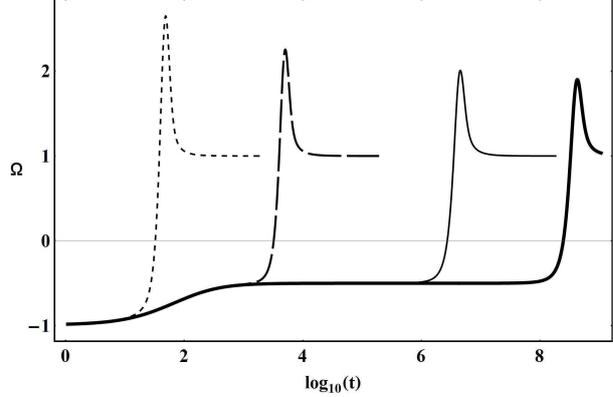


Рис. 12. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

4.4. Случай двух стадий ускорения с промежуточной нерелятивистской стадией для массивного фантомного скалярного поля с источником

При определенных значениях параметров системы можно наблюдать две стадии ускорения: первая - временное доминирование скалярного поля за счет достаточно больших значений эффективной массы скалярного поля m_s^* на соответствующих временах ($m_s^* t > 1$) и вторая - устойчивое доминирование скалярного поля на временах $m_s t > 1$. Между инфляционными стадиями может возникать нерелятивистское плато ($\kappa = 0$, $\Omega = -1/2$).

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-8}$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-8}$. Жирная линия - $q = 1$, тонкая линия - $q = 0.1$, средне - пунктирная линия - $q = 0.01$, мелко - пунктирная линия - $q = 0.001$.

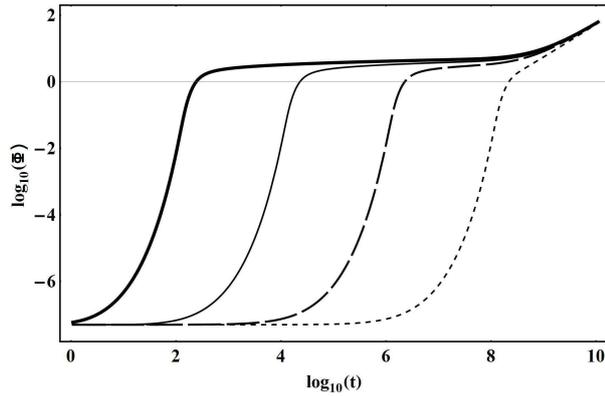


Рис. 13. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

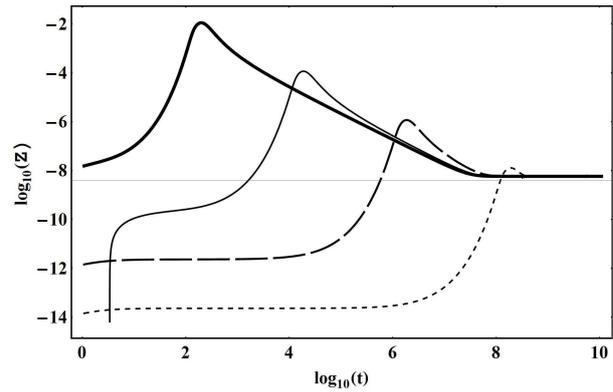


Рис. 14. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

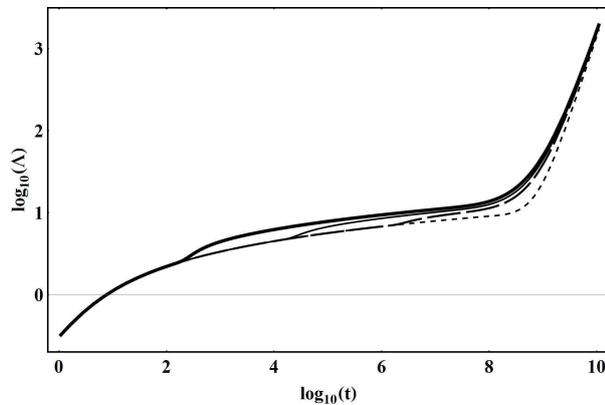


Рис. 15. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

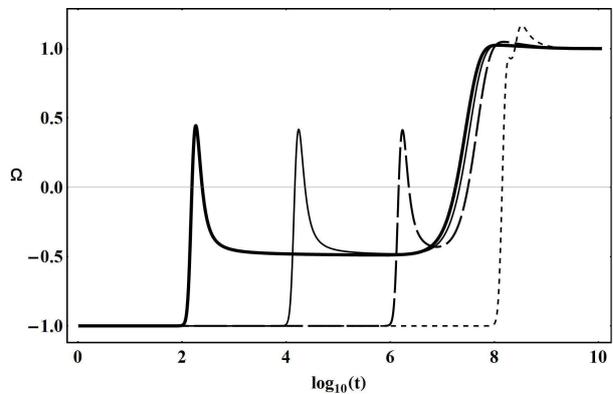


Рис. 16. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

5. Обсуждение результатов

Таким образом, проведенные исследования выявили следующие закономерности космологической эволюции статистических систем фермионов с фантомным скалярным взаимодействием.

1. В процессе космологической эволюции в таких системах обязательно возникают всплески ускорения Ω , которые можно охарактеризовать тремя параметрами: моментом времени максимума всплеска t_m , полушириной всплеска Δt и высотой h всплеска в максимуме.
2. Статистические системы фермионов с фантомным скалярным взаимодействием обнаруживают тенденцию к образованию устойчивых режимов с постоянным ускорением (этапов космологической эволюции) $\Omega = -1$ ($\kappa = 1/3$, ультра-релятивистское состояние), $\Omega = -1/2$ ($\kappa = 0$, нерелятивистское состояние) и $\Omega = 1$ ($\kappa = -1$, инфляционное, вакуумное состояние).
3. Динамические особенности статистических систем с фантомным скалярным взаимодействием слабо зависят от типа статистики систем частиц [19].
4. Четко выявляются 4 различных типа принципиально различных космологиче-

ских сценариев для статистических систем частиц с фантомным скалярным взаимодействием в зависимости от параметров системы (фундаментальных констант и начальных условий):

- 1-й тип. Ультррелятивистский старт → всплеск ускорения → инфляционная стадия (Рис. 17). Этот сценарий осуществляется для случая минимального взаимодействия ($\sigma = 0 \rightarrow q = 0$) массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).
- 2-й тип. Ультррелятивистский старт → всплеск ускорения → нерелятивистская стадия (Рис. 18). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и безмассового скалярного поля ($m_s = 0$).
- 3-й тип. Ультррелятивистский старт → плавный переход на нерелятивистскую стадию → небольшой всплеск ускорения → инфляционная стадия (Рис. 19). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).
- 4-й тип. Ультррелятивистский старт → небольшой всплеск ускорения → нерелятивистская стадия → переход на инфляционную стадию (Рис. 20). Этот сценарий также осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

5. Самые большие и вместе с тем поздние всплески космологического ускорения (порядка $\Omega \sim 10^2$ и даже большие)⁵ во времена $t_m \sim 10^5 \div 10^9$ присущи космологическому сценарию 1-го типа.

Отметим, что, фактически, все рассмотренные выше явления имеют место быть на постпланковских временах, когда необходимость квантования гравитации исчезает. Заметим, что как известно (см., например, [2]), согласно современным наблюдениям для решения проблем горизонта и плоскостности вселенной достаточно длительность инфляции $10^{-42} \div 10^{-9}$ s (см., например, [2]), т.е., достаточно послепланковская инфляция $t \sim 10 \div 10^{24}$ в планковских масштабах времени. В эти масштабы укладываются даже длительности всплесков космологического ускорения. Далее отметим очень важный факт, выявленный в данном исследовании. В ходе космологической эволюции естественно образуются нерелятивистские этапы, как ранние (3-й тип сценария), так промежуточные (четвертый тип сценария) и конечные (2-й тип сценария). Существование этих этапов даст возможность развития гравитационной неустойчивости, следовательно, образование космической структуры. При этом 2-й и 4-й типы сценария ограничивают сверху и снизу масштаб неустойчивых мод $kt > 1$. Таким образом, на основе модели с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, по-видимому, возможно создание более полной космологической модели, способной описать основные наблюдательные данные.

В заключении Авторы выражают благодарность членам MW - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

⁵ В работе [19] приводятся примеры всплесков космологического ускорения до $\Omega \sim 10^8 \div 10^{10}$.

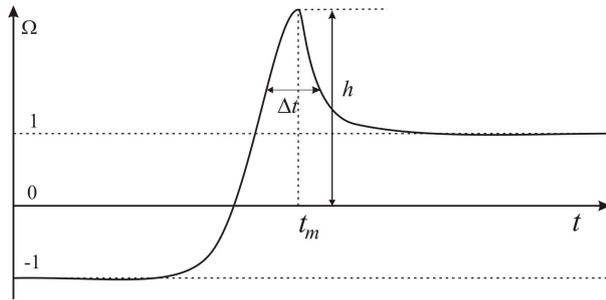


Рис. 17. Первый тип космологического сценария. Этому сценарию отвечают следующие характерные параметры: $t_m \sim 10^{-1} \div 10^3$; $\Delta t \sim 2$; $h \sim 10$, т.е., ранний всплеск ускорения и ранний переход на инфляционную стадию.

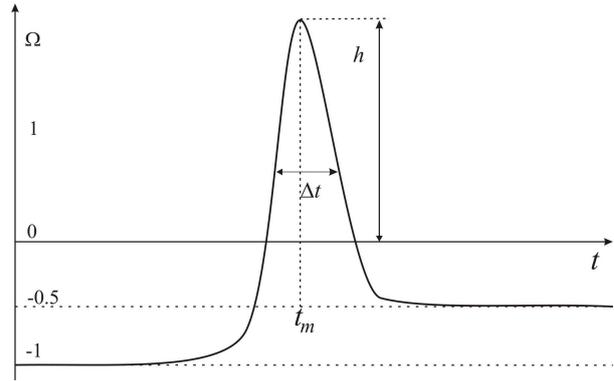


Рис. 18. Второй тип космологического сценария. Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^6 \div 10^9$; $\Delta t \sim 10^6$; $h \sim 10$, т.е., достаточно длительный промежуточный этап сверхускорения с окончательным переходом на нерелятивистскую стадию.

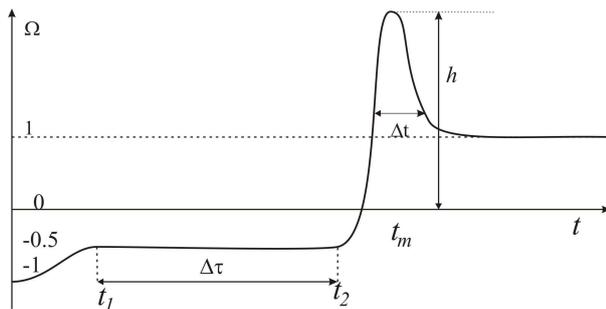


Рис. 19. Третий тип космологического сценария. Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_1 \sim 10^2$ (время смены ультрарелятивистской стадии на нерелятивистскую стадию); $\Delta \tau = 10^3 \div 10^8$ (длительность нерелятивистской стадии), $t_m \sim 10^2 \div 10^9 \div 10^9$, $h \sim 2 \div 3$, $\Delta t \sim 10^6 \div 10^8$.

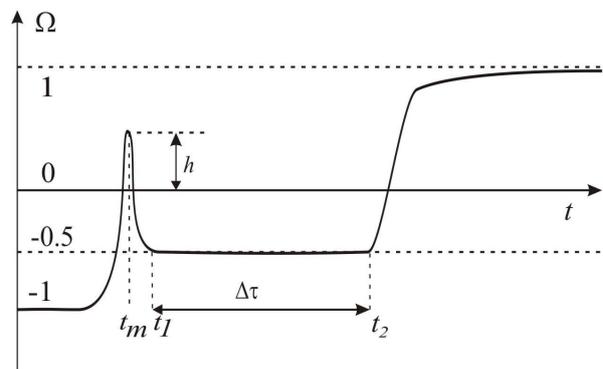


Рис. 20. Четвертый тип космологического сценария. Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^2 \div 10^6 \div 10^9$, $t_1 \sim 10^2 \div 10^6$ (начало нерелятивистской стадии); $\Delta \tau \sim 10^7$ (длительность нерелятивистской стадии), $h \sim 0.5$.

Литература

1. Weinberg S. *Cosmology* / S. Weinberg. - Oxford University Press, 2008.
2. Gorbunov D.S. *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory* / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov. - Singapore: World Scientific, 2011.
3. Einstein A. *Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity* / A. Einstein // *Sitzungsber. preus, Akad. Wiss.* - 1917. - №1. - P. 142-152.
4. Utiyama R. *Gravitational Field as a Generalized Gauge Field* / R. Utiyama, T. Fukuyama // *Progr. Theor. Phys.* - 1971. - № 45. - P. 612-627.
5. Minkevich A.V. *Gauge Approach to Gravitation and Regular Big Bang Theory* / A.V. Minkevich // *Gravitation and Cosmology.* - 2006. - №12. - P. 11-20.

6. Minkevich A.V. Regular accelerating Universe without dark energy / A.V. Minkevich, A.S. Garkun, V.I. Kudin // *Classical and Quantum Gravity*. - 2007. - № 24. - P. 5835-5848.
7. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity / A.A. Starobinsky // *Physics Letters*. - 1980. - № 91(1). - P. 99-102.
8. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1982. - № 25(4). - P. 372-375.
9. Ignat'ev Yu.G. Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in the general theory of relativity / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(8). - P. 686-690.
10. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(8). - P. 690-694.
11. Ignat'ev Yu.G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(12). - P. 1068-1072.
12. Ivanov G.G. Stationary macroscopic motions of a relativistic gas and its relation to the symmetries of the gravitational field / G.G. Ivanov // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(1). - P. 579-584.
13. Ignatyev Yu. G. Statistical systems with phantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models / Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov, D.Yu. Ignatyev // *Gravitation and Cosmology*. - 2014. - № 20(4). - P. 304--308.
14. Ignat'ev Yu.G. Collisionless self-gravitating statistical systems of scalarly interacting particles / Yu.G. Ignat'ev // *Gravitation and Cosmology*. - 2016. - № 22(1). - P. 20-25.
15. Ignatyev Yu. G. Relativistic Kinetic Theory of Statistical Systems with Conformally Invariant Interparticle Scalar Interaction / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 2016. - № 59(1). - P. 20-28.
16. Ignat'ev Yu.G. Statistical Cosmological Systems of Strongly Degenerate Scalar Charged Fermions / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov // *Space, Time and Found. Interact.* - 2016. - № 1(14). - P. 91-103.
17. Ignatyev Yu. G. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles / Yu. G. Ignatyev, A. A. Agathonov // *Gravitation and Cosmology*. - 2015. - № 21(2). - P. 105-112.
18. Ignat'ev Yu.G. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases / Yu.G. Ignat'ev, M. L. Mikhailov // *Russian Physics Journal*. - 2015. - № 57(12). - P. 1743-1752.
19. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov, M.L. Mikhailov, D.Yu. Ignatyev // *Astroph. Space Sci.* - 2015. - № 357(61).
20. Ignat'ev Yu.G. Establishment of thermodynamic equilibrium in cosmological model with an arbitrary acceleration / Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) // *Gravitation and Cosmology*. - 2013. - № 19(4). - P. 232 - 247. - Access mode: <https://arxiv.org/abs/1306.3633/>.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

M.N. Kirsanov

**Analytical study of the limiting properties of a
suspended cable system with a rigid beam**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

UDC 531.1

ANALYTICAL STUDY OF THE LIMITING PROPERTIES OF A SUSPENDED CABLE SYSTEM WITH A RIGID BEAM

M.N. Kirsanov¹¹ c216@ya.ru; National Research University MPEI

Analytical model of a cable-stayed fan designed bridge is examined. The statically indeterminate cantilever beam suspended on k elastic cables is revealed. The law of distribution of forces in the cables is identified. The obtained dependence of solutions on the number of cables can identify the asymptotic properties of the deflection of the structure and determine the optimal ratio of the size of the system under which the deflection becomes minimum. The algorithm for solving recurrence equations, method of induction and the gamma function are used in the analytic transformations. The exact solutions are obtained by means of computer algebra system Maple.

Keywords: computer algebra system, Maple, suspended cable system with a rigid beam.

Introduction. Statement of the problem

Static analysis of cable-stayed resilient systems with real properties, structure and size generally is not particularly difficult and famous [1, 2]. However, the practical engineer and designer is often faced with the problem of assessing their computing. The test calculations of such complex systems, such as cable systems, are needed for practical and theoretical studies [3]. Exact analytical evaluations of solutions are particularly difficult to obtain. In many cases it is either difficult or impossible. This paper proposes a method for obtaining analytical solutions, based on the method of induction [4], combined with the capabilities of modern systems of analytical calculations.

Consider a cable-stayed system (cable-stayed bridge, fan design) consisting of a rigid cantilever beam hinged on a fixed support which hangs on k cables (Fig. 1, $k = 3$). Definitely the rigid beam does not enough accurate simulate the real system. However, to achieve the objective we had to go to such simplification. Some justification for this model is the real-life design with a large beam rigidity.

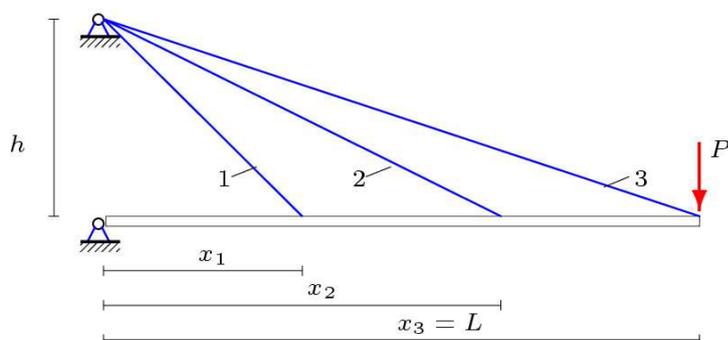


Fig. 1. The cable-stayed system, $k = 3$

The system is $k - 1$ times statically indeterminate. The vertical force P is attached to the beam. We number the cables from 1 to k . In the solution the length of the cables will

included

$$l_j = \sqrt{h^2 + x_j^2}.$$

Coordinates x_j equally spaced at intervals of $a = L/k$ attachment points cables to the beam have the form

$$x_j = j a, \quad j = 1, \dots, k,$$

with $L = x_k$ – length of the console.

Determination of forces in cables

Static indeterminacy is disclose by the force method. As a primary determinate structure we will take a beam hanging on the k -th (far right) cable. Let's take cables stresses with the numbers $1, \dots, k-1$ as redundant. Cable stiffness EF are same for all cables. The cables (except the k -th) are disconnected and the support of the cables $1, \dots, k-1$ are replaced by the forces X_j , $j = 1, \dots, k-1$ (Fig. 2).

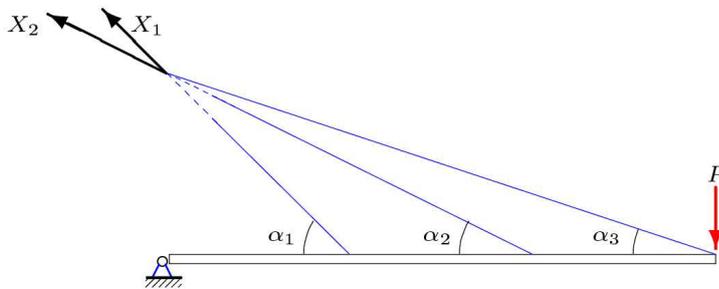


Fig. 2. the primary system 1

Let $S_{i,j}$ – be a force of a cable $i = 1, \dots, k$ from the action of a unit force in the j -th cable, $j = 1, \dots, k-1$. Forces $S_{i,k}$, $i = 1, \dots, k$ are calculated in the i -th cable per load P . Obviously, $S_{k,k} = P / \sin \alpha_k = Pl_k / h$. The forces in other cables, which are disconnected from the support in the core system are equal to zero $S_{i,k} = 0$, $i = 1, \dots, k-1$. We have the following expressions

$$\begin{aligned} S_{i,i} &= 1, \quad i = 1, \dots, k-1, \\ S_{i,j} &= 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad j = 1, \dots, k, \\ S_{k,j} &= -j l_k / (k l_j), \quad j = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Forces $S_{i,j}$ is the matrix which has a size $k \times k$. The lines corresponds to the numbers of cables, columns, $1, \dots, k-1$ – numbers of unit stresses, the last column – stresses of cable of the load P . Obviously, the whole load is taken by the last right cable. For $k = 3$ the matrix takes the form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} \frac{l_3}{l_1} & -\frac{2}{3} \frac{l_3}{l_2} & \frac{P l_3}{h} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

The coefficients of the compatibility equations are computed as well.

$$\sum_{j=1}^{k-1} \delta_{i,j} X_j + \delta_{i,p} = 0, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (2)$$

According to Maxwell's-Mohr formula we obtain

$$\begin{aligned}
 EF\delta_{i,j} &= \sum_{m=1}^k S_{m,i} S_{m,j} l_m = \frac{i j l_k^3}{k^2 l_i l_j}, \\
 i &\neq j, \quad i, j = 1, \dots, k-1, \\
 EF\delta_{i,i} &= \frac{i^2 l_k^3}{k^2 l_i^2} + l_i, \\
 EF\delta_{i,p} &= -P \frac{i l_k^3}{k l_i h}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

In matrix form, for $k = 3$ the system has the form

$$\begin{bmatrix} \frac{l_3^3}{9l_1^2} + l_1 & \frac{2l_3^3}{9l_1 l_2} \\ \frac{2l_3^3}{9l_1 l_2} & \frac{4l_3^3}{9l_2^2} + l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_3^3 P}{3l_1 h} \\ -\frac{2l_3^3 P}{3l_2 h} \end{bmatrix} = 0.$$

By induction [4] we find the solution of the system $k-1$ of the compatibility equations (2)

$$X_j = P k j l_j \beta_{j,k} / D, \quad j = 1, \dots, k-1, \tag{4}$$

where $\beta_{j,k} = \prod_{i=1}^k l_i^3 / l_j^3$ and D – determinant of the system

$$D = h \sum_{j=1}^k j^2 \beta_{j,k}. \tag{5}$$

The force in the k -th (right) cable

$$X_k = \sum_{i=1}^{k-1} S_{k,i} X_i + S_{k,k} = P k^2 l_k \beta_{k,k} / D.$$

The formal substitution $j = k$ in the expression (4), obtained strictly for $j = 1, \dots, k-1$ gives the same value. This allows to continue using the solution (4) for all the cables $j = 1, \dots, k$.

Another primary determinate structure

The best way to check for a solution of statically indeterminate system is to choose a different primary determinate structure.

We introduce a rigid beam with joints of the points of the attached cables, divided by k hinged parts.

This system becomes statically determinate. Take it for the primary system of the method of forces. The moments M_i , $i = 1, \dots, k-1$, introduced in the joints will be unknown of this method (Fig. 3).

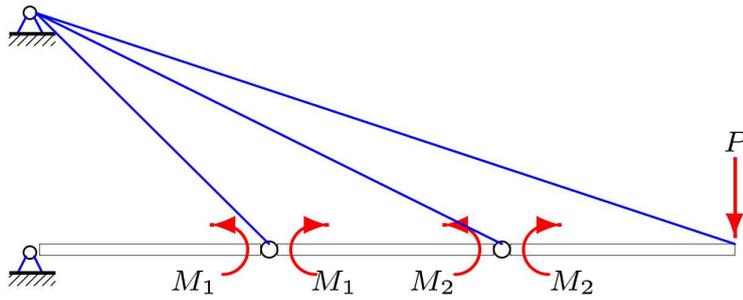


Fig. 3. the primary system 2

To determine the forces $S_{i,\xi}$, $i = 1, \dots, k$ in the rigging of the actions unit moments, corresponding unknowns M_ξ , $\xi = 1, \dots, k-1$, we obtain the system of k equations. Each equation is the sum of the moments around the hinge with the coordinate x_{k-j} , $j = 1, \dots, k$, (the moment point with the number j) of all forces that are attached to the severed right on the hinge side of the system. Therefore, moving from right to left on the beam, considering every time the balance of the right part from the hinge of the beam. The point has the number $k - \text{fixed support beams}$. The system of equations for the forces of the cables of a single moment of action which is in accordance with an unknown number ξ , is given by

$$\begin{aligned} \Phi_j &= 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad j \neq k - \xi, \\ \Phi_{k-\xi} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

To refer to the sum of the moments we have introduced an auxiliary function

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^j i a S_{i+k-j,\xi} \sin \alpha_{i+k-j}.$$

To calculate the forces from the actions of all the individual moments it is need to consistently make $k - 1$ equations (6), respectively, for $\xi = 1, \dots, k - 1$.

Forces in the cables of the unit moments and loads of P are listed in the matrix similar to (1). Its non-zero elements are given by

$$\begin{aligned} S_{i,i} &= -2/(a \sin \alpha_i), \\ S_{i+1,i} &= 1/(a \sin \alpha_{i+1}), \quad i = 1, \dots, k-1, \\ S_{i,i+1} &= 1/(a \sin \alpha_i), \quad i = 1, \dots, k-2. \end{aligned}$$

Forces due to the load action P in all cables, except the far right cable, appended at the end of the beam are zero. In the k -th cable the force $S_{k,k} = P/\sin \alpha_k$.

For $k = 3$, we have a matrix of forces (the last column corresponds to the forces due to the load P)

$$\begin{bmatrix} -\frac{2l_1}{ah} & \frac{l_1}{ah} & 0 \\ \frac{l_2}{ah} & -\frac{2l_2}{ah} & 0 \\ 0 & \frac{l_3}{ah} & \frac{Pl_3}{h} \end{bmatrix}.$$

The non-zero coefficients of the compatibility equations for the unknown moments

$M_j, j = 1, \dots, k-1,$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \delta_{i,j} M_j + \delta_{i,p} = 0, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad (7)$$

that calculated similar to (3) are calculated according to the formula Maxwell's-Mohr, and have the form

$$\begin{aligned} \delta_{i,i} &= \frac{\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1}}{EF}, \quad i = 1, \dots, k-1, \\ \delta_{i,i+1} &= -2\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{EF}, \quad i = 1, \dots, k-2, \\ \delta_{i,i+2} &= \frac{\varphi_{i+1}}{EF}, \quad i = 1, \dots, k-3, \\ \delta_{i,j} &= \delta_{j,i}, \quad i, j = 1, \dots, k-1, \\ \delta_{k-1,p} &= \frac{Pa\varphi_k}{EF}, \end{aligned} \quad (8)$$

For brevity we introduce the shortcut $\varphi_i = l_i^3 / (a^2 h^2), i = 1, \dots, k, \varphi_0 = 0$. A five-diagonal matrix system is obtained. The determinant of the system (7) coincides with (5). The system of equations gives the values of the moments in the beam at the attachment points of cables and has the form

$$M_i = -ahPl_k^3 \sum_{j=1}^{k-1} j\beta_{j,k-1} c_{i,j} / D, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

where the auxiliary matrix of coefficients $c_{i,j}$ is symmetric respect to both diagonals

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= (k-j)i, \quad i = 1, \dots, [(k-1)/2], \quad j = i, \dots, k-i, \\ c_{k-j,k-i} &= c_{i,j} = c_{j,i}, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad j = i, \dots, k-1, \end{aligned}$$

The brackets $[(k-1)/2]$ denote round up. If $k = 5$ the matrix c have the form

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

We note two interesting properties of the matrix. First, the determinant of c of order n is equal to $(n+1)^{n-1}$ [17]. Obviously, $n = k-1$ is the indeterminate degree of structure. Second, the inverse matrix of c of order n , is a three-diagonal Jacobi's matrix with elements $2/(n+1)$ on the main diagonal and $-1/(n+1)$ on the other two. These properties can be used to monitor the accuracy of analytical transformations.

The forces in cables can be determined by formula

$$X_j = \sum_{i=1}^{k-1} S_{j,i} M_i + S_{j,k}.$$

The result in this case is exactly the solution (4). Note that selected for testing primary determinate structure with unknown moments in the joints, usually has used in the problem of multispan beam [6] (three-moments equation), in this case complicates but does not simplify solution.

Analysis of forces in cables

Dimensionless force values X_j/P in the last three cables $j = k-2, k-1, k$, depending on the height h , for $k = 12, L = 30$ m are given by Figure 4.

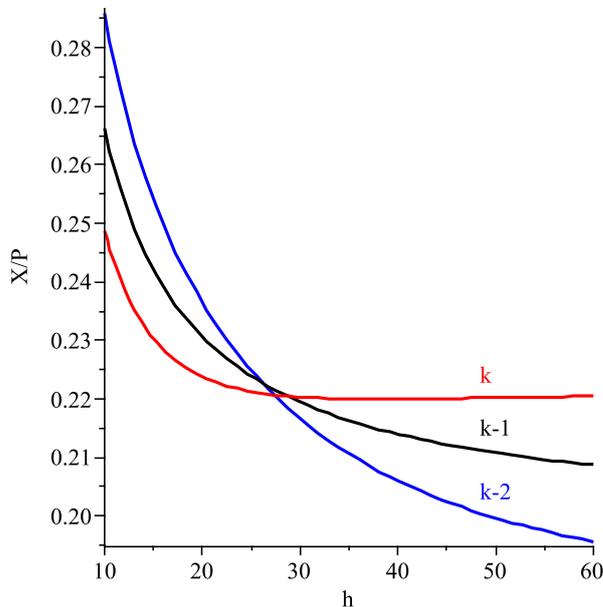


Fig. 4. Dimensionless force values in the last three cables

Height h in the Figure is given in meters. By increasing the height of the construction the stresses decrease in all rigging, though not always monotonic. On some curves one can see a small extremum. In this case — it's the last cable. Starting from a certain value h , it's force begins to rise. With an increasing number of cables k , calculations show that the cable number in which there is such a fluctuation is reduced. However, because of the small deviations from the change of stresses decreases monotonically with increasing h , to investigate this effect does not make sense.

It is much more important to explore the obvious asymptote. Moreover, this can be done analytically. If $h \rightarrow \infty$ expression (4), as it turns out, has a limit

$$\lim_{h \rightarrow \infty} X_j = \frac{6jP}{(k+1)(2k+1)}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (9)$$

This value is independent of the beam length L and decreases with the number of cables k . The linear dependence of the stress limit of cables on the number of j one could guess, if we solve the problem not by force method, but by the deformations method. In this case, at high altitudes h cables are almost vertical, and their extension is proportional to the distance from the support, ie, proportional to the number j . Hence, in view of Hooke's law it should be proportional to the force. Way to get the same exact dependence (9) is not obvious and deserves a more detailed explanation. The inductive method was used for the conclusions. If the number of cables k is given, then the dependence of (4) for large values of k is, though complicated, but it is a certain kind. Going to the limit by $h \rightarrow \infty$ is absolutely not difficult, and the result is simple. For example, if $k = 3$, we have $\lim_{h \rightarrow \infty} X_j = 3jP/14 = 6jP/28$, for $k = 4$ we get $\lim_{h \rightarrow \infty} X_j = 2jP/15 = 6jP/45$, etc. Thus, noting the numerator is 6, write down the sequence denominators 6, 15, 28, 45, 66, 91

... if $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$. With the help of the operator `rgf_findrecur` from `genfunc` package of computer mathematics Maple [7, 8] we obtain the recurrence equation for the sequence of coefficients of the denominators

$$t_k = 3t_{k-1} - 3t_{k-2} + t_{k-3}, \quad k \geq 4.$$

The operator `rgf_findrecur` is needed to work with even number of members of the analyzed series.

In this case, the detection of this equation has proved sufficient members of the three pairs of sequences (sometimes required more). The integer coefficients as a result is a sign that the equation are matched correctly. Indeed, all t_k must be integer. The solution of the recurrence equation (here came the third-order equation) can be easily found by using the `rsolve` or manually, by known methods of discrete mathematics. Obtain the necessary dependence for the denominator: $t_k = (k + 1)(2k + 1)$.

Distribution of relative stresses X_j/P the cables $j = 1, \dots, 12$, depending on the height h (in meters) for $k = 12$, $L = 30$ m is given in Fig. 5.

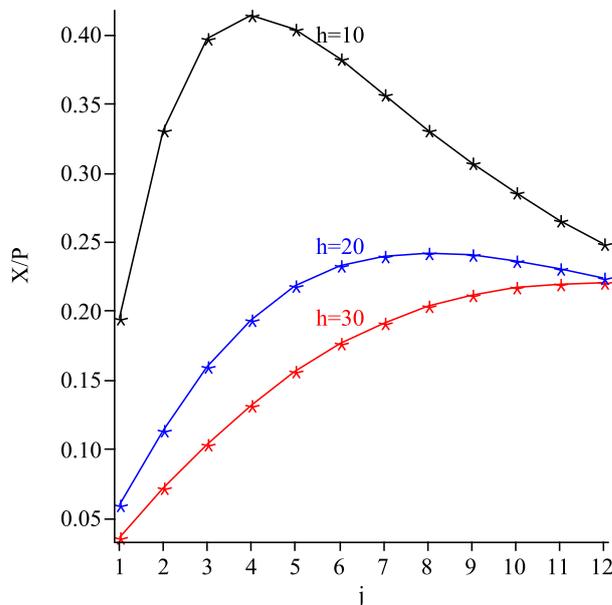


Fig. 5. Distribution of relative stresses the cables

There is the number of the cable with the maximum force among all the cables depends on h . This dependence can be found out analytically by differentiating (4) on j , considering this relationship to be a continuous function. We have

$$j_{\max} = kh/L.$$

Consequently, the extreme right-hand cable ($j_{\max} = k$) is strained more than others, if $h = L$, ie, it is inclined at an angle of 45° .

Analysis of deflection

The deflection of the console calculated by Maxwell's-Mohr formula

$$\Delta = \sum_{i=1}^k \bar{S}_{i,k} X_i l_i / (EF),$$

where $\bar{S}_{i,k} = S_{i,k}/P$ – forces in cables in the basic statically determinate system from the action of a unit force at the end of the beam. Given that in this case the forces of all cables, except the last one with the number k are zero and $\bar{S}_{k,k} = 1/\sin \alpha_k = l_k/h$, we get

$$\Delta = \frac{S_{k,k} X_k l_k}{EF} = \frac{P l_k^3 k^2 \beta_{k,k}}{hDEF}. \quad (10)$$

Let us analyze the deflection as a function of the number of cables. We denote $\tilde{\Delta} = EF\Delta/(PL)$ – dimensionless deflection. Increasing the number of cables, the rigidity of the whole structure will obviously rise and deflection at $k \rightarrow \infty$ will tend to zero. Another thing, if fighting for material savings, with the number of cables we will reduce their section. Thus it is possible to determine the dependence of the stiffness of the number of cables. Suppose, for example,

$$EF = EF_0 l_k / L_S,$$

where $L_S = \sum_{i=1}^k l_i$ – the total length of the cables, EF_0 – stiffness cables in the statically determinate system with one cable. With an increasing number of cables the total length increased as well. The length of the far right cable $l_k = \sqrt{L^2 + h^2}$ is constant, therefore, the cables stiffness decreases. The volume of cable material with a fixed modulus of elasticity remains constant $F_0 l_k$.

The Figure 6 shows the dependence of the dimensionless deflection of the number of cables at different altitudes $h = 10$ m, $h = 20$ m, $h = 40$ m, $L = 30$ m.

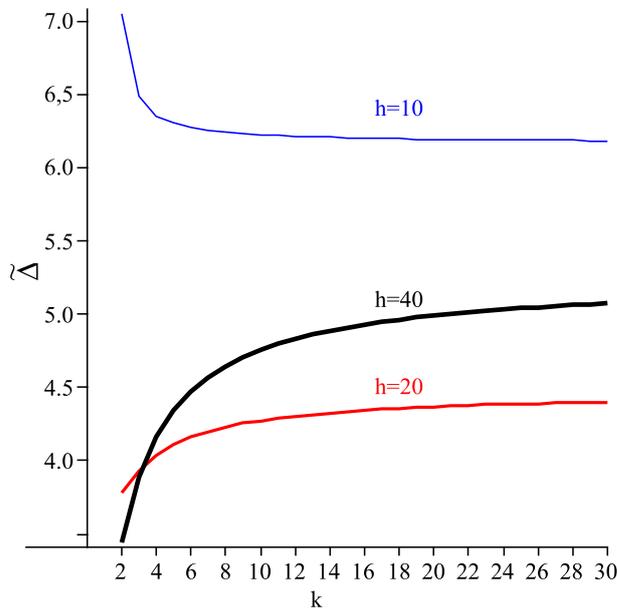


Fig. 6. Dependence of the dimensionless deflection of the number of cables

Obviously the presence of the asymptote of this relationship when $k \rightarrow \infty$.

For the analytical determination of the asymptote it is better to express the finite product in $\beta_{i,j}$ as a part of the solution (4) in terms of the gamma function [9, 10]

$$\prod_{j=1}^k h^2 + j^2 a^2 = a^{2k} \frac{\Gamma(k+1 - ih/a) \Gamma(k+1 + ih/a)}{\Gamma(1 - ih/a) \Gamma(1 + ih/a)},$$

here i – the imaginary unit.

Passing to the limit $k \rightarrow \infty$ in the expression (10), we obtain

$$\tilde{\Delta}_{\max} = \frac{\lambda \lambda \sqrt{1 + \lambda^2} + \operatorname{arcsinh} \lambda}{2 \sqrt{1 + \lambda^2} \operatorname{arcsinh} \lambda - \lambda}, \quad (11)$$

where the notation $\lambda = L/h$.

Similarly, in the simple way if the stiffness EF is divided to the number of cables ie, $EF = EF_0/k$, we can obtain

$$\tilde{\Delta}_{\max} = \frac{\lambda^2}{\operatorname{arcsinh} \lambda - \lambda/\sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (12)$$

In this case, of course, the volume of the system as the function of number of cables is not saved, the solution turns out to be a little bit easier. When the ratio of the beam length and height of the structure $\lambda = 1.354$ limit (11) reaches a minimum value of $\tilde{\Delta}_{\max} = 4.448$, and the asymptote is calculated using the formula (12) has a minimum value of $\tilde{\Delta}_{\max} = 5.736$ at $\lambda = 1.027$. These numbers do not depend on the size of the system, nor on its elastic properties and are peculiar character of “universal constants” of problem, which can be guided in the process of designing such structures.

The conclusions

In the problem of statically indeterminate cabling system with an arbitrary number of cables, the exact solutions for the deflection and stress in cables has been found. The analytic dependence of the solution on the number of cables helped to identify some asymptotic properties of deformability of the structure. In process of solutions specific mathematical patterns allowing to move the proposed methodology inductive to other computing tasks has also been found.

Some other examples of application of the method of induction in conjunction with the system of computer mathematics Maple can be found in the works [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21].

Appendix. Bissymmetric matrix. Examples

Let us consider some bisymmetric matrix A of order n , i.e. symmetric about the main diagonal

$$a_{i,j} = a_{j,i}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

and on the side one

$$a_{n-j+1, n-i+1} = a_{j,i}.$$

1) $a_{i,j} = i + j$, $i = 1, \dots, [n/2]$, $j = i, \dots, n + 1 - i$, For $n = 5$ the matrix has the form

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (A1)$$

Using the method of induction we have

$$\det A = 2^{n-2}(3+n)(\cos(\pi n/2) + \sin(\pi n/2)).$$

The matrix (A1) in the system Maple can be set as the Hankel matrix [8] with symmetric list:

$$\text{HankelMatrix}(\langle 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2 \rangle, 5).$$

2) $a_{i,j} = j - i$, $i = 1, \dots, [n/2]$, $j = i, \dots, n + 1 - i$, For $n = 5$ the matrix has the form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (A2)$$

Using the method of induction we have

$$\det A = -2^{n-2}(n-2)(n-1).$$

Note that the matrix (A2) in the system Maple can be set as a BandMatrix [8].

References

1. Han S.-H. Practical valuations on the effect of two type uncertainties for optimum design of cable-stayed bridges / S.-H. Han, J.-K. Park // International Journal of Steel Structures. - 2009. - № 9. - P. 143–152.
2. Hassan M.M. Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element, genetic algorithm, and B-spline combined technique / M.M. Hassan // Engineering Structures. - 2013. № 49. - P. 643–654.
3. Kirsanov N.M. Hanging system for high rigidity / N.M. Kirsanov. - Moscow: Stroyizdat, 1973.
4. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the effect of error mounting on the stiffness and strength of a plane truss / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2012. - № 5. - P. 38–42.
5. Vorobiev O. About some bissymmetric matrix of regular type / O. Vorobiev, M. Kirsanov, S. Cherepanov // Science and education in the XXI century: proceedings of the international scientific-practical conference. - Tambov, 2013. - P. 8–9.
6. Srivastava A.K. Strength of Material / A.K. Srivastava, P.C. Gope. - New Delhi: Prentice-Hall of India, 2007.
7. Fox W.P. Mathematical Modelling with Maple / W.P. Fox. - Boston: Cengage Publishing, 2012.
8. Kirsanov M.N. Maple, and Maplet. Solving mechanics problems / M.N. Kirsanov. - Saint-Petersburg: Lan, 2012. - 512 p.
9. Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I.A. Stegun. - New York: Dover Publications, 1972.
10. Bonnar J.D. The Gamma Function / J.D. Bonnar. - Seattle: CreateSpace Publishing, 2010.
11. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection / D.V. Tinkov // Magazine of Civil Engineering. - 2015. - № 5(57). - P. 66–73.
12. Kirsanov M.N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2016. - № 1. - P. 33–41.

13. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a strut-type lattice girder truss / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2015. - № 5(57). - P. 58–65.
14. Kirsanov M.N. Mathematical model of the truss with hardening elements / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2015. - № 4(56). - P. 38–44.
15. Kirsanov M.N. Discrete model of the pile foundation / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2015. - № 3(55). - P. 3–9.
16. Kirsanov M.N. Deflection analysis of rectangular spatial coverage truss / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2015. - № 1(53). - P. 32–38.
17. Kirsanov M.N. Bending, torsion and the asymptotic analysis of the spatial core console / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2014. - № 5. - P. 37–43.
18. Kirsanov M.N. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment / Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. // Magazine of Civil Engineering. - 2013. - № 5(40). - P. 52–58.
19. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of spatial rod system / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. - 2011. - № 6. - P. 28–34.
20. Kirsanov M.N. Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover / M.N. Kirsanov // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. - 2016. - № 3 (31). - P. 71–79.
21. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder / M.N. Kirsanov // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. - 2016. - № 1(29). - P. 84–105.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

А.Р. Самигуллина, Ю.Г. Игнатъев

**Обучение высшей математике на основе
интегрирования методов математического и
компьютерного моделирования в системах
компьютерной математики**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 004.9+378.4+510.22+512+519.2

ОБУЧЕНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

А.Р. Самигуллина¹, Ю.Г. Игнатьев²

¹ *alsu_sam@rambler.ru*; Казанский федеральный университет

² *ignatev_yu@rambler.ru*; Казанский федеральный университет

Представлена новая парадигма физико - математического образования, основанная на интеграции методов математического и компьютерного моделирования в прикладном математическом пакете Maple. Описаны разработанные методы аналитического компьютерного тестирования математических знаний с помощью приложения Marplet, а также результаты внедрения этой системы в Казанском федеральном университете.

Ключевые слова: физико - математическое образование, системы компьютерной математики, Maple, система аналитического тестирования, математическое моделирование. ¹

1. Введение: необходимость внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования

Существует ряд весьма веских причин необходимости внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования. Эти причины, в основном, имеют внешний по отношению к физико-математическому образованию характер и вызваны глобальными изменениями в структуре общества, общественного сознания и интенсивным процессом информатизации общества. Среди этих причин:

- непрерывно и быстро растущие потоки информации и быстрое ее устаревание;
- сокращение учебных часов на изучение фундаментальных дисциплин с одновременным расширением изучаемых разделов;
- перенос центра тяжести учебного процесса на самостоятельную работу студентов и учащихся;
- недостаточное финансирование фундаментальных направлений науки и соответствующих им направлений высшего образования;
- интеграция различных областей знаний и появление новых направлений науки и технологий;
- увеличение числа специальностей при одновременном уменьшении числа студентов;

¹ Материалы этой лекции опубликованы в [1]

- снижение интереса молодежи к наукоемким специальностям физико-математического профиля, овладение которыми требует больших затрат, а ожидаемый карьерный рост не дает больших надежд на будущее;
- падение уровня математической подготовки абитуриентов, в том числе, в результате действия предшествующего фактора;
- увеличение доли масс-медийных, зрительных потоков информации (TV, Интернет, видеоигры и тому подобных), что приводит к разрушению аналитической и абстрактной форм мышления, необходимых для математического образования.

Но помимо этих причин, на наш взгляд, существуют и внутренние причины именно российского математического образования, приводящие в последнее время к его застою и низкой эффективности. Среди этих причин:

- формализованный характер математического образования;
- утрата связей математического образования с современными задачами, как прикладных, так и фундаментальных наук;
- перегруженность математических курсов абстрактным теоретическим материалом в ущерб решению конкретных задач, исторически являющихся целевыми для данных курсов;
- оторванность математических курсов от современных компьютерных технологий.

Аналогичные проблемы свойственны и многим современным российским научным математическим школам. Известны, например, потребности многих областей, как фундаментальных, так и прикладных наук, в создании методов исследования нелинейных континуальных систем, описываемых нелинейными дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. Однако, подавляющее большинство кандидатских и докторских диссертаций по этой специальности посвящено методам решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений, причем зачастую исследования завершаются доказательством существования и единственности решения.

Аналогичные проблемы существуют и в других странах, традиционно ориентирующихся на наукоемкие формы человеческой деятельности и в последнее время создающие предпосылки для стагнации прогрессивного развития человечества. Поэтому, несмотря на то, что в данной статье мы опираемся, в основном, на исследования и опыт Российских ученых, изложенные ниже результаты, как мы думаем, будут полезны и математикам других стран, работающих в системе высшего образования.

2. Основная идея внедрения ИТ в структуру физико-математического образования

Следует отметить, что особенности информатизации математического образования на основе современных информационных

технологий до сих пор слабо освещены в научной литературе. В частности, не существует единой концепции внедрения информационных технологий в структуру математического образования, а также достаточно разработанных методик преподавания математических дисциплин с помощью информационных технологий с учетом специфики этих дисциплин. Существующие методики слабо связаны со спецификой физико-математических дисциплин, позволяющих реализовать более глубокое проникновение информационных технологий в самую суть этих предметов и тем самым существенно переориентировать учебный процесс и сделать его более эффективным. На наш взгляд, преодолеть указанные противоречия между запросами современной науки и технологии, с одной стороны, и потенциалом математического образования, с другой стороны, возможно на пути интенсивного применения методов математического и компьютерного моделирования при изучении всех базовых курсов математики с последующим интегрированием целевых задач этих курсов с задачами фундаментальных и прикладных наук. При этом компьютерное моделирование следует осуществлять в среде систем компьютерной математики (СКМ), а соответствующие курсы формировать, как исследовательские, направленные на построение математических и компьютерных моделей, в ходе создания которых студенты будут овладевать необходимыми фундаментальными знаниями предметов и учиться их практическому применению. Следует обратить внимание на тот факт, что построение математической модели и её компьютерная реализация воспитывают строгость математического мышления, его культуру и технологичность. Построение и исследование компьютерной модели, кроме всего прочего, воспитывает трудолюбие, аккуратность и добросовестность - качества, которых так не хватает постсоветским поколениям молодежи. Кроме всего прочего, этот путь является наиболее эффективным способом вовлечения молодежи в современную науку и инженерию. Один из создателей научного направления математического моделирования, академик А. А. Самарский [26], определил математическую модель как эквивалент объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства и ввел понятие триады математического моделирования (см. рис. 1): модель → алгоритм → программа, как необходимый план действий изучения объекта. При этом на первом этапе строится математический образ объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства, то есть, математическая модель.

Далее математическая модель исследуется теоретическими методами, что позволяет получить *общие предварительные* знания об объекте. На втором этапе разрабатывается *алгоритм* для реализации модели на компьютере. На этом этапе модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, и определяется последовательность вычислительных и логических операций для изучения исследуемых свойств объекта. На третьем этапе *программирования* создаются программы, переводящие модель и алгоритм на язык программы. Создав указанную триаду математического моделирования, исследователь проводит *численные эксперименты*, сравнивая результаты которых с результатами натуральных экспериментов, он вносит необходимые коррективы в математическую модель. Проводя, таким образом, доводку математической модели до совершенства, исследователь получает тем самым адекватную объекту математическую модель. Отметим, что сам процесс

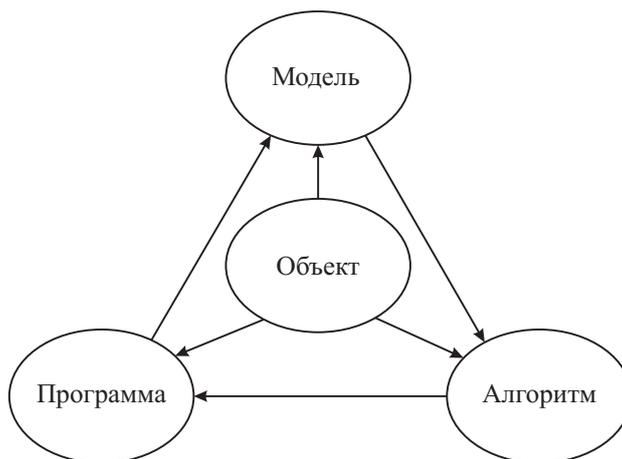


Рис. 1. Триада математического моделирования по Самарскому

построения математической модели адекватно отображает сам процесс познания человеком окружающего мира, поэтому идеально подходит для построения на его основе модели информатизации математического образования. На наш взгляд, эта триада математического моделирования и должна быть положена в основу математического образования.

Требование информатизации математического образования приводит к необходимости глубокого внедрения информационных технологий на основе математического и компьютерного моделирования в среде компьютерной математики в самую структуру математических дисциплин, что, в свою очередь, приводит к необходимости разработки методик интегрированного изучения физико-математических дисциплин на основе математического и компьютерного моделирования в среде компьютерной математики, что, в свою очередь, как раз изменяет *парадигму физико-математического образования*.

Возникает вопрос о третьем этапе процесса математического моделирования - реализации математической модели компьютерными средствами, то есть, о компьютерном моделировании. Как показано в ряде исследований [3], [5], [7], [8],[19],[22],[23], [24],[25] и другие, для этих целей идеально подходят прикладные математические пакеты. Специфика применения компьютерных математических пакетов в системе математического образования довольно широко раскрыта в этих исследованиях. Однако, в указанных работах прикладные математические пакеты рассматривались как дополнительное средство интенсификации учебного процесса и придания большей наглядности изучаемым математическим структурам². Таким образом, подводя итоги, можно сказать, что *основной идеей внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования является компьютерное моделирование в системах компьютерной алгебры*. Следует отметить, что, в принципе, эта идея не является совершенно новой: в той или иной степени она была высказана неявно и частично реализована в работах многих авторов³ - в нашей работе мы, во-первых, явно формулируем эту идею, во-вторых, описываем

² Об этом, кстати, пишут и канадские исследователи [4]

³ Следует отметить также русскоязычные сайты, посвященные применению CAS в системе физико-математического образования: www.exponenta.ru и vuz.exponenta.ru.

механизм ее реализации, в-третьих, наполняем этот механизм конкретными необходимыми деталями.

2.1. К дискуссии о вредности компьютеризации математического образования

Авторам известна дискуссия, которая ведется на протяжении многих лет о целесообразности внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования, а также негативные суждения о компьютеризации физико-математического образования, вплоть до высказываний о вредности этого процесса, разрушении математического образования процессом информатизации и тому подобное. Надо отметить, что зачастую такие оценки высказываются авторитетными математиками. С нашей точки зрения это негативное восприятие рядом известных математиков идеи информатизации физико-математического образования вызвана, с одной стороны, их оторванностью от реальной ситуации, сложившейся в последние годы в сфере физико-математического образования, с другой стороны, незнанием современного состояния развития компьютерных наук, в частности, систем компьютерной математики. Кроме того, существует и более фундаментальная причина неприятия *неизбежности* процесса информатизации, заключающаяся в необходимости тяжелого переосмысления базовых ценностей математического традиционного образования. Что же должно составлять основу, инвариант, этого математического образования? Как известно, все математические теории являются *математическими структурами*, имеющими свои абстрактные базовые множества, аксиоматику и набор методов исследования основных отношений. Реализация математической структуры на конкретных базовых множествах называются математическими моделями; их исследование имеет свою специфику. По мнению Авторы статьи инвариантами математического образования и должно быть изучение этих математических структур и реализованных моделей наряду с выполнением конкретных математических вычислений *в узловых точках* этих моделей, причем вычисления должны осуществляться комплексными методами, в том числе, и методами математического и компьютерного моделирования. Не является секретом тот факт, что многие разделы изучаемых математических дисциплин больше направлены на развитие памяти и накопление базы всяких «математических уловок» для решения весьма частных задач, имеющих характер справочного материала, который с помощью информационных технологий легко добыть из разных источников. Изучение таких разделов по нашему мнению не способствует развитию математического мышления, а - лишь его формализации. Изучение математики таким способом развивает лишь «олимпиадный» стиль мышления, не дающий реальных результатов в научном исследовании.

3. Выбор системы компьютерной алгебры для реализации идеи

Многочисленные исследования, проведенные различными авторами (см., например, [3], [11] и другие) показывают, что среди известных систем компьютерной математики Maple является наиболее приемлемой для физико-математического образования СКМ, как по стоимости, так и по простоте интерфейса, а также ответственности языка программирования стандартному математическому языку. В

частности, в монографии [3] посвященной сравнительному аспекту CAS Maple и Mathematica, отмечается следующее обстоятельство «CAS Maple, поддерживая довольно развитый процедурный язык программирования, наилучшим образом отвечает задачам образовательного характера и, в частности, совершенствования преподавания математически-ориентированных дисциплин для университетов, освоения систем компьютерной математики, а также применения в задачах автоматизации аналитических и численных преобразований, и вычислений в относительно несложных научно-технических проектах... Maple оказался более простым в освоении, прежде всего тем, что его язык синтаксически более близок к известным императивным языкам программирования, в частности, к Pascal. А как известно, в общем случае императивные языки несколько проще в освоении». Преимущества CAS Maple перед другими системами компьютерной алгебры в решении задач физико-математического образования перечислены и в монографии [19], посвященной применению CAS Maple в задачах компьютерного моделирования фундаментальных объектов и явлений, изучаемых в математических и физических курсах университетов. Одним из важных для системы образования достоинств CAS Maple является превосходное качество трехмерной динамической графики, особенно проявившееся в последних версиях Maple 17-18⁴, а также простые средства создания авторских библиотек процедур. Все эти качества, вместе взятые, несомненно, выдвигают CAS Maple на лидирующую позицию в системе физико-математического образования.

4. Идеология внедрения

Для внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования необходимо решить следующие научно-методические задачи:

1. Создать информационное обеспечение учебного процесса:

- создать электронные учебники;
- создать генераторы индивидуальных заданий;
- создать автоматизированную систему проверки индивидуальных заданий;
- создать электронные библиотеки.

2. Создать демонстрационное сопровождение лекций и практических занятий:

- создать интерактивные 3D иллюстрации геометрических и физических объектов;
- создать интерактивные видеоматериалы, сопровождающие вычисления;
- создать анимационные математические модели объектов и явлений.

3. Встроить компьютерные вычисления в структуру практических занятий:

- создать классы для комплексных учебных занятий с применением компьютеров по всем физико-математическим предметам;
- встроить параллельное сопровождение практических занятий студентов компьютерными вычислениями;

⁴ это обстоятельство отмечает и известный специалист в CAS, [6]

- создать программы аналитического тестирования и самотестирования учащихся.
4. Встроить компьютерные вычисления в структуру спецкурсов, курсовых и выпускных квалификационных работ:
- сделать построение компьютерных математических моделей учащимися основой специальных курсов;
 - сделать создание учащимися авторских программных и научных продуктов, а также интерактивных учебных пособий обязательным элементом выпускных квалификационных работ.

Представленная на рисунке 2 схема учебного процесса предполагает решение следующих учебно-научных задач:

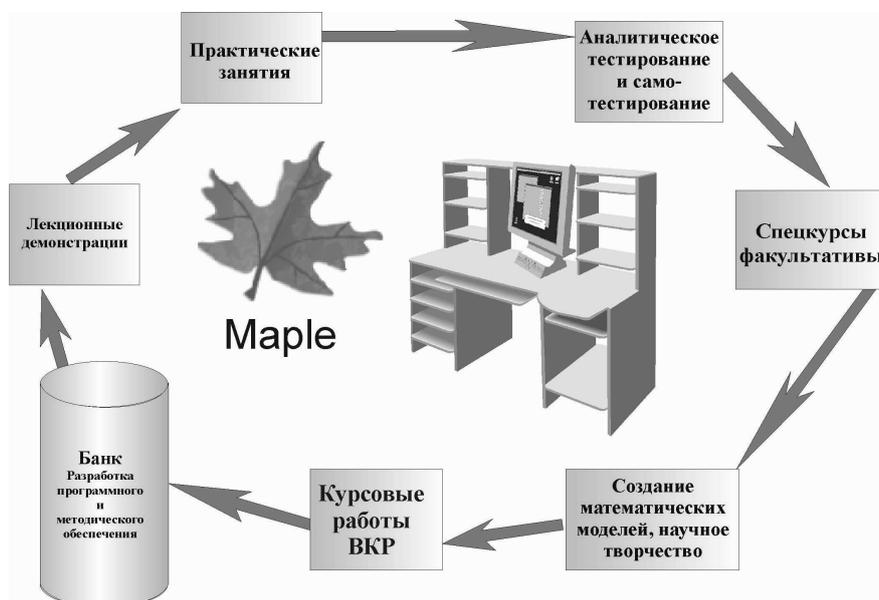


Рис. 2. Организация учебного процесса по физико-математическим дисциплинам на основе CAS

5. Методическое и программное обеспечение внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования

Организация вышеуказанного учебного цикла с глубоким использованием информационных технологий на основе СКМ требует больших наукоемких вложений, как на стадии запуска учебного процесса, так и на всех его дальнейших стадиях. Уже на первых стадиях учебного процесса требуется наличие большого количества заранее разработанных компьютерных моделей изучаемых объектов, как для лекционных демонстраций, так и для семинарских и самостоятельных занятий студентов. Разрабатываемые для обеспечения учебного процесса компьютерные модели должны удовлетворять ряду обязательных требований:

- они должны быть наглядными;

- они должны отображать все основные свойства исследуемой модели;
- они должны быть интерактивными, то есть, позволять пользователю манипулировать ими с помощью внешних устройств;
- они должны быть многопараметрическими для обеспечения возможности проведения численных экспериментов.

Проблема обеспечения наглядности математических структур играет важную роль в высшем образовании, так как усвоение фундаментальных геометрических понятий подготавливает фундамент для понимания процесса математического моделирования и овладения методами компьютерного моделирования, что в свою очередь, создает предпосылки для инновационного развития современного образования. Заметим, что многопараметричность создаваемых компьютерных моделей является важнейшим фактором, позволяющим управлять математической моделью, то есть, проводить компьютерное моделирование. В связи с этим важную роль играет компьютерная визуализация математических моделей, а особенно, оснащенная динамическая визуализация, основные принципы которой разработаны в работах (см.[10], [11], [19]). Создание таких сложных компьютерных моделей возможно в формате независимых пакетов программ (библиотек программ), которые могут использоваться, как преподавателями, так и студентами вызовом соответствующих библиотек и содержащихся в них многопараметрических команд, имеющих простой синтаксис (см., например, [11], [12], [13], [15]). Необходимо подчеркнуть, что увеличение степени наглядности и интерактивности учебных материалов, созданных средствами ИТ, требует вложения больших интеллектуальных затрат и высокой степени профессионализма преподавателей, создающих такие программы. Отметим, что версии Maple 17-18 содержат в библиотеке Student специальные интерактивные программные процедуры Tutor, выводящие результаты в окна Maple, на основе которых можно создавать демонстрационные и методические материалы. Но, конечно, использование этих процедур не достаточно для достаточно высокого уровня изучения высшей математики. Решение проблемы компьютерной реализации объектов линейной алгебры и аналитической геометрии и создания наглядных геометрических образов (интерпретаций) объектов, структур и свойств предполагает решение трех основных задач:

1. построение математических моделей основных алгебраических структур, объектов и свойств;
2. построение их геометрических интерпретаций, то есть, сопоставление им геометрических моделей;
3. построение многопараметрических компьютерных моделей графических образов объектов.

Системы компьютерной математики (СКМ), в первую очередь Maple, предоставляют уникальные программные и графические возможности для реализации этой идеи. Однако, попытка прямого применения стандартных процедур СКМ далеко не всегда дает желаемый результат. Для получения качественных графических и анимационных моделей основных математических структур анализа функций прихо-

дится создавать пользовательские многопараметрические программные процедуры, простые для неискушенного в программировании пользователя, которые удобно объединять в специализированные библиотеки пользовательских процедур (см. [6]).

Ниже мы приведем пример создания и использования такой библиотеки на примере теории кривых второго порядка. Как известно, теория кривых (поверхностей) второго порядка, тесно связанная с теорией квадрик в евклидовом пространстве и теорией приведения их к канонической форме с помощью преобразований движения, находит многочисленные приложения в математическом анализе, механике и теории поля. С другой стороны, теория кривых (поверхностей) второго порядка недостаточно хорошо усваивается студентами не только естественно - научных специальностей, но даже и студентами математических отделений. Повышение качества усвоения абстрактного математического материала возможно интегрированием методов математического моделирования и оснащенной динамической визуализации в компьютерном математическом пакете Maple (см. [3], [4], [6]). В Российских высших учебных заведениях дается достаточно полная теория кривых и поверхностей второго порядка, содержащая кроме общей классификации кривых и описания их основных свойств и элементов также и задачи о приведении общего уравнения второго порядка на плоскости (в пространстве) к каноническому виду. Для решения этих задач нами был создан (см. [15] - [18]) пакет программ автоматизированного полного исследования общего уравнения второго порядка на плоскости с выводом результатов исследования, как в виде таблицы, содержащей информацию о типе кривой, формулах преобразования уравнения второго порядка к каноническому виду, параметрах кривой и всех ее канонических элементов, канонического уравнения кривой, так и в виде графика кривой с изображением всех ее элементов, исходной и канонической систем координат. При этом программа автоматически определяет оптимальные параметры изображения кривой и область ее изображения. Пакет отличается известными прикладными математическими пакетами, во-первых, простотой ввода программы, которая задается одной командой лишь с помощью общего уравнения на плоскости и параметров пользователя для вывода результатов исследования, во-вторых, полным представлением результатов исследования в текстовой, аналитической и графической формах. Эти результаты выводятся в виде матрицы, снабженной необходимыми текстовыми пояснениями, определяемыми результатами исследования кривой. Исследование кривой осуществляется с помощью процедуры `AnalGeo[CanonF](Eq, X, X1, s)`, где `Eq` - общее уравнение кривой второго порядка, `X` - список координат в первоначальной системе координат в формате `[x, y]`, `X1` - список координат в новой системе координат в формате `[x1, y1]`, `s` - имя переменной угла поворота системы координат. При исполнении команды выводится название типа кривой; матрица ее параметров (список собственных значений квадратичной формы, каноническое уравнение кривой, преобразование движения, приводящее к каноническому уравнению, список параметров `[c, e, d]` - [расстояние от центра до фокусов, эксцентриситет, расстояние от центра до директрис], `[a, b, p]` - [значения полуосей и параметра в каноническом уравнении параболы]). На рисунках 3,4 показано исполнение этой команды.

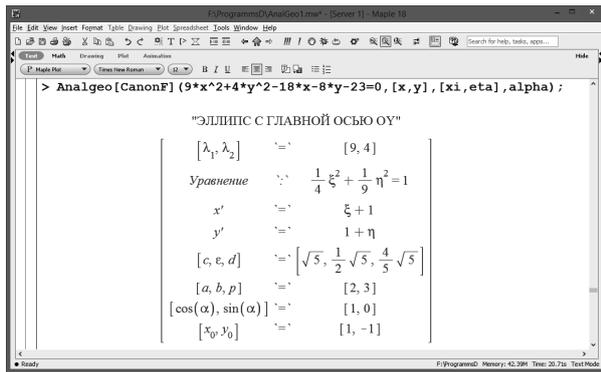


Рис. 3. Вывод результатов исследования уравнения второго порядка $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$ в форме матрицы

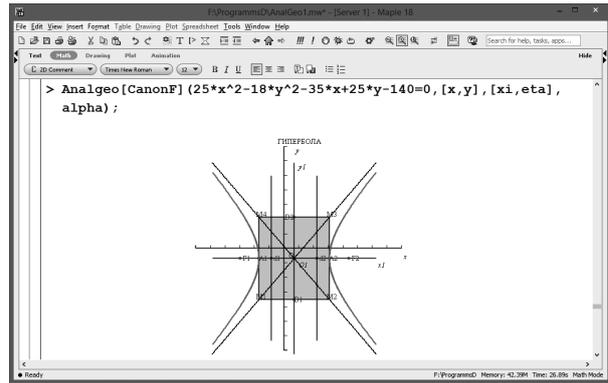


Рис. 4. Вывод результатов исследования уравнения второго порядка $25x^2 - 18y^2 - 35x + 25y - 140 = 0$ в форме матрицы

Из приведенного рисунка видны уникальные возможности представленного программного пакета: одной простой командой осуществляется полное исследование произвольного уравнения второго порядка на плоскости. При этом результаты представляются одновременно в двух формах: аналитической в виде матрицы (см. рис. 3), определяющей: все элементы канонического вида квадрики, канонического движения, тип полученной геометрической фигуры и численное значение всех ее параметров, а также изображение полученной фигуры (см. рис. 4), оснащенное изображением всех ее элементов, первоначальной и канонической систем координат.

Покажем пример ввода программной процедуры EqLine3 для исследования взаимного расположения двух плоскостей, заданных парой общих уравнений: $2x - 2y + z = 21; x + 2y - z = -9$

```
>EqLine3([2*x-2*y+z=21, x+2*y-z=-9], t);
```

и ее исполнения (см. рис. 5). Как видно из этого рисунка исполнение команды дает изображение двух плоскостей, линию их пересечения и название рисунка, содержащее информацию о взаимном расположении плоскостей. Пример параллельного расположения плоскостей: $7x - 4y + z = 0; 21x - 12y + 3z = 29$ продемонстрирован на рисунке 6.

```
>EqLine3([7*x-4*y+z=0, 21*x-12*y+3*z=29], t);
```

5.1. Код Maplet и его визуализация

Maplet является специальным приложением Maple, позволяющим вводить данные в специальном окне меню для исполнения той или иной процедуры Maple. Использование этих окон помогает учащемуся, слабо знакомому с программированием, проводить компьютерные исследования той или иной модели. Все маплеты системы Maple сосредоточены в пакете расширения Maplets с командой (процедурой) Display, запускающей их на выполнение, и подпакетами Elements, Examples, Tools и Utilities. Команда Maplet(sp) по списку sp создает некоторый Maple-код,

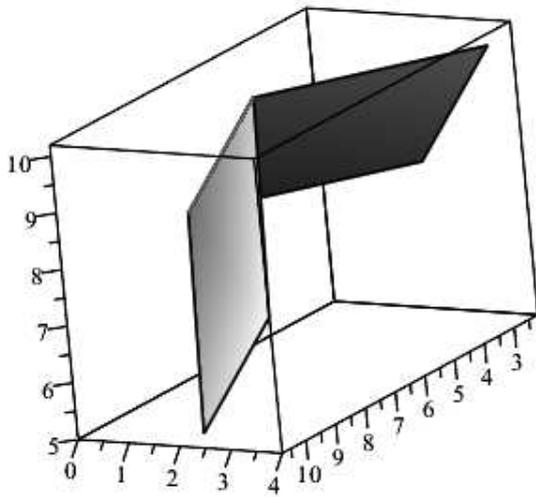


Рис. 5. Исполнение команды $\text{EqLine3}([2x-2y+z=21, x+2y-z=-9], t)$

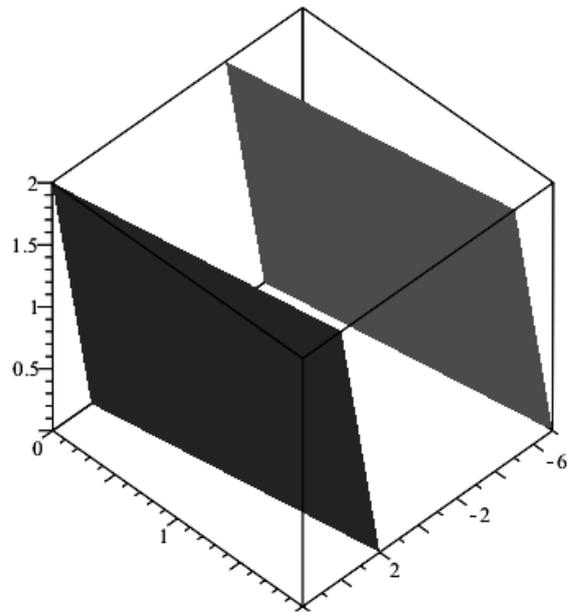


Рис. 6. Исполнение команды $\text{EqLine3}([7x-4y+z=0; 21x-12y+3z=29], t)$

который визуализируется командой `Display` в виде `Maplet`. Его можно также присвоить какой-либо переменной (`Mr := Maplet(sp)`) и лишь затем выводить в виде `Maplet (Display(x))`.

Пример вывода окна Maplet (см. рис. 7).

```
>restart:
>with(Maplets): with(Maplets[Elements]):
mt := Maplet([Label("Приведение общего
уравнения\n кривой второго порядка к каноническому виду",
'font' = Font("Times", bold, 14)),
MathMLViewer('value' = MathML[Export]
(A*x^(2) +2*B*x*y+C*y^(2) +2*D*x+2*E*y+F=0),
fontsize=18, foreground = black), Label(Image("d:8.png"))]):
Display(mt);
```

6. Технология совместного изучения математики и компьютерного моделирования

Основными методами реализации идеи информатизации предметов физико-математического цикла на основе математического и компьютерного моделирования среде компьютерной математики являются следующие:

- профильная направленность курсов математики;
- использование метода математического моделирования как основного метода изучения специальных предметов;

- выстраивание всей системы подготовки специалистов вокруг решения научно-технических проблем и подготовки дипломного проекта;
- встраивание компьютерного моделирования во все специальные курсы;
- организация занятий по специальным предметам в форме лабораторных комплексных научных исследований с применением компьютерной математики и ИТ;
- главным критерием для получения диплома необходимо считать квалификационную работу с обязательным применением методов компьютерного моделирования и возможностью научной публикации либо прямого использования в учебном процессе.

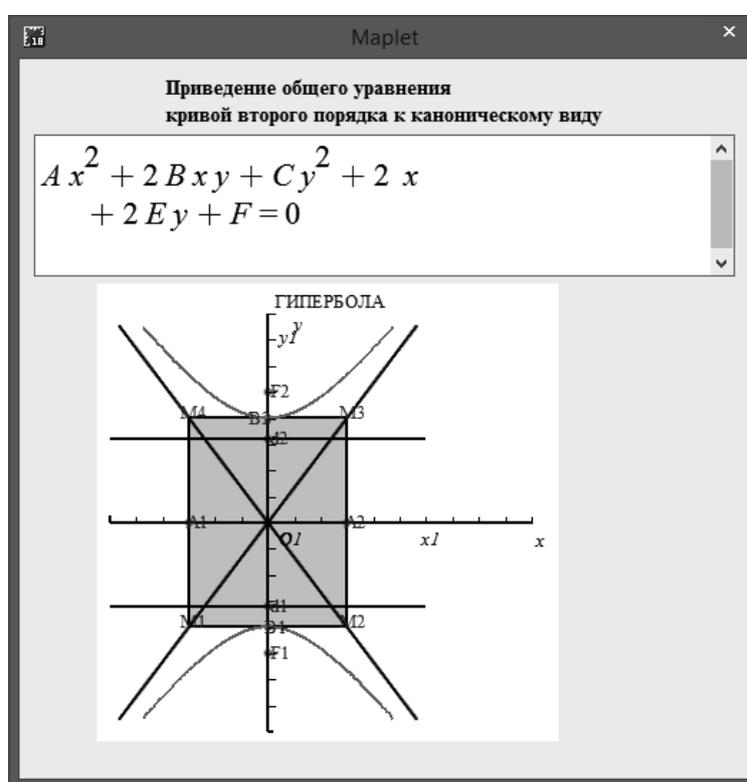


Рис. 7. Вид окна Maplet

Необходимыми организационными мероприятиями для материального обеспечения внедрения информационных технологий в структуру физико-математического образования являются:

- пересмотреть учебные программы специальных предметов;
- создать учебно-методическое обеспечение специальных курсов;
- организовать переподготовку преподавателей в области компьютерного моделирования и ИТ;
- оборудовать современные компьютерные лаборатории ИТ;

- обеспечить эти лаборатории лицензионными пакетами Mathematica, Maple, MatLab, CorelDraw, Delfi, WinEdt, MicrosoftOffice и другими;
- переоборудовать классы под семинарские занятия в классы для комплексных занятий с применением компьютеров;
- организовать систему летних научных школ для студентов и аспирантов по математическому и компьютерному моделированию.

Надо отметить, что в Институте математики и механики Казанского федерального университета эти мероприятия планомерно проводятся, как в части материального, так и учебно-научного обеспечения. Ниже мы покажем некоторые примеры внедрения ИТ на основе методов математического и компьютерного моделирования в CAS Maple в систему преподавания высшей математики.

На рисунке 8 показана схема устройства класса для совместного изучения математики и компьютерного моделирования, а на рисунке 9 - блок-модуль студента в классе, позволяющий ему одинаково комфортно работать и с компьютером и с тетрадями и книгами.

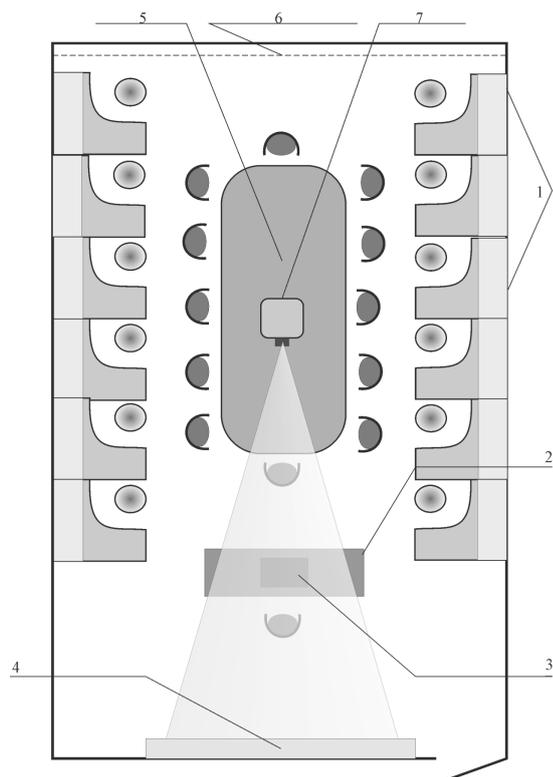


Рис. 8. Компьютерный класс для комплексного изучения предметов физико-математического цикла: 1 - модули; 2 - стол преподавателя; 3 - компьютер преподавателя; 4 - интерактивная доска; 5 - дискуссионный стол; 6 - жалюзи; 7 - проектор.



Рис. 9. Рабочее место для студентов (модуль) для комплексных занятий с применением компьютера

7. Реализация идеи внедрения методов математического и компьютерного моделирования в пакете Maple в процесс математической подготовки учителей

7.1. Идея аналитического тестирования математических знаний

Описанный выше пакет программ и другие аналогичные пакеты интегрированы с пакетами программ в CAS Maple, содержащих индивидуальные задания студентов, снабженные средствами автоматизированного аналитического (формульного) тестирования и позволяющих им самостоятельно изучать материал и выполнять решение задач. Для более полной информатизации математического образования продуктивна идея *аналитического тестирования*. Эта идея была сформулирована Игнатьевым [9] (см. также, [3]) и заключается в тестировании математических знаний студентов с помощью CAS Maple. При этом условия задачи и ответ в формульном виде вводятся студентами в окне Marplet. При этом используется возможность Maple сравнить на эквивалентность два различных выражения, возможно, представленных в различных форматах. В отличие от обычного механического тестирования, в котором требуется выбрать правильный ответ из списка, и которое не способно выявить математические навыки, аналитическое тестирование является, по-существу, интеллектуальным тестированием. Таким образом, удастся замкнуть процесс изучения математики и проверки полученных знаний. Для пояснения идеи аналитического тестирования приведем простой конкретный пример.

Maple-программа создания библиотеки analgeo1:

```
>restart:
>analgeo1:=table():
analgeo1[formula1]:=exp(-x)*sqrt(x^2+1):
analgeo1[A1_0]:=proc(X::anything)
eval(simplify(X)-analgeo1[formula1]) end:
analgeo1[A1_otvet]:=proc(X::anything)
if analgeo1[A1_0](X)=0 then 'Правильно!':
else 'Неправильно!'fi end:
save(analgeo1, 'D:/MapleAT/Analyze/Exam.m');
```

В этом примере видно, что библиотека сохраняется в формате «.m», который недоступен для просмотра пользователями. Вызывая библиотеку в новом листе Maple, студент сможет лишь проверить правильность своего ответа.

Maple-программа аналитического тестирования:

Для исполнения процедуры A1_otvet необходимо вызвать созданную библиотеку analgeo1 из нового рабочего листа Maple:

```
>read('D:/MapleAT/Analyze/Exam.m'):
with(analgeo1);
[A1_0, A1_otvet, formula1]
```

```
>A1:=x^3*sqrt(x^2+1);
```

$$x^3 \sqrt{x^2 + 1}$$

```
>analgeo1[A1_otvet](A1);
```

Неправильно!

```
>A2:=exp(-x+ln(x^2+1)/2);
```

$$e^{(-x+\ln(x^2+1)/2)}$$

```
>analgeo1[A1_otvet](A2);
```

Правильно!

Как видно из примера, формы ответов, содержащиеся в библиотеке, $\exp(-x)\sqrt{x^2+1}$, и в ответе студента, $e^{(-x+\ln(x^2+1)/2)}$, различны, хотя обе являются правильными.

7.2. Комплекс программ SRS экзаменационного контроля знаний

Для окончательного замыкания процесса обучения высшей математики на основе CAS Maple необходимо автоматизировать на основе ее процесс контроля знаний, как промежуточный, так и основной, в форме экзамена/зачета и встроить этот процесс в балльно-рейтинговую систему Университета/Института. Для этого нами разработан комплекс программ SRS в CAS Maple, осуществляющий обмен данными из окна Maple с рабочими листами MicrosoftExcel, в которых каждой академической группе соответствует отдельный лист, в таблицы которого производится запись/считывание CAS Maple. Созданная программа экзаменационного тестирования имеет следующую структуру - рисунок 10.

Блок 1 (GenLib.mw) генерирует библиотеку программных процедур (BRS) подсчета баллов и представления результатов сессии в виде гистограммы (файл Lib.m) (блок 2). Блок 3 использует библиотеку Lib.m, с помощью которой создает Maple (блок 4). Пользователь обращается к Maple - программе (блок 5), которая открывает окно тестирования (блок 7). При регистрации для входа на экзамен Maple обращается к листу MicrosoftExcel с результатами прохождения учебных модулей в течение семестра (блок 6а, лист MicrosoftExcel). При регистрации открывается окно, содержащее список студентов группы с информацией о допуске студентов к экзамену по каждому из учебных модулей. При выборе конкретного студента открывается окно Maple (блок 9), в котором преподаватель выставляет оценки по пятибалльной шкале за ответ по каждому вопросу экзаменационного билета. При нажатии кнопки «RATING» окончательные результаты экзамена с учетом баллов по модулям семестра выводятся в специальном окне по пятибалльной шкале и одновременно записываются в соответствующей таблице листа MicrosoftExcel (блок 6б). Одновременно открывается следующее окно Maple с результатами сессии группы (блок 10), в котором после ввода номера группы и нажатия кнопке «RATING» в открывшемся окне Maple (блок 11) выводятся результаты сессии в академической группе, как в табличном виде, так и виде гистограммы.

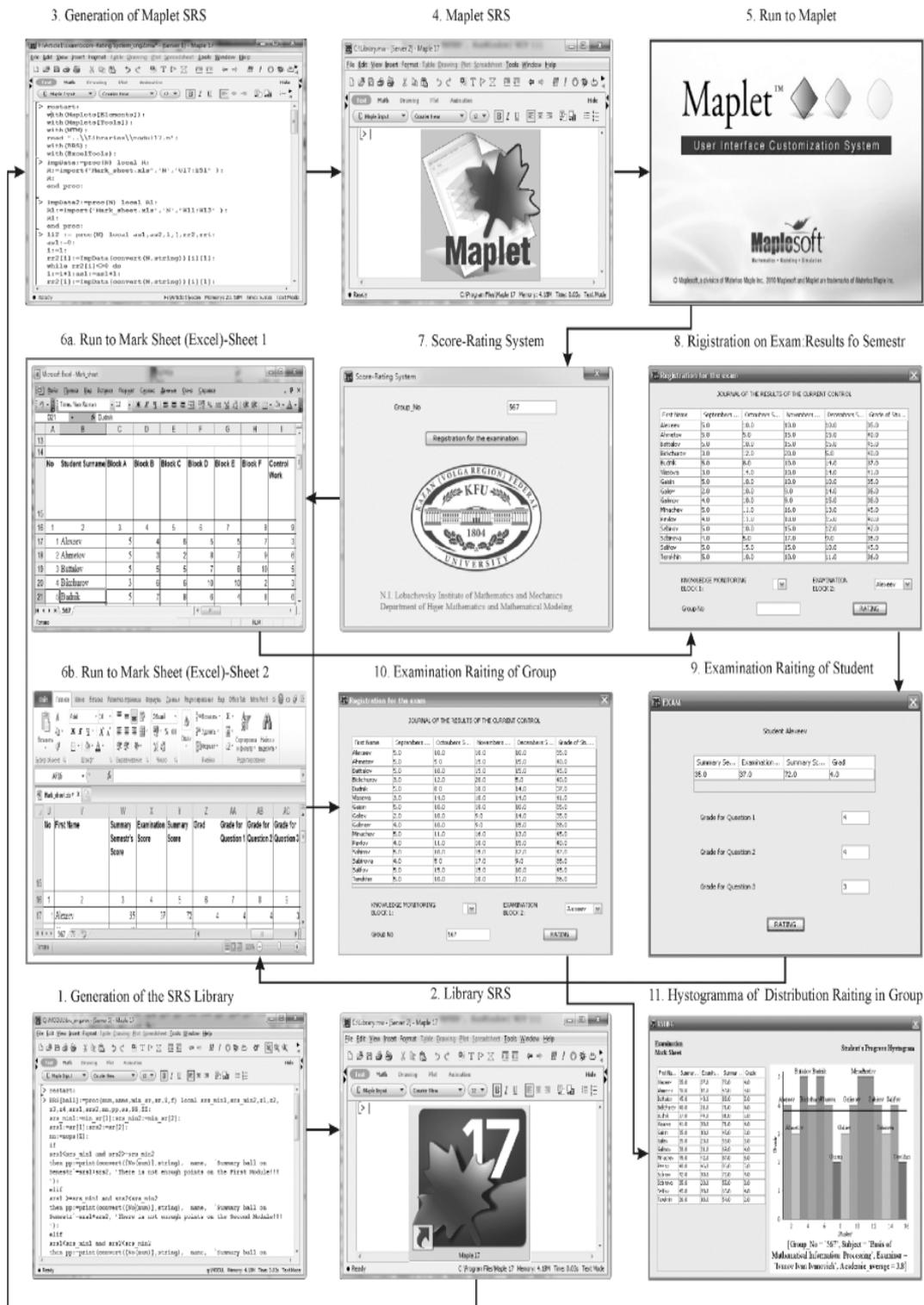


Рис. 10. Блок-схема программы экзаменационного тестирования SRS

8. Взаимодействие MS Excel с CAS Maple

В Maple имеется возможность работы с файлами MS Excel. Команды, позволяющие осуществить обмен данными между этими приложениями, содержатся в пакете ExcelTools. Команда `Import(file, sheet, cells)` осуществляет чтение дан-

ных из файла file из ячеек cells листа sheet. Команда Export(Sp, file, sheet, cell) производит запись списка Sp в файл file в ячейку cell листа sheet.

9. Математическая модель балльно-рейтинговой системы (БРС)

9.1. Вычисление баллов

Оценивание знаний студентов в Казанском (Приволжском) федеральном университете устанавливается на основании *Регламента о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся*, принятого Учебно-методическим Советом от 27 апреля 2012 года, протокол №2. Основой для определения рейтинга обучающегося являются *рейтинговые показатели*. Рейтинговые показатели по каждой дисциплине формируются на основе результатов *текущего контроля знаний обучающихся в течение семестра (блок 1)* и по *итогам зачетно-экзаменационной сессии (блок 2)*. Итоговый рейтинг по дисциплине получается суммированием баллов по этим блокам с *весом*:

- Блок 1 - вес (коэффициент значимости) - 0,5;
- Блок 2 - вес (коэффициент значимости) - 0,5.

Согласно Регламенту студент может получить 100 баллов по дисциплине при условии полного усвоения знаний по учебной дисциплине согласно требованиям учебной программы. Минимальное количество для допуска к зачету/экзамену 28 баллов. Принята следующая шкала соответствия рейтинговых баллов (с учетом их округления до целых) оценкам пятибалльной шкалы: 86 баллов - «5»; 71-85 баллов - «4»; 56-70 баллов - «3»; 55 баллов - «2». Текущий контроль знаний студентов по разным дисциплинам осуществляется один из 2-х способов: по классической схеме (студент получает домашнее задание и сдает его преподавателю) или в виде систематического аналитического тестирования (студент проходит тест во время занятий).

9.2. Баллирование текущей успеваемости по классической схеме

По разработанному нами алгоритму суммарный балл по блоку 1 вычисляется следующим образом. На учет посещаемости занятий студентами отводится 14 баллов из общих 50-ти за семестр - эти баллы будем называть *баллами за прилежание* ($B_{\Pi} = 14$). Таким образом, 36 баллов отводится на все выполненные самостоятельные, $B_{Срс}$, и контрольные, $B_{кр}$, работы. Пусть семестр содержит m учебных модулей - это могут быть: 1,2,3,4 модуля. При этом цена одного модуля составляет $36/m$, то есть - 36, 18, 12 и 9 баллов, соответственно, а цена одной контрольной определяется как $1/3$ от цены модуля, а выполнение индивидуальных заданий студентов как $2/3$ от цены модуля. Пусть далее учебный план содержит N_L лекций и N_P практических занятий, - всего $N = N_L + N_P$ занятий, а студент посетил $n = n_P + n_L$ занятий в семестр. Таким образом, он получает за прилежание в течение семестра балл

$$b_{\Pi} = \text{round}\left(\frac{n}{N} \cdot 14\right), \quad (1)$$

где round - операция округления. Пусть O_i - оценки по 5-балльной системе, полученные студентом за i -е индивидуальное задание, а k_i - за i -ю контрольную. Таким образом, с учетом веса модулей он набирает суммарный балл:

$$b_{\text{срс}} = \text{round} \left(\frac{12}{5m} \sum_{i=1}^m (O_i + k_i) \right), \quad (2)$$

а общий балл за семестр равен:

$$b_{\text{сем}} = b_{\text{П}} + b_{\text{срс}}. \quad (3)$$

Перейдем к определению оценки O_i за i -е индивидуальное задание (i -й модуль). Пусть индивидуальное задание студентам по i -му модулю содержит r_i вопросов и пусть $o_i^{(r)}$ - оценка ответа по этому вопросу по 5-ти балльной системе. Тогда

$$O_i = \text{round} \left(\frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} o_k^{(r)} \right). \quad (4)$$

9.3. Баллирование промежуточной аттестации (экзаменов / зачетов)

Суммарный балл по блоку 2 вычисляется следующим образом. Суммарный максимальный балл за ответ по билету экзамена или зачета равен 50. Пусть билет содержит p вопросов с максимальным баллом по i -му вопросу β_i , так что

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 50,$$

и ω_i - соответствующие оценки ответов по 5-ти балльной системе. Тогда суммарный балл за экзамен равен:

$$b_{\text{ЭКЗ}} = \frac{1}{50 \cdot 5} \sum_{i=1}^p \beta_i \omega_i, \quad (5)$$

а итоговый балл за семестр равен

$$b_{\text{ИТОГ}} = b_{\text{сем}} + b_{\text{ЭКЗ}}. \quad (6)$$

9.4. Баллирование текущей успеваемости на основе систематического аналитического тестирования

В этой схеме на учет посещаемости занятий студентами (прилежание) отводится $V_{\text{П}} = 14$ баллов за семестр. Тестирование знаний в этой схеме проводится на практических занятиях по темам (всего 5 тестов по 3 вопроса). Студент, пропустивший тестирование, понижает свой балл на повторном тестировании. Таким образом, 36 баллов отводятся на все выполненные ИЗ ($V_{\text{ИЗ}}$), тесты (ТС) ($V_{\text{ТС}}$) и КР ($V_{\text{КР}}$). Цена КР определяется как 1/3 от цены модуля (то есть, 12), цена ТС определяется как 1/4 от цены модуля (то есть, 9), а выполнение ИЗ студентов как 5/12 (то есть, 15) от цены модуля. Балл за прилежание в течение семестра вычисляется по формуле (1).

Пусть O - оценка по 5-балльной системе, полученная студентом за ИЗ, а k - за КР. Таким образом, он набирает суммарный балл:

$$b_{\text{срс}} = \text{round} \left(\frac{1}{5} (15O + 12k) \right), \quad (7)$$

а общий балл за семестр равен:

$$b_{\text{сем}} = b_{\text{п}} + b_{\text{срс}} + b_{\text{тс}}. \quad (8)$$

Перейдем к определению оценки O за индивидуальное задание. Пусть индивидуальное задание студентам содержит r вопросов и пусть o_i - оценка i -го ответа по этому ИЗ по 5-ти балльной системе. Тогда

$$O = \text{round} \left(\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r o_k \right). \quad (9)$$

9.5. Подпрограмма вычисления баллов текущей успеваемости по классической схеме

Указанный алгоритм реализуется в Maple следующим образом. Пусть pl - план - $[N, Z]$,

где $N=[N_p, N_l]$, N_p - число практик, N_l - число лекций, а Z - список количества заданий в индивидуальных заданиях (ИЗ) и контрольных работах (КР): $Z=[[z(1), r(1)], \dots, [z(m), r(m)]]$, m - число модулей, $z(i)$ - число заданий в i -м модуле, $r(i)$ - число заданий в i -ой контрольной. $n1:=[N1_p, N1_l]$ - число посещений, соответственно. Пусть далее oo - результаты студента по этим ИЗ и КР: $oo = [[oo(1,1), \dots, oo(1,z1)], [\dots], [oo(1,m), \dots, oo(z(m),m)]]$ - $oo(i,k) = oo[i][k] = oo[i,k]$ - оценка по 5-ти балльной шкале по k -му заданию в i -ом ИЗ, $kk=[[kk(1,1), \dots, kk(1,z1)], [\dots], [kk(1,m), \dots, kk(z(m),m)]]$; $kk(i,k)=kk[i][k]=kk[i,k]$ - оценка по 5-ти балльной шкале по k -му заданию в i -ой КР, $r(i)$ - число заданий в i -ой КР; $ok(k)$ - оценка по 5-ти балльной шкале по k -му ИЗ; $OK(k)$ - оценка по 5-ти балльной шкале по k -ой КР $r(i)$ - число заданий в i -ой контрольной, OO - суммарный балл по ИЗ и КР, bp - балл за посещение. Программная процедура $b_brs(pl, n1, oo, kk)$ выводит балл за КР и ИЗ, суммарный балл за посещение аудиторных занятий и общий балл за семестр.

```
>b_brs:=proc(pl, n1, oo, kk) local ok, OK, Z, z, i, k, m, r, N, N1, OO, bp:
N:=pl[1][1]+pl[1][2]:
N1:=n1[1]+n1[2]:
Z:=pl[2]:
m:=nops(Z):
z:=(i)->Z[i,1]:r:=(i)->Z[i,2]:#i->(1,m)
ok:=[seq(round(sum(oo[i,k], k=1..z(i))/z(i)), i=1..m)]:
OK:=[seq(round(sum(kk[i,k], k=1..r(i))/r(i)), i=1..m)]:
OO:=round(12/(5*m)*sum(OK[i]+ok[i], i=1..m)):
bp:=round(N1/N*14):
[OO, bp, OO+bp]:
end proc:
```

Приведем пример ввода и исполнение программной процедуры `b_brs(pl, n1, oo, kk)`.

```
>b_brs([[17, 17], [[4, 3], [3, 3]]], [12, 14], [[3, 4, 5, 2], [2, 3, 4]], [[3, 3, 4],
[4, 2, 3]]);
```

В этом примере видно, что 17 - число практических занятий по плану, 17 - число лекционных занятий по плану; имеется два модуля: в 1-ом ИЗ - 4 задания, КР - 3 задания, 2-ом ИЗ - 3 задания, КР - 3 задания; число посещений студентом аудиторных занятий: 12 - практических, 14 - лекционных; за первый модуль получено по 5-ти балльной системе оценки: ИЗ - «3,4,5,2», КР - «3,3,4», а по второму модулю ИЗ - «2,3,4», КР - «4,2,3».

[16, 11, 27] (10)

В исполнении команды (см. (10)) видно, что за текущую контроль знаний студент за семестр получил: 16 - суммарный балл ИЗ и КР (см. (7)), 11 - суммарный балл за посещение аудиторных занятий (см. (1)) и 27 - общий балл за семестр (см. (8)).

9.6. Подпрограмма вычисления баллов промежуточной аттестации (экзаменов/зачетов)

Пусть `num` - порядковый номер, `name` - Фамилия Имя Отчество, `min_sr` - минимальный балл за экзамен/зачет, `sr[[ball[1]], ..., [ball[i]]]` - список баллов по i -модулю, `nn` - список баллов в экзаменационном билете ($\max=50$), `o` - оценка по 5-ой шкале ответа по i -му вопросу, `f` - вывод информации (при $f=0$: порядковый номер, ФИО студента, суммарный балл за текущий семестр, балл за экзамен, итоговый балл, итоговая оценка по пятибалльной шкале вносимая в зачетную книжку; при любом другом значении f : порядковый номер, ФИО студента, суммарный балл за текущий семестр, балл за экзамен, итоговый балл, итоговая оценка по пятибалльной шкале вносимая в зачетную книжку и в виде списка [Σ семестр, Σ экзамен, Σ итого, оценка]).

```
> BRS[ball_w3]:=proc(num,name,min_sr,sr,nn,o,f) local srs_min1,
srs_min2,srs_min3,z1,z2,z3,z4,srs1,srs2,srs3,nnn,pp,oo,ss,SS,ZZ,ball_z:
srs_min1:=min_sr[1]:srs_min2:=min_sr[2]:srs_min3:=min_sr[3]:
srs1:=sr[1]:srs2:=sr[2]:srs3:=sr[3]:
nnn:=nops(o):
if
srs1<srs_min1 and srs2>=srs_min2 and srs3>=srs_min3
then pp:=print(convert([№(num)],string), name,
'Суммарный балл за семестр'=srs1+srs2+srs3,
'Недостаточный балл по первой теме!!!'):
elif
srs1 >=srs_min1 and srs2<srs_min2 and srs3>=srs_min3
then pp:=print(convert([№(num)],string), name,
'Суммарный балл за семестр'=srs1+srs2+srs3,
'Недостаточный балл по второй теме!!!'):
elif
```

```

srs1 >=srs_min1 and srs2>=srs_min2 and srs3<srs_min3
then pp:=print(convert([No(num)],string), name,
'Суммарный балл за семестр'=srs1+srs2+srs3,
"Недостаточный балл по третьей теме!!!"):
elif
srs1<srs_min1 and srs2<srs_min2 and srs3<srs_min3
then pp:=print(convert([No(num)],string), name,
'Суммарный балл за семестр'=srs1+srs2+srs3,
"Недостаточный балл по трем темам!!!"):
else
pp:='Модуль 1 '=srs1,'Модуль 2 '=srs2,'Модуль 3 '=srs3,Допущен:
oo:=seq(round((O[i]*nn[i])/5),i=1..nnn):
[pp,[srs1+srs2+srs3,ball_z,SS,rhs(ZZ)]]:
end if:
end proc:

```

10. Программные процедуры библиотеки Base

Программные процедуры библиотеки Base обеспечивают: обмен данными между Excel-файлами (`list`, `sheet`)⁵ и `Maplet`; построение гистограмм, как по каждому тесту, так и по суммарному результату; вывод дат в различных форматах; пароли для входа в окно `Maplet` тестирования; приведение десятичных дробей в `Maple` - формате к стандартному виду.

Процедура создания пользовательской библиотеки с именем `Name` в пакете `Maple` начинается с записи в активной строке рабочего листа `mw` пустой таблицы с именем `Name`:

```
>Name:=table():
```

При этом пользовательской процедуре `Proc_n` присваивается имя `Name[Proc_n]`, а сама библиотека процедур с именем `Name_Lib` и адресом `Path` генерируется при запуске последней активной строки рабочего листа:

```
>save(Name,'Path\Name\_Lib.m');
```

Вызов созданной процедуры из библиотеки осуществляется пользователем в своем рабочем листе `mw` с помощью следующей процедуры:

```

> read "Path/Name\_Lib.m":
  with(Name);
> Proc\_n(Opt1,Opt2,...,Param1,Param2,...);

```

Опишем основные разработанные нами принципы создания программных процедур. Рассмотрим библиотеку `Base` в котором содержатся программные процедуры `DataTIME(N)`, `Ball_Num(B)`, `PasWord(N)`, `NoGrup`, `BalAudSemP(NAME,N)`, `SpV(N)`, `SpVC(N)` и так далее. Так, например, в программной процедуре `BalAudSemP(NAME,N)`

⁵ например, баллы импортируются в окно `Maplet`, ответы экспортируются в Excel-файл

вычисляет (см. (1)) и экспортирует суммарный балл за прилежание в Excel - файл под названием sheet. Пусть NAME - Фамилия Имя Отчество (ФИО) и N - номер группы студента. Каждый лист Excel - файла обозначается последним числом номер группы. Для ее нахождения используются следующие формулы

$$F = \text{floor} \left(\frac{N}{10} \right); \quad (11)$$

$$K = N - F \cdot 10. \quad (12)$$

Рассмотрим пример для импортирование (см. стр. 208) данных группы 05-504, например, ФИО студентов из файла list.xlsx ячейки P1:P50 и листа 4 (см. (11), (12)).

```
>F:=floor(N/10):
```

```
K:=N-%*10:
```

```
ImpSp:=ExcelTools[Import]("../InstituteD/int7/list.xlsx", 'K', "P1:P50");
```

```
ConImpSp:=convert(ImpSp, list):
```

Команда `member(convert(NAME, string), ConImpSp, 'k')` находит из списка NAME, где k определяет номер позиции. Далее значение `SumBalSem1:=round((nn/NN[1])*14)` вычисляет прилежание (см. 1) и экспортирует `ExpAud:=ExcelTools[Export](SumBalSem1, "../InstituteD/int7/sheet.xlsx", 'K', 'anaud')` в файл sheet.

```
>Base[BalAudSemP]:=proc(NAME, N) local L, F, K, ImpSp, ConImpSp, Mem0, k, aa, NN,
RRR, an, ann, an1, an2, ImpPosP1, ConImpPosP1, ImpPosL1, ConImpPosL1, NP, ConNP,
nnP, nnL, ss, ann1, an3, SBP1, SBL1, ssP1, ssL1, nn, SumBalSem1, anl, anp, anaud,
ExpL, ExpP, ExpAud:
```

```
F:=floor(N/10):
```

```
K:=N-%*10:
```

```
ImpSp:=ExcelTools[Import]("../InstituteD/int7/list.xlsx", 'K', "P1:P50");
```

```
ConImpSp:=convert(ImpSp, list):
```

```
Mem0:=member(convert(NAME, string), ConImpSp, 'k');
```

```
k:
```

```
an:=119+k:
```

```
ann:=168+k:
```

```
an1:=convert(an, string):
```

```
ann1:=convert(ann, string):
```

```
an2:=StringTools[Join](["C", an1, ":", "U", an1], ""):
```

```
an3:=StringTools[Join](["C", ann1, ":", "U", ann1], ""):
```

```
ImpPosP1:=ExcelTools[Import]("../InstituteD/int7/sheet.xlsx", 'K', 'an2');
```

```
ConImpPosP1:=convert(ImpPosP1, list):
```

```
ImpPosL1:=ExcelTools[Import]("../InstituteD/int7/sheet.xlsx", 'K', 'an3');
```

```
ConImpPosL1:=convert(ImpPosL1, list):
```

```
NP:=ExcelTools[Import]("../InstituteD/int7/list.xlsx", 'K', "AE4:AE4");
```

```
NN:=convert(NP, list):
```

```
SBP1:=subs("0"=0, "1"=1, ConImpPosP1):
```

```

SBL1:=subs("0"=0,"1"=1,ConImpPosL1):
nnP:=nops(ConImpPosP1):
nnL:=nops(ConImpPosL1):
ssP1:=sum(op(SBP1)[i],i=1..nnP):
ssL1:=sum(op(SBL1)[i],i=1..nnL):
nn:=ssP1+ssL1:
SumBalSem1:=round((nn/NN[1])*14):
ExpP:=ExcelTools[Export](ssP1,"../InstituteD/int7/sheet.xlsx",'K','anp'):
ExpAud:=ExcelTools[Export](SumBalSem1,"../InstituteD/int7/sheet.xlsx",
'K','anaud'):
end proc:

```

Ввод и исполнение программной процедуры BalAudSemP.

```
>Base[BalAudSemP](Валиева_Лейсан_Расиловна,504);
```

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	
168	№	ФИО	06.04.2016	13.04.2016	20.04.2016	27.04.2016	04.05.2016	11.05.2016	18.05.2016	25.05.2016	15.05.2016											ВСЕГО	Аудиторных	
169	1	Андреева Светлана Николаевна	1	1	1	0	0	0	0	0	1													12
170	2	Афанасьева Дарья Сергеевна	1	1	0	0	0	0	0	0	0													
171	3	Ахмадулина Элина Фаизовна	1	1	0	0	0	0	0	0	0													
172	4	Ахметова Анастасия Евгеньевна	1	1	1	0	0	0	0	0	0													
173	5	Булатов Роман Олегович	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1												7
174	6	Валиева Лейсан Расиловна	0	1	0	0	0	0	0	0	0													6

Рис. 11. Окно Excel лист 4

11. Построение Marplet'a

11.1. Окно преподавателя

При запуске файла «test.marplet» (см. рис. 12.1) появляется окно «Выбор языка» (см. рис. 12.4), после соответствующего выбора осуществляется переход на главную страницу аналитического тестирования, содержащую две кнопки «Преподаватель» и «Студент» (см. рис. 12.5).

Вход в окно «Преподаватель» осуществляется с помощью пароля (см. рис. 12.6). В окне «Преподаватель» имеется шесть кнопок (рис. 12.7). Рассмотрим окно (см. рис. 12.7а, 13) «Посещаемость студента», где преподаватель контролирует посещаемость студента в течение семестра. При выборе номера группы и нажатии на кнопку «Список группы» в текстовое поле (рис. 13.1) импортируется дата проведение занятия, а также даты проведенных занятий из файла sheet.xlsx (см. рис. 14). Список групп импортируется из файла list.xlsx в текстовое поле (см. рис. 13.3). В выпадающем списке (см. рис. 13.2) преподаватель выбирает из двух позиции баллы: 0 - студент не был, 0.5 - студент был; которые экспортируется в файл sheet.xlsx. В текстовое поле (рис. 13.3) экспортируется список группы из файла list.xlsx. Окно (см. рис. 12.7b) «Учебный план», в котором преподаватель перед

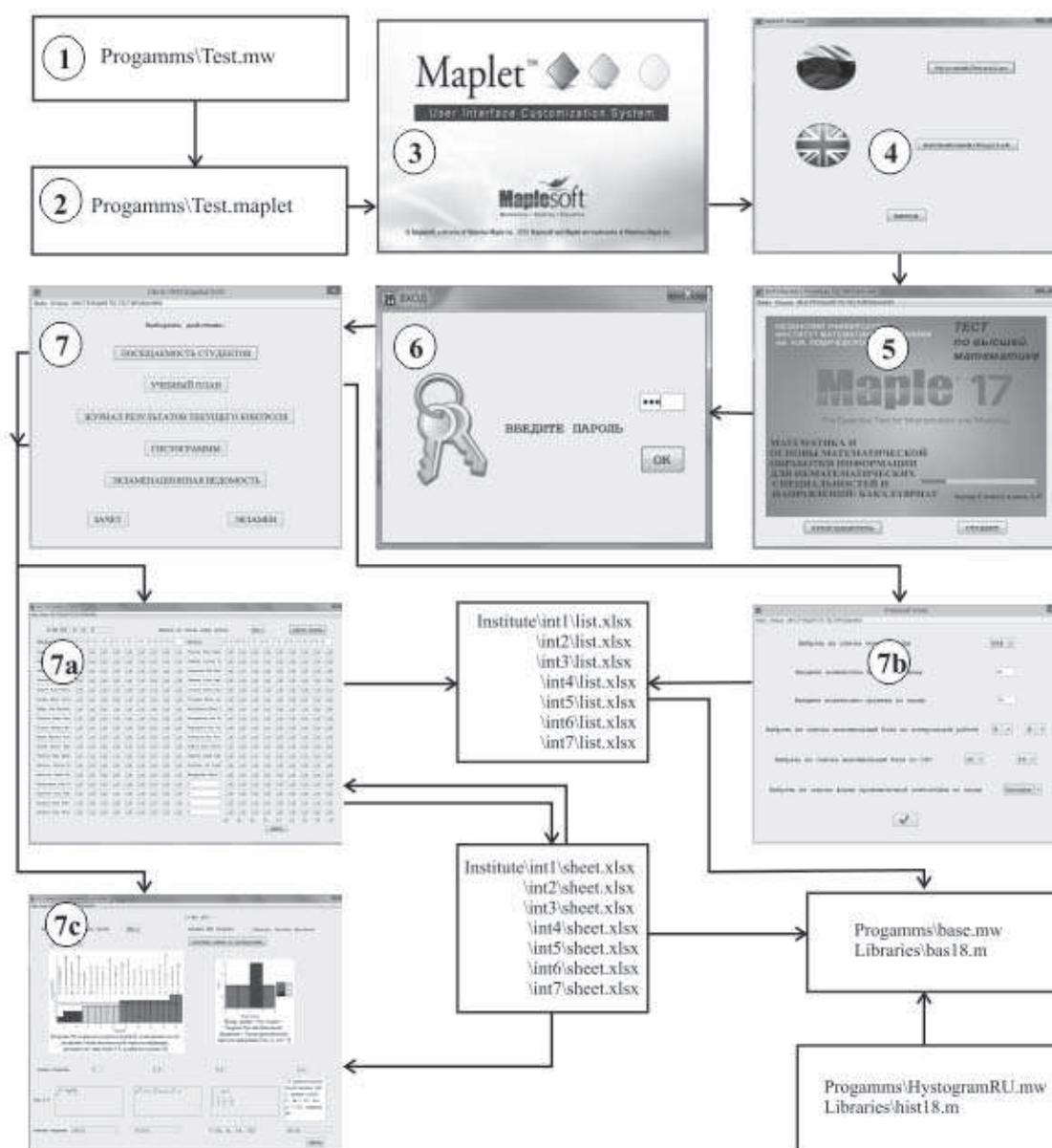


Рис. 12. Блок-схема программы аналитического тестирования: канал преподавателя. На рисунке 1 - генератор библиотеки программных процедур для создания Maplet-окон; 2 - управляющий Maplet-файл; 3 - запуск Maplet; 4 - окно выбора языка (русский / английский); 5 - главное меню; 6 - окно ввода пароля; 7 - окно переходов (посещаемость, учебный план, журнал текущего контроля знаний, гистограмма, экзаменационная ведомость, зачет, экзамен); 7a - открытие окна посещаемости практических занятий; 7b - открытие окна учебного плана; 7c - окно суммарных и индивидуальных результатов аналитического тестирования).

началом учебного семестра вводит данные: число лекционных занятий и число практических занятий; выбирает из выпадающего списка: максимальный балл за КР, максимальный балл за ИЗ, форму промежуточной аттестации.

Ниже показан фрагмент программы, осуществляющей создание окна препода-

вателя.

```
> Window['WP']"ВХОД",width=400,height=300,
[[Label['L1'](Image("key.gif"),'font' = F01)
[Label("ВВЕДИТЕ ПАРОЛЬ",'font' = F01)],
['L2']("НЕВЕРНЫЙ ПАРОЛЬ",'visible'='false','font' = F01),}
[PasswordField['PF']()],}
[Button['B1']("ОК",Action(Evaluate('function' =
'Base[PasWord](PF)'),font = F01)],}
Button['B22']("ВХОД",'visible'='false',
Action(CloseWindow('WP'),RunWindow('WP1')),
font = F01)]]]],)}
Window['WP1']'title'="ОКНО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ",}
'menubar'='MB1',width=700,height=600,
[[Label("Выберите действие:",'font' = F01)],
["ПОСЕЩАЕМОСТЬ СТУДЕНТОВ", RunWindow('WP3'),
'font' = Font("Times",20)],
["УЧЕБНЫЙ ПЛАН", RunWindow('WP2'),
'font' = Font("Times",20)],
["ЖУРНАЛ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ",
RunWindow('WPJRTK'),'font' =
Font("Times",20)],
["ГИСТОГРАММЫ", RunWindow('WPHist'),
'font' = Font("Times",20)],
.....
```

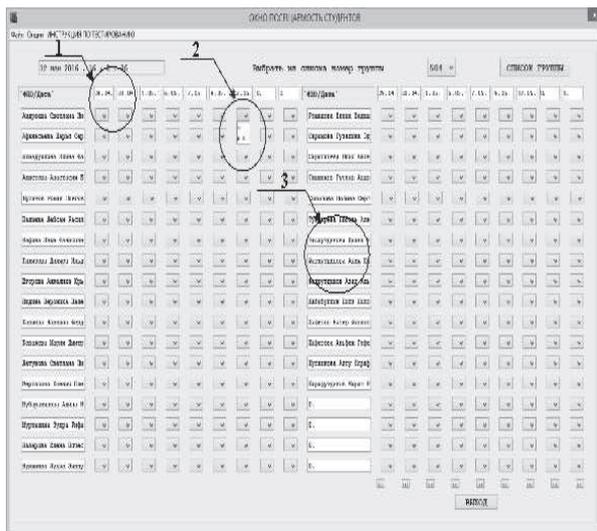


Рис. 13. Окно посещаемости студентов

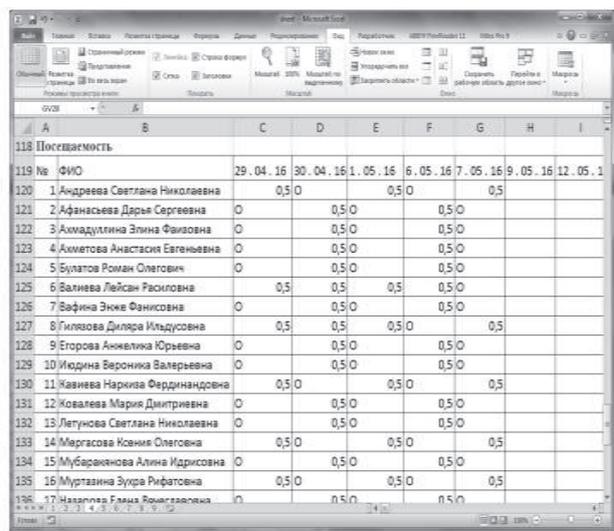


Рис. 14. Фрагмент 4 листа окна Excel файла «sheet» с результатами посещаемости студентов группы 05-504 в течение семестра.

11.2. Окно студента

Ниже показан фрагмент программы осуществляющей создание окна аналитического тестирования «Линейная алгебра».

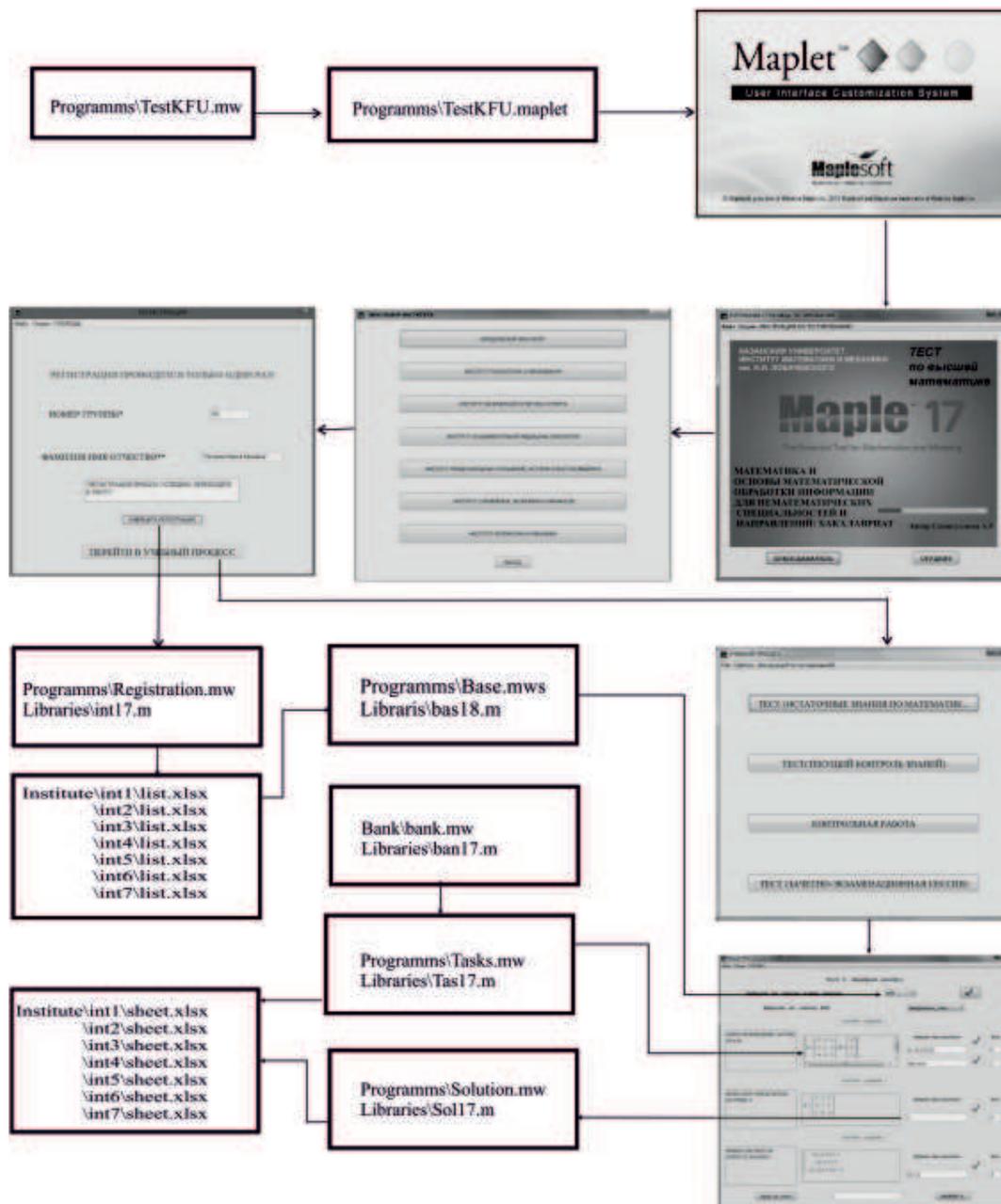


Рис. 15. После выбора блока студентом, осуществляется переход в окно аналитического тестирования.

```
Window['WI7D1'](  
    'title'="ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА", 'menubar'='MBD1', width=640, height=610,  
    [  
        MenuBar['MBD1'](  
            Menu("Файл", MenuItem("Выход", Shutdown("Closed from menu"))),
```

```

Menu("Опции"),
Menu("Справка", MenuItem("Открыть", RunWindow('WMI7D1'))),
["Введите номер группы", TextField['TF1D1I7'](8), 'font' = Font("Times",18),
'haligh'= left,"Введите ФИО",TextField['TF2D1I7'](25)],
[Button['B1D1I7']("Получить задание",
Action(SetOption('B1D1I7'('enabled')='false'),
Evaluate('TB1D1I7'='Bank[int7TextZadD]()[1]'),
Evaluate('MV1D1I7'='MathML[Export]
(Tasks[int7taskD1](TF2D1I7,TF1D1I7))')))],
[TextBox['TB1D1I7'](3..26, 'font' = Font("Times",14))],
[BoxLayout([BoxRow(border=false,
haligh= 'left', 'valign' = 'none',
'font' = Font("Times",30),MathMLViewer['MV1D1I7']
(foreground=blue,background = COLOR(RGB,0.94, 0.94, 0.94))))],
["AB",TextField['TF3D1I7'](),
"BA",TextField['TF3D1I7A'](),TextField['TF4D1I7'](10),
Button("Завершить \nзадание 1",
Action(Evaluate('TF4D1I7'='Check[int7CheckTestD1](TF2D1I7,TF1D1I7)'),
Evaluate('function'='ButtonVisib[int7ButVisD1]('TF4D1I7')'))

```

Из выпадающего списка (см. рис. 16) выбирается номер группы и ФИО студента. Ответ студент записывает в текстовое поле. Формат записи ответа указан в меню ->опции «Справка» (см. рис. 17).

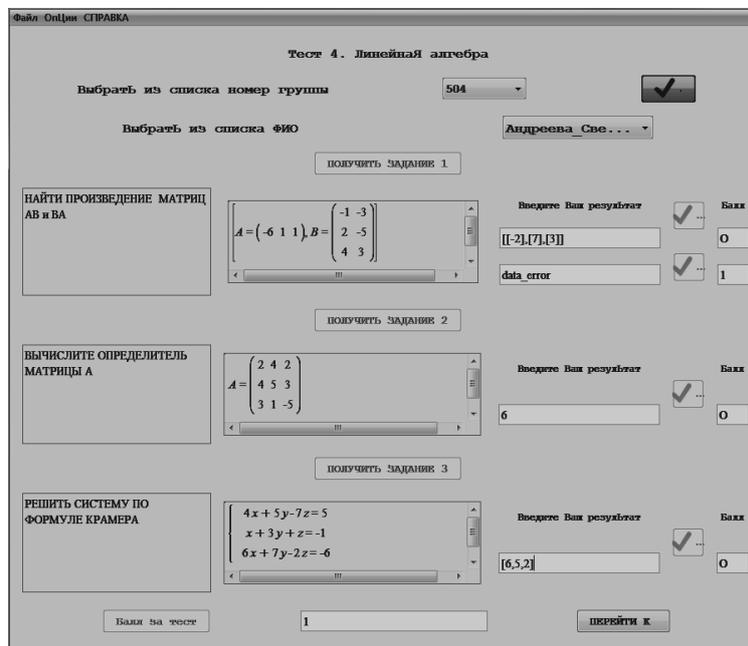


Рис. 16. Окно аналитического тестирования: Блок D - Линейная алгебра.

После завершения всех заданий открывается окно «Результат по Блоку D», в котором студенту предоставляется следующая информация: балл за каждый выполненный задание и гистограмма. На гистограмме (см. рис. 18) отображается: баллы за каждое выполненное задание (0-синий цвет, 1-зелёный, 2-красный), общий балл за

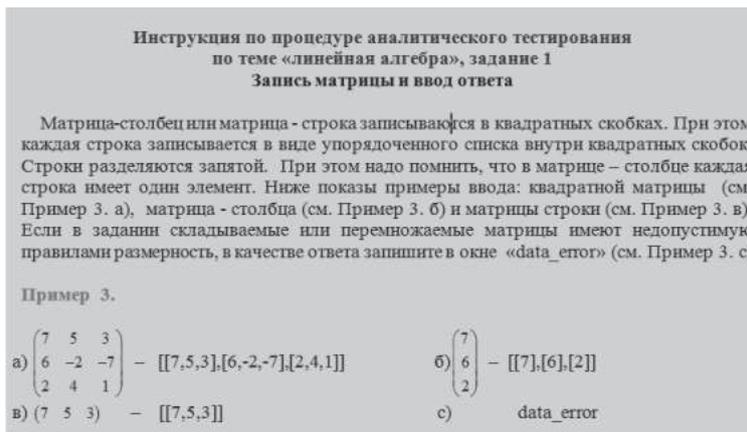


Рис. 17. Окно «Справка»

тест и легенда тестирования (номер группы, название дисциплины, ФИО студента и общий балл за тест).

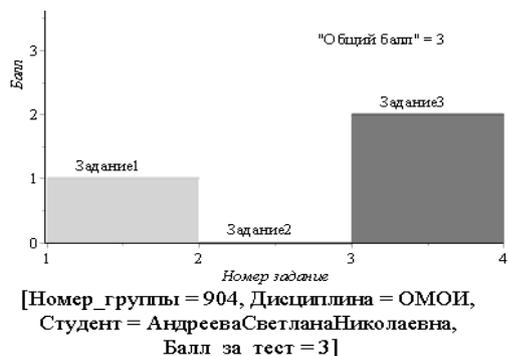


Рис. 18. Гистограмма: рейтинг студентки Андреевой Светланы Николаевны по блоку D

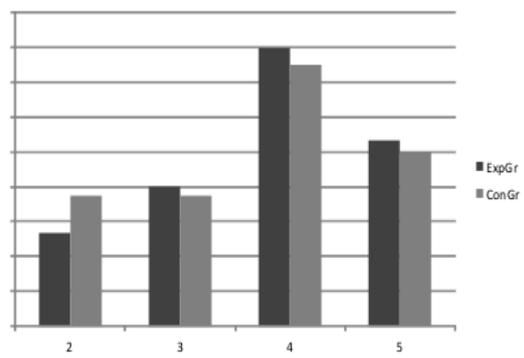


Рис. 19. Результаты экзаменационной сессии в экспериментальной и контрольной группах. По оси абсцисс показаны оценки по пятибалльной шкале, по оси ординат - доля студентов, их получивших (в процентах).

Описанные выше программы и методы информационных технологий были внедрены в процесс преподавания высшей математики в учебных группах 1-го и 2-го курсов Института физической культуры, спорта и восстановительной медицины и юридического факультета Казанского федерального университета (KFU). Отметим, что студенты указанных профилей имеют весьма низкую мотивацию к изучению высшей математики, которая им представляется предметом, не нужным для своей будущей работы. Для проведения эксперимента по внедрению информационных технологий на основе пакета Maple были выбраны пары экспериментальных и контрольных групп. На рисунках 19-22 представлены некоторые результаты итогового контроля знаний и тестирования студентов.

Анализ результатов, представленных на рисунке 19, позволяет сделать следующие выводы:

1. Успеваемость экспериментальной группе оказалась выше успеваемости контрольной группы на 5%;

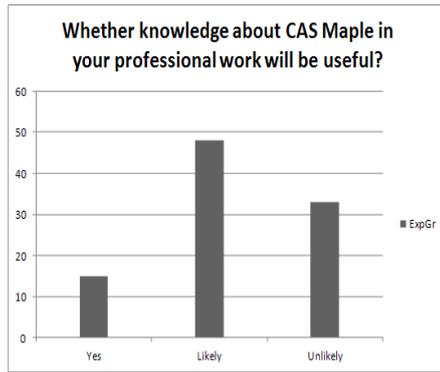


Рис. 20. Результаты анкетирования экспериментальной группы на предмет мотивации изучения CAS.

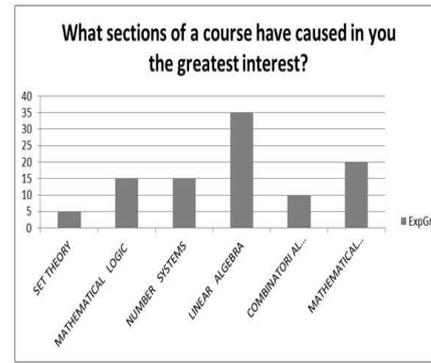


Рис. 21. Результаты анкетирования экспериментальной группы на предмет самооценки уровня овладения курсом высшей математики.

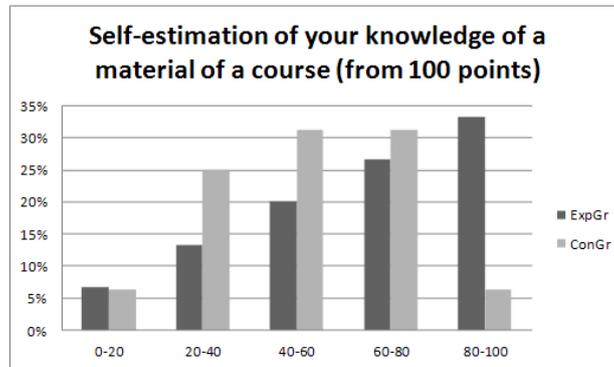


Рис. 22. Гистограмма самооценки студентов экспериментальной и контрольной групп. По оси абсцисс отложены баллы самооценки студентов, по оси ординат количество студентов в процентах.

2. Качество знаний экспериментальной группы оказалась выше на 9 %.

На рисунках 20, 21 представлены результаты анкетирования о мотивации изучения CAS студентов экспериментальной группы по завершении курса высшей математики. На рисунке 21 представлены результаты анкетирования студентов экспериментальной группы самооценки уровня овладения курсом высшей математики.

Как видно из вышеприведенных диаграмм, можно отметить устойчивую тенденцию к повышению мотивации изучения высшей математики в экспериментальной группе, а также и более высокую самооценку их знаний предмета.

12. Заключение

Таким образом, опыт внедрения информационных технологий на основе комбинированного применения методов математического и компьютерного моделирования в CAS Maple в систему математического образования в Казанском университете привел к положительным результатам, как в успеваемости студентов, так и к повышению интереса студентов нематематического профилей обучения к выс-

шей математике. Кроме того, следует отметить, что студенты экспериментальной группы одновременно получили и дополнительные компетенции в области информационных технологий, что, несомненно, послужит их профессиональному росту в будущем.

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Обучение высшей математике на основе интегрирования методов математического и компьютерного моделирования в системах компьютерной математики / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2016.- Вып. 2. - С. 62-88.
2. Адиятуллина Г.Р. Взаимодействие маплетов с базами данных в форматах txt и xsl в аналитической системе тестирования / Г.Р. Адиятуллина, Ю.Г. Игнатъев // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. - 2011. - Вып. 3 (25). - С. 21-25.
3. Аладьев В.З. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. - Гродно: Изд-во Гродненского госуниверситета, 2011. - 518 с.
4. Buteau C. On the Integration of Computer Algebra Systems (CAS) by Canadian Mathematicians: Results of a National Survey / C. Buteau, D. Jarvis, Z. Lavicza // Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. - 2014. - Vol. 14, № 1. - P. 35-57.
5. Бушкова В.А. Библиотека программных процедур создания управляемой оснащенной динамической визуализации геодезических линий в СКМ Maple / В.А. Бушкова // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.- 2011. - Вып. 4 (26). - С. 8-10.
6. Дьяконов В.П. Компьютерная математика / В.П. Дьяконов // Соровский образовательный журнал. - 2001. - Вып. 1. - С. 116-121.
7. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов. - М.: Солон-Пресс, 2006. - 720 с.
8. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: Учебник для вузов. / Д.П. Голоскоков. - Спб.: Питер, 2004. - 539 с.
9. Проблемы информационных технологий в математическом образовании // Учебное пособие под редакцией Ю.Г. Игнатъева. - Казань: ТГППУ, 2005. - 118 с.
10. Игнатъев Ю.Г. Пользовательские графические процедуры для создания анимационных моделей нелинейных физических процессов / Ю.Г. Игнатъев // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции. - 2009. - СмолГУ: Смоленск. - Вып. 10. - С. 43-44.
11. Игнатъев Ю.Г. Комплекс программ для математического моделирования нелинейных электродинамических систем в системе компьютерной математики Maple / Ю.Г. Игнатъев, Х.Х. Абдулла // Вестник Российского университета дружбы народов. - Математика. Информатика. Физика. - 2010. - Вып. 4. - С. 65-76.
12. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование нелинейных обобщенно - механических систем в системе компьютерной математики Maple / Ю.Г. Игнатъев, Х.Х. Абдулла // Известия высших учебных заведений.- Поволжский регион. Физико-математические науки. - 2010.- Вып. 2 (14). - С. 67-77.
13. Игнатъев Ю.Г. Библиотека программных процедур для методического обеспечения курса высшей алгебры в системе компьютерной математики Maple / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. - 2011. - Вып. 1 (23). - С. 20-24.
14. Игнатъев Ю.Г. Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. - 2011. - Вып. 4 (26). - С. 24-29.

15. Игнатъев Ю.Г. Программа точного вычисления фундаментальных решений системы линейных алгебраических уравнений произвольного порядка и представления их в стандартном, списочном виде в математическом пакете Maple / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ РФ № 2011614976. 2011. Бюл.: RU ОБПБТ. Вып. 3 (76). С. 547.
16. Игнатъев Ю.Г. Программный комплекс итоговой аттестации знаний, автоматизированного анализа и вывода результатов аттестации группы учащихся студентов по балльно - рейтинговой системе (БРС) на основе прикладного математического пакета Maple, его приложения Marplet и MicrosoftExcel / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина, А.А. Агафонов // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619361, 10 ноября 2014г. Федеральная служба интеллектуальной собственности.
17. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс программных процедур по высшей математике в прикладном математическом пакете Maple. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2013617288, 8 августа 2013г. Федеральная служба интеллектуальной собственности.
18. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программа автоматизированного полного исследования общего уравнения второго порядка на плоскости с выводом результатов исследования в табличном и графическом форматах всех элементов кривых, описываемых общим уравнением, включая формулы их преобразования к каноническому виду, изображения директрис, асимптот, фокусов, исходной и преобразованной системы координат, в математическом пакете Maple. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012611664, 14 февраля 2012 г. Федеральная служба интеллектуальной собственности.
19. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple: лекции для школы по математическому моделированию / Ю.Г. Игнатъев. - Казань: Изв-во Казанский университет, 2014. - 298 с.
20. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование в СКМ как основа развития математического образования / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // IV-й Международный семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZKAS-2014. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZKAS-2014 / под общей редакцией Ю.Г. Игнатъева. - Казань: Из-во КФУ, 2014. - с. 95-110
21. Самигуллина А.Р. Система аналитического тестирования математических знаний на основе Maple и его приложения Marplet. Международная научно-практическая конференция «ИТОН-2015». Международная школа-семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики - «KAZCAS-2015». // Материалы конференции и труды школы-семинара. / под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатъева - Казань: изд-во Академии наук РТ, 2015. - С. 54-56.
22. Капустина Т.В. Компьютерная система Mathematica 3.0 в вузовском образовании / Т.В. Капустина. - М.: МПУ, 2000. - 240 с.
23. Кирсанов М.Н. Maple и Marplet. Решения задач механики: учебное пособие / М.Н. Кирсанов. - СПб.: Лань, 2012. - 512 с.
24. Корнилов В.С. Современные информационные и коммуникационные технологии в гуманитарных исследованиях математических моделей обратных задач для дифференциальных уравнений / В.С. Корнилов // Вестник Российского университета дружбы народов. - Информатизация образования. - М.: РУДН, 2007. - Вып. 1. - С.64-68.
25. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. / А.В. Матросов. - СПб.: БХВ-Петербург, 2001. - С. 528.
26. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А.А.Самарский, А.П. Михайлов. - 2-е изд. - М.: Физматлит, 2005. - 320 с.

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

Э.В. Чеботарева

**Введение в конструирование и
программирование электронных устройств
на базе платформы Arduino**



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 004.9+372.862

ВВЕДЕНИЕ В КОНСТРУИРОВАНИЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ НА БАЗЕ ПЛАТФОРМЫ ARDUINO

Э.В. Чеботарева¹

¹ chebotareva.elv@gmail.com; Казанский федеральный университет

Лекция посвящена знакомству с платформой Arduino, с помощью которой можно сделать первые шаги в робототехнике. Приведено техническое описание и рассмотрены основы программирования платформы. Также в лекции разобраны примеры создания простых проектов.

Ключевые слова: Робототехника, Arduino

Введение

В настоящее время образовательная робототехника является актуальным и очень популярным направлением во всем мире.

Трудно переоценить те возможности, которые предоставляет включение в учебный процесс конструирования и программирования хотя бы одного физического устройства. Робототехника позволяет применить на практике знания, полученные учащимися на уроках физики, информатики, математики, симулирует развитие когнитивных способностей, мотивирует к творчеству и исследовательской деятельности, способствует приобретению навыков работы в коллективе. Кроме того, внедрение робототехники в учебный процесс стимулирует учителей к поиску новых приемов, способов и техник в обучении.

Настоящая лекция посвящена основам работы с конструктором Arduino. Arduino - это платформа с открытым исходным кодом, основанная на простых в использовании аппаратных средствах и удобной среде программирования. К достоинствам платформы также можно отнести сравнительно низкую стоимость и расширяемость как аппаратного так и программного обеспечения.

1. Аппаратные средства

Главной частью Arduino является печатная плата, с размещенным на ней микроконтроллером. В семейство Arduino входит несколько разновидностей плат [1], выбор той или иной платы обусловлен особенностями проекта. Например, простые проекты для начинающих рекомендуется выполнять с помощью платы Arduino UNO, с помощью платы Arduino MEGA можно создать сложные проекты, такие как 3D-принтер, а плата LilyPad Arduino предназначена для использования с предметами одежды и текстиля, с помощью нее, к примеру, можно разрабатывать «умную одежду».

Плата Arduino UNO основана на микроконтроллере ATmega328P. На плате имеется 14 контактов, которые могут быть использованы для цифрового ввода и вывода (порты 0-14 на рис. 1), 6 из них могут использоваться для аналогового выхода (порты 3,5,6,9,10,11 на рис. 1), 6 портов аналогового входа (A0-A5 на рис. 1). Платформа

Arduino UNO оснащена 32Кб флеш-памяти, оперативная память (SRAM) составляет 2Кб, также имеется 1Кб для долговременного хранения данных (EEPROM).

Питание осуществляется с помощью USB подключения или батарейки, при подключении через USB питание составляет 5 В. Диапазон входного напряжения составляет 7-12 В, процессор работает на напряжении 5 В. На плате имеются следующие контакты для доступа к питанию (рис. 1):

- Vin дает то же напряжение, что используется для питания.
- 5V дает напряжение 5В вне зависимости от входного напряжения.
- 3.3V дает напряжение 3,3В.
- GND - земля.

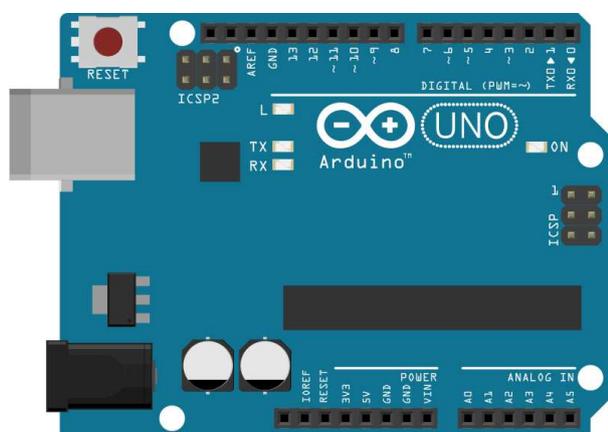


Рис. 1. Платформа Arduino UNO

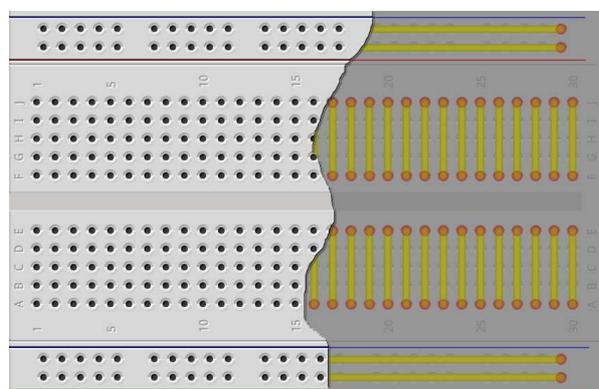


Рис. 2. Платформа Arduino UNO

В большинстве проектов используется так называемая макетная плата, которая предназначена для быстрой сборки схем (рис. 2). При использовании макетной платы не нужен паяльник, схему легко корректировать благодаря имеющимся на плате контактам, которые можно соединять с помощью проводов или перемычек.

К платформе Arduino UNO может быть подключено множество различных деталей и устройств. К ним относятся устройства вывода, управления, а также многочисленные датчики и сенсоры. На рис. 3 представлены те из них, которые понадобятся для реализации рассмотренных ниже проектов.

1. Резисторы. Резистор - пассивный элемент электрической цепи, обладающий сопротивлением.

2. Светодиоды. Светодиод светится при пропускании через него электрического тока в прямом направлении от анода к катоду. У светодиода две ножки. Аноду (+) соответствует длинная ножка светодиода, катоду (-) - короткая. Собственное сопротивление светодиода после насыщения очень мало, и без резистора, ограничивающего ток через светодиод, он перегорит.

3. Пьезоизлучатель. Пьезоизлучатель - это устройство, способное воспроизводить звук благодаря обратному пьезоэлектрическому эффекту.

4. Сервопривод. Сервопривод - это мотор, углом поворота вала которого можно управлять.

5. Фоторезистор. Фоторезистор меняет сопротивление в зависимости от количества света падающего на него. В полной темноте он имеет максимальное сопротивление, а по мере роста освещённости сопротивление уменьшается.

6. Ультразвуковой дальномер. Ультразвуковой дальномер излучает звуковой сигнал и принимает его отраженным от препятствия. Зная время, которое понадобилось звуковому сигналу чтобы преодолеть расстояние до объекта и вернуться после отражения от объекта, а также скорость звука, можно вычислить расстояние до объекта.

Также нам понадобятся соединительные провода, кабель USB, блок питания. Комплект деталей, на основе которого можно провести первые уроки по программированию Arduino приведен на рис. 3.

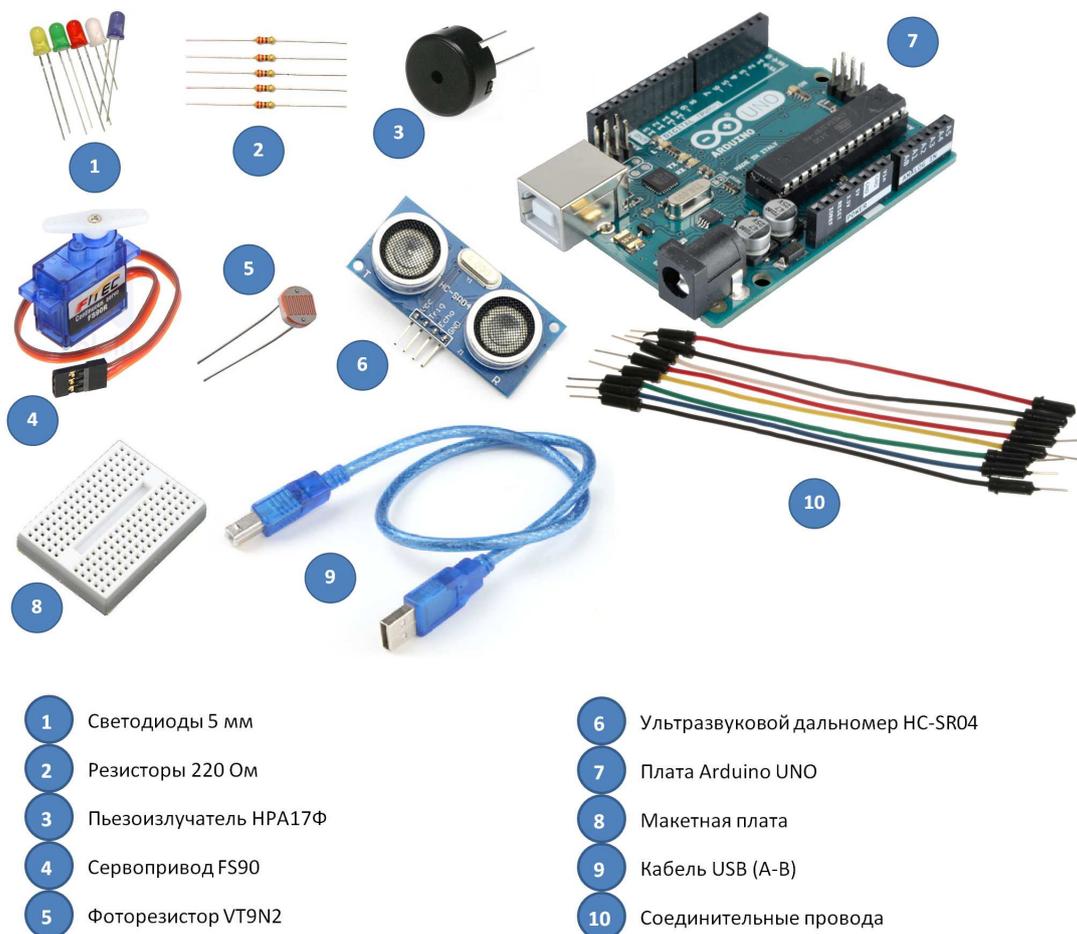


Рис. 3. Используемые детали

2. Программирование

Для программирования Arduino используется интегрированная среда разработки - Arduino IDE, которую можно скачать на официальном сайте проекта [2]. Языком программирования является C++. Программы для Arduino принято называть скетчами. На рис. 4 приведен вид окна Arduino IDE. Для компиляции скетча следует нажать кнопку «Проверить» на панели быстрого доступа, для загрузки скетча на плату

необходимо соединить плату с компьютером с помощью USB кабеля и нажать кнопку «Загрузить».

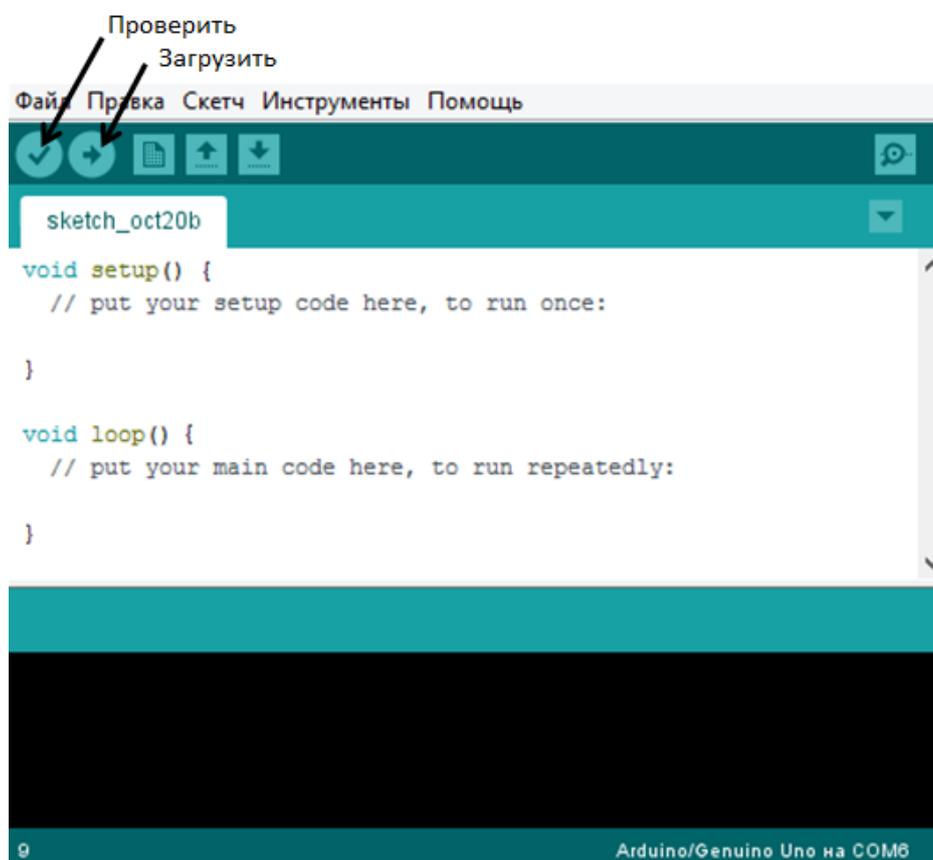


Рис. 4. Arduino IDE

Программа должна содержать две обязательные функции `setup()` и `loop()` (рис. 4). Функция `setup()` вызывается однократно при старте, а функция `loop()` выполняется в режиме бесконечного цикла.

3. Примеры простых проектов

3.1. Мигающий светодиод

Первым проектом, который рекомендуется выполнить начинающим работу с Arduino является управление светодиодом.

Схема подключения приведена на рис. 5.

Для программирования проекта нам понадобятся функции, приведенные в табл. 1.1.

Код программы, для включения светодиода выглядит следующим образом.

```
void setup()
{
  pinMode(4, OUTPUT);
}
void loop()
```

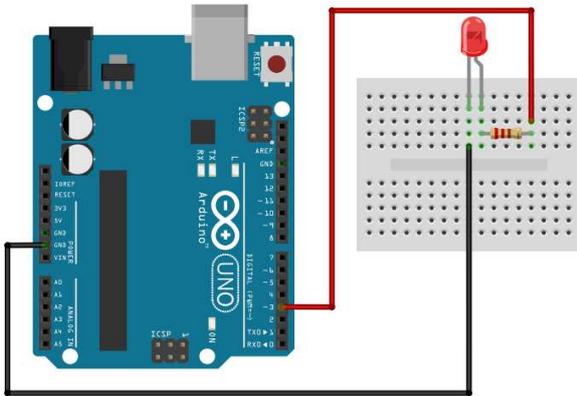


Рис. 5. Схема подключения светодиода

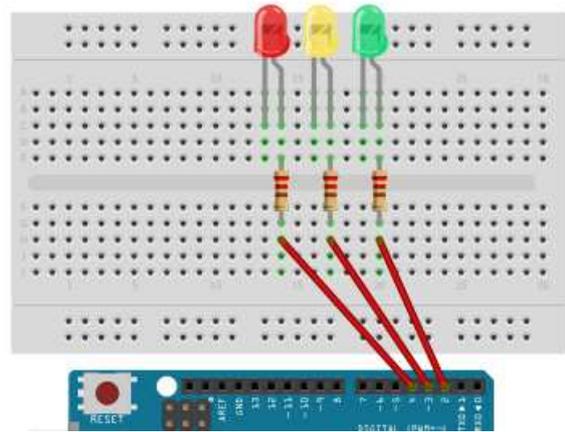


Рис. 6. Схема к заданию для самостоятельного выполнения

Таблица 1.1. Команды для проекта «Мигающий светодиод»

Функция	Краткое описание
<code>pinMode(pin, Mode)</code>	Устанавливает режим работы заданного цифрового вывода как входа или как выхода. <code>pin</code> - номер цифрового вывода, <code>Mode</code> принимает значения <code>INPUT</code> (вход) или <code>OUTPUT</code> (выход).
<code>digitalWrite(pin, value)</code>	Отправляет на цифровой вывод с номером <code>pin</code> значение <code>HIGH</code> или <code>LOW</code> .
<code>delay(ms)</code>	Останавливает выполнение программы на <code>ms</code> миллисекунд.

```
{
digitalWrite(4, HIGH);
}
```

Данная программа состоит из двух обязательных функций. Функция `setup()` выполнится один раз при запуске проекта. При этом функция `pinMode` установит цифровой вывод 4 в качестве выходного.

Функция `loop()` в режиме бесконечного цикла будет вызывать команду `digitalWrite`, которая подает на цифровой вывод с номером 4 значение `HIGH`, в результате чего светодиод включается.

Чтобы светодиод мигал, необходимо после включения обеспечить его выключение, подав на цифровой вывод с номером 4 значение `LOW`, а с помощью команды `delay` можно управлять временем ожидания между включением и выключением.

Код программы при этом примет следующий вид.

```
void setup()
{
pinMode(4, OUTPUT);
```

Таблица 1.2. Команды для проекта «Пьезоэлемент»

Функция	Краткое описание
tone(pin, frequency, ms)	Генерирует на выводе pin сигнал с частотой frequency и длительностью ms.
noTone(pin)	Останавливает сигнал на выводе pin.

```

}
void loop()
{
digitalWrite(4, HIGH);
delay(500);
digitalWrite(4, LOW);
delay(500);
}

```

Приведем также пример задания для самостоятельного выполнения. Требуется дополнить схему на рис. 6 и написать программу, которая включает и выключает светодиоды по очереди слева на право.

3.2. Пьезоэлемент

По аналогии со светодиодом можно управлять звуком, который издает пьезоэлемент. Для программирования проекта нам понадобятся дополнительные функции, приведенные в табл. 1.2.

Схема подключения приведена на рис. 7.

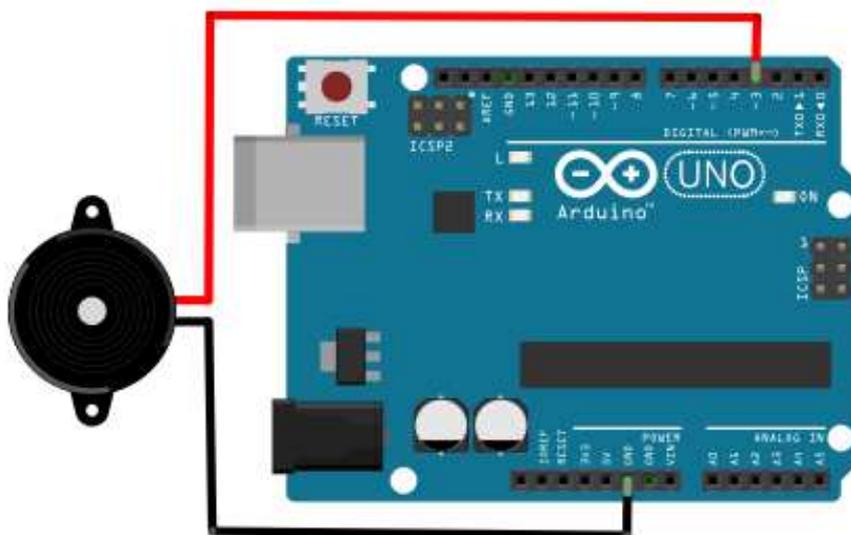


Рис. 7. Схема подключения пьезоэлемента

Чтобы получить два сигнала разной частоты, выполним программу.

```

void setup()
{
pinMode(3, OUTPUT); //объявляем вывод 3 как выход
}
void loop()
{
tone (3, 500,100); //сигнал частотой 500 Гц 100 мс
tone(3, 1000,100); //включаем на 1000 Гц 100 мс
}

```

С помощью команды `tone` можно проигрывать различные мелодии, при этом `tone` лучше вызывать в массиве. В примере, приведенном ниже, проигрывается мелодия «К Элизе» Л. Бетховена.

```

const byte n = 35; // Количество нот
//массив частот нот
int notes[n] = { //массив частот нот
695, 622, 659, 622, 659, 987, 587,523, 440, 261,
329, 440, 493, 329, 415, 493, 523, 329, 659,622,
659, 622, 659, 987, 587, 523, 440, 261, 329, 440,
493, 349, 523,493,440};
int duration[n] = {//массив длительности нот
250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 250, 500, 250,
250, 250, 500, 250, 250, 250, 500, 250, 250, 250,
250, 250, 250, 250, 250, 250, 500, 250, 250, 250,
500, 250, 250, 250, 1000};
void setup()
{
pinMode(3, OUTPUT); //объявляем пин как выход
}
void loop()
{
for (int i=0; i<=n; i++) {
tone (p, notes[i], duration[i]); //проигрывание ноты
noTone(p); //останавливаем звук
}}

```

Заданием для самостоятельной работы может служить реализация «цветомузыки», где в зависимости от частоты сигнала включается светодиод определенного цвета, а длительность сигнала совпадает с длительностью горения светодиода.

3.3. Сервопривод

Сервопривод FS90 позволяет установить и удерживать угол поворота колеса. Для работы с сервоприводом, его нужно подключить к плате согласно рис. 8.

Управлять сервоприводом можно с помощью библиотеки `Servo.h` (табл. 1.3). Для этого требуется создать переменную типа `Servo`, которая соответствует физическому сервоприводу.

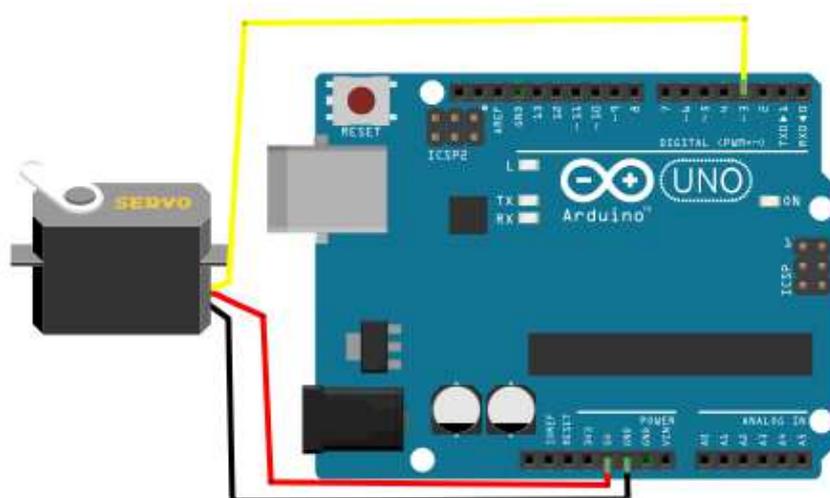


Рис. 8. Схема подключения сервопривода

Таблица 1.3. Команды для проекта «Сервопривод»

Функция	Краткое описание
<code>servo.attach(pin)</code>	Привязывает сервопривод с именем <code>servo</code> к выводу <code>pin</code> .
<code>servo.write(angle)</code>	Поворачивает вал сервопривода <code>servo</code> на угол <code>angle</code> в градусах.

```
#include <Servo.h>
Servo myservo;
void setup()
{
  myservo.attach(3);
}
void loop()
{
  myservo.write(0);
  delay(1000);
  myservo.write(180);
  delay(1000);
  myservo.write(90);
  delay(1000);
}
```

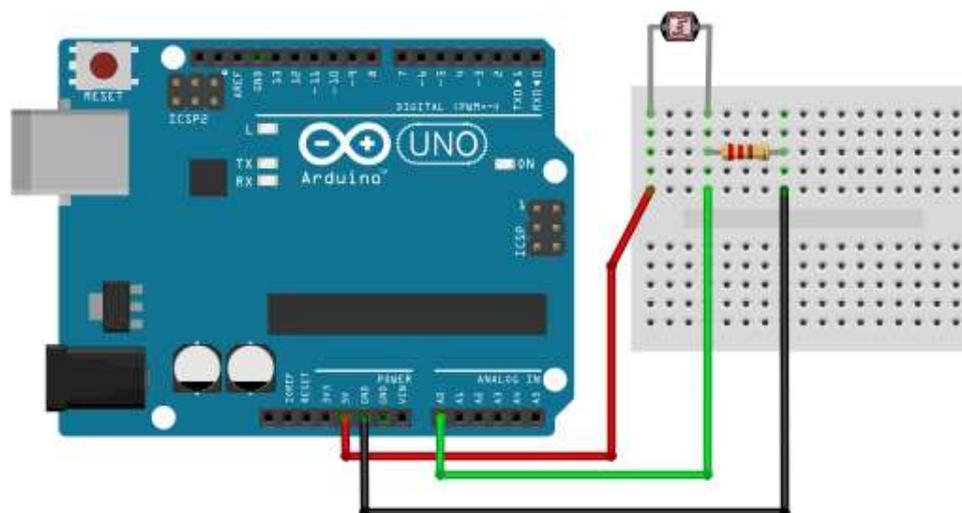
3.4. Измерение уровня освещенности

Фоторезистор - это резистор, меняющий сопротивление в зависимости от количества света падающего на него. Поэтому его можно использовать для измерения относительного уровня освещенности.

Таблица 1.4. Команды для проекта «Измерение уровня освещенности»

Функция	Краткое описание
<code>Serial.begin(speed)</code>	Открывает соединение и устанавливает скорость передачи равной <code>speed</code> бит/с.
<code>Serial.end()</code>	Закрывает последовательное соединение.
<code>Serial.print(value)</code>	Передает значение переменной <code>value</code> как текст на монитор
<code>Serial.println(value)</code>	Осуществляет при печати еще и перевод на новую строку.
<code>analogRead(Apin)</code>	Считывает значение с аналогового входа <code>Apin</code> .

Схема подключения приведена на рис. 9

**Рис. 9.** Схема подключения фоторезистора

Считываемые результаты можно выводить на монитор порта. Для организации связи Arduino с компьютером используют функции `Serial` (табл. 1.4).

Код программы.

```
int illum;//уровень освещенности
void setup() {
  Serial.begin(9600);
  pinMode(A0, INPUT);
}
void loop() {
  illum=analogRead(A0)
  Serial.println();
  delay(20);}
}
```

Для просмотра получаемых данных требуется после загрузки проекта на платформу выбрать в окне среды разработки «Инструменты - Монитор Портов».

В качестве задания для самостоятельного выполнения предлагается собрать схему к следующей программе.

```
int illum;
void setup() {
  pinMode(A0, INPUT);
  pinMode(5, OUTPUT);
}
void loop() {
  illum = analogRead(A0);
  if (illum<5) digitalWrite(7, HIGH);
  else digitalWrite(7, LOW);
}
```

3.5. Измерение расстояния

Ультразвуковой дальномер HC-SR04 имеет четыре вывода VCC, Trig, Echo, GND. Вывод VCC подключается к контакту 5V на плате. Вывод GND соединяется с контактом GND на плате. Через вывод Trig излучается звуковой сигнал, а вывод Echo принимает отраженный от препятствия сигнал. Выводы Trig и Echo можно подключать к любым пинам.

Пусть t - время (мс), за которое понадобилось звуковому сигналу чтобы дойти до препятствия и вернуться отразившись от него. Тогда расстояние l (см) до объекта от источника сигнала можно вычислить по формуле:

$$l = \frac{t}{58},$$

Функция `pulseIn(pin,value)` возвращает длину сигнала на выводе `pin` в миллисекундах, здесь `value` - тип ожидаемого сигнала, может быть HIGH или LOW.

Следующая программа выводит на монитор расстояние до препятствия, от которого был отражен сигнал. Выводы Trig и Echo подключены к пинам 4 и 3.

```
int echoPin = 3;
int trigPin = 4;
void setup() {
  Serial.begin (9600);
  pinMode(trigPin, OUTPUT);
  pinMode(echoPin, INPUT);
}
void loop() {
  int t,l;
  digitalWrite(trigPin, LOW);
  delay(2000);
  digitalWrite(trigPin, HIGH);
  delay(10000);
```

```
digitalWrite(trigPin, LOW);  
t = pulseIn(echoPin, HIGH); //время за которое звук вернулся  
l = t/58; //время в см. с учетом скорости звука  
Serial.print(cm);  
Serial.println(" cm");  
delay(100);  
}
```

В качестве задания для самостоятельной работы предлагается соединить даль-номер с сервоприводом так, чтобы при обнаружении препятствия сервопривод поворачивал вал.

Литература

1. Arduino Products: [Электронный ресурс] / Arduino, 2016. - Режим доступа: <https://www.arduino.cc/en/Main/Products/>
2. Download the Arduino Software: [Электронный ресурс] / Arduino, 2016. - Режим доступа: <https://www.arduino.cc/en/Main/Software>
3. Вики Амперка: [Электронный ресурс] / Амперка, 2010-2016. - Режим доступа: <http://wiki.amperka.ru>
4. Курс «Arduino для начинающих»: Занимательная робототехника, 2014-2016. - Режим доступа: <http://edurobots.ru/kurs-arduino-dlya-nachinayushhix/>

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА
«GRACOS-16»**



УДК 5530.12+531.51

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ MARLE В РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА: 3-D ПРОФИЛИ ПЛОТНОСТИ ПРОТОПЛАНЕТНЫХ ДИСКОВ

Т.Р. Абдульмянов¹

¹ *abdulmyanov.tagir@yandex.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Из уравнений гидродинамики, при помощи их упрощения, выведена модель волнового уравнения и получена формула для вычисления профилей плотности протопланетных дисков.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, поверхностная плотность протопланетного диска.

Вывод волнового уравнения из уравнений гидродинамики и решение волнового уравнения. Сжатие протозвездного облака сопровождалось формированием ударных волн в центре протопланетного диска [3]. Такие возмущения в центре диска могли распространяться в виде круговых поверхностных волн и плотностных волн по поверхности всего протопланетного диска.

Предположим, что радиус протозвездного облака и его средняя плотность в момент времени t были равны соответственно R и ρ_0 . Выберем прямоугольную систему координат (x, y, z) с началом координат в центре диска так, чтобы плоскость (x, y) проходила через центральную плоскость диска ($z = 0$). Гравитационный потенциал точки с координатами (x, y, z) внутри облака будет равен $U(x, y, z) = GM(3R^2 - r^2)/(2R^3)$, $0 < r < R$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. В этом случае потенциал U является решением уравнения Пуассона $\Delta U = -4\pi G\rho(x, y, z)$, где $\rho(x, y, z)$ - непрерывная дифференцируемая функция (Дубошин, 1975). Вне протозвездного облака ($r > R$) потенциал U будет равен $U(x, y, z) = GM/r$ и будет решением уравнения Лапласа $\Delta U = 0$. По мере сжатия протозвезды ее радиус R будет уменьшаться, а средняя плотность ρ_0 будет увеличиваться. В результате сжатия вращающегося протозвездного облака будет формироваться протопланетный диск.

Основные уравнения движения газопылевых частиц и их упрощение

Рассмотрим протопланетный диск, имеющий радиус R_0 , толщина которого намного меньше радиуса R_0 . Предположим, что плоскость (x, y) и протопланетный диск вращаются синхронно в одном и том же направлении. В качестве исходных уравнений движения газопылевых частиц рассмотрим основные уравнения гидродинамики (Армитедж, 2010):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{grad}(\rho) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \Delta) \cdot \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(P), \quad (2)$$

где V - скорость движения газопылевых частиц, ρ - плотность диска, P - давление, \vec{F} - вектор гравитационного притяжения. В невозмущенном состоянии поверхност-

ная плотность протопланетного диска будет постоянной ρ_0 , а вектор гравитационного притяжения будет равен $\vec{F} = (1/\rho) \cdot grad(P)$. Возмущения в движении газопылевых частиц будем рассматривать при помощи упрощенных уравнений (1) и (2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot div(\vec{V}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad(P). \quad (4)$$

Слагаемые $\vec{V} \cdot grad(\rho)$ и $(\vec{V} \cdot \Delta) \cdot \vec{V}$, в этом случае, будут малыми величинами более высокого порядка, чем основные возмущения. Согласно уравнениям (3) и (4), любые возмущения в движении газопылевых частиц будут приводить к соответствующим изменениям плотности $\rho(x, y, z)$. Для того, чтобы определить эти возмущения и соответствующие им изменения плотности ρ , введем функцию $s(x, y, z) = u(x, y, z) + s_{pl}(x, y)$, которая связана с плотностью ρ при помощи следующего равенства: $\rho = \rho_0[1 + s(x, y, z)]$. Поверхностные возмущения протопланетного диска могут иметь как плоскую, так и ортогональную составляющую. Плоская составляющая возмущений ранее рассматривалась Сафроновым [2]. Поэтому здесь рассмотрим только влияние ортогональной составляющей возмущений и соответствующей им части $u(x, y, z)$ поверхностной плотности. В этом случае

$$\frac{\partial \rho}{\rho \partial t} = \frac{\rho_0}{\rho_0(1+u)} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial t} + \dots = \frac{\partial u}{\partial t} + O(u^2),$$

$$\vec{V} \cdot \frac{1}{\rho} grad(\rho) = \vec{V} \cdot (1 - u + \dots) grad(u) = O(u^2).$$

В последнем выражении предполагается, что координаты вектора скорости являются величинами порядка $O(u)$. В этом случае уравнение (3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -div(\vec{V}) + O(u^2), \quad |u| < 1. \quad (5)$$

Для диска, имеющего коэффициент упругости c^2 , справедливо следующее уравнение, при помощи которого можно выразить градиент давления через плотность: $grad(P) = c^2 \cdot \rho_0 \cdot grad(u)$. Подставляя это выражение для градиента давления в уравнение (4) с таким же приближением $O(u^2)$ вместо уравнения (4) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - c^2 grad(u). \quad (6)$$

Вычисляя дивергенцию правой и левой части равенства (6) преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} div(\vec{V}) = div(\vec{F}) - c^2 div(grad(u)),$$

$$div(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = -\frac{GM}{R^3} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 - \frac{4}{3}\pi G\rho_0 u, (0 < r < R), \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, (r \geq R).$$

Учитывая это, вместо равенства (5) получим следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0 u/3. \quad (7)$$

В цилиндрической системе координат волновое уравнение (7) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0 u/3. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) можно получить при помощи известного метода разделения переменных. Согласно этому методу решение $u(r, \varphi, z, t)$ можно сначала искать в виде произведения двух новых искомым функций: $u(r, \varphi, z, t) = T(t) \cdot V(r, \varphi, z)$. Подставляя это выражение для функции u в уравнение (8) получим следующее уравнение для новых искомым функций T и V :

$$\frac{V}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left(T \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + T \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + T \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0 TV/(3c^2). \quad (9)$$

Теперь уравнение (9) можно заменить равносильной ему системой двух более простых уравнений. Для этого необходимо правую и левую часть уравнения (9) разделить на произведение функций V и T :

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left(\frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{Vr} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{Vr^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0/(3c^2) = -\lambda^2. \quad (10)$$

Левая часть уравнения (10) является функцией только переменной t , а правая - только от r, φ и z . В таких случаях, как легко это доказать, как правая, так и левая части равенства (10) будут равны одной и той же константе. Обозначим эту константу через $-\lambda^2$. В результате, вместо уравнения (10) получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + A^2 \lambda^2 T = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{Vr} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{Vr^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0/(3c^2) = -\lambda^2. \quad (12)$$

Уравнение (11) имеет простое решение. Поэтому, рассмотрим уравнение (12). Решение уравнения (12) будем искать также методом разделения переменных, представив искомую функцию V в виде произведения функций W и Z : $V(r, \varphi, z) = W(r, \varphi) \cdot Z(z)$. Подставляя это выражение для функции V в уравнение (12) получим следующее уравнение:

$$\left(Z \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{Z}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{Z}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + W \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) = -[4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2] W \cdot Z. \quad (13)$$

Разделяя уравнение (13) на произведение $W \cdot Z$, получим:

$$\left(\frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{Wr} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{Wr^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) = -[4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2].$$

Или, в другой форме:

$$\frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{Wr} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{Wr^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2] = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\gamma^2. \quad (14)$$

Левая часть равенства (14) является функцией только переменных r и φ , а правая часть - функцией только переменной z . Тогда и правая, и левая часть этого равенства будут равняться константе, которую обозначим через $-\gamma^2$. Выбор знака констант в уравнении (12) связан с начальными условиями краевой задачи, а в уравнении (14) связан со спецификой конкретного физического процесса, который моделируется и эта константа может быть как положительной, так и отрицательной. Разделяя переменные, вместо уравнения (14) получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \gamma^2 Z = 0. \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] W = 0. \quad (16)$$

Уравнение (15) имеет простое решение. Для решения уравнения (16) также воспользуемся методом разделения переменных. Представим функцию W представим в виде произведения функций $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$. Подставляя это выражение для функции W в уравнение (16), получим:

$$\Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\Phi}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] R \cdot \Phi = 0. \quad (17)$$

Разделим правую и левую части уравнения (17) на произведение $R \cdot \Phi$ и преобразуем к следующему виду:

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \nu^2. \quad (18)$$

Левая часть уравнения (18) является функцией только r , а правая часть - только φ . Тогда из этого равенства будет следовать, что и правая, и левая его части будут равны одной и той же константе. Обозначим такую константу через ν^2 . Тогда, вместо уравнения (18), получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0, \quad (19)$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] r^2 - \nu^2 = 0. \quad (20)$$

Уравнение (19) имеет простое решение, а уравнение (20) является уравнением Бесселя:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left[\{4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2\} - \frac{\nu^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (21)$$

Обозначим через x произведение $[4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2]^{1/2} r$. Тогда уравнение (20) примет классическую форму уравнения Бесселя:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0. \quad (22)$$

Частными решениями уравнения (22) являются функции Бесселя порядка ν :

$$R(x) = J_\nu(x) = J_\nu(r\sqrt{4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2}).$$

Рассмотрим теперь решения уравнений (11), (15) и (19). Корни характеристических уравнений для дифференциальных уравнений (11) и (19) являются чисто мнимыми, без вещественной части, а для уравнения (15) - корни действительные числа. Тогда решениями этих уравнений будут соответственно следующие функции: $T_{k\nu}(t) = a_{k\nu} \cos[c(-\lambda)^{1/2} t] + b_{k\nu} \sin[c(-\lambda)^{1/2} t]$, $Z(z) = z_0 \cdot \exp(-\gamma z)$, $\Phi_\nu(\varphi) = \cos(\nu\varphi + \varphi_0)$. Подставим эти решения в общее выражение для $u(r, \varphi, z, t) = T(t) \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$ и получим частные решения волнового уравнения (8). Учитывая линейность волнового уравнения (8) сумма частных решений (их линейная комбинация), также будет решением волнового уравнения (8). Это решение и будет общим решением волнового уравнения (8):

$$u(r, \varphi, z, t) = z_0 \exp(-\gamma z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} T_{k\nu}(t) R_{k\nu}(r), \quad (23)$$

где $T_{k\nu}(t) = a_{k\nu} \cos[c(-\lambda)^{1/2} t] + b_{k\nu} \sin[c(-\lambda)^{1/2} t]$, $Z(z) = z_0 \cdot \exp(-\gamma z)$, $R_{k\nu}(r) = J_\nu(0)$, J_ν - функция Бесселя порядка ν , $\lambda_{k\nu}$ - нули функции Бесселя J_ν ; R_0 - радиус протопланетного диска, φ_0 , z_0 , $a_{k\nu}$, $b_{k\nu}$ - произвольные константы и коэффициенты, определяемые при помощи начальных и граничных условий краевой задачи.

Решение краевой задачи для волнового уравнения. Температурные профили для протопланетных дисков рассматривались в статье Адамса и Шу [1] как профили тонкого плоского пассивного диска: $T \approx r^{-3/4}$. В этом случае скорости звука для газа определяются по следующей формуле: $c_s \approx r^{-3/8}$. В результате, для вертикально изотермического протопланетного диска было получено следующее выражение для толщины диска: $h/r \approx r^{1/8}$. Для Солнечной системы, согласно вычислениям Сафронава [2], отношение $\beta = h/r$ равно 0.019 на уровне Меркурия и увеличивается до величины 0.033 на уровне планет-гигантов, где h - половина толщины протопланетного диска на расстоянии r от центра диска. То есть, среднее значение параметра β равно 0.026. Следовательно, параметр h в первом приближении можно представить как линейную функцию полярного радиуса r : $h = 0.012 + 0.026 \cdot r$. Предположим, что такая же зависимость толщины диска от расстояния до центра диска в начальный момент времени была для всех значений полярного угла. Функция $h(r)$ входит в определение начальных условий задачи Коши для волнового уравнения (8). Начальные и граничные условия краевой задачи для волнового уравнения (8) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z, 0) &= z_0 \cdot \exp(-\gamma_0 \cdot z) \cos(\varphi_0) f(r, \varphi), \quad u_t(r, \varphi, 0) = 0, \\ |u(0, \varphi, t)| &< \infty, \quad u(R_0, \varphi, z, t) = 0.012 \cdot z_0 \exp(-\gamma \cdot z) \cos(\varphi_0), \end{aligned} \quad (24)$$

где $f(r, \varphi)$ - функция, определяющая форму поверхности протопланетного диска в начальный момент времени, то есть $f(r, \varphi) = 0.012 + 0.026 \cdot r / R_0$. Так как в начальный момент времени форма поверхности диска, согласно предположению, была одинакова по всем радиальным направлениям, то индекс суммирования ν в решении (23) будет равен нулю.

Предположим, что функция $f(r)$ имеет более общий вид, то есть, форму полинома $f(r) = c_0 + c_1 \cdot r + c_2 \cdot r^2 + \dots + c_k \cdot r^k$. Функцию $f(r)$, при помощи ортогональной системы функций $\{x^{1/2} \cdot J_0(\lambda_k r / R_0)\}$, разложим в ряд по функциям Бесселя $J_0(\lambda_k r / R_0)$:

$$f(r) = c_0 + c_1 \cdot r + c_2 \cdot r^2 + \dots + c_k \cdot r^k = a_0 + a_1 J_0(\lambda_1 r / R_0) + a_2 J_0(\lambda_2 r / R_0) + \dots + a_k J_0(\lambda_k r / R_0).$$

Неизвестные коэффициенты a_k этого ряда определяются по формуле:

$$a_k = c_k R_0 \int_0^{R_0} \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 J_0(\lambda_k r / R_0) dr / \int_0^{R_0} \left(\frac{r}{R_0}\right) J_0^2(\lambda_k r / R_0) dr. \quad (25)$$

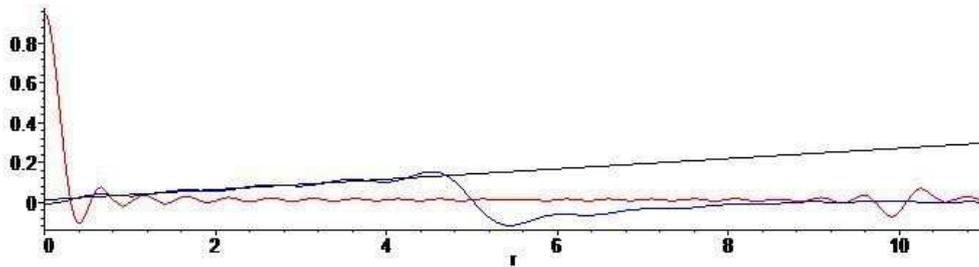


Рис. 1. Аппроксимация начальной формы диска: график прямой $0.012 + 0.026 \cdot r$ (чёрная линия), аппроксимирующая функция, полученная при помощи (25) (синяя кривая) и аппроксимирующая функция, полученная при помощи оценки $\lambda_k < 3k + 1$ (красная кривая).

Для линейной функции $f(r) = c_0 + c_1 \cdot r$, $c_0 = 0.012$, $c_1 = 0.026$, $c_k = 0$ при $k \geq 2$, получим следующие коэффициенты a_k : $a_0 = c_0 = 0.012$, $a_1 = 0.1063$, $a_2 = -0.106$, $a_3 = 0.1038$, $a_4 = -0.0971$, $a_5 = 0.0821$. На Рис.1 представлен график аппроксимируемой прямой $0.012 + 0.026 \cdot r$, и двух аппроксимирующих кривых: первая кривая (кривая синего цвета) получена при помощи вычисления коэффициентов разложения $f(r)$ по формуле (25). Другая - получена при помощи разложения функции Бесселя $J_0(\lambda_k r / R_0)$ в степенной ряд и оценки $\lambda_k < 3k + 1$, $k \leq 20$ для нулей функции Бесселя нулевого порядка. Вторая кривая (кривая красного цвета) взята в качестве основной кривой для дальнейших вычислений. Коэффициенты a_k второй аппроксимирующей определяются по следующим формулам: $a_k = H \cdot k$, при $1 \leq k \leq 20$, $a_0 = 0.012$, $a_k = 0$ при $k > 20$,

$$f(r) = c_0 + c_1 \cdot r + c_2 \cdot r^2 + \dots + c_k \cdot r^k = a_0 + a_1 J_0(\lambda_1 r / R_0) + a_2 J_0(\lambda_2 r / R_0) + \dots + a_k J_0(\lambda_k r / R_0).$$

Подставляя эти коэффициенты a_k в общее решение (22), получим решение краевой задачи для волнового уравнения (8):

$$u(r, z, t) = z_0 \exp(-\gamma_0 z) \cos(\varphi_0) [0.012 + H \cdot \sum_{k=1}^{20} k \cdot \cos(tc_s \sqrt{(\lambda_k / R_0)^2 - (4/3)\pi G \rho_0 / c_s^2 - \gamma_0^2}) \cdot J_0(\lambda_k r / R_0)], c = c_s. \quad (26)$$

Согласно начальному условию $u_t(r, \varphi, 0) = 0$ коэффициенты b_{kv} в общем решении (22) будут равны нулю. В случае вращения диска, необходимо внести изменения в начальные и граничные условия. Новые условия будут следующими:

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) &= z_0 \exp(-\gamma_0 z) \cdot f(r, \varphi), \\ u(R_0, z, t) &= 0.012 \cdot z_0 \exp(-\gamma_0 \cdot z) \cos[(GM/R_0^3)^{1/2} t]. \end{aligned}$$

Решение (12) при этом примет следующую форму:

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= z_0 \exp(-\gamma_0 z) \cos[(GM/R_0^3)^{1/2} t] \cdot \\ &\{0.012 + H \cdot \sum_{k=1}^{20} k \cdot \cos(tc_s \sqrt{(\lambda_k/R_0)^2 - (4/3)\pi G\rho_0/c_s^2 - \gamma_0^2}) \cdot J_0(\lambda_k r/R_0)\}. \end{aligned}$$

Применение системы Maple для построения 3-D профилей плотности протопланетного диска. Применение компьютерных систем аналитического вычисления позволяет достаточно просто вычислять интегралы, находить общие решения уравнений и решения краевых задач. Однако наиболее эффективными являются такие системы в тех случаях, когда необходима 3-D визуализация решения краевых задач. Приведем фрагмент программы, написанный для системы Maple, при помощи которого были вычислены нули функции Бесселя нулевого порядка и получено компьютерное (Maple) представление ряда (26):

```
> BesselJZeros(0,7); u:=0; R:=5; H:=0.1081; UT:=0;
RT:=evalf(1/((R/2)^(3/8))*(1/R)); UD:=0; KRO:=1.5;
> evalf(BesselJZeros(0,7));
> plot(BesselJ(0,x), x=0..42);
> for i from 1 by 1 to 20 do
  L(i):=evalf(BesselJZeros(0,i))
end do;
> for i from 1 by 1 to 20 do
  u:= u + H*i*evalf(BesselJ(0, L(i)*r/R))
end do;
> for i from 1 by 1 to 20 do
  UT:=UT+H*i/((R/2)^(3/8))*cos(RT*L(i)*T)*evalf(BesselJ(0,L(i)*r/R))
end do;
> R01:=evalf(subs(T=0,UT));
> R02:=evalf(subs(T=5,UT));
> r:=(x^2+y^2)^(1/2);
> plot3d(R01,x=0.7..40, y=0.7..40, grid=[90,90]);
> r:=(x^2+y^2)^(1/2);
> plot3d(R02, x=-0.7..40, y=0.7..40, grid=[90,90]);
```

После этого, при помощи операторов 3-D графики системы Maple, можно достаточно просто получить 3-D профили плотности протопланетных дисков. На рисунках 2а-б представлены результаты применения оператора plot3d. По изменениям форм профилей плотности протопланетного диска можно сделать вывод о том, что механизм сжатия протозвездного облака мог быть одновременно и основным механизмом фрагментации протопланетного диска на протопланетные кольца.

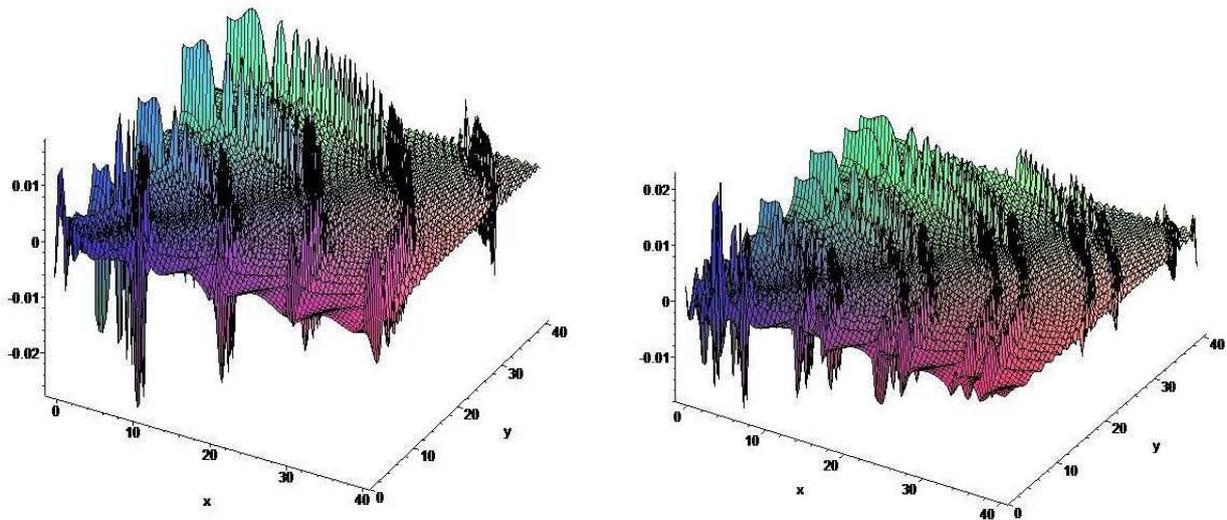


Рис. 2. 3-D профили плотности $\rho(r, \varphi, t) = \rho_0[1 + u(r, \varphi, t)]$ для параметра $R_0 = 5a.e.$ и $1 \leq r \leq 40$ (5 а.е.). График функции $u(r, \varphi, t)$: а) для $t = 0$; б) для $t = 5$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $0.7 \leq x \leq 40$, $0.7 \leq y \leq 40(AU)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $z = 0$, $z_0 = 1$.

Литература

1. Адамс Ф.С. Инфракрасные спектры вращающихся протозвезд / Ф.С. Адамс, Ф. Шу // *Astrophys. J.* - 1986. - № 308. С. 836-852.
2. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет / В.С. Сафронов. - М.: Наука, 1969. - 244 с.
3. Сурдин В.Г. Протозвезды: где и как формируются звезды / В.Г. Сурдин, С.А. Ламзин. - М.: Наука, 1992. - 192 с.

APPLICATION OF COMPUTER SYSTEM MAPLE IN SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE SPECIAL KIND WAVE EQUATION: 3-D DENSITY PROFILES OF THE PROTO-PLANETARI DISK

T.R. Abdulmyanov

From the equations of hydrodynamics, with the help of their simplicity, the wave equation and a formula for calculating the density profiles of proto-planetary disks is obtained.

Keywords: computer modeling, surface density of the proto-planetary disk.

УДК 5530.12+531.51

ОБ ОДНОМ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ РЕШЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ

Р.М. Авакян¹, Г.Г. Арутюнян²

¹ *rolavag@ysu.am*; Ереванский государственный университет

² *hagohar@ysu.am*; Ереванский государственный университет

Получено семейство аналогов решения Керра в скалярно-тензорной теории.

Ключевые слова: Стационарное гравитационное поле, Скалярно-тензорная теория.

Как было показано в работах [1]-[2] в стационарном аксиально-симметричном пространстве-времени и в канонических координатах Вейла можно добиться полного совпадения вида части полевых уравнений ОТО и ЙБД (Йордан-Бранс-Дикке) при определенной связи между фактором конформного преобразования $\sigma(x)$ ($\tilde{g}_{\mu\nu} = \sigma^2 g_{\mu\nu}$) и гравитационным скаляром теории $y(x)$, интегрируется независимо от остальных функций, а остальные уравнения сводятся к квадратурам. Таким образом, конформные преобразования можно использовать для взаимной генерации решений как в пределах самой теории ЙБД, так и между ЙБД и ОТО. Воспользовавшись известным решением Керра [3], переписав его в канонических координатах Вейла, можно его трансформировать из ОТО в теорию ЙБД согласно вышеупомянутой генерационной теореме. Отметим, что гравитационный скаляр, удовлетворяющий двумерному уравнению Лапласа, позволяет получать различные результаты для такого обобщенного варианта решения Керра в присутствии скалярного поля.

Литература

1. Арутюнян Г.Г. Аксиально-симметричные стационарные поля электровакуума в обобщенной теории тяготения / Г.Г. Арутюнян, В.В. Папоян // *Астрофизика*. - 1986. - № 25. - С. 217 - 226.
2. Papoyan V.V. Stationary axisymmetric fields in Generalized Theory of Gravitation / V.V. Papoyan // *Astrophysics and Space Science*. - 1986. - № 124. - P. 335-344.
3. Kerr R.P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics / R.P. Kerr // *Phys. Rev. Lett.* - 1963. - № 11. - P. 237.

ON AXIALLY SYMMETRIC SOLUTION FOR STATIONARY GRAVITATIONAL FIELD IN SCALAR-TENSOR THEORY

A.A. Avagyan, G.H. Harutunyan

A family of analogues of the Kerr solution in scalar-tensor theory is obtained.

Keywords: Stationary gravitational field, Scalar-tensor theory.

УДК 530.1: 51-72

О ДИФФУЗИИ В ПОЛЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МНОГОМЕРИЯ

А.М. Баранов¹

¹ alex_m_bar@mail.ru; Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева; Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева

Исследуется диффузия в евклидовом 3-пространстве в присутствии силового поля, описываемого логарифмическим потенциалом. Показано, что для такого потенциала уравнение диффузии может быть сведено к уравнению без учета силового поля, но в пространствах более высокой размерности при наложении условия дискретности на параметры задачи. Решение уравнения представляет собой многомерное обобщение распределения Гаусса в этих пространствах.

Ключевые слова: диффузия, уравнение Эйнштейна-Фоккера, распределение Гаусса, многомерие.

Классические методы теории уравнений математической физики нередко не позволяют решать точно диффузионное уравнение при наличии силового поля, не говоря уже о нелинейном диффузионном уравнении общего вида. Кроме того, не всегда удобно иметь решение в виде ряда. Поэтому небезынтересно было бы рассмотреть частные случаи сведения уравнения, описывающего нестационарную диффузию в заданном силовом поле, к более простому уравнению без явного присутствия силового поля. На первый взгляд постановка такой задачи может показаться невозможной, например, в обычном трехмерном пространстве. Однако существует класс потенциальных функций, описываемых логарифмической зависимостью, когда решение такого рода задачи допускается, но с изменением размерности пространства, в котором протекает процесс диффузии. При этом диффундирующие частицы представляют собой броуновские частицы, подчиняющиеся гауссовым распределениям. Сама же потенциальная логарифмическая функция, в частности, используется при описании силового поля клиновой дисклинации в теории твердого тела.

1. Рассмотрим диффузию в силовых полях, описываемых потенциальными функциями, которые удовлетворяют уравнению Лапласа в евклидовом плоском 3-пространстве:

$$\Delta U = 0, \quad (1)$$

где Δ - оператор Лапласа в трехмерном пространстве,

$$\Delta = \delta^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (2)$$

$U = U(x^i)$ - потенциальная функция, зависящая от пространственных переменных x^i ; $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ — метрический тензор плоского евклидова 3-пространства, $i = 1, 2, 3$.

Другими словами, исследование ограничивается классом гармонических потенциальных функций.

Перейдем теперь к конкретному уравнению диффузии, записанному в виде уравнения Эйнштейна-Фоккера:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \vec{j} = -\nabla(-\nabla(D \cdot C) + q\vec{F} \cdot C). \quad (3)$$

Здесь $C = C(x^i, t)$ - функция концентрации диффундирующего вещества, которая зависит как от временной t , так и пространственных переменных x^i ($i = 1, 2, 3$); \vec{j} - вектор плотности потока; $D = D(x^i, T)$ - коэффициент диффузии (функция положения и температуры); \vec{F} - сила, действующая на диффундирующие частицы; ∇ - дифференциальный оператор Гамильтона, который в тензорных обозначениях записывается как $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$; $q = \frac{D}{kT} = \beta \cdot D$ - подвижность; k - постоянная Больцмана; T - температура.

Далее предполагается, что сила \vec{F} является потенциальной, $\vec{F} = -\nabla U$, где U - некоторая потенциальная функция, описывающее силовое поле, под действием которого происходит дрейф частиц.

Известно, что броуновское движение одной свободной частицы описывается распределением Гаусса, которое является решением уравнения диффузии в отсутствие силовых полей и переходной вероятностью с соответствующими начальными условиями и нормировкой при описании броуновского движения (или любого другого случайного процесса) как марковского процесса. Одновременно функция, представляющая собой распределение Гаусса, есть функция Грина этого уравнения, нахождение которой для уравнения диффузии (3) при учете силовых полей представляет несомненный интерес при исследовании процесса диффузии.

2. Рассмотрим сначала случай постоянства коэффициента диффузии $D = D_0 = const$ и подвижности $q = q_0 = const$ с учетом (1):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_0 \cdot \Delta C + q_0 \cdot \nabla U \cdot \nabla C. \quad (4)$$

Тогда в частном случае для логарифмического потенциала

$$U = A \cdot \ln(\rho / \rho_0) \quad (5)$$

при учете цилиндрической симметрии для уравнения (4) имеем

$$\frac{1}{D_0} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial \rho^2} + \frac{1+2\nu}{\rho} \frac{\partial C}{\partial \rho}, \quad (6)$$

где $1+2\nu = 1 + q_0 A / D_0 = 1 + A / kT_0$; $A = const$; ρ - радиальная переменная; $\rho_0 = const$ и может, в частности, рассматриваться как радиус дисклинации.

Теперь правую часть уравнения (6) нетрудно привести к виду радиальной части n -мерного оператора Лапласа в плоском n -мерном пространстве, если считать, что параметр ν принимает дискретные значения, то есть $1 + 2\nu = n - 1$, где n - целое число, равное 1, 2, 3, ... :

$$\Delta^{(n)}C = \Delta^{2(1+\nu)}C = \frac{1}{\rho^{1+2\nu}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{1+2\nu} \frac{\partial C}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial C}{\partial \rho} \right). \quad (7)$$

Следовательно, требование

$$1 + 2\nu = 1 + \frac{q_0 A}{D_0} = n - 1 = [\text{целое число}] \quad (8)$$

представляет собой дополнительное условие дискретности на входящие в (8) параметры, позволяющее получить аналитическое решение уравнения (6).

В этом случае ρ есть расстояние в «сферически-симметричном» плоском n -мерном пространстве, выраженное через координаты этого пространства ζ^a :

$$\rho^2 = \delta_{ab} \zeta^a \zeta^b = (\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 + (\zeta^3)^2 + \dots + (\zeta^n)^2 = \zeta_a \zeta^a, \quad (9)$$

где $\delta_{ab} = \text{diag}(1, 1, 1, \dots, 1)$ — метрический тензор евклидового плоского n -пространства, $a, b = 1, 2, 3, \dots, n$, так и одновременно - расстояние в 3-пространстве, точнее, на плоскости xOy :

$$\rho^2 = \delta_{ij} x^i x^j = x^2 + y^2. \quad (10)$$

Как видно из предыдущего, роль радиальной переменной играет переменная ρ , величина которой сохраняется при переходах между различными евклидовыми (или конформно-евклидовыми) пространствами аналогично тому, как в трехмерном пространстве радиус окружности (на плоскости xOy) является и радиусом сферы, построенной на этой окружности.

При $\nu = -1/2$ ($n = 1$) лапласиан вырождается во вторую производную по ρ , что соответствует одномерному движению; для $\nu = 0$ ($n = 2$) получаем лапласиан, записанный для цилиндрической симметрии, а когда $\nu = 1/2$ ($n = 3$) — для сферической симметрии. Для $\nu > 1/2$ ($n > 3$) имеем n -мерном пространство с симметрией, обобщающей сферическую на размерности большие трех.

Другими словами, уравнение (7) переписывается как уравнение диффузии в отсутствие силового поля и угловой зависимости, но в плоском евклидовом пространстве размерности n

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_0 \cdot \Delta^{(n)}C = D_0 \cdot \delta^{ij} \frac{\partial^2 C}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (11)$$

Решение такого уравнения можно представить в виде обобщенного распределения Гаусса

$$C(\zeta^a, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1+\nu}} \cdot \exp\left(-\frac{\zeta_a \zeta^a}{4D_0 t}\right) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\zeta_a \zeta^a}{4D_0 t}\right), \quad (12)$$

которое описывает свободную броуновскую частицу в плоском n -мерном «сферически-симметричном» пространстве.

При учете ненулевого начального положения броуновской частицы ($\zeta_{(0)}^a \neq 0$) перепишем (12) в виде

$$C(\zeta^a, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\zeta_a - \zeta_{(0)}^a)(\zeta^a - \zeta_{(0)}^a)}{4D_0 t}\right), \quad (13)$$

Для хорошо известного одномерного случая броуновского движения ([1], С.234), связанного с допущением, что частица движется в бесконечном пространстве, из (13) при $n = 1$ получаем

$$C(x, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4D_0 t}\right), \quad (14)$$

где $x \equiv \zeta^1$ - координата одного измерения.

В трехмерном евклидовом пространстве соответственно для $n = 3$ имеем в декартовых координатах $x = \zeta^1, y = \zeta^2, z = \zeta^3$ ([1], С.234)

$$C(x, y, z, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4D_0 t}\right). \quad (15)$$

3. Вернемся к уравнению (3) и введем следующие замены: $V = \beta \cdot U, W = D \cdot C$. Тогда, воспользовавшись тем, что коэффициент диффузии D есть функция только координат и температуры, а $q = D \cdot \beta$, приведем уравнение (3) к виду (с учетом (1))

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla(-\nabla(D \cdot C) - (D \cdot C)\nabla(\beta \cdot U)) = \Delta W + \nabla V \cdot \nabla W \quad (16)$$

или окончательно

$$\frac{1}{D} \frac{\partial W}{\partial t} = \Delta W + \nabla V \cdot \nabla W. \quad (17)$$

В предположении, что безразмерная потенциальная функция V равна

$$V = \ln \sigma, \quad (18)$$

где $\sigma = \sigma(\rho)$ - некоторая функция, уравнение (17) преобразуется в цилиндрической системе координат с $D = D_0$ к виду

$$\frac{1}{D_0} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(1 + \rho \frac{\partial \ln(\sigma)}{\partial \rho}\right) \frac{\partial W}{\partial \rho}. \quad (19)$$

Накладывая условие

$$1 + \rho \frac{\partial \ln(\sigma)}{\partial \rho} = n - 1 = [\text{целое число}], \quad (20)$$

где n – размерность евклидового пространства, для потенциала

$$U = \beta_0 \ln \sigma = \beta_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}. \quad (21)$$

фактически приходим к уравнению диффузии вида (11) и решению (12).

4. Однако уравнение (17) может быть сведено при выборе (19) и к виду

$$\frac{1}{D} \frac{\partial W}{\partial t} = \nabla \left(\nabla W + W \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\sigma} \nabla (W \cdot \sigma) \right). \quad (22)$$

После введения новой функции $\hat{W} = \sigma \cdot W$ (23) принимает вид

$$\frac{1}{D} \frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = \sigma \cdot \nabla \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \hat{W} \right). \quad (23)$$

Ограничимся опять аксиальной симметрией и будем считать все функции зависящими только от радиальной переменной ρ , изменяющейся в плоскости, ортогональной оси z . Уравнение (24) в этом случае переписывается как

$$\frac{1}{D} \frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \hat{W}}{\partial \rho} \right). \quad (24)$$

Определим новую переменную R через дифференциальное соотношение

$$dR = \sigma(\rho) d\rho, \quad (25)$$

тогда (25) примет вид

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = D \cdot \sigma^2 \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial R^2}. \quad (26)$$

Возьмем функцию σ из соотношения (22):

$$\sigma = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1}, \quad (27)$$

и определим зависимость коэффициента диффузии D от ρ как

$$D(\rho) = D_0 \sigma^{-2} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{2(n-1)}, \quad (28)$$

то есть для каждого числа измерений пространства n коэффициент диффузии будет свой.

Тогда уравнение (27) сводится к одномерному уравнению диффузии без дрейфового члена

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial R^2} \quad (29)$$

или, явно вводя функцию $\hat{C}(R, t) \equiv C/\sigma$,

$$\frac{\partial \hat{C}(R, t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 \hat{C}(R, t)}{\partial R^2}. \quad (30)$$

Воспользовавшись (26) и (28), нетрудно найти выражение для переменной R через радиальную переменную ρ :

$$R(\rho) = \frac{\rho_0}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n = R_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n. \quad (31)$$

Отсюда видно, что для $\rho > \rho_0$ R меняется от $R_0 = \rho_0/n$ до бесконечности.

Решение уравнения (31) для функции $\hat{C}(R, t)$ легко находится, если взять за новую переменную $\xi = R - R_0$, которая меняется от нуля до бесконечности, и воспользоваться тем, что в начальный момент времени функция \hat{C} имела δ -образное распределение, $\hat{C}(\xi, 0) \propto \delta(\xi)$ (частица еще не сдвинулась). Далее разложим функцию $\hat{C}(\xi, t)$ в интеграл Фурье:

$$\hat{C}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\omega}(t) \cdot \exp(i\omega\xi) d\omega. \quad (32)$$

После подстановки этого разложения в уравнение (31) умножим обе части уравнения на $\exp(i\omega'\xi)$ и проинтегрируем от нуля до бесконечности по ξ . Интегрирование по ω снимается с помощью δ -функции $\delta(\omega - \omega')$. Получившееся дифференциальное уравнение первого порядка на $A_{\omega}(t)$ интегрируем с учетом δ -образного характера начального условия $\hat{C}(\xi) = \delta(\xi)$. Восстанавливая с помощью преобразования Фурье исходную функцию \hat{C} , получим распределение Гаусса применительно к данному случаю, аналогичному (14):

$$\hat{C}(R, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D_0 t}\right) \equiv \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(R - R_0)^2}{4D_0 t}\right). \quad (33)$$

Принимая во внимание соотношения (32), перепишем выражение (34) в виде

$$\hat{C}(\rho, t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{R_0^2 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right)^2}{4D_0 t}\right). \quad (34)$$

Возвращаясь к функции $C(\rho, t) = \sigma(\rho) \cdot \hat{C}(\rho, t)$, получим

$$C(\rho, t) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{R_0^2 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1}\right)^2}{4D_0 t}\right). \quad (35)$$

5. Из выше изложенного можно сделать заключение о том, что для взятого здесь частного случая диффузии в силовом поле, описываемого логарифмическим потенциалом, задача о нахождении точного решения уравнения диффузии принципиально разрешима в ряде случаев, когда удастся подобрать используемые параметры задачи так, чтобы они удовлетворяли условию дискретности, связанному с введением размерности пространства. При этом само 3-пространство может рассматриваться как плоское евклидовое, призванное играть роль фонового. Тогда указанная проблема может быть сведена к задаче о нахождении точного решения уравнения диффузии без силовых полей в плоском многомерном евклидовом пространстве.

Литература

1. Леонтович М.А. Статистическая физика / М.А. Леонтович. - М.: Гостехиздат, 1944. - 256 с.

ON DIFFUSION IN THE LOGARITHMIC POTENTIAL FIELD FROM THE POINT OF VIEW OF MULTIDIMENSIONAL SPACE

A.M. Baranov

A diffusion in a logarithmic potential force field in 3D Euclid's space is investigated. It is shown that diffusion's equation with such potential can be reduced to multidimensional diffusion's equation without a drift of particles under the condition of discreteness for the parameters. The solution of this

equation is multidimensional generalization of the Gauss distribution.

Keywords: diffusion, the Einstein-Fokker equation, distribution of Gauss, multidimensional space.

УДК 530.12+531.51

МОДЕЛИ МНОГОМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ И ЭФФЕКТ КАЗИМИРА

С.В. Болохов¹, К.А. Бронников²

¹ boloh@rambler.ru; Российский университет дружбы народов

² kb20@yandex.ru; ВНИИМС, Российский университет дружбы народов

Изучаются свойства эффективного потенциала скалярного поля в классе моделей нелинейной многомерной гравитации в присутствии эффекта Казимира. Показано существование физически приемлемых минимумов потенциала, обеспечивающих стабилизацию компактных дополнительных измерений в согласии с наблюдаемой картиной ускоренного расширения Вселенной.

Ключевые слова: нелинейная многомерная гравитация, космология, энергия Казимира.

Теории с дополнительными измерениями давно являются предметом детального изучения, будучи мотивированы целым рядом существующих теоретических концепций и схем, таких как теория суперструн, модели Калуцы-Клейна, концепция миров на бране и др. От физически разумной многомерной теории естественно ожидать наличия механизмов, объясняющих ненаблюдаемость дополнительных измерений (например, по причине их компактности и малого размера), а также их устойчивость на характерных для данной модели масштабах. Данный вопрос ранее исследовался рядом авторов [1, 2], в частности, для моделей типа Калуцы-Клейна, в которых устойчивость обеспечивалась за счет минимума эффективного потенциала скалярных полей, возникающих в ходе размерной редукции. Определенный вклад при этом вносит энергия Казимира, обусловленная компактной топологией дополнительного пространства.

В данной работе исследуется эффективный потенциал в обобщенном классе моделей нелинейной многомерной гравитации в $D = 4 + n$ измерениях с учетом энергии Казимира. Действие в подходящей системе единиц имеет вид

$$S = \frac{1}{2} m_D^{D-2} \int \sqrt{g_D} d^D x [F(R) + c_1 R^{AB} R_{AB} + c_2 R^{ABCD} R_{ABCD}],$$

где $m_D \equiv 1/r_0$ - D -мерная планковская масса (r_0 - соответствующая фундаментальная длина), g_D - детерминант D -мерной метрики, $F(R)$ - некоторая функция многомерной скалярной кривизны, а c_1 и c_2 суть произвольные коэффициенты. Используется многообразие с топологией $\mathbb{R}^4 \times S^n$ (S^n - n -мерная сфера). Метрика в пренебрежении неабелевыми калибровочными модами имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{2\beta(x^\mu)} d\Omega_n^2,$$

где $g_{\mu\nu}$ - 4-мерный метрический тензор, $d\Omega_n^2$ - форма метрики на n -сфере фиксированного радиуса, $e^{2\beta(x^\mu)}$ - масштабный фактор дополнительного пространства.

Методология размерной редукции достаточно стандартна [3] и включает в себя: (а) расщепление многомерной кривизны и квадратичных инвариантов (для реалистичного сценария достаточно ограничиться приближением медленных изменений, пренебрегая высшими степенями по производным ∂_μ); (б) интегрирование по объему дополнительного пространства; (с) переход от исходной (йордановской) конформной калибровки к эйнштейновской, более удобной для исследования динамики скалярного поля.

Итоговый эффективный потенциал имеет вид:

$$V_{E(\text{tot})}(\phi) = \frac{e^{-n\beta}}{2F'(\phi)^2} \left[-F(\phi) - c_J e^{-4\beta} + C_n r_0^{-2} \mathcal{V}^{-1} e^{-(n+4)\beta} \right],$$

где обозначено

$$\phi \equiv m_D^2 n(n-1) e^{-2\beta(x^\mu)}, \quad c_J = n(n-1)r_0^{-4} [(n-1)c_1 + 2c_2], \quad \mathcal{V} = 2\pi^{(n+1)/2} / \Gamma(\frac{n+1}{2}),$$

при этом численный коэффициент C_n определяет величину казимировского вклада для топологии $\mathbb{M}^4 \times \mathbb{S}^n$.

Показано, что данный потенциал уже при $n = 3$ и определенном выборе параметров модели обнаруживает устойчивый минимум в области, отвечающей современным ограничениям на масштаб дополнительных измерений (\sim ТэВ), в то же время достаточно превосходя планковский масштаб r_0 и тем самым удовлетворяя условию корректности проведенного (квази)классического анализа. Такой минимум обеспечивает правильный знак и порядок эффективной космологической постоянной Λ_{eff} , отвечающей наблюдаемому ускоренному расширению Вселенной.

Литература

1. Candelas P. Calculation of gauge couplings and compact circumferences from self-consistent dimensional reduction/ P. Candelas, S. Weinberg// Nuclear Physics B.-1984.- № 3 (237). - P.397.
2. Chodos A. Gravitational Casimir energy in non-Abelian Kaluza-Klein theories / A. Chodos, E. Myers// Physical Review D.-1985.-№ 12(31). - P.3064.
3. Bronnikov A. Self-stabilization of extra dimensionsK/ A. Bronnikov, S. G. Rubin // Physical Review D.-2006.- № 12 (73). - P.124019.

MODELS OF MULTIDIMENSIONAL GRAVITY AND THE CASIMIR EFFECT

S.V. Bolokhov, K.A. Bronnikov

We study the properties of the effective potential of a scalar field in a class of nonlinear multidimensional models of gravity in the presence of Casimir effect. The existence of physically appropriate minima of the potential is shown, providing stabilization of compact extra dimensions in agreement with the observed accelerated expansion of the Universe.

Keywords: Nonlinear multidimensional gravity, cosmology, Casimir energy.

УДК 52,530.1

РЕЛЯЦИОННАЯ КОНЦЕПЦИЯ ЛЕЙБНИЦА-МАХА

Ю.С. Владимиров¹

¹ yusvlad@rambler.ru; Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Предлагается изложение основ реляционно-статистического подхода к природе физического мироздания.

Ключевые слова: реляционная трактовка природы пространства-времени, физические взаимодействия в рамках концепции дальнодействия, принцип Маха

Предлагается изложение основ реляционно-статистического подхода к природе физического мироздания, идейные основания которого заложены в трудах Г. Лейбница и Э. Маха. Согласно этому подходу, в основе физического мироздания лежат три неразрывно связанные аспекта: 1) реляционная трактовка природы пространства-времени, 2) описание физических взаимодействий в рамках концепции дальнодействия и 3) обусловленность локальных свойств объектов влияниями со стороны всего окружающего мира (принцип Маха). Физическая теория, реализующая реляционную концепцию Лейбница-Маха, строится на базе математического аппарата бинарных систем комплексных отношений минимальных рангов, фактически представляющего собой бинарную предгеометрию. Эта теория позволяет поставить и решить задачу вывода классических пространственно-временных представлений из самосогласованной системы более первичных понятий и закономерностей, присущих физике микромира, взамен общепринятой опоры на априорно заданное классическое пространство-время. На ее основе предлагается реляционно-статистическая интерпретация квантовой механики, обоснование теории прямого межчастичного взаимодействия, новое понимание природы гравитации как вторичного вида взаимодействий, новый подход к проблемам космологии.

LEIBNIZ-MACH RELATIONAL CONCEPT

Yu.S. Vladimirov

It is proposed to present the fundamentals of relational-statistical approach to the nature of the physical universe

Keywords: relational interpretation of the nature of space-time, physical interactions within the framework of a long-range concept, Mach's principle

УДК 530.12; 531.51

СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОТЕНЦИАЛОВ

Д.В. Гальцов¹, Д.И. Алферов²

¹ galtsov@physics.msu.ru, gdmv04@mail.ru; Московский государственный университет, Казанский федеральный университет

² - ; Московский государственный университет

Скрытыми симметриями называют глобальные симметрии, возникающие при размерной редукции уравнений Эйнштейна (и их обобщений), которые наследуются из группы диффеоморфизмов исходной теории. При редукции в трехмерие все негравитационные поля эффективно сводятся к скалярным, при этом широкие классы теорий описываются трехмерной гравитацией, имеющей в качестве источника систему скалярных полей, образующую нелинейную сигма-модель. Скрытые симметрии используются для получения новых решений уравнений Эйнштейна, зависящих от трех переменных, к такому классу сводятся практически все решения известные сейчас аналитически. Пространство “потенциалов” (target space) трехмерных сигма-моделей получаемых при редукции теорий допускающих решения с плоским трехмерным пространством (в моделях супергравитации это решения, насыщающие границу Богомольного, Прасада, Соммерфилда (БПС)) имеет метрику лоренцевой сигнатуры, и содержат изотропные геодезические. Они соответствуют, в частности, экстремальным черным дырам с вырожденным горизонтом событий, и образуют важный подкласс точных решений. Поскольку изотропные кривые остаются таковыми при конформных преобразованиях метрики, возникает вопрос о полезности возможных конформных симметрий пространства потенциалов для генерации БПС решений. Данная работа представляет попытку такого исследования. Показано, что некоторые известные сигма-модели, возникающие при размерной редукции, имеют конформно-плоское пространство потенциалов.

Ключевые слова: общая теория относительности, сигма-модели, супергравитация, уравнения Эйнштейна.

1. Введение

Интегрирование уравнений Эйнштейна в общем виде представляет собой сложную математическую задачу, и неудивительно, что в течение почти сорока лет после их открытия были известны лишь ограниченные классы решений, зависящих от одной переменной, такие как метрики Шварцшильда или Фридмана, или двух (решения Вейля). Хотя с точки зрения физики, эти решения продолжают оставаться одними из наиболее важных, (более подробное изложение истории вопроса можно найти в монографии [1]), создание систематических методов решения уравнений Эйнштейна началось лишь в 50-х годах прошлого века, и оно прежде всего было связано обнаружением их “скрытых симметрий”. Одной из первых в этом направлении была работа Бухдала [2], в которой было показано, что из известных статических решений можно получать новые решения с помощью некоторого преобразования ин-

версии. Вскоре была открыта группа Элерса, названная по имени ее автора [3], одно из преобразований которой позволяет построить решение Тауба-НУТ из решения Шварцшильда. В работе Нейгебауэра-Крамера [4] были описаны скрытые симметрии стационарных уравнений Эйнштейна-Максвелла. В работах Эрнста [5] была дана элегантная формулировка уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла для стационарных полей при дополнительном предположении аксиальной симметрии. Ее развитие привело к обнаружению бесконечной группы симметрий в этом случае, получившей название группы Героча-Киннерсли-Читра [6], (подробнее см. в книге [1]). Эти симметрии приводят принципиальной возможности полного интегрирования уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла для конфигураций полей, обладающих двумерной абелевой группой изометрий, сводя их к некоторой двумерной теории, интегрируемой в смысле Лакса. При этом симметрии трехмерной сигма-модели (на которой мы и сосредоточимся далее) являются основой для дальнейшего вывода двумерных интегрируемых систем. Но они могут эффективно использоваться для генерации новых решений и непосредственно, оставаясь в рамках конфигураций, зависящих от трех переменных.

Конструктивные процедуры генерации возникают, если пространство потенциалов является симметрическим, реализуемым как фактор-пространство некоторой полупростой группы изометрий по ее подгруппе изотропии. В случае чистой четырехмерной гравитации без материи группа изометрий есть $SL(2, R)$, а природа фактор-пространства определяется знаком нормы вектора Киллинга соответствующего четырехмерного решения. Если последний времениподобен, то получаем фактор-пространство $SL(2, R)/SO(2)$ евклидовой сигнатуры, если пространственноподобен — то пространство $SL(2, R)/SO(1, 1)$ с лоренцевой сигнатурой. В стационарной теории Эйнштейна-Максвелла пространство потенциалов есть $SU(1, 2)/S(U(2) \times U(1))$. При этом часть исходных четырехмерных уравнений Эйнштейна описывается уравнениями сигма-модели (соответствующие переменные как правило связаны с компонентами четырехмерной метрики неточечным образом через решения некоторого линейного дифференциального уравнения), а оставшиеся снова требуют решения уравнений Эйнштейна, но уже трехмерных и с материальным источником.

Дальнейшие исследования существенно расширили круг четырехмерных теорий самогравитирующих материальных полей, в которых решения, обладающие (хотя бы одним) неизотропным векторным полем Киллинга, имеют сигма-модельное описание с симметрическим пространством потенциалов (Калуца-Клейн [7], Эйнштейн-Максвелл-дилатон [8], Эйнштейн-Максвелл-дилатон-аксион с одним [9, 10, 11] или несколькими [12, 13, 14] векторными полями), а также распространили представление о скрытых симметриях на многомерные гравитационные теории [15], возникающие в супергравитации и теории струн. Более подробное обсуждение этого развития теории можно найти в обзорах [16].

2. Сигма-модель для стационарной теории Эйнштейна-Максвелла с дилатоном

В этой работе мы рассмотрим теорию Эйнштейна-Максвелла с дилатоном, которая представляет собой типичную модель в струнной гравитации, содержащую в виде

частных случаев вакуумную гравитацию, теорию Эйнштейна-Максвелла, и теорию Эйнштейна со скалярным полем. Действие теории имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} (-R + 2(\partial\phi)^2 - e^{-2\alpha\phi} F^2) d^4x,$$

где ϕ действительное скалярное поле (дилатон), $F = dA$ - 2-форма Максвелла, α - константа связи дилатона.

Будем рассматривать стационарный случай, выбирая параметризацию метрики

$$ds^2 = f(dt - \omega_i dx^i)^2 - f^{-1} h_{ij} dx^i dx^j,$$

где функция f , 1-форма $\omega = \omega_i dx^i$ и трехмерная метрика h_{ij} зависят только от пространственных координат x^i , $i = 1, 2, 3$. Действие в таком случае можно записать используя только скалярные поля, которые при этом имеют действие нелинейной сигма модели [8]. (Заметим, что это свойство теряется при добавлении космологической постоянной и/или потенциала дилатона.) Легко показать, что поле Максвелла полностью описывается двумя действительными функциями v и a , зависящими от x^i таким же образом, как и в случае “чистого” поля Эйнштейна-Максвелла [17]. Действительно уравнения Максвелла будут выглядеть:

$$\partial_\nu(\sqrt{-g} e^{-2\alpha\phi} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\nu(\sqrt{-g} \tilde{F}^{\mu\nu}) = 0, \quad (2)$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} E^{\mu\nu\lambda\tau} F_{\lambda\tau}$, $E^{\mu\nu\lambda\tau} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} / \sqrt{-g}$. С предположением о стационарности решений, компонента $\mu = i$ уравнения (2) разрешается подстановкой

$$F_{i0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_i v, \quad (3)$$

а компонента $\mu = i$ уравнения (1) — подстановкой

$$F^{ij} = \frac{f}{\sqrt{2}h} e^{2\alpha\phi} \epsilon^{ijk} \partial_k a. \quad (4)$$

Величины v и a играют роль электрического и магнитного потенциалов соответственно. Оставшиеся компоненты тензора $F^{\mu\nu}$ можно выразить в терминах полей v и a используя соотношения [17]

$$F^{i0} = F^{ij} \omega_j - h^{ij} F_{j0}, \quad (5)$$

где h^{ij} трехмерная метрика обратная к h_{ij} . Ещё одно полезное соотношение имеет вид

$$F_{ij} = f^{-2} h_{ik} h_{jl} F^{kl} + 2F_{0[i} \omega_{j]}. \quad (6)$$

Следуя работе [17], можно ввести форму дуальную к 2-форме вращений $d\omega$:

$$\tau^i = -f^2 \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{h}} \partial_j \omega_k, \quad (7)$$

которая остается инвариантной при преобразованиях времени $t \rightarrow t + T(x^i)$. Далее будем полагать, что индексы всех трехмерных величин опускаются и поднимаются

при помощи трехмерной метрики h_{ij} , а для четырехмерных тензоров будем использовать $g_{\mu\nu}$. Теперь распишем компоненты тензора Риччи $R_{\mu\nu}$ (определенного как $R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \dots$)

$$R_{00} = \frac{1}{2} (f\Delta f - (\nabla f)^2 + \tau^2), \quad (8)$$

$$R_0^i = \frac{f}{2\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} \tau_{k,j}, \quad (9)$$

$$R^{ij} = f^2 \mathcal{R}^{ij} - \frac{1}{2} \left[(\nabla^i f)(\nabla^j f) + \tau^i \tau^j - h^{ij} (f\Delta f - (\nabla f)^2 + \tau^2) \right], \quad (10)$$

где \mathcal{R}^{ij} тензор Риччи в трехмерии, ∇_i трехмерная ковариантная производная, согласованная с метрикой h_{ij} и $\Delta = h^{ij} \nabla_i \nabla_j$.

Соответствующие компоненты тензора энергии-импульса будут равны:

$$16\pi(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T) = f((\nabla v)^2 e^{-2\alpha\phi} + (\nabla a)^2 e^{2\alpha\phi}), \quad (11)$$

$$8\pi T_0^i = \frac{f}{\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} (\nabla_j v)(\nabla_k a), \quad (12)$$

$$8\pi(T^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}T) = -f \left(e^{-2\alpha\phi} (\nabla^i v)(\nabla^j v) + e^{2\alpha\phi} (\nabla^i a)(\nabla^j a) \right) + \frac{f h^{ij}}{2} (e^{-2\alpha\phi} (\nabla v)^2 + e^{2\alpha\phi} (\nabla a)^2) + 2f^2 (\nabla^i \phi)(\nabla^j \phi). \quad (13)$$

Примечательно, что дилатон не влияет на смешанные компоненты уравнений Эйнштейна. Таким образом, сравнивая (9) и (12), получаем

$$\tau_i = w_i + \nabla_i \chi, \quad (14)$$

где

$$w_i = v \nabla_i a - a \nabla_i v, \quad (15)$$

и χ - твист-потенциал, определенный с точностью до аддитивной константы. В терминах χ and \mathbf{w} , компонента 00 уравнений Эйнштейна примет вид

$$f\Delta f - (\nabla f)^2 = f((\nabla v)^2 e^{-2\alpha\phi} + (\nabla a)^2 e^{2\alpha\phi}) - (\nabla \chi + \mathbf{w})^2. \quad (16)$$

Дивергенция от (14) вместе с (7) приводит к уравнению на χ :

$$f\Delta \chi - 2\nabla f(\nabla \chi + \mathbf{w}) + f(v\Delta a - a\Delta v) = 0. \quad (17)$$

Чтобы получить уравнения второго порядка для v и a нужно рассмотреть $\mu = 0$ компоненты уравнений (1), (2). Воспользовавшись выражениями (5), (6), (7) и (14) получаем:

$$f^2 \nabla(f^{-1} e^{-2\alpha\phi} \nabla v) + (\nabla \chi + \mathbf{w}) \nabla a = 0, \quad (18)$$

$$f^2 \nabla(f^{-1} e^{2\alpha\phi} \nabla a) - (\nabla \chi + \mathbf{w}) \nabla v = 0. \quad (19)$$

Окончательно уравнение для дилатона в терминах тех же переменных примет вид

$$2f\Delta \phi = \alpha (e^{-2\alpha\phi} (\nabla v)^2 - e^{2\alpha\phi} (\nabla a)^2). \quad (20)$$

Совокупность уравнений (16)-(20) дополняется оставшимися ij компонентами четырехмерного уравнения Эйнштейна. Сопоставляя (10) и (13) используя (14) получаем трехмерный тензор Риччи

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij} = & \frac{1}{2f^2} [(\nabla_i f)(\nabla_j f) + (\nabla_i \chi + w_i)(\nabla_j \chi + w_j)] + \\ & + 2(\nabla_i \phi)(\nabla_j \phi) - f^{-1} [e^{-2\alpha\phi}(\nabla_i v)(\nabla_j v) + e^{2\alpha\phi}(\nabla_i a)(\nabla_j a)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Система (16)-(21) полностью описывает стационарную систему Эйнштейна-Максвелла с дилатоном для произвольной константы связи α . Её можно представить как трехмерную систему Эйнштейна с материей с пятью действительными скалярными полями, называемыми обычно “потенциалами”:

$$\varphi^a = (f, \chi, v, a, \phi), \quad a = 1, \dots, 5, \quad (22)$$

Выведенные выше трехмерные уравнения можно получить из следующего действия:

$$S_\sigma = \int \left(\mathcal{R} - g_{ab}(\varphi) \partial_i \varphi^a \partial_j \varphi^b \right) h^{ij} \sqrt{h} d^3 x, \quad (23)$$

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}^i_i$, и $g_{ab}(\varphi^c)$ метрика пространства потенциалов

$$\begin{aligned} g_{ab} d\varphi^a d\varphi^b = & \frac{1}{2f^2} (df^2 + (d\chi + vda - adv)^2) - \\ & - \frac{1}{f} (e^{-2\alpha\phi} dv^2 + e^{2\alpha\phi} da^2) + 2d\phi^2. \end{aligned} \quad (24)$$

При $\alpha = 0$ и $\phi = \text{const}$ эта метрика сводится к метрике, полученной в работе [4] для системы Эйнштейна-Максвелла. Стоит отметить что уравнение для дилатона (20) при $\alpha \neq 0$, $\phi = \text{const}$ дает ограничение на поле Максвелла. Именно, стационарная система с дилатоном имеет решение $\phi = \text{const}$ только если $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F^2 = 0$. Таким образом система Эйнштейна-Максвелла является частным случаем системы с дилатоном лишь при $\alpha = 0$, когда скалярное поле взаимодействует только с гравитацией и может быть положено равным нулю.

Уравнение движения для потенциалов φ^A , получаемое из вариации трехмерного действия, имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i \left(\sqrt{h} h^{ij} g_{ab} \partial_j \varphi^b \right) = 0. \quad (25)$$

В работе [4] было замечено, что если все потенциалы φ^A зависят от x^i через единственную функцию $\sigma(x^i)$ (обобщение на случай нескольких функций иногда возможно [11]),

$$\varphi^a = \varphi^a[\sigma(x^i)],$$

тогда из уравнений движения (25) следует что эта функция должен быть гармонической в пространстве с метрикой h_{ij} :

$$\Delta\sigma = 0, \quad \Delta = h^{ij} \nabla_i \nabla_j. \quad (26)$$

Тогда уравнения движения сводятся к уравнению геодезических в пространстве потенциалов

$$\frac{d^2\varphi^a}{d\sigma^2} = \Gamma_{bc}^a \frac{d\varphi^b}{d\sigma} \frac{d\varphi^c}{d\sigma}, \quad (27)$$

а уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\mathcal{R}_{ij} = g_{ab} \frac{d\varphi^a}{d\sigma} \frac{d\varphi^b}{d\sigma} \nabla_i \sigma \nabla_j \sigma. \quad (28)$$

Особый класс представляют изотропные геодезические,

$$g_{ab} \frac{d\varphi^a}{d\sigma} \frac{d\varphi^b}{d\sigma} = 0,$$

тогда можно заметить, что правая часть уравнений Эйнштейна обращается в нуль. Мы получаем что метрика h_{ij} является Риччи-плоской, а трехмерные Риччи-плоские пространства являются вообще плоскими. В ряде теорий было замечено, что нулевые геодезические описывают экстремальные черные дыры, удовлетворяющие условию Богомольного на соответствующие заряды. В данном случае зарядами является масса M , НУТ-заряд N (магнитная масса), дилатонный заряд D , электрический Q , и магнитный P заряды, а условие Богомольного имеет вид:

$$M^2 + N^2 + D^2 = Q^2 + P^2.$$

То, что пространство получается плоским, соответствует ожиданию, что заряды взаимно балансируют силы притяжения/отталкивания.

3. Векторы Киллинга

Векторные поля Киллинга K задаются уравнением:

$$\mathcal{L}_K g_{ab} = 0,$$

где \mathcal{L} - производная Ли. Для метрики пространства потенциалов с константой связи дилатона $\alpha \neq 0$, $\sqrt{3}$ существуют пять векторов Киллинга:

$$\begin{aligned} K_s &= 2f\partial_f + v\partial_v + a\partial_a + 2\chi\partial_\chi, \\ K_\phi &= \frac{1}{\alpha}\partial_\phi + v\partial_v - a\partial_a, \\ K_a &= \partial_a + v\partial_\chi, \\ K_v &= \partial_v - a\partial_\chi, \\ K_\chi &= \partial_\chi, \end{aligned} \quad (29)$$

образующих разрешимую алгебру [8]. Очевидно, что при преобразованиях потенциалов вдоль векторов Киллинга не изменяются уравнения геодезических и уравнения Эйнштейна, это означает, что можно использовать векторы Киллинга для построения конечных преобразований в пространстве решений [8]. Три из них отвечают калибровочным преобразованиям, а два оставшихся - дилатонному сдвигу с соответствующим преобразованием электромагнитных полей.

Симметрии, связанные с векторами Киллинга, также помогают упростить уравнения геодезических. Как известно, каждому вектору Киллинга соответствует величина, сохраняющаяся на геодезических. Если K_A - поле Киллинга, тогда на геодезических сохраняется величина

$$I_K = K_a \frac{d\varphi^a}{d\sigma},$$

являющаяся интегралом движения уравнений (27). Эти интегралы имеют вид :

$$h = \frac{1}{2f^2} (\dot{\chi} + v\dot{a} - a\dot{v}),$$

$$q = \frac{e^{-2\alpha\phi} \dot{v}}{f} + 2ha,$$

$$p = \frac{e^{2\alpha\phi} \dot{a}}{f} - 2hv,$$

$$d = \frac{2\dot{\phi}}{\alpha} - 2hva - qv + pa,$$

$$s = \frac{\dot{f}}{f} + 2h\chi - qv - pa,$$

где $\dot{} = d/d\sigma$. Они связаны с физическими зарядами:

$$h = N, \quad s = 2M, \quad d = \frac{2D}{\alpha}, \quad q = \sqrt{2}Q, \quad p = \sqrt{2}P.$$

Особый интерес представляют изотропные геодезические, удовлетворяющие уравнению

$$g_{ab} \frac{d\varphi^a}{d\sigma} \frac{d\varphi^b}{d\sigma} = 0,$$

которые обращают в нуль правую часть уравнений Эйнштейна (28):

$$\mathcal{R}_{ij} = 0$$

превращая метрику h_{ij} в плоскую. Изучим теперь конформные преобразования пространства потенциалов.

4. Конформные преобразования

Рассмотрим преобразование потенциалов при котором метрика пространства потенциалов домножается на произвольную функцию Ω :

$$\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \tag{30}$$

Для общности будем считать $a = 1, \dots, n$. Такое преобразование будем называть конформным. Конформно плоским пространством называется такое пространство, которое можно при помощи конформного преобразования привести к плоскому. Определим некоторые величины, которые нам пригодятся для последующего анализа:

- Тензор Вейля

$$W_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c}g_{d]b}, \quad (31)$$

где R_{abcd} - тензор Римана, R_{ab} - тензор Риччи, R - скалярная кривизна пространства потенциалов. Нетривиален тензор Вейля только в пространствах размерности больше трех, при $n < 4$ он тождественно равен нулю. Тензор Вейля это бесследовая часть тензора Римана, он наследует его алгебраические свойства. Примечательно что тензор Вейля валентности (1,3) не изменяется при конформных преобразованиях

$$\hat{W}_{bcd}^a = W_{bcd}^a. \quad (32)$$

Обращение тензора Вейля в нуль в пространстве размерности $n \geq 4$ является необходимым и достаточным критерием того что пространство конформно плоское.

- Тензор Коттона (здесь и далее символом ∇_a обозначена комаринтная производная, согласованная с метрикой пространства потенциалов g_{ab})

$$C_{abc} = \nabla_c R_{ab} - \nabla_b R_{ac} + \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_b R g_{ac} - \nabla_c R g_{ab}). \quad (33)$$

Тензор Коттона фактически является дивергенцией тензора Вейля. В пространствах размерности $n < 3$ тождественно равен нулю. При конформных преобразованиях

$$\hat{C}_{abc} = C_{abc} + (n-2)\partial_d \ln(\Omega) W_{abc}^d. \quad (34)$$

В пространстве размерности $n = 3$ обращение тензора Коттона в нуль является необходимым и достаточным условием того что пространство конформно плоское.

- Тензор Схоутена

$$P_{ab} = \frac{1}{n-2} \left(R_{ab} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ab} \right), \quad (35)$$

- Тензор Баха

$$B_{ab} = P_{cd} W_{ab}^{cd} + \nabla^c \nabla_a P_{bc} - \nabla^c \nabla_c P_{ab}. \quad (36)$$

В пространстве размерности $n = 4$ тензор Баха является конформно инвариантным. Также он алгебраически независим от тензора Вейля.

Важно отметить, что, хотя тензор Риччи и инвариантен относительно растяжений метрики на постоянную величину, он не является инвариантной величиной при общих конформных преобразованиях.

Вообще говоря конформные преобразования не сохраняют вида уравнений движения (27),(28) теории. Для того чтобы сохранить уравнение геодезических необходимо чтобы символы Кристоффеля не изменялись при преобразовании. Между тем символы Кристоффеля изменяются следующим образом:

$$\hat{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \delta_b^a \partial_c \ln(\Omega) + \delta_c^a \partial_b \ln(\Omega) - G_{bc} \partial^a \ln(\Omega).$$

Отсюда видно, что для того, чтобы в общем случае конформное преобразование оставляло неизменными символы Кристоффеля, конформный фактор Ω должен быть постоянной величиной, то есть годятся только аффинные преобразования. Однако особый интерес представляет случай нулевых геодезических. При конформных преобразованиях нулевые геодезические $\varphi^a(\sigma)$ в метрике g_{ab} останутся нулевыми геодезическими в метрике \hat{g}_{ab} . Уравнение геодезических преобразуются следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi^a}{d\sigma^2} - \Gamma_{bc}^a \frac{d\varphi^b}{d\sigma} \frac{d\varphi^c}{d\sigma} = \frac{d^2\varphi^a}{d\sigma^2} - \hat{\Gamma}_{bc}^a \frac{d\varphi^b}{d\sigma} \frac{d\varphi^c}{d\sigma} + 2 \frac{d\varphi^a}{d\sigma} \frac{d\ln(\Omega)}{d\sigma} = 0,$$

откуда видно, что параметр σ перестает быть аффинным в новой метрике, но переход к новому параметру μ удовлетворяющему

$$d\mu/d\sigma = \Omega^{-2} \quad (37)$$

сведет новое уравнение к уравнению геодезических с новым параметром к привычному виду.

5. Преобразование Боннора

Известно преобразование Боннора [18], связывающее аффинно два подпространства пространства потенциалов:

$$dl_1^2 = \frac{df^2 + d\chi^2}{2f^2} + 2d\phi^2, \quad (38)$$

$$dl_2^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{e^{-2\alpha\phi} a}{f} + 2d\phi^2$$

следующим образом

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_2 e^{-2\alpha\phi_2}, \\ \chi_1 &= i \left(\frac{1 + \alpha^2}{2} \right)^{1/2} a_2, \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} \left(\phi_2 + \frac{\alpha}{2} \ln f_2 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

При этом преобразовании

$$dl_1^2 = \left(\frac{1 + \alpha^2}{4} \right) dl_2^2.$$

Уравнения геодезических (27) очевидно не изменяются, но в случае ненулевых геодезических необходимо будет изменить метрику h_{ij} для того чтобы удовлетворить уравнениям Эйнштейна (28). Например, в случае аксиальной симметрии h_{ij} можно представить в виде:

$$h_{ij} = e^{2\gamma(\rho,z)} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2.$$

Тогда преобразование

$$\gamma' = \lambda\gamma$$

изменит тензор Риччи

$$\mathcal{R}'_{ij} = \lambda \mathcal{R}_{ij}.$$

Как можно видеть, при таком совместном преобразовании метрики пространства потенциалов и метрики h_{ij} уравнения движения останутся неизменными.

6. Алгебра конформных векторов Киллинга

Существует несколько расширений векторов Киллинга. Одним из них являются конформные векторы Киллинга K , которые являются решением уравнения

$$\mathcal{L}_K g_{ab} = \lambda g_{ab}, \quad (40)$$

где $\lambda = \frac{1}{n} \nabla_a K^a$ - величина пропорциональная дивергенции конформного вектора Киллинга. Можно записать это уравнение в эквивалентном виде:

$$\nabla_{(a} K_{b)} = 2\lambda G_{ab}.$$

Конформные векторы тоже образуют алгебру, и очевидно, что векторы Киллинга, обладая нулевой дивергенцией, являются подалгеброй в этой алгебре. Рассмотрим подпространство пространства потенциалов включающее в себя потенциалы f, χ, ϕ :

$$ds^2 = \frac{df^2 + d\chi^2}{2f^2} + 2d\phi^2, \quad (41)$$

и найдем конформные векторы Киллинга, удовлетворяющие уравнению (40). Решение этого уравнения содержит 10 параметров, выберем в качестве базисных конформных векторов Киллинга следующие:

$$\begin{aligned} K_1 &= -\sin(2\phi)\partial_f - \frac{\cos(2\phi)}{2f}\partial_\phi, \\ K_2 &= -\sin(2\phi)(\chi^2 - f^2)\partial_f - \frac{\cos(2\phi)(\chi^2 + f^2)}{2f}\partial_\phi + 2\chi f \sin(2\phi)\partial_\chi, \\ K_3 &= -\cos(2\phi)(\chi^2 - f^2)\partial_f + \frac{\sin(2\phi)(\chi^2 + f^2)}{2f}\partial_\phi + 2\chi f \cos(2\phi)\partial_\chi, \\ K_4 &= -2\sin(2\phi)\chi\partial_f - \frac{\cos(2\phi)\chi}{f}\partial_\phi + 2f \sin(2\phi)\partial_\chi, \\ K_5 &= -2\cos(2\phi)\chi\partial_f + \frac{\sin(2\phi)\chi}{f}\partial_\phi + 2f \cos(2\phi)\partial_\chi, \\ K_6 &= \cos(2\phi)\partial_f - \frac{\sin(2\phi)}{2f}\partial_\phi, \quad K_7 = 2\chi f \partial_f + (\chi^2 - f^2)\partial_\chi, \\ K_8 &= 2f\partial_f + 2\chi\partial_\chi, \\ K_9 &= 2\partial_\chi \quad K_{10} = \frac{1}{2}\partial_\phi. \end{aligned} \quad (42)$$

Им соответствуют конформные факторы:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2 \sin(2\phi)}{f}, \\ \lambda_2 &= \frac{2 \sin(2\phi) (\chi^2 + f^2)}{f}, \\ \lambda_3 &= \frac{2 \cos(2\phi) (\chi^2 + f^2)}{f}, \\ \lambda_4 &= \frac{4 \sin(2\phi) \chi}{f}, \\ \lambda_5 &= \frac{4 \cos(2\phi) \chi}{f}, \\ \lambda_6 &= -\frac{2 \cos(2\phi)}{f}, \\ \lambda_7 &= \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 0,\end{aligned}$$

откуда ясно, что K_7, K_8, K_9, K_{10} являются обычными векторами Киллинга.

Все десять векторов образуют алгебру со следующими коммутационными соотношениями:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
K_1	0	$-K_8$	$-2K_{10}$	$-K_9$	0	0	K_4	$2K_1$	0	K_6
K_2	K_8	0	0	$2K_7$	0	$2K_{10}$	0	$-2K_2$	$-2K_4$	$-K_3$
K_3	$2K_{10}$	0	0	0	$2K_7$	$-K_8$	0	$-2K_3$	$-2K_5$	K_2
K_4	K_9	$-2K_7$	0	0	$4K_{10}$	0	$2K_2$	0	$-4K_1$	$-K_5$
K_5	0	0	$-2K_7$	$-4K_{10}$	0	$-K_9$	$2K_3$	0	$4K_6$	K_4
K_6	0	$-2K_{10}$	K_8	0	K_9	0	$-K_5$	$2K_6$	0	$-K_1$
K_7	$-K_4$	0	0	$-2K_2$	$-2K_3$	K_5	0	$-2K_7$	$-2K_8$	0
K_8	$-2K_1$	$2K_2$	$2K_3$	0	0	$-2K_6$	$2K_7$	0	$-2K_9$	0
K_9	0	$2K_4$	$2K_5$	$4K_1$	$-4K_6$	0	$2K_8$	$2K_9$	0	0
K_{10}	$-K_6$	K_3	$-K_2$	K_5	$-K_4$	K_1	0	0	0	0

Подалгебра Картана образована векторами K_4, K_8 . Построив матрицу Картана мы сможем убедиться что имеем дело с алгеброй B_2 . Она соответствует алгебре $sp(2, C)$ или $so(5, C)$. Нас интересует вещественная алгебра, поэтому рассмотрим вещественные формы: $sp(m, n) (m + n = 2)$ и $so(p, q) (p + q = 5)$.

Форма Киллинга B_{ij} имеет следующие ненулевые компоненты:

$$B_{1,2} = 12, \quad B_{3,6} = -12, \quad B_{4,4} = -24, \quad B_{5,5} = -24,$$

$$B_{7,9} = -24, \quad B_{8,8} = 24, \quad B_{10,10} = -6.$$

Приведя форму к диагональному виду можно убедиться что она невырождена, и имеет четыре положительных компоненты и шесть отрицательных. Максимальная

компактная подалгебра - подпространство где форма Киллинга B_{ij} отрицательно определена. Такой подалгеброй будет:

$$\left[K_1 - K_2, \quad K_3 + K_6, \quad K_4, \quad K_5, \quad K_7 + \frac{1}{2}K_9, \quad K_{10} \right]$$

Проверка показывает что это алгебра $so(4)$, тогда мы имеем дело с $so(4, 1)$. В качестве общего матричного элемента алгебры $K = K_a q_a$ можно выбрать

$$K = \begin{pmatrix} 2q_8 & 0 & -q_2 & q_7 & -q_3 \\ 0 & -2q_8 & 2q_1 & 4q_9 & -2q_6 \\ -2q_1 & q_2 & 0 & -2q_4 & -q_{10} \\ -4q_9 & -q_7 & q_4 & 0 & 2q_5 \\ 2q_6 & q_3 & q_{10} & -2q_5 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Интегралы движения

Известно, что векторы Киллинга дают интегралы движения для геодезических, подобным свойством обладают и конформные векторы с ограничением применимости только для нулевых геодезических. Конформные векторы Киллинга будут давать сохраняющиеся величины на нулевых геодезических:

$$Q = K_a \dot{\varphi}^a.$$

Действительно:

$$\frac{d}{d\sigma} Q = \frac{d}{d\sigma} (K_a \dot{\varphi}^a) = \frac{1}{2} (\nabla_b K_a + \nabla_a K_b) \dot{\varphi}^a \dot{\varphi}^b = \lambda(\varphi) G_{ab} \dot{\varphi}^a \dot{\varphi}^b = 0.$$

Выпишем интегралы движения для полученных конформных векторов Киллинга. Величины, сохраняющиеся на любых геодезических этого сектора:

$$Q_7 = \frac{\chi^2 - f^2}{2f^2} \dot{\chi} + \frac{\chi}{f} \dot{f},$$

$$Q_8 = \frac{1}{f} \dot{f} + \frac{\chi}{f^2} \dot{\chi},$$

$$Q_9 = \frac{1}{f^2} \dot{\chi},$$

$$Q_{10} = \dot{\phi}.$$

Величины, которые сохраняются только на нулевых геодезических:

$$Q_1 = \frac{\sin(2\phi)}{2f^2} \dot{f} + \frac{\cos(2\phi)}{f} \dot{\phi},$$

$$Q_2 = \frac{\sin(2\phi)(\chi^2 - f^2)}{2f^2} \dot{f} + \frac{\cos(2\phi)(\chi^2 + f^2)}{f} \dot{\phi} + \frac{\sin(2\phi)}{f} \dot{\chi},$$

$$Q_3 = -\frac{\cos(2\phi)(\chi^2 - f^2)}{2f^2} \dot{f} + \frac{\sin(2\phi)(\chi^2 + f^2)}{f} \dot{\phi} + \frac{\cos(2\phi)\chi}{f} \dot{\chi},$$

$$Q_4 = \frac{\sin(2\phi)\chi}{f^2} \dot{f} + \frac{2\cos(2\phi)\chi}{f} \dot{\phi} - \frac{\sin(2\phi)}{f} \dot{\chi},$$

$$Q_5 = -\frac{\cos(2\phi)\chi}{f} \dot{f} + \frac{2\sin(2\phi)\chi}{f} \dot{\phi} + \frac{\cos(2\phi)}{f} \dot{\chi},$$

$$Q_6 = \frac{\cos(2\phi)}{2f^2} \dot{f} - \frac{\sin(2\phi)}{f} \dot{\phi}.$$

8. Конформно плоские пространства

Конформно плоским пространством называется такое пространство метрику которого можно свести к плоской при помощи конформного преобразования:

$$g_{ij} \frac{dx^i}{dy^a} \frac{dx^j}{dy^b} dy^a dy^b = \Omega^2 \eta_{ab} dy^a dy^b,$$

где в нашем случае $\eta_{ab} = \text{diag}(1, 1, 1)$, в более общем рассмотрении стоит рассматривать метрики произвольных сигнатур.

Известно что если пространство размерности n имеет $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ конформных векторов Киллинга, то это пространство конформно плоское. Рассматриваемое подпространство размерности 3 имеет $\frac{(3+1)(3+2)}{2} = 10$ конформных векторов Киллинга и следовательно является конформно плоским. Ещё можно убедиться в этом проверив что тензор Коттона C_{ijk} обращается в нуль. Это является необходимым и достаточным условием того что пространство размерности $n = 3$ конформно плоское [1]. Также конформно плоскими подпространствами пространства потенциалов являются:

$$dl^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{e^{-2\alpha\phi} a}{f} + 2d\phi^2,$$

$$dl^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{e^{2\alpha\phi} v}{f} + 2d\phi^2.$$

Этого следовало ожидать так как они тесно связаны преобразованием Боннора с исследуемой метрикой (38). Однако так как эти подпространства имеют разную сигнатуру стоит ожидать что алгебра изменится на $so(3, 2)$. Используя преобразования Боннора (39) можно подействовать и на решения из этих секторов применив какое-либо из преобразований (48), (47), (45), (46) и сделав обратное преобразование Боннора. Для пространств большей размерности ($n > 3$) обращения тензора Коттона в нуль недостаточно, необходимо обращение в нуль тензора Вейля.

Для того чтобы воспользоваться конечными преобразованиями из конформной группы нам необходимо найти соответствующее координатное преобразование, оно сразу идентифицируется после того как мы вынесем конформный фактор $1/(2f^2)$ из метрики (41). Преобразование похоже на переход от цилиндрических координат к декартовым:

$$\begin{aligned} x &= f \cos(2\phi), \\ y &= f \sin(2\phi), \\ z &= \chi. \end{aligned} \tag{43}$$

Запишем также обратное преобразование:

$$f = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\chi = z.$$
(44)

Видно, что величина f ассоциируется с радиусом $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 2ϕ с углом и χ с координатой z цилиндрических координат. Так как конформный фактор зависит только от f , можно сказать, что любые преобразования не преобразующие r , или преобразующие линейно $r' = cr$, могут действовать не только на нулевые геодезические, а на произвольные. Такими преобразованиями будут сдвиги по оси z .

9. Конформная группа

Группа конформных преобразований плоского пространства хорошо известна, она включает в себя в качестве подгрупп группу вращений, группу трансляций и группу растяжений пространства. Единственными преобразованиями, которые обладают непостоянными конформными факторами в этой группе являются специальные конформные преобразования (SCT), которые действуют последовательно применяя: инверсию относительно сферы единичного радиуса, трансляцию на вектор и снова инверсию. В таблице указаны все конечные конформные преобразования плоского пространства и их генераторы

	Преобразования	Генераторы
Трансляции	$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$	$P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$
Растяжения	$x'^{\mu} = \lambda x^{\mu}$	$D = -ix^{\mu}\partial_{\mu}$
Вращения	$x'^{\mu} = M_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$	$L_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu})$
SCT	$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - (x \cdot x)b^{\mu}}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}$	$K_{\mu} = -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - (x \cdot x)\partial_{\mu})$

Конформный фактор соответствующий SCT:

$$\Omega^2 = (1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x))^2.$$

10. Генерация решений

Для того чтобы получить новое решение из затравочного (f_0, ϕ_0, χ_0) необходимо получить представление решения в координатах $x^{\mu} = (x, y, z)$ с помощью (43), подействовать конечным конформным преобразованием из таблицы $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$, и перейти обратно к потенциалам сигма модели обратным преобразованием (8).

Попробуем связать найденные векторы Киллинга $K_7 - K_{10}$ в (42) с конечными преобразованиями плоского пространства. Понятно, что они не будут изменять вид метрики (41), потому что они годятся для любых решений теории, а не только экстремальных.

- $K_9 = \partial_\chi$ соответствует трансляциям по оси Oz . Потенциалы при трансляции по оси z на величину λ запишутся с использованием (8)

$$\begin{aligned} f' &= f, \\ \phi' &= \phi, \\ \chi' = z' &= z + \lambda = \chi + \lambda. \end{aligned} \quad (45)$$

Тут всё тривиально так как χ и z связаны простым равенством, то сдвиги по оси z эквивалентны добавлению к χ константы.

- $K_{10} = \frac{1}{2}\partial_\phi$ соответствует вращению относительно оси Oz . Вращение относительно оси Oz на угол 2θ запишется так:

$$\begin{aligned} x' &= f \cos(2(\phi + \theta)), \\ y' &= f \sin(2(\phi + \theta)), \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Это действительно соответствует калибровочному преобразованию ϕ

$$\begin{aligned} f' &= f, \\ \phi' &= \phi + \theta, \\ \chi' &= \chi. \end{aligned} \quad (46)$$

- $K_8 = 2f\partial_f + 2\chi\partial_\chi$, из таблицы конечных преобразований ясно, что это соответствует одновременному умножению f и χ на константу. Запишем растяжение координат в h раз:

$$x' = hx, \quad y' = hy, \quad z' = hz.$$

Это дает очевидное преобразование:

$$\begin{aligned} f' &= h\sqrt{x^2 + y^2} = hf, \\ \phi' &= \arctg\left(\frac{hy}{hx}\right) = \phi, \\ \chi' &= h\chi. \end{aligned} \quad (47)$$

- $K_7 = 2\chi f\partial_f + (\chi^2 - f^2)\partial_\chi$, это нетривиальный случай он соответствует специальному конформному преобразованию вдоль вектора параллельного оси Oz . Обозначим длину этого вектора за d . Из таблицы видно, какими должны быть конечные преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1 - 2d\chi + d^2(x^2 + y^2 + z^2)}, \\ y' &= \frac{y}{1 - 2d\chi + d^2(x^2 + y^2 + z^2)}, \end{aligned}$$

$$z' = \frac{z - d(x^2 + y^2 + z^2)}{1 - 2d\chi + d^2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Тогда преобразованные потенциалы примут вид:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{f}{1 - 2d\chi + d^2(\chi^2 + f^2)}, \\ \phi' &= \phi, \\ \chi' &= \frac{\chi - d(\chi^2 + f^2)}{1 - 2d\chi + d^2(\chi^2 + f^2)}. \end{aligned} \tag{48}$$

Это преобразование никак не затрагивает дилатон, оно действует только в подпространстве (f, χ) . Непосредственная проверка показывает, что такое преобразование не изменяет вида метрики (41).

Теперь рассмотрим преобразование, которое не соответствует ни одному из векторов Киллинга. Как мы увидим далее, такие преобразования хотя и переводят нулевые геодезические в такие же, но они всё же не могут быть использованы для генерации решений из-за ограничений на аффинный параметр σ . Например посмотрим, к чему приведет вращение вокруг оси Ox на угол β :

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos(\beta) - z \sin(\beta), \\ z' &= y \sin(\beta) + z \cos(\beta). \end{aligned}$$

Подставив (43) в предыдущие выражения получим преобразования потенциалов:

$$\begin{aligned} f' &= \sqrt{f^2 \cos^2(2\phi) + (f \sin(2\phi) \cos(\beta) - \chi \sin(\beta))^2}, \\ \phi' &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{f \sin(2\phi) \cos(\beta) - \chi \sin(\beta)}{f \cos(2\phi)} \right), \\ \chi' &= f \sin(2\phi) \sin(\beta) + \chi \cos(\beta). \end{aligned}$$

Так как это простое движение в координатах (x, y, z) , то ему будет соответствовать конформный фактор $\Omega^2 = (2f'^2/2f^2) = (f'/f)^2$. Он принимает довольно сложный вид и вообще говоря не является потоянной величиной. Чтобы восстановить вид уравнений геодезических, нужно будет перейти к новому аффинному параметру μ . Для этого нужно разрешить уравнение (37). Но не стоит забывать, что на аффинный параметр существуют ограничения, заложенные в уравнениях движения первоначальной теории (26). Основным требованием является гармоничность нового аффинного параметра, это условие должно выполняться так как геодезическая осталась нулевой, а следовательно и метрика h_{ij} плоской согласно (28) и это значит что лапласиан в трехмерии не изменился.

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= 0, \\ \Delta\mu &= h^{ij} \nabla_i \left(\frac{d\mu}{d\sigma} \nabla_j \sigma \right) = h^{ij} \nabla_i (\Omega^{-2} \nabla_j \sigma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\Omega^{-3} \frac{d\Omega}{d\sigma} h^{ij} \nabla_i \sigma \nabla_j \sigma + \Omega^{-2} \Delta \sigma, \\
&= -2\Omega^{-3} \frac{d\Omega}{d\sigma} (\nabla \sigma)^2.
\end{aligned}$$

Обычно для плоского пространства выбирают $\sigma = 1/r$, чтобы у потенциалов были нужные асимптотики. Тогда единственный осмысленный способ обнулить это выражение - положить Ω постоянной величиной. Такими преобразованиями будут только соответствующие “чистым” векторам Киллинга.

Теперь после того как прояснилось какие преобразования стоит рассматривать попробуем применить одно из них на уже известное решение. Для этого выйдем из евклидового сектора заменой $\chi \rightarrow i\chi$. Тогда метрика примет вид

$$dl^2 = \frac{df^2}{2f^2} - \frac{d\chi^2}{2f^2} + 2d\phi^2,$$

и сами преобразования также изменят свой вид:

$$\begin{aligned}
f' &= \frac{f}{1 + 2d\chi - d^2(f^2 - \chi^2)}, \\
\phi' &= \phi, \\
\chi' &= \frac{\chi - d(f^2 - \chi^2)}{1 + 2d\chi - d^2(f^2 - \chi^2)}.
\end{aligned} \tag{49}$$

В секторе с лоренцевой сигнатурой существуют экстремальные решения (инстантоны). Можно подействовать и на неэкстремальные решения изменив метрику h_{ij} , но мы ограничимся простым случаем. Возьмем экстремальное решение из работы [19]:

$$\begin{aligned}
f_0 &= (1 + 2M\sigma)^{-1}, \\
\phi_0 &= 0, \\
\chi_0 &= (f - 1).
\end{aligned}$$

Подействовав на него преобразованием (49), получим:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{(d-1)(2M\sigma(d-1) - d - 1)}, \\
\phi_1 &= 0, \\
\chi_1 &= \frac{2M(d-1)\sigma - d}{(d-1)(2M\sigma(d-1) - d - 1)},
\end{aligned}$$

где d - произвольная константа.

11. Замечания о критических значениях α

При особых значениях α алгебра векторов Киллинга расширяется до полупростой [8]. Исследуем общие конформные симметрии такой системы. Рассмотрим метрику пространства потенциалов для системы Эйнштейна-Максвелла положив в (24) $\alpha = 0$, $\phi = \text{const}$:

$$g_{ab}d\varphi^a d\varphi^b = \frac{1}{2f^2}(df^2 + (d\chi + vda - adv)^2) - \frac{1}{f}(dv^2 + da^2). \quad (50)$$

Она четырехмерна, а в четырехмерных пространствах конформно инвариантен тензор Баха, в нашем случае имеем:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= -3g_{ab}, \\ R &= -12, \\ C_{abc} &= 0, \\ B_{ab} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом пространство потенциалов теории Эйнштейна-Максвелла является пространством Эйнштейна. Для таких пространств тензор Коттона обращается в нуль, а так как он равен дивергенции тензора Вейля, то тензор Вейля является гармоническим. Таким же свойством обладает и теория Калуцы-Клейна, отвечающая $\alpha = \sqrt{3}$. Прямой расчет тензора Вейля показывает, что это пространство не является конформно плоским. Так как тензор Баха обращается в нуль, то единственной нетривиальной величиной инвариантной относительно конформных преобразований остаётся тензор Вейля.

12. Заключение

В работе были рассмотрены конформные симметрии пространства потенциалов сигма-модели ЭМД. Было произведено интегрирование уравнений конформных векторов Киллинга и построена алгебра конформных симметрий. Получены инварианты изотропных геодезических пространства потенциалов. Выявлено что некоторые его попространства являются конформно плоскими. Исследована возможность применения симметрий конформно плоских пространств к генерации новых решений в рассматриваемой системе. Единственным преобразованием представляющим интерес является специальное конформное преобразование (48) действующее нетривиально на потенциалы модели.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, а также при поддержке РФФИ в рамках проекта 14-02-01092а.

Литература

1. Kramer D. Exact solutions of Einstein's field equations / D. Kramer, M. MacCallum, E. Herlt. - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980. - 425 p.

2. Buchdahl H.A. Reciprocal static solutions of the equations $G_{\mu\nu} = 0$ / H.A. Buchdahl // Quart. J. Math. Oxford. - 1954. - Vol. 5. - P. 116.
3. Ehlers J. Konstruktionen und Charakterisierung von Lösungen der Einsteinschen Gravitationsfeldgleichung / J. Ehlers // Dissertation, Hamburg. - 1957.
4. Neugebauer G. Eine methode zur konstruktion stationärer Einstein-Maxwell-Felder / G. Neugebauer, D. Kramer // Ann. der Phys. (Leipzig). - 1969. - Vol. 24. - P. 62-71.
5. Ernst F.J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem / F.J. Ernst // Phys. Rev. - 1968. - Vol. 167. - P. 1175.
6. Geroch R. A method for generating new solutions of Einstein's field equation I / R.Geroch // J. Math. Phys. - 1971. - Vol. 12. - P. 918-924.
7. Maison D. Ehlers-Harrison type transformations for Jordan's extended theory of gravitation / D. Maison // Gen. Rel. Grav. - 1979. - Vol. 10. - P. 717.
8. Gal'tsov D.V. Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell dilaton theory / D.V. Gal'tsov, A.A. García, O. V. Kechkin // Class. Quant. Grav. - 1995. - Vol. 12. P. 2887. - Access mode:[hep-th/9504155].
9. Gal'tsov D.V. Ehlers-Harrison-Type Transformations in Dilation-Axion Gravity / D.V. Gal'tsov, O.V. Kechkin // Phys. Rev. D. - 1994. - Vol. 50. - P. 7394. - Access mode: [arXiv:hep-th/9407155];
10. Gal'tsov D.V. Integrable Systems in Stringy Gravity / D.V. Gal'tsov // Phys. Rev. Lett. - 1995. - Vol. 74. - P. 2863. - Access mode: [arXiv:hep-th/9410217]
11. Clément G. Stationary BPS solutions to dilaton-axion gravity / G. Clément, D. Gal'tsov // Phys. Rev. D. - 1996. - Vol. 54. - P. 6136. - Access mode: [arXiv:hep-th/9607043]
12. Gal'tsov D.V. Ehlers-Harrison transformations and black holes in dilaton-axion gravity with multiple vector fields / D.V. Gal'tsov, P.S. Letelier // Phys. Rev. D. - 1997. - Vol. 55. P.3580. - Access mode:[arXiv:gr-qc/9612007].
13. D. V. Gal'tsov and S. A. Sharakin Matrix Ernst potentials for EMDA with multiple vector fields // D.V. Gal'tsov, S.A. Sharakin // Phys. Lett. B. - 1997. - Vol. 399. - P. 250 - Access mode: [arXiv:hep-th/9702039].
14. Chen C.M. $SL(4, \mathbb{R})$ generating symmetry in five-dimensional gravity coupled to dilaton and three-form / C.M. Chen, D.V. Gal'tsov, K. Maeda, S.A. Sharakin // Phys. Lett. - 1999.- Vol. B 453, No 7. P. 7-16.
15. Breitenlohner P. Solutions of the Einstein's Equations: Techniques and Results / P. Breitenlohner, D. Maison // ed. by C. Hoenselaers, W. Dietz, Lecture Notes in Physics. - 1984. - Vol. 205. P. 276
16. Maison D. Duality and hidden symmetries in gravitational theories / D. Maison // Lect. Notes Phys. - 2000. - Vol. 540. - P. 273-323.
17. Israel W. Solutions of the Einstein-Maxwell equations with many black holes / W. Israel, G.A. Wilson // Journ. Math. Phys. - 1972. - Vol. 13. - P. 865.
18. Bonnor W. An exact solution of the Einstein-Maxwell equations referring to a magnetic dipole / W. Bonnor // Z. Phys.- 1966. - Vol. 190. - P. 444.
19. M. Azreg-Aïnou All extremal instantons in Einstein-Maxwell-dilaton-axion theory / M. Azreg-Aïnou, G. Clément, D. V. Gal'tsov // Phys. Rev. D - 2011. - Vol. 84. - P. 104042. - Access mode: [arXiv:1107.5746].

HIDDEN SYMMETRIES OF THE EINSTEIN EQUATIONS AND CONFORMAL TRANSFORMATIONS OF TARGET SPACE

D.V. Gal'tsov, D.I. Alferov

Hidden symmetries are global symmetries that arise in dimensional reduction of Einstein's equations (and their generalizations) that inherited from the group of diffeomorphisms of the original theory.

In three-dimensional reduction all non-gravitational field are effectively reduced to scalar, with the broad classes of theories describe three-dimensional gravity, which has as a source a system of scalar fields, forming a nonlinear sigma-model. Hidden symmetries are used for obtaining new solutions of Einstein's equations depending on three variables (almost all nowadays analytically known solutions can be reduced to such a class). The "potential" space (target space) of the three-dimensional sigma-models obtained by reduction theory allowing solutions with a flat three-dimensional space (in models of supergravity this solution, saturating Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield bound (BPS)) has a metric of Lorentz signature, and contain isotropic geodesic. In particular, they correspond to extreme black holes with degenerate event horizon, and form an important sub-class of exact solutions. Since isotropic curves remain so under conformal transformations of the metric, there the question of usefulness of possible conformal symmetries of space the potential for the generation of BPS solutions. This work is attempt such a study. It is shown that some well-known sigma-models arising from the dimensional reduction, have conformally flat target space.

Keywords: general relativity, sigma-models, supergravity, Einstein equations.

УДК 530.12+523.112

ВРЕМЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ КОЛЛАПСА ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ УИЛЕРА

А.К. Гуц¹

¹ aguts@mail.ru; Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Описана квантовая процедура переходов между различными историческими эпохами, отстоящими друг от друга в физическом космологическом времени. Механизм перехода может быть назван негёделевской машиной времени.

Ключевые слова: Коллапс волнового пакета, суперпространство Уилера, стационарное пространство-время, негёделевская машина времени.

Аппарат квантовой геометродинамики Уилера [1] описывает не только эффекты квантовой гравитации, но и является способом квантового описания Вселенной. В статье мы обращаем внимание на возможность с помощью этого аппарата выявить наличие возможных переходов между различными временными сечениями (эпохами) пространства-времени.

Пространство-время Вселенной M^4 в квантовой космологии Уилера-ДеВитта появляется как интерференция когерентной квантовой суперпозиции, или волнового пакета:

$$\Psi[{}^{(4)}\mathcal{G}] = \int_K c_k \Psi_k[{}^{(3)}\mathcal{G}] dk, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где $\Psi_k[{}^{(3)}\mathcal{G}]$ - частная волновая функция, являющаяся функционалом от 3-мерной римановой геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G} = (M^3, h_{\alpha\beta})$ и удовлетворяющая функциональному уравнению Уилера-ДеВитта.

Мы видим, что то, что считается Реальностью, существующей в форме четырехмерного непрерывного континуума M^4 и называемого пространством-временем, в действительности является квантовой сущностью, т. е. цепью интерференционных

«горных пиков» по выражению Halliwell'a [2] в суперпространстве Уилера. Вдоль этой цепи «горных пиков» вводится искусственно расстояние между ними - воспринимаемое людьми как *физическое время* t . Поэтому имеем семейство 3-геометрий ${}^{(3)}\mathcal{G}(t)$, или 3-метрик $h_{\alpha\beta}(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям Эйнштейна. Рассматривая волновую функцию $\Psi[h_{\alpha\beta}(x, t)] = \Psi[{}^{(3)}\mathcal{G}(t)]$ и полагая

$$\begin{aligned}\Psi[h_{\alpha\beta}(x, t)] &= \psi[h_{\alpha\beta}(x, t)]e^{im_p S[h_{\alpha\beta}(x, t)]}, \\ \psi(t) &= \psi[h_{\alpha\beta}(x, t)], \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) &= \int \dot{h}_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}(x, t)} \psi[h_{\alpha\beta}(x, t)] d^3 x,\end{aligned}$$

где $S[h_{\alpha\beta}]$ - решения уравнения Эйнштейна-Гамильтона-Якоби, m_p - масса Планка, и

$$\dot{h}_{\alpha\beta} = NG_{\alpha\beta\gamma\delta} S[h_{\gamma\delta}] + 2D_{(\alpha} N_{\beta)},$$

находим, что вдоль пространства-времени, т. е. вдоль цепи «горных пиков» справедливо уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H_{mat} \psi(t), \quad (2)$$

где H_{mat} - гамильтониан материальных полей (подробности см. [3, p. 172]).

Как правило, не обсуждается смысл квантовой системы Ω , описываемой посредством волнового пакета (1), и ее состояний Ω_k , $k \in K$, для которых находятся соответствующие волновые функции $\Psi_k[{}^{(3)}\mathcal{G}]$.

Очевидно, что Ω - это Внешний мир, Квантовая реальность, а ее состояния Ω_k - это формы ее существования, которые в соответствии с принципами квантовой механики в процессе, именуемом в квантовой механике *измерением*, локализуются. Измерение системы Ω приводит к коллапсу волнового пакета (1):

$$\int_K c_k \Psi_k[{}^{(3)}\mathcal{G}] d\mu(k) \rightarrow \Psi_{k'}[{}^{(3)}\mathcal{G}] \quad (3)$$

с вероятностью $|c_{k'}|^2$. Правда, совершенно непонятно, кто и где будет совершать измерение и наблюдать локализацию состояния $\Omega_{k'}$? Ведь для Вселенной не существует внешнего наблюдателя.

Квантовая механика исходит из того, что система Ω находится внутри 3-мерного мира, в котором течет физическое время t , и именно в нем происходят измерения состояний системы Ω . В нем же наблюдается локализации состояний Ω_k . Этот 3-мерный мир и являет собой внешнее окружение системы Ω .

В случае квантовой космологии для системы Ω не существует внешнего окружения; она изолирована. Как же произвести измерение состояния Ω_k системы Ω ?

Во время измерения у самой системы, которая в нашем случае - это Вселенная, появляются классические черты, которые соответствуют информации, имеющейся в окружающей среде, роль которой играет наблюдатель, производящий измерение с помощью приборов. При этом существенную роль играет макроскопичность прибора, существующего в пространстве и времени. Однако для состояние, к которому

редуцирует волновой пакет, нет того внешнего параметра, который вводится вдоль «горных пиков», отмечающих классическую траекторию в суперпространстве, соответствующую классическому пространству-времени. Следовательно, существование состояния происходит стационарным образом, в его пространстве ничего не меняется в его времени, и это время есть время, текущее в сознании наблюдателя.

1. Исторические эпохи. Примем, что каждое состояние Ω_k квантовой реальности Ω - это 3-мерный мир, в котором практически ничего не меняется; он вневременен. В этом мире находится *наблюдатель*, способный осуществлять измерения реальности, точнее, ее пространственной геометрии. Иначе говоря, Ω_k - это стационарное пространство-время M_k^4 , в котором осуществляется «замороженное» историческое существование наблюдател(я/ей). Историки такое существования называют историческими эпохами. Гёте и Шпенглер использовали термин «гештальт» [4].

Каждая историческая эпоха, такая как Античность, Средневековье, Возрождение и пр., видится историками как *ограниченная* во времени форма существования человечества.

Историческая эпоха - наиболее крупная единица исторического времени, обозначающая длительный период человеческой истории, отличающийся определенной внутренней связностью и только ему присущим уровнем развития материальной и духовной культуры ... Переход от одной эпохи к другой представляет собой переворот во всех сферах социальной жизни [Философский словарь].

Конечность исторической эпохи автоматически означает ее сменяемость, а значит дает возможность все исторические эпохи разместить одну за другой, **последовательно** в одном пространственно-временном лоренцевом многообразии. В этом описании отражена западная культурная традиция видеть Мир изменяющейся сущностью, эволюционирующей в физическом времени t .

Ну..., а вдруг исторические эпохи не конечны во времени? И если не пытаться их толкнуть в одно пространство-время, полагая, что ее бесконечность во времени проявляется всего лишь в форме редких, но устойчивых «пережитков» прошлого? В таком случае, очевидным становится, что сильно доминирующие нередкие «пережитки» прошлого будут заполнять все будущее, разрушая идею сменяемости исторических эпох, идею эволюционирующей реальности.

Как спасти идею последовательной сменяемости исторических эпох, идею эволюционирующей реальности, не пренебрегая при этом условием бесконечности существования во времени каждой исторической эпохи?

Очевидно, для этого надо использовать не классическую теорию, а квантовую, и тогда эволюционирующий мир появляется как интерференция исторических эпох, как последовательность «горных пиков», в высоту каждого из которых вносит вклад каждая историческая эпоха, как квантовый волновой пакет исторических эпох в форме (1). Исторические эпохи *существуют одновременно*. Внешние наблюдатели находятся не вне этой суперпозиции, а внутри - внутри каждой исторической эпохи, для которых собственная историческая эпоха представляется истинной объективной реальностью. Находясь в эпохе Ω_{k_0} , наблюдатель X проводит наблюдение пакета (1), который колапсирует и пространственно ограниченная часть состояния

$\Omega_{k'}$ локализуется в эпохе Ω_{k_0} . Другими словами, картина коллапса (3) должна быть уточнена и заменена на следующую:

$$\int_K c_k \Psi_k^{[(3)\mathcal{G}]} d\mu(k) \xrightarrow[\text{измерение}]{X} \Psi_{k'}^{[(3)\mathcal{G}]} \subset \Omega_{k_0} \quad (4)$$

с вероятностью $|c_{k'}|^2$.

Считается, что при измерении интерференция между волновыми функциями (состояниями), входящими в волновой пакет, исчезает. Интерференция исчезает также в том случае, когда измерения совершается без регистрации определенного результата. Однако в случае системы Ω , которая является самой Реальностью, описанные измерения не разрушают полностью интерференцию, дающую пространство-время, а всего лишь приводят к потере интерференции между двумя эпохами $\Omega_{k_0}, \Omega_{k'}$, но не к полной потере интерференции всех прочих эпох.

Обозначим через $|k\rangle$ состояние исторической эпохи Ω_k с волновой функцией $\Psi_k^{[(3)\mathcal{G}]}$ квантовой системы Ω , описываемой суперпозицией

$$\sum_{k \in K} c_k |k\rangle.$$

Тогда измерение, производимое наблюдателем X с помощью аппарата \mathcal{A} с начальным состоянием A , нацеленное на специфическое значение 3-геометрии ${}^{(3)\mathcal{G}}$ и приращение только исторической эпохе $\Omega_{k'}$, приводит к новой суперпозиции:

$$\sum_k c_k |k\rangle \otimes |A\rangle \rightarrow \left(\sum_{k, k \neq k_0, k'} c_k |k\rangle \right) \otimes |\tilde{A}\rangle + (c_{k_0} |k_0\rangle \otimes |A_0\rangle + c_{k'} |k'\rangle \otimes |A'\rangle). \quad (5)$$

Мы видим, что две эпохи $\Omega_{k_0}, \Omega_{k'}$ сцепливаются (переплетаются) с аппаратурой (окружением), а все прочие образуют интерференционную квантовую суперпозицию, намечающую классическую Вселенную, в которой отсутствует вклад эпох $\Omega_{k_0}, \Omega_{k'}$.

2. Квантовая механика и сознание. Квантовая механика нуждается в сознании, которое фигурирует в теории по имени «наблюдателя». Наблюдатель, и только он, совершает измерение, т. е. вмешательство, воздействие на квантовую систему. Объективность науки требует, чтобы наблюдатель был не один - каждый физик, разбирающийся в квантовой механике - это потенциальный наблюдатель. В квантовой космологии наблюдатели находятся внутри системы. Следовательно, состояния Вселенной, именуемые нами историческими эпохами, все содержат наблюдателей (подобно тому, как состояния частицы - ее положения в пространстве, все привязаны к той или иной точке пространства). И так же как эти положения в пространстве у частицы все различны, так и наблюдатели в каждой исторической эпохе отличны по своим характеристикам, например, по хитроумности в экспериментах-измерениях. Другими словами, в разных эпохах наблюдатели различны по определенным наборам характеристик, отражающих их культурно-образовательно-мировоззренческий уровень, и, следовательно, эпохи Ω_k

- это в действительности исторические эпохи в понимании историков (они населены людьми, наделеными характерными для конкретной эпохи культурно-образовательно-мировоззренческими взглядами). Поскольку нам дан волновой пакет исторических эпох, т. е. когерентная суперпозиция, то все эпохи существуют одновременно в квантовой реальности и складываются в интерференцию, обозначающую пространство-время и задающую физическое время.

Поскольку Вселенная существует как квантовая суперпозиция (1), описываемая уравнением Шредингера, а ее исторические эпохи при этом сцеплены друг с другом, то это дает возможность осуществлять взаимодействия между эпохами посредством измерений, производимых наблюдателями этих исторических эпох. Если бы квантовая суперпозиция подверглась, как предполагается рядом исследователей, декогеренции, то она распалась бы на декогерентные истории, не сцепленные друг с другом (а только с окружением), т. е. представляющие собой принципиально невзаимодействующие исторические эпохи, или на параллельные миры в духе Эверетта.

Определенного рода деятельность (измерения) наблюдателей эпохи Ω_{k_0} относительно величин, типичных только для эпохи $\Omega_{k'}$, разрушит сцепленность последней с остальными эпохами, и сцепит ее с данной. Это измерение локализует частично каждую из двух эпох в другой. Возникнет переход из одной эпохи в другую. Это есть ни что иное, как машина времени. Поскольку в другой эпохе есть мой квантовый двойник (это как другое местоположение одной частицы), то убить его не означает убить себя. Иначе говоря, парадокс дедушки решается тривиальным образом.

Благодаря наличию интерференционной картины - цепи «горных пиков» - существует классическое пространство-время, которое видится живущем в нем наблюдателям как «эволюционирующее», поскольку содержит вклады всех исторических эпох. Это видно в случае полуклассического приближении волнового пакета: если взять

$$\Psi_k^{[(3)\mathcal{G}]} = A_k^{[(3)\mathcal{G}]} e^{\frac{i}{\hbar} S_k^{(3)\mathcal{G}}},$$

то

$$\int_K c_k \Psi_k^{[(3)\mathcal{G}]} d\mu(k) = \left(\int_K c_k A_k^{[(3)\mathcal{G}]} d\mu(k) \right) e^{\frac{i}{\hbar} S_0}, \quad (6)$$

где

$$\forall k (S_k^{(3)\mathcal{G}}) = S_0 = const$$

- условие интерференции. Из (6) видно, как «горные пики» складываются из разных интерферирующих эпох. Благодаря этому, втиснутые в единое пространство-время, наблюдатели рассуждают о наблюдаемых сменах исторических эпох, помнят своих предков, раскапывают исторические артефакты и прочее. При этом каждый из этих наблюдателей принадлежит конкретной исторической эпохе Ω_k , поскольку состояниями квантовой системы Ω являются эпохи, а не интерференция в форме пространства-времени (цепи «горных пиков»).

3. Негёделевская машина времени. Суперпозиция исторических эпох (1) дана нам в форме интерференции, которая являет собой классическое пространство-время M^4 и в котором мы существуем.

Геометрия $^{(3)}\mathcal{G}$ исторической эпохи Ω_k знает место своей временной локализации в 4-геометрии пространства-времени: «гиперповерхность, проведенная че-

рез пространство-время и состоящая из 3-геометрий, может сдвигаться во времени в любой из точек слишком незначительно, чтобы включить какую-либо новую 3-геометрию. Время, определенное таким образом, означает не более и не менее как локализацию 3-геометрии в 4-геометрии. В этом смысле 3-геометрия выступает как «носитель временной информации» [1, p. 37].

Пусть наблюдатель X в исторической эпохе Ω_{k_0} создает условия, которые осуществляют измерения геометрии (или иной величины), соответствующей другой эпохе $\Omega_{k'}$. Тогда происходит локализации части пространства эпохи $\Omega_{k'}$ в пространстве эпохи Ω_{k_0} наблюдателя X , благодаря тому, что возникает квантовая сцепленность (квантовая корреляция) двух эпох.

Другими словами, мы имеем коллапс пакета (1) в эпоху-реальность Ω_{k_0} , проявляющийся в локализации части пространства эпохи $\Omega_{k'}$ в реальности Ω_{k_0} . Открывается проход в иную эпоху.

Однако симметричным образом, поскольку эпоха $\Omega_{k'}$ - это такая же объективная реальность, каковой является эпоха Ω_{k_0} , а также в силу того, что измерение производимое наблюдателем эпохи Ω_{k_0} по сути дела двусторонне, т.е. является *взаимодействием* (благодаря их квантовой сцепленности), происходит локализация части пространства эпохи Ω_{k_0} в эпоху-реальности $\Omega_{k'}$. Грубо говоря, наблюдатель X оказывается в другой исторической эпохе вместе со своей аппаратурой. Мы имеем то, что называется машиной времени. Будем называть ее *негёделевской*, поскольку не идет речь о замкнутых временных петлях, придуманных Гёделем [5].

Закрывается ли проход из одной исторической эпохи в другую? Да, закрывается. Для этого наблюдателю X не нужно даже выключать свою аппаратуру, поскольку согласно эффекту Зенона, непрерывное измерение может привести к тому, что динамика становится тривиальной, по существу, к приведет исчезновению динамики. Да и сам процесс локализации макрообъектов крайне скоротечен. Другой вопрос, как его открыть, как конкретно работает негёделевская машина времени?

Обратим внимание, что переходы носят вероятностный характер. Другими словами, оказаться в нужной исторической эпохе можно далеко не всегда. Переход более или менее надежно произойдет лишь в том случае, когда число $|c_{k'}|^2$ близко к 1.

Поскольку переход совершается только с вероятностью $|c_{k'}|^2$, то в случае малости величины этой вероятности по закону больших чисел он не происходит. Иначе говоря, путешествия во времени крайне редки, и в силу этого, мы не наблюдаем путешественников во времени в нашей эпохе.

Как оценить число $|c_{k'}|^2$? Каждая историческая эпоха - это доминирующая культура, доминирующий суперэтнос. Сколько таких суперэтносов известно в человеческой истории? Древний Китай, Древняя Индия, якуты в XVII веке, племена папуасов на острове Новая Гвинея, описанные Миклухо-Маклаем, - примеры таких культур, таких исторических эпох. Их явно не менее тысячи, поэтому при равномерном распределении исторических эпох $|c_{k'}|^2 \sim 10^{-6}$. Мы имеем явно маловероятные события, говорящие о том, что переходы во времени невозможны. Но вполне возможно, что существуют наиболее вероятные эпохи. Они-то и могут быть местами повального туризма путешественников во времени. Но в таких эпохах к ним относятся, как к недавнему навалу русских в Турцию. Наша же эпоха явно не Анталия. Хотя, и такие поездки рискованны: кому захочется отправиться в путешествие, конеч-

ное место назначения которого точно указать невозможно. Например, вместо того, чтобы комфортно наблюдать Пушкина в Летнем саду можно оказаться в «Парке юрского периода».

4. Декогеренция. Когерентная суперпозиция (1) способна давать интерференцию. Квантовая суперпозиция - это мера «квантовости» системы. Каждая цепь «горных пиков» - это отдельное альтернативное пространство-время, альтернативная история, являющаяся решением квантового уравнения Шредингера (2).

В современной космологии считается, что альтернативные истории (ветви) становятся в раннем возрасте Вселенной декогерентными, т.е. невзаимодействующими классическими историями в силу процесса декогеренции. Декогеренция уничтожает интерференцию. По мнению Зеха [6] и Йоса [7] в случае Вселенной декогеренции происходит за счет воздействия на ветвь *её окружения*, которое описывается набором незначимых переменных. Их роль играют флуктуации плотности, гравитационные волны и другие поля. При этом воздействии *незначимые переменные* сцепляются со *значимыми переменными* (радиус Вселенной, инфляционное скалярное поле). В результате у ветвей проявляются классические черты - *они локализуются* и квантовая связь между ними исчезает.

Декогеренция волнового пакета (1) разрушает когеренцию, и в результате имеем набор классических исторических эпох, которые не имеют между собой ни энергетической, ни квантовой (нелокальной) связей. Очевидно, что в таком случае негёделевская машина времени становится невозможной. В [8] для того, чтобы перейти из одной (классической) исторической эпохи в другую, или вернуться в прошлое, предлагается другой механизм, основанный на обращении времени, и связанный с необходимостью произвести восстановление нелокальных связей. Такой проект машины времени кажется нам совершенно не обнадеживающим.

Теория декогеренции, столь популярная в последние годы, в случае ее применения к космологии, больше похожа на магические заклинания, чем на тщательные расчеты, о чем в корректной форме говорится в [9]. Поэтому естественная декогеренция, сцепляющая (переплетающая) существенные и несущественные переменные, вряд ли возможна в действительности. Следовательно, не стоит говорить о том, что Вселенная распадается на декогерентные истории на ранней фазе развития Вселенной и тем самым можно думать о реальности временных переходов между историческими эпохами.

Литература

1. Уилер Дж.А. Предвидение Эйнштейна / Дж.А. Уилер. - М.: Мир, 1970. - 110 с.
2. Halliwell J.J. Introductory lectures on quantum cosmology / J.J. Halliwell // In: Quantum cosmology and baby universes / Eds. Coleman S., Hartle J.B., Piian T., Weinberg S. - 1991. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. - P.159-244.
3. C. Kiefer Quantum Gravity. Second Edition / C. Kiefer. - Oxford University Press, 2007. 361 p.
4. Гуц А.К. Многовариантная Вселенная и теория исторических последовательностей / А.К. Гуц // Математические структуры и моделирование. - 2012. Т. 25. - С. 70-80.
5. Guts A.K. Geometry of historical epoch, the Alexandrov's problem and non-Gödel quantum time machine / A.K. Guts. - Access mode: <http://arxiv.org/abs/1608.08532v1>.

6. Zeh H.D. Emergence of classical time from a universal wave function / H.D. Zeh // Physics Letters A. - 1986. - Vol. 116. - P. 9-12.
7. Joos E.A. Why do we observe a classical spacetime? / E.A. Joos // Phys. Lett. A. - 1986. - Vol. 116. P. 6-8.
8. Доронин С.И. Квантовая магия / С.И. Доронин. - 2007. СПб.: Весь, 2007. - 336с.
9. Okon E. Less Decoherence and More Coherence in Quantum Gravity, Inflationary Cosmology and Elsewhere / E. Okon, D. Sudarsky. - Access mode: <http://arxiv.org/abs/1512.05298v1>.

TEMPORARY EFFECTS OF WAVE PACKET COLLAPSE IN THE WHEELER SUPERSPACE

A.K. Guts

The quantum transitions between the different historical epochs, separated from each other in the physical cosmological time. This transition mechanism may be named non-Gödel time machine.

Keywords: Collapse of wave packet, Wheeler superspace, stationarity space-time, non-Gödel time machine.

УДК 5530.12+531.51

МАТЕРИЯ И ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВА

В.М. Журавлев¹

¹ zhvictorm@gmail.com; Ульяновский государственный университет

Излагается новый подход к описанию структуры материи и ее динамики с точки зрения внешней геометрии пространства и его топологии. Предполагается, что физическое пространство-время является гиперповерхностью в евклидовом пространстве размерности 4. Вводится описание внешней геометрии вложения с помощью геометрических маркеров. На основе такого описания строится электродинамика с целочисленным зарядом, а сам заряд связывается с топологическим инвариантом - эйлеровой характеристикой пространства. Далее описание распространяется на гравитационное поле и массу. Из соотношений для переноса маркеров выводятся уравнения индукции гравитационного и электромагнитного полей. Устанавливается связь между массой и энергией частиц, что приводит к формуле Эйнштейна $E = mc^2$. На основе анализа законов сохранения уравнений динамики поля вводится понятие массового фактора и с его помощью строятся исправленные уравнения, приводящие к эффекту "темной материи", связанному со свойствами геометрии, а не наличием скрытой массы. Приводятся некоторые следствия для структуры элементарных частиц.

Ключевые слова: гравитация, электромагнетизм, геометрия, топология, материя, заряд, масса, поля, частицы, эйлерова характеристика.

Физическое пространство в теории представляется 3-х мерной гиперповерхностью (многообразием) в объемлющем евклидовом пространстве четырех измерений W^4 . Геометрия физической гиперповерхности задается с помощью функции высоты:

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t).$$

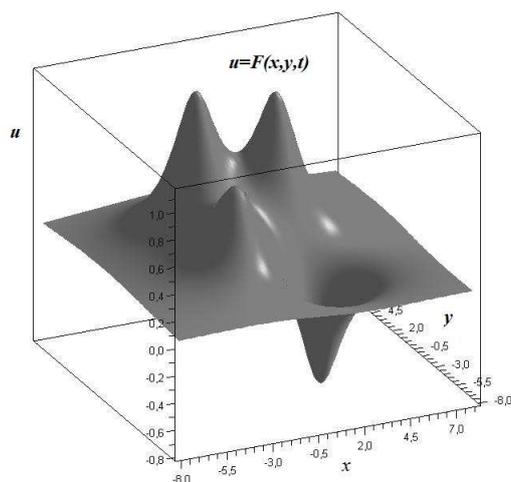


Рис. 1. Физическая гиперповерхность и функция высоты

Здесь $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ и $u = x^4$ - декартовы координаты на W^4 , t - время (абсолютное). Координаты $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ соответствуют точкам трехмерной евклидовой гиперплоскости $P^3 \in W^4$. Все пространство P^3 разбивается однозначно на отдельные области особыми изоповерхностями функции \mathcal{F} , называемой фундаментальным потенциалом. Под особой изоповерхностью функции \mathcal{F} понимается изоповерхность (или ее замкнутая компонента), на которой лежит хотя бы одна седловая точка данной функции. При этом вводится понятие топологической ячейки, которая определяется как область пространства, ограниченная любой изоповерхностью функции \mathcal{F} . Простой топологической ячейкой называется топологическая ячейка, которая содержит один и только один экстремум функции \mathcal{F} . Особые топологические ячейки, ограниченные особыми изоповерхностями, состоят из объединения нескольких простых ячеек и рассматриваются как отдельные элементарные частицы материи.

Для описания структуры и динамики материи в теории вводится формализм, опирающийся на понятие геометрических маркеров $\mathbf{e} = (e^1(\mathbf{x}, t), e^2(\mathbf{x}, t), e^3(\mathbf{x}, t))$, которые на каждой простой и пустой ячейках связываются с фундаментальным потенциалом соотношением:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \varepsilon |\mathbf{e}|^2 / 2.$$

где $|\mathbf{e}|^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$, а \mathcal{F}_0 - значение функции \mathcal{F} в экстремуме, лежащем в данной топологической ячейке. Введение геометрических маркеров \mathbf{e} позволяет ввести в теорию поля электрической индукции \mathbf{D} и поле напряженности гравитационного поля \mathbf{g} с компонентами:

$$\mathbf{D} = |\mathbf{e}|^{-3} \mathbf{K}, \quad \mathbf{g} = \frac{4\pi G}{3} \mathbf{K}, \quad K^\alpha = |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a.$$

где G - постоянная тяготения Ньютона, $|J| = \det \left(\partial x^\alpha / \partial e^a \right)$ - якобиан преобразования $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$. Эти поля удовлетворяют стандартным уравнениям классической теории

- первому уравнению Максвелла для \mathbf{D} и уравнению Пуассона для \mathbf{g} :

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad \operatorname{div}\mathbf{g} = 4\pi G|J|, \quad \operatorname{div}\mathbf{K} = 3|J|.$$

Сумма в уравнении Максвелла берется по всем критическим точкам функции \mathcal{F} (т.е. экстремумам и седловым точкам этой функции), ε_k - знаки точечных зарядов, совпадающих с критическими точками. Функция $|J|$ играет роль плотности “голой” массы.

Динамика материи описывается с помощью введения в теорию поля переноса маркеров \mathbf{V} , удовлетворяющего уравнению:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (1)$$

Следствием этого уравнения является уравнение сохранения массы для $|J|$:

$$\frac{\partial}{\partial t}|J| + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (V^\beta |J|) = 0, \quad (2)$$

Используя (1) и (2), можно получить следующее общее уравнение, связывающее поле переноса \mathbf{V} и поля \mathbf{D} , \mathbf{g} , \mathbf{K} : Для этого рассмотрим поле \mathbf{N} вида:

$$\mathbf{N} = N(\mathbf{e})\mathbf{K}, \quad (3)$$

где $N(\mathbf{e}) = N(e^1, e^2, e^3)$ - дифференцируемая функция от геометрических маркеров. Поле \mathbf{N} при любых функциях $N(\mathbf{e})$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{N} \times \mathbf{V}]) - \left(\frac{\partial N}{\partial e^a} e^a + 3N(\mathbf{e}) \right) |J| \mathbf{V}. \quad (4)$$

В случае:

$$N(\mathbf{e}) = \frac{\varepsilon}{R^3}, \quad (5)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ - знак заряда на данной топологической ячейке, $\mathbf{N} = \mathbf{D}$ и:

$$\frac{\partial N}{\partial e^a} e^a + 3N(\mathbf{e}) = RN'(R) + 3N(R) = 0, \quad R \neq 0.$$

В этом случае уравнение (4) принимает вид уравнения электромагнитной индукции:

$$\operatorname{rot}([\mathbf{V} \times \mathbf{D}]) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \delta(x - x_k) \mathbf{V}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{H} = [\mathbf{V} \times \mathbf{D}]$ - напряженность магнитного поля.

Аналогично, если выбрать $N(\mathbf{e}) = 4\pi G/3$, уравнение (5) принимает вид уравнения индукции гравитационного поля:

$$\operatorname{rot}([\mathbf{V} \times \mathbf{g}]) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + 4\pi G|J| \mathbf{V}. \quad (7)$$

В работе обсуждаются некоторые следствия уравнений индукции и вычисляются некоторые инварианты уравнений. Указывается на связь этих инвариантов с постоянной тонкой структуры. Обсуждается вопрос о физическом смысле темной материи в рамках предлагаемой теории.

Литература

1. Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure / V.M. Zhuravlev // Gravitation and Cosmology. - 2011. - Vol. 17. - No. 3. P. 201--217.
2. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля (Часть I) / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2014. - Вып. 4. - С. 6-24.
3. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть II) Масса и гравитация / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2014. - Вып 4. - С. 25-39.

MATTER AND EXTERNAL GEOMETRY AND TOPOLOGY OF THE SPACE

V.M. Zhuravlev

The new approach to the description of the structure of matter and its dynamics from the point of view of the external geometry of the space and its topology. It is assumed that the physical space-time is a hypersurface in Euclidean space of dimension 4. We introduce a description of external investments geometry using geometric markers. On the basis of this description is based electrodynamics with an integer charge, and the charge associated with the topological invariant - the Euler characteristic of the space. Further description applies to the gravitational field and the mass. The relations for the transfer of markers displayed equation induction of gravitational and electromagnetic fields. A connection between the mass and energy of the particles, which leads to Einstein's formula $E = mc^2$. On the basis of the laws of conservation equations of the dynamics of the field we introduce the concept of mass factor and used it to construct the corrected equation, leading to the effect of "dark matter" associated with the properties of the geometry, not the existence of hidden mass. We give some consequences for the structure of elementary particles.

Keywords: gravity, electromagnetism, geometry, topology, matter, charge, mass, field, particles, Euler characteristic.

УДК 5530.12+531.51

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СЛАБО ВЫРОЖДЕННОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛАЗМЫ С ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатьев¹, М.Л. Михайлов²

¹ ignatev_yu@rambler.ru; Казанский федеральный университет

² meschgan@mail.ru; Казанский федеральный университет

На основе развитой ранее одним из Авторов макроскопической теории статистических систем с межчастичным скалярным взаимодействием построены и проанализированы численные модели космологической эволюции многокомпонентной бозе-ма-новской плазмы при наличии скалярно заряженных частиц в отсутствии симметрии между частицами и античастицами. Выявлены основные особенности космологических моделей такого класса, в частности показано возможность достаточно быстрых переходов на различные режимы космологического расширения.

Ключевые слова: релятивистская кинетика, фантомные скалярные поля, космологические модели, статистика Больцмана, слабое вырождение, несимметричная модель

Одним из авторов ранее была сформулирована строгая математическая модель статистической системы скалярно заряженных частиц [1] - [4], основанная на микроскопическом описании и последующей процедуре перехода к кинетической теории. В дальнейшем теория была расширена на случай фантомных скалярных полей, обладающих отрицательной кинетической энергией [5] - [10], а также на случай отрицательных эффективных масс скалярно заряженных частиц [11]. На основе сформулированной математической модели было проведено численное моделирование однокомпонентных вырожденных Ферми - систем и зарядово симметричной бозмановской плазмы, состоящей только из скалярно заряженных частиц и античастиц [12] - [15]. Эти исследования выявили уникальные особенности космологических моделей, основанных на статистических системах скалярно заряженных частиц с фантомным скалярным взаимодействием. В [16] была исследована упрощенная космологическая модель, основанная на зарядово несимметричной бозмановской плазме скалярно заряженных частиц. В этой статье мы исследуем космологическую модель, основанную на многокомпонентной зарядово несимметричной скалярно заряженной бозмановской плазме с учетом безмассовых частиц, участвующих в соответствующих реакциях аннигиляции.

Нижеприведенные результаты численного моделирования подтверждают сформулированные в [15] основные закономерности динамики космологической эволюции статистической системы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием:

1. В процессе космологической эволюции в таких системах обязательно возникают всплески ускорения Ω , которые можно охарактеризовать тремя параметрами: моментом времени максимума всплеска t_m , полушириной всплеска Δt и высотой h всплеска в максимуме.
2. Статистические системы фермионов с фантомным скалярным взаимодействием обнаруживают тенденцию к образованию устойчивых режимов с постоянным ускорением (этапов космологической эволюции) $\Omega = -1$ ($\kappa = 1/3$, ультра-релятивистское состояние), $\Omega = -1/2$ ($\kappa = 0$, нерелятивистское состояние) и $\Omega = 1$ ($\kappa = -1$, инфляционное, вакуумное состояние).
3. Динамические особенности статистических систем с фантомным скалярным взаимодействием слабо зависят от типа статистики систем частиц [14].
4. Четко выявляются 4 различных типа принципиально различных космологических сценариев для статистических систем частиц с фантомным скалярным взаимодействием в зависимости от параметров системы (фундаментальных констант и начальных условий):
 - 1-й тип. Ультрарелятивистский старт \rightarrow всплеск ускорения \rightarrow инфляционная стадия. Этот сценарий осуществляется для случая минимального взаимодействия ($\sigma = 0 \rightarrow q = 0$) массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$). Этому сценарию отвечают следующие характерные параметры: $t_m \sim 10^{-1} \div 10^3$; $\Delta t \sim 2$; $h \sim 10$, т.е., ранний всплеск ускорения и ранний переход на инфляционную стадию.

- 2-й тип. Ультррелятивистский старт → всплеск ускорения → нерелятивистская стадия. Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и безмассового скалярного поля ($m_s = 0$). Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^6 \div 10^9$; $\Delta t \sim 10^6$; $h \sim 10$, т.е., достаточно длительный промежуточный этап сверхускорения с окончательным переходом на нерелятивистскую стадию.
- 3-й тип. Ультррелятивистский старт → плавный переход на нерелятивистскую стадию → небольшой всплеск ускорения → инфляционная стадия. Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$). Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_1 \sim 10^2$ (время смены ультррелятивистской стадии на нерелятивистскую стадию); $\Delta \tau = 10^3 \div 10^8$ (длительность нерелятивистской стадии), $t_m \sim 10^2 \div 10^9 \div 10^9$, $h \sim 2 \div 3$, $\Delta t \sim 10^6 \div 10^8$.
- 4-й тип. Ультррелятивистский старт → небольшой всплеск ускорения → нерелятивистская стадия → переход на инфляционную стадию. Этот сценарий также осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$). Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^2 \div 10^6 \div 10^9$, $t_1 \sim 10^2 \div 10^6$ (начало нерелятивистской стадии); $\Delta \tau \sim 10^7$ (длительность нерелятивистской стадии), $h \sim 0.5$.

5. Самые большие и вместе с тем поздние всплески космологического ускорения (порядка $\Omega \sim 10^2$ и даже больше)¹ во времена $t_m \sim 10^5 \div 10^9$ присущи космологическому сценарию 1-го типа.»

В связи с этим мы будем рассматривать различные типы моделей в рамках схемы, предложенной в [14], отсылая читателя к оригинальной статье. С другой стороны, в нашей статье будут исследованы особенности космологической эволюции термодинамических параметров, в силу специфики исследований не изученные в [14]. Кроме того, будут выявлены условия возникновения гигантских всплесков ускорения $\Omega \sim 10^8 \div 10^9$, не исследованные в цитированной работе.

1. Математическая модель бозе-газа. Уравнения переноса и законы сохранения в случае локального термодинамического равновесия

Строгими математическими следствиями кинетической теории являются уравнения переноса, в том числе закон сохранения некоторого векторного тока, соответствующего микроскопическому закону сохранения в реакциях некоторого фундаментального заряда e (если таковой закон сохранения имеется) -

$$\nabla_i \sum_a e_a n_a^i = 0, \quad (1)$$

а также законы сохранения энергии - импульса статистической системы:

$$\nabla_i T_{pl}^{ik} \equiv \nabla_i \sum_a T_a^{ik} = \sigma \nabla^k \Phi, \quad (2)$$

¹ В работе [19] приводятся примеры всплесков космологического ускорения до $\Omega \sim 10^8 \div 10^{10}$.

где n_a^i - числовой вектор, а T_a^{ik} - тензор энергии импульса a - го сорта частиц, σ - плотность скалярного заряда (см., например, в [11]):

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(x)} f(x, P) P^i \sqrt{-g} \frac{d^3P}{P_4^+}; \quad (3)$$

$$T_p^{ik}(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(x)} f(x, P) P^i P^k \sqrt{-g} \frac{d^3P}{P_4^+}; \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \frac{dm_*^2}{d\Phi} \int_{P(x)} f(x, P) \sqrt{-g} \frac{d^3P}{P_4^+}, \quad (5)$$

В условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР) функция распределения $f_a(x, p)$ имеет вид:

$$f_a^0 = \frac{1}{e^{(-\mu_a + (u, p))/\theta} \pm 1}, \quad (6)$$

где μ_a - химический потенциал, θ - локальная температура, и статистическая система является изотропной, а ее макроскопические моменты принимают вид соответствующих моментов идеальной жидкости:

$$n_a^i = n_a u^i, \quad (7)$$

$$T_a^{ik} = (\mathcal{E}_a + \mathcal{P}_a) u^i u^k - \mathcal{P}_a g^{ik}, \quad (8)$$

где u^i - единичный времениподобный вектор динамической скорости статистической системы

$$(u, u) = 1. \quad (9)$$

В условиях ЛТР законы сохранения (1)-(2) сводятся к следующим уравнениям [14]:

$$(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl}) u^i_{,k} u^k = (g^{ik} - u^i u^k) (\mathcal{P}_{pl,k} + \sigma \Phi_{,k}); \quad (10)$$

$$\nabla_i (\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl}) u^k = (\mathcal{P}_{pl,k} + \sigma \Phi_{,k}) u^k, \quad (11)$$

$$\nabla_k n_e u^k = 0, \quad n_e \equiv \sum_a e_a n_a. \quad (12)$$

Таким образом, формально на 3 макроскопические скалярные функции $\mathcal{E}, \mathcal{P}, n_e$ и 3 независимые компоненты вектора скорости u^i макроскопические законы сохранения дают 5 независимых уравнений (10)-(12). Однако, не все указанные макроскопические скаляры функционально независимы, поскольку все они определяются локально равновесными функциями распределения (6). При разрешенной серии условий химического равновесия, когда независимым остается лишь один химический потенциал, разрешенном уравнении массовой поверхности и заданных скалярном потенциале и масштабном факторе четыре макроскопические скаляры, $\mathcal{E}, \mathcal{P}, n_e, \sigma$, определяются двумя скалярами - некоторым химическим потенциалом μ , и локальной температурой θ [3]:

$$n_a = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{sh^2 x ch x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* ch x} \pm 1}; \quad (13)$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{sh^2 x ch^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* x} \pm 1}; \quad (14)$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{sh^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* x} \pm 1}; \quad (15)$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_a \Phi)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* x} \pm 1}, \quad (16)$$

где

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_a = \frac{\mu_a}{\theta}.$$

Таким образом, система уравнений (10)-(12) оказывается полностью определенной.

2. Больцмановская плазма

Рассмотрим релятивистскую плазму, состоящую из скалярно заряженных частиц и их античастиц, а также фотонов и безмассовых нейтрино. Будем полагать, что химические потенциалы частиц и античастиц малы

$$\gamma_a(t) \equiv \frac{\mu_a}{\theta} \rightarrow 0,$$

т.е., с хорошей точностью функции распределения частиц и античастиц (6) можно заменить на больцмановские функции распределения:

$$f_a^0 = e^{\frac{\mu_a - \sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}}$$

Равновесные плотности числа безмассовых частиц, фотонов и нейтрино, определяются следующим образом (см., например, [17]):

$$n_f = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \theta^3 g_n; \quad (17)$$

где $g_n = 1$ для бозонов и $g_n = 3/4$ для нейтрино. Равновесные давление и плотность безмассовых частиц равны:

$$\mathcal{E}_0 = N \frac{\pi^2 \theta^4}{15}; \quad \mathcal{P}_0 = N \frac{\pi^2 \theta^4}{45}; \quad N = \frac{1}{2} \left[\sum_B (2S+1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S+1) \right] \quad (18)$$

Таким образом, получим из (13) - (16) с учетом рекуррентных соотношений между функциями Бесселя [18]:

$$n_{\pm} = \frac{1}{\pi^2} m_{\pm}^3 \frac{K_2(\lambda_{\pm})}{\lambda_{\pm}} e^{\gamma_{\pm}}; \quad (19)$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \frac{m_+^4 e^{\gamma}}{\pi^2} \left(\frac{K_3(\lambda_+)}{\lambda_+} - \frac{K_2(\lambda_+)}{\lambda_+^2} \right) + \frac{m_-^4 e^{-\gamma}}{\pi^2} \left(\frac{K_3(\lambda_-)}{\lambda_-} - \frac{K_2(\lambda_-)}{\lambda_-^2} \right); \quad (20)$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \frac{m_+^4 e^{\gamma}}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda_+)}{\lambda_+^2} + \frac{m_-^4 e^{-\gamma}}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda_-)}{\lambda_-^2}; \quad (21)$$

$$\sigma = \frac{q\theta}{\pi^2} \left((m + q\Phi) |m + q\Phi| K_1(\lambda_+) e^\gamma - (m - q\Phi) |m - q\Phi| K_1(\lambda_-) e^{-\gamma} \right), \quad (22)$$

где

$$K_\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-zchx} sh^{2\mu} x dx \quad \left(\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\mu) > -1/2 \right)$$

- функции Макдональда, $\lambda_\pm = m_\pm/\theta$, $m_\pm = |m \pm q\Phi|$ - эффективная масса частиц, m - голая масса частиц, q - заряд частицы, Φ - потенциал скалярного поля, $\gamma = \gamma_+ \equiv \mu_+/\theta$ - приведенный химический потенциал, знак «+» соответствует частицам, «-» - античастицам, соответственно.

В данной работе рассмотрим три возможных случая безмассовых частиц: 1. фотоны, γ ; 2. фотоны и один тип нейтрино (нейтрино + антинейтрино $\nu, \bar{\nu}$); 3. фотоны и два типа нейтрино (электронные + мюонные + антинейтрино).

Плотность энергии и давление для фантомного скалярного поля равны, соответственно:

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi} \left(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2 \right) \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_s = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{3} \dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2 \right) \quad (24)$$

3. Самосогласованные уравнения для пространственно-плоской модели Фридмана

Выпишем самосогласованные уравнения пространственно-плоской космологической модели, в которой суммарная плотность энергии состоит из плотности энергии поля, плазмы и безмассовых частиц:

уравнение Эйнштейна:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma\nu}); \quad (25)$$

уравнение массивного фантомного скалярного поля с источником:

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} - m_s^2 \Phi = 4\pi\sigma; \quad (26)$$

закон сохранения энергии-импульса плазмы:

$$\dot{\mathcal{E}}_{pl} + \dot{\mathcal{E}}_{\gamma\nu} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma\nu} + \mathcal{P}_{pl} + \mathcal{P}_{\gamma\nu}) = \sigma \dot{\Phi}; \quad (27)$$

закон сохранения числа скалярно заряженных частиц:

$$a^3 \Delta n = \text{Const} \Rightarrow m_+^3 \frac{K_2(\lambda_+)}{\lambda_+} e^\gamma - m_-^3 \frac{K_2(\lambda_-)}{\lambda_-} e^{-\gamma} = \frac{\text{Const}}{a^3}. \quad (28)$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (25) - (27), относительно неизвестных функций: $a(t)$, $\Phi(t)$, $\dot{\Phi}(t)$, $\theta(t)$, $\gamma(t)$, для которой значение химического потенциала можно определить из (28). Разрешая (28) относительно e^γ , найдем:

$$e^\gamma = \frac{1}{2\theta(m + q\Phi)^2 K_2(\lambda_+)} \left[\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(m^2 - q^2\Phi^2)^2 \theta^2 K_2(\lambda_+) K_2(\lambda_-)} \right];$$

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{2\theta(m - q\Phi)^2 K_2(\lambda_-)} \left[-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(m^2 - q^2\Phi^2)^2 \theta^2 K_2(\lambda_+) K_2(\lambda_-)} \right], \quad (29)$$

где $\delta \equiv \frac{\text{Const}}{a^3}$.

4. Численное моделирование

4.1. Начальные условия

Для постановки задачи Коши для системы (25)-(27) необходимо задать начальные значения величин $a(t_0)$, $\Phi(t_0)$, $\dot{\Phi}(t_0)$, $\theta(t_0)$. Пользуясь инвариантностью системы дифференциальных уравнений (25)-(28) относительно преобразования масштабного фактора $a(t) \rightarrow \text{const} \cdot a(t)$, будем полагать в дальнейшем:

$$t_0 = 0, \quad a(0) = 1, \quad \dot{\Phi}(0) = 0. \quad (30)$$

В [15] подробно описана методика приведения окончательных результатов к космологической шкале времени, в которой $a(0) = 0$. Для определения двух оставшихся величин $\Phi(t_0)$ и $\theta(t_0)$ зададим два безразмерные параметра:

$$\eta_{pl} = \frac{\mathcal{P}_{pl} + \mathcal{P}_{\gamma v}}{\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma v}}, \quad \eta_s = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma v}}. \quad (31)$$

Мы будем рассматривать космологические модели с ультрарелятивистским стартом. В этом случае из (31) в ультрарелятивистском пределе $\eta_{pl} \rightarrow 1/3$, $\lambda \ll 1$ найдем связь

$$\Phi^2 = \frac{8(180 + \pi^4)\theta^4 \eta_s}{15\pi m_s^2}. \quad (32)$$

Задав начальное значение температуры с учетом условий $\lambda \ll 1$ и решая это уравнение относительно Φ , получим начальное значение потенциала поля в ультрарелятивистском пределе.

В ходе космологической эволюции температура плазмы до момента времени, когда аннигиляция частиц прекратится и безмассовые компоненты станут свободными. В этом случае их температура будет меняться по известному закону $\theta \sim 1/a(t)$. Это означает, что в момент времени

$$\lambda_+ \geq 1$$

необходимо изменить систему уравнений на другую, отличающуюся определением температуры безмассовых частиц. В результате выражения плотности энергии и давления для фотонов и нейтрино примут вид:

1. $\mathcal{E}_\gamma = \frac{\pi^2 \beta}{15a^4}, \quad \mathcal{P}_\gamma = \frac{\pi^2 \beta}{45a^4},$
2. $\mathcal{E}_{\gamma v} = \frac{11\pi^2 \beta}{60a^4}, \quad \mathcal{P}_{\gamma v} = \frac{11\pi^2 \beta}{180a^4},$
3. $\mathcal{E}_{\gamma v} = \frac{3\pi^2 \beta}{10a^4}, \quad \mathcal{P}_{\gamma v} = \frac{\pi^2 \beta}{10a^4}.$

где $\beta = \theta(t_1)a(t_1)$, где t_1 определяется соотношением $\lambda(t_1) = 1$. Ниже мы в целях экономии места представим лишь небольшую часть результатов численного моделирования космологической эволюции скалярно заряженной бозонной плазмы. Более полно результаты исследования будут представлены в специальном обзоре в журнале «Пространство, время и фундаментальные взаимодействия».

4.2. Случай безмассового фантомного скалярного поля с источником

Рассмотрим сначала безмассовое фантомное скалярное поле с источником ($q \neq 0$), полагая:

$$m = 0 \Rightarrow m_a = |q\Phi|, \quad \gamma_a \equiv 0, \quad \text{const} = 0; \quad m_s = 0.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (25) - (27) примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - 4\pi\sigma &= 0; \\ 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma\nu}); \\ \dot{\mathcal{E}}_{pl} + \dot{\mathcal{E}}_{\gamma\nu} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma\nu} + \mathcal{P}_{pl} + \mathcal{P}_{\gamma\nu}) &= \sigma\dot{\Phi}. \end{aligned}$$

Тогда плотность энергии скалярного поля должна быть строго отрицательной $\mathcal{E}_s = -\dot{\Phi}^2/8\pi$. Будем решать задачу Коши со следующими начальными условиями: $a(0) = 1$; $q\Phi(0) = 0.0001$; $\dot{\Phi}(0) = 0$; $\theta(0) = 0.01$; $\lambda_+(0) = \lambda_-(0) = 0.01$; $\eta_s(0) = 0$; $\eta_{pl}(0) = 1/3$.

На приведенных графиках представлены результаты численного моделирования космологической эволюции для этих начальных условий (Рис. 1-6): жирная черная линия - $q = 0.001$, тонкая черная линия - $q = 0.1$, средне пунктирная линия - $q = 1$, мелко пунктирная линия - $q = 10$.

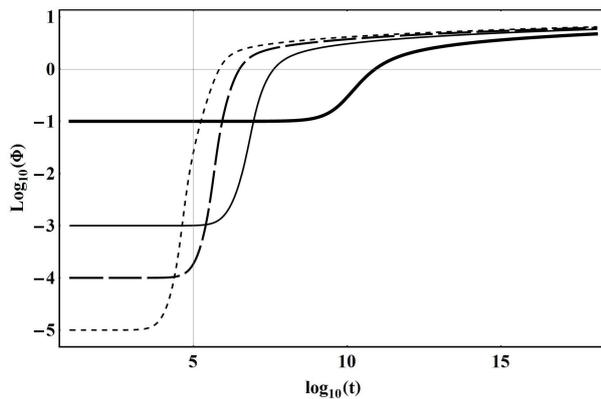


Рис. 1. Эволюция потенциала скалярного поля. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма космологического времени, по оси ординат - значения десятичного логарифма Φ .

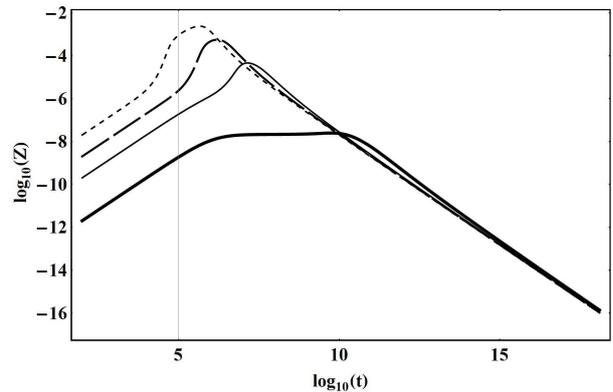


Рис. 2. Эволюция производной потенциала скалярного поля. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма космологического времени, по оси ординат - значения десятичного логарифма $Z = \dot{\Phi}$.

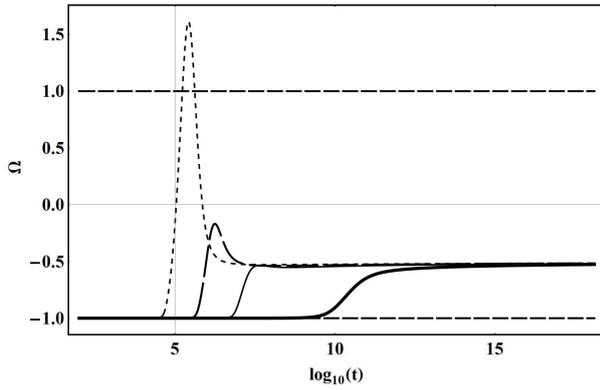


Рис. 3. Эволюция космологического ускорения $\Omega = a\ddot{a}/\dot{a}^2$.

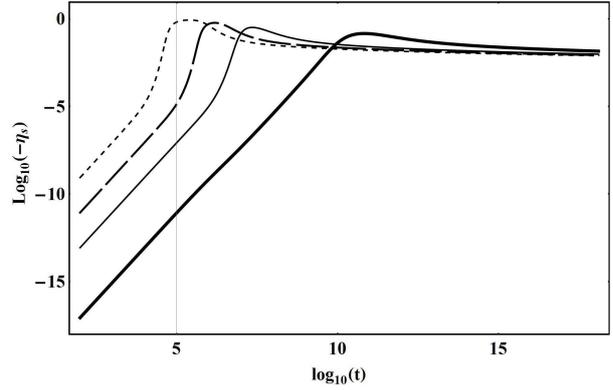


Рис. 4. Эволюция отношения плотности энергии поля к плотности энергии плазмы. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма $-\eta_s$.

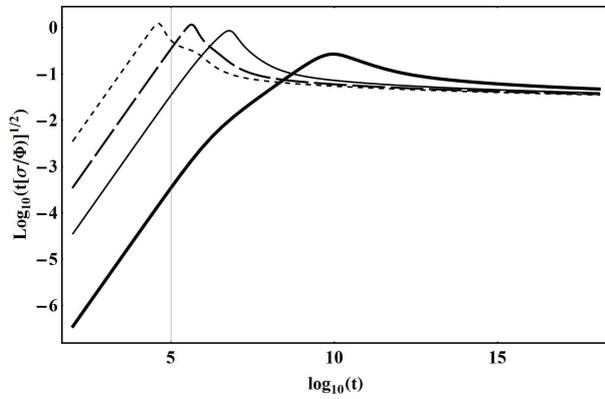


Рис. 5. Эволюция плотности скалярного заряда. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма $t\sqrt{\sigma}/\Phi$.

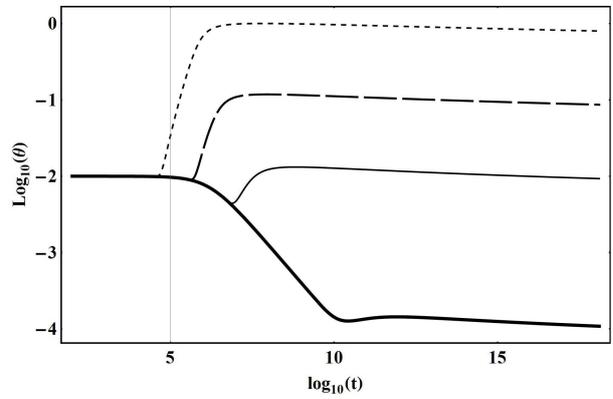


Рис. 6. Эволюция температуры плазмы. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма температуры в планковской системе единиц.

4.3. Случай массивного фантомного скалярного поля с источником ($m \neq 0$)

Рассмотрим фантомное скалярное поле с притяжением одноименно заряженных частиц с источником в случае избытка скалярно заряженных частиц: $a^3 \Delta n = 0.001$, $\gamma_a \ll 1$. В этом случае система дифференциальных уравнений (25) - (27) примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi - 4\pi\sigma &= 0; \\ 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma\nu}); \\ \dot{\mathcal{E}}_{pl} + \dot{\mathcal{E}}_{\gamma\nu} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma\nu} + \mathcal{P}_{pl} + \mathcal{P}_{\gamma\nu}) &= \sigma\dot{\Phi}. \end{aligned}$$

При прочих равных начальных условиях $m_{eff}(0) = 0.0003$. На приведенных графиках (Рис. 7-14) представлены некоторые результаты численного моделирования космологической эволюции системы со следующими параметрами: $m_s = 10^{-6}$, $m=0.0001$, $\theta(0) = 10$, $\lambda_+(0) = 0.00003$, $\eta_{pl} = 1/3$. Жирная черная линия - $q = 0.001$,

тонкая черная линия - $q = 0.1$, средне пунктирная линия - $q = 1$, мелко пунктирная линия - $q = 10$.

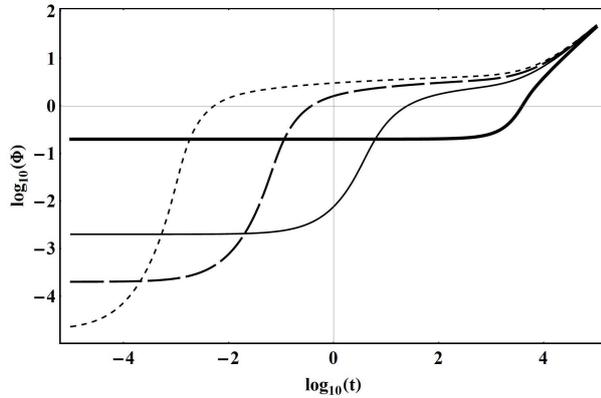


Рис. 7. Эволюция потенциала скалярного поля. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма космологического времени, по оси ординат - значения десятичного логарифма Φ . Стадия линейного роста потенциала соответствует выходу на режим инфляции.

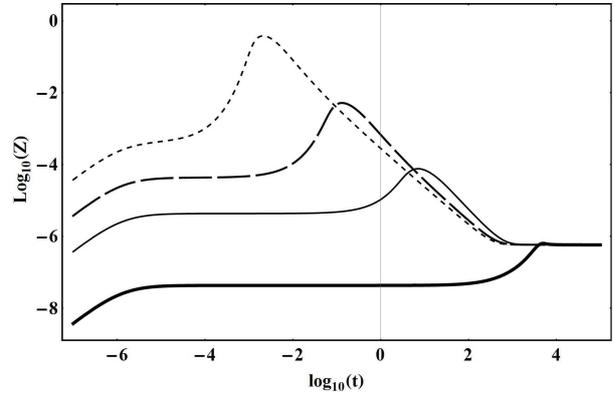


Рис. 8. Эволюция производной потенциала скалярного поля. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма космологического времени, по оси ординат - значения десятичного логарифма $Z = \dot{\Phi}$.

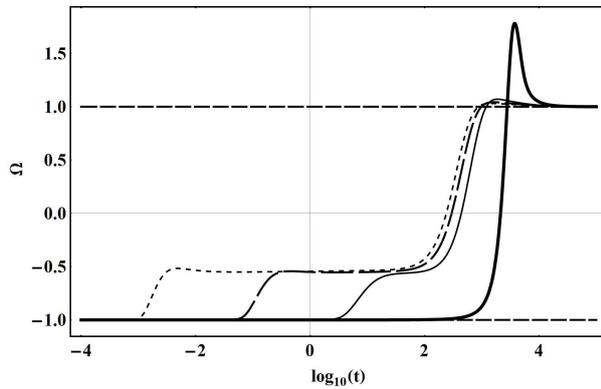


Рис. 9. Эволюция космологического ускорения $\Omega = a\ddot{a}/\dot{a}^2$.

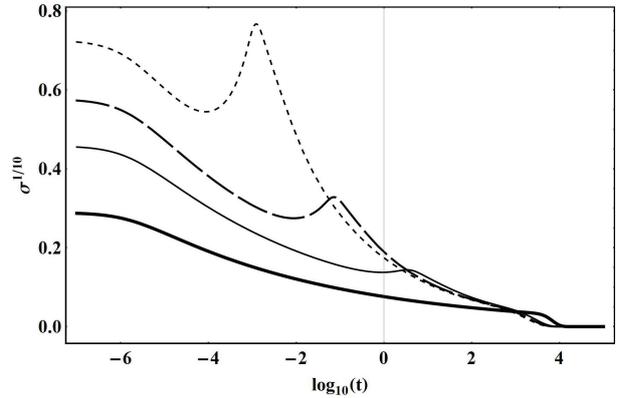


Рис. 10. Эволюция плотности скалярного заряда. По оси ординат отложены значения $\sigma^{1/10}$.

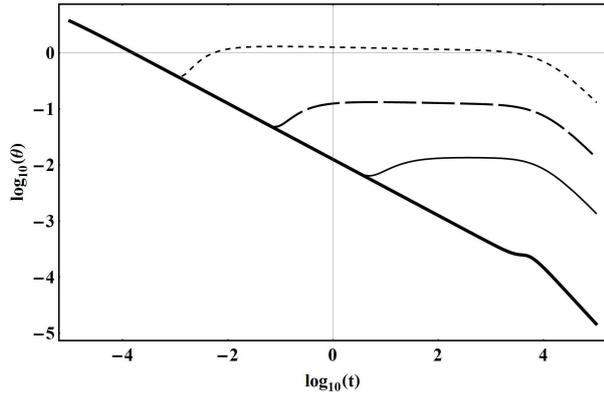


Рис. 11. Эволюция температуры плазмы. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма температуры в планковской системе единиц.

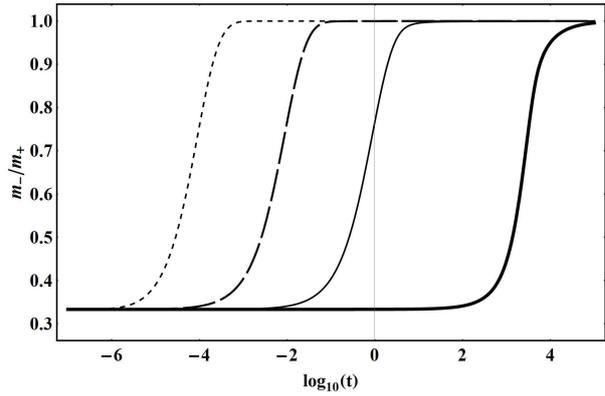


Рис. 12. Эволюция отношения эффективных масс античастиц и частиц $|m - q\Phi|/|m + q\Phi|$.

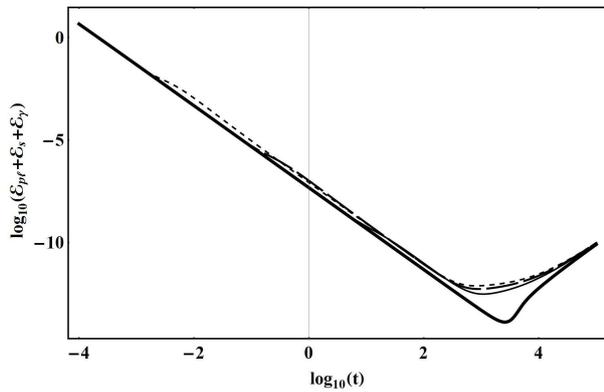


Рис. 13. Эволюция суммарной плотности энергии космологической системы. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма плотности энергии $\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_{\gamma\nu} + \mathcal{E}_s$ в планковской системе единиц.

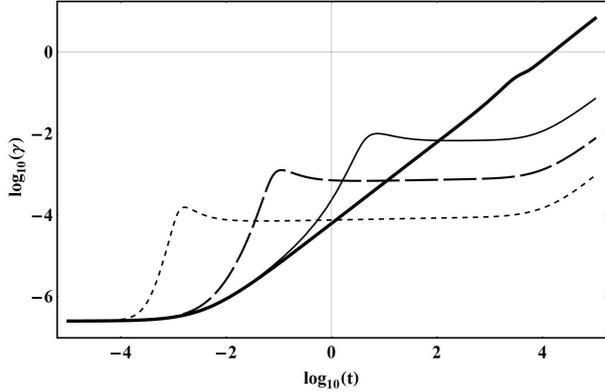


Рис. 14. Эволюция приведенного химического потенциала $\gamma = \mu_+/\theta$. Режим постоянства приведенного химического потенциала всюду сменяется режимом роста его значения, т.е., увеличением степени вырождения плазмы.

4.4. *Случай с выходом на инфляционную стадию с предшествующим сверхускорением*

Приведем графики космологической эволюции параметров плазмы с межчастичным фантомным взаимодействием в зависимости от величины начального значения потенциала скалярного поля, полученные в результате численного интегрирования системы уравнений со следующими параметрами: $m_s = 10^{-3}$, $m = 0$, $\theta = 0.001$, $q = 1$, $\eta_{pl}(0) = 1/3$. Жирная черная линия - $\Phi = 10^{-5}$, $\lambda(0) = 10^{-1}$, тонкая черная линия - $\Phi = 10^{-8}$, $\lambda(0) = 10^{-4}$, средне пунктирная линия - $\Phi = 10^{-10}$, $\lambda(0) = 10^{-6}$, мелко пунктирная линия - $\Phi = 10^{-15}$, $\lambda(0) = 10^{-11}$.

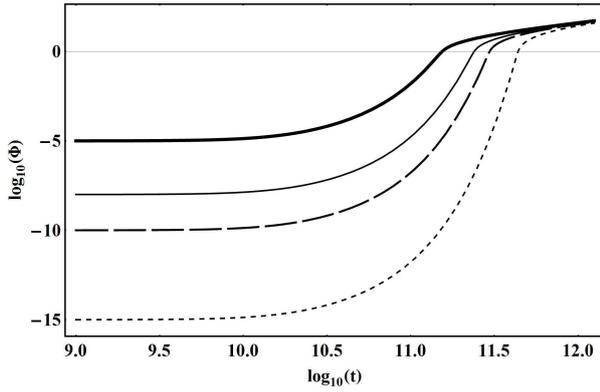


Рис. 15. Эволюция потенциала скалярного поля. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма космологического времени, по оси ординат - значения десятичного логарифма Φ .

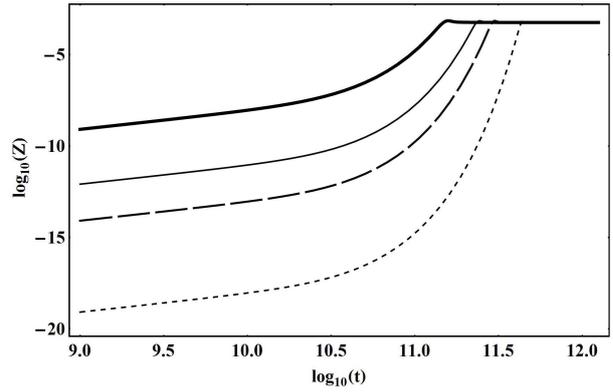


Рис. 16. Эволюция производной потенциала скалярного поля. По оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма космологического времени, по оси ординат - значения десятичного логарифма $Z = \dot{\Phi}$.

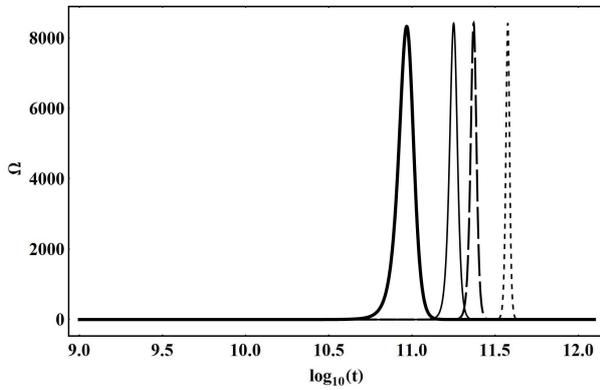


Рис. 17. Эволюция космологического ускорения $\Omega = a\ddot{a}/\dot{a}^2$.

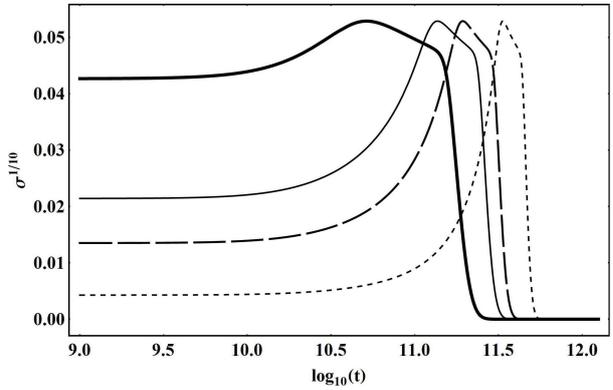


Рис. 18. Эволюция плотности скалярного заряда. По оси ординат отложены значения $\sigma^{1/10}$.

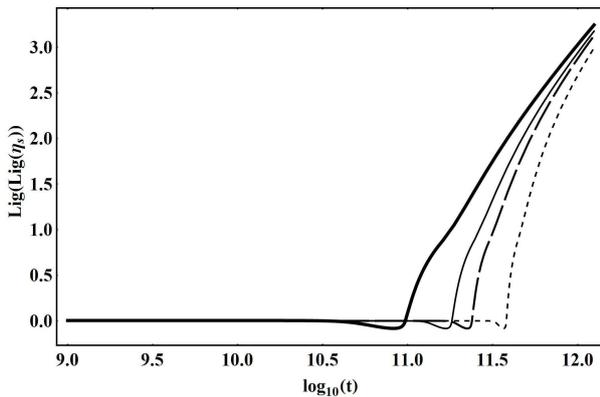


Рис. 19. Эволюция логарифма η_s , где $\eta_s = \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{pl}$. По оси ординат отложены значения $Lig(Lig(\eta_s))$.

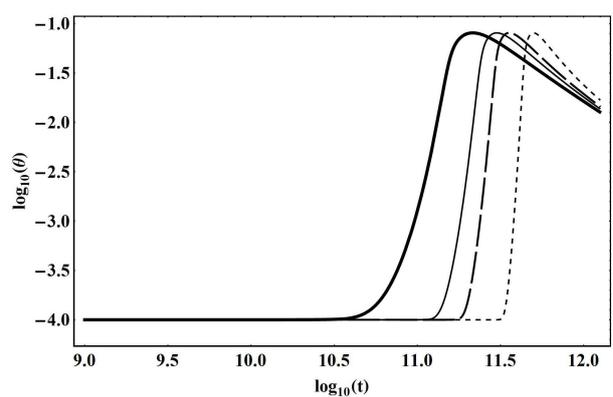


Рис. 20. Эволюция температуры плазмы. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма температуры в планковской системе единиц.

Заключение

Таким образом, проведенное исследование, во-первых, подтвердило основные закономерности космологической эволюции статистической системы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, в частности, результаты работы [15], в которой были выявлены 4 режима космологической эволюции ферми-системы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием. Кроме того, показано, что степень вырожденности таких систем растет на заключительных стадиях эволюции. Кроме того, обнаружены режимы существенного разогрева плазмы во времена $10^5 \rightarrow 10^{15} t_{pl}$, что может привести к множественному рождению элементарных частиц в тепловом равновесии. Режим постоянства приведенного химического потенциала всюду сменяется режимом роста его значения, т.е., увеличением степени вырождения плазмы.

Литература

1. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations / Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. - 1982. - № 25(4).-P. 372-375.
2. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations / Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. - 1982. - № 25(4). - P. 372-375.
3. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field / Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. - 1983. - № 26(8). - P. 690-694.
4. Ignat'ev Yu.G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles /Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. - 1983. - № 26(12). - P. 1068-1072.
5. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction/Yu.G. Ignat'ev// Russian Physics Journal. - 2012. - № 55(2). - P. 166-172.
6. Ignatyev Yu.G. Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model /Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. - 2012. - № 55(5). - P. 550 - 560.
7. Ignatyev Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. Model with attraction of like-charged scalar particles /Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. - 2012. - № 55(11). - P. 1345-1350.
8. Игнатьев Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике / Ю.Г.Игнатьев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2014. - № 1. - С. 47-69.
9. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Statistical system with a fantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamic/Yu.G. Ignatyev, D.Yu.Ignatyev// Gravitation & Cosmology.-2014.- №20(4).-P.299-303.
10. Ignatyev Yu. G. Statistical systems with fantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models / Yu. G. Ignatyev, A. A. Agathonov, D. Yu. Ignatyev // Gravitation and Cosmology. - 2014. - № 20(4). - P. 304--308.
11. Ignatyev Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses / Yu.G. Ignat'ev // Gravitation and Cosmology. - 2015. - № 21(4). - P. 296-308.

12. Ignatyev Yu.G. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov // Gravitation and Cosmology. - 2015. - № 21(2). - P. 105-112.
13. Ignat'ev Yu. G. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases. /Yu.G. Ignat'ev, M.L. Mikhailov // Russian Physics Journal. - 2015. - №57. - P. 1743 - 1752.
14. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles / Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov, M.L. Mikhailov, D.Yu. Ignatyev // Astrophysics and Space Science. - 2015.- № 357(61).
15. Ignat'ev Yu.G. Statistical Cosmological Fermion Systems With Interparticle Fantom Scalar Interaction / Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov, D.Yu. Ignatyev // General Relativity and Quantum Cosmology. - 2016. - Access mode: <https://arxiv.org/abs/1608.05020>
16. Игнат'ев Ю.Г. Космологическая эволюция несимметричной бoльцмановской плазмы с межчастичным классическим скалярным взаимодействием. I. Фазовые переходы: упрощенная модель /Ю.Г. Игнат'ев, М.Л. Михайлов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.-2015.- №1.-С.75-90.
17. Игнат'ев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. I. Условия локального термодинамического равновесия / Ю.Г. Игнат'ев// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2012. - № 1. - С.79 - 98.
18. Лебедев.Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. - М-Л: ГИФМЛ, 1963. - 358 с.

THE COSMOLOGICAL EVOLUTION OF WEAKLY DEGENERATE ASYMMETRIC PLASMA PHANTOM SCALAR INTERPARTICLE INTERACTION

Yu.G. Ignat'ev, M.L. Mikhailov

On the basis of the previously developed one of the authors of the macroscopic theory of statistical systems with interparticle interaction scalar constructed and analyzed by numerical models of cosmological evolution of a multicomponent plasma Boltzmann in the presence of scalar charged particles in the absence of symmetry between particles and antiparticles. The basic features of cosmological models in this class, in particular, shows the possibility of sufficiently fast transitions to different modes of cosmological expansion.

Keywords: relativistic kinetics, phantom scalar fields, cosmological models, Boltzmann statistics, weak degeneration, asymmetrical model

УДК 514.822

ОТО В “ПОЛНОЙ” ФОРМЕВ.В. Карбановский¹, К.Е. Белоушко², О.В. Мелёхина³, Т.В. Каиров⁴,
С.В. Акиньшина⁵, П.В. Родина⁶¹ karbanovski_v_v@mail.ru; Мурманский Арктический государственный университет² beloushko@mail.ru; Мурманский государственный технический университет³ olga_melehina@mail.ru; Мурманский государственный технический университет⁴ kairov_t_v@list.ru; Мурманский государственный технический университет⁵ posmotri@hotmail.com; Мурманский Арктический государственный университет⁶ rodina.pavla@yandex.ru; Мурманский Арктический государственный университет

Предложена формулировка ОТО в “полной” форме и рассмотрены некоторые ее приложения.

Ключевые слова: “Полная” форма ОТО, Предел слабого поля, Уравнения геодезических.

Как известно, в основе вывода уравнений ОТО

$$\kappa T_k^i = R_k^i - \frac{1}{2} R \delta_k^i \quad (1)$$

Гильбертом (см., напр., [1]) лежит вариационный принцип для действия со скалярной кривизной в качестве лагранжиана. Однако, как справедливо указано в [2] при вариационном выводе был безосновательно исключен интеграл

$$A = \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (2)$$

интерпретируемый Гибносом и Хоукингом как “поверхностный член”. Ранее нами [3] был предложен метод его учета посредством включения в (1) величины

$$\tau_{ik} = g^{jm} \frac{\delta R_{jm}}{\delta g^{ik}}. \quad (3)$$

Однако, более удобной является следующая запись

$$g^{im} \frac{\delta R}{\delta g^{mk}} - \frac{1}{2} R \delta_k^i = \kappa T_k^i. \quad (4)$$

Поскольку в (4) учтен вклад всех вариаций, то теорию, основанную на уравнениях (4) можно назвать ОТО в “полной форме”. В рамках предложенного нами подхода получено выражение для метрики в пределе “слабого поля”

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) d\vec{r}^2. \quad (5)$$

Нами было установлено, что применение функций из (5) для системы (4) в случае пылевидной среды $p \approx 0$ приводит к уравнению Пуассона $\Delta\varphi = \kappa c^4 \rho$, где $\kappa = \frac{4\pi G}{c^4}$, и, соответственно, к закону Всемирного тяготения. Кроме того, метрика (5) в случае

движения частицы в экваториальной плоскости $\Theta = \pi/2$ приводит к следующему уравнению геодезических

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M}{r^2 \sqrt{2mE \frac{(1-Gm_0/(rc^2))}{(1-2Gm_0/(rc^2))} + \frac{m\alpha}{r} \left(1 + \frac{1}{1-2Gm_0/(rc^2)}\right) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (6)$$

(здесь $\alpha = Gm_0 m$, m_0 - масса источника). Очевидно, в нерелятивистском пределе (6) переходит в выражение для кеплеровых траекторий. В общем случае из действия для частицы в гравитационном поле получается метрика

$$ds^2 = -c^2 (1 - 2\lambda\zeta + \sigma^2) dt + (1 - \zeta) d\vec{r}^2, \quad (7)$$

где $\zeta = \varphi/c^2$, $\lambda = \sqrt{1 - v^2/c^2} - (1 - v^2/(2c^2))$. Применение выражения (7) к уравнениям (4) при нулевом тензоре энергии-импульса материи и для условий $\zeta \ll 1$ (слабое поле) $\lambda = -\frac{1}{2}$ (т.е. $v = c$) приводит к уравнению для гравитационных волн

$$-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \Delta \zeta = 0. \quad (8)$$

Литература

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля/ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - 7-е изд., испр. - М.: Наука, 1988. - 509 с.
2. Gibbons G.W. Action integrals and partition functions in quantum gravity/ G.W. Gibbons, S.W. Hawking// Physical Review D. - 1977.- № D15. - P. 2752.
3. Карбановский В.В. Необходимое расширение ОТО / В.В. Карбановский, К.Е. Белоушко// XV-я Российская гравитационная конференция - "Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике Международная школа по гравитации и космологии "GRACOS-2014".- Казань: Казанский университет, 2014. - С.31-34.

GR IN "FULL" FORM

V.V. Karbanovski, K.E. Beloushko, O.V. Melehina, T.V. Kairov, S.V. Akin'shina, P.V. Rodina

A formulation of GR in "full" form and are considered some of its apps.

Keywords: GR in "full" form, The limit of a weak field, Geodesic equations.

УДК 514.822

ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИВ.В. Карбановский¹, К.Е. Белоушко², О.В. Мелёхина³, Т.В. Каиров⁴,
С.В. Акиньшина⁵, П.В. Родина⁶¹ *karbanovski_v_v@mail.ru*; Мурманский Арктический государственный университет² *beloushko@mail.ru*; Мурманский государственный технический университет³ *olga_melehina@mail.ru*; Мурманский государственный технический университет⁴ *kairov_t_v@list.ru*; Мурманский государственный технический университет⁵ *posmotri@hotmail.com*; Мурманский Арктический государственный университет⁶ *rodina.pavla@yandex.ru*; Мурманский Арктический государственный университет

Предложена полевая теория гравитации, построенная по аналогии с электродинамикой.

Ключевые слова: Уравнения гравитационного поля, Классический предел, Гравитационные волны.

Предлагается подход, основанный на представлении о гравитации как о поле скалярного потенциала Φ . Такое описание во многом аналогично используемому при построении релятивистской электродинамики: сначала записывается выражение для функционала действия пробной частицы в заданном внешнем поле и выводится уравнение её движения; затем, через “силовую характеристику” поля формулируется определяющее его действие и получается общее уравнение полевой теории гравитации (ПТГ). Согласно изложенной схеме запишем действие для пробной частицы с гравитационным зарядом m в поле с потенциалом Φ .

$$W = -mc^2 \int d\tau - m \int \Phi d\tau, \quad (1)$$

где τ - собственное время частицы. Варьируя W по координатам x^j , получим величину 4-ускорения, т.е. уравнение ее движения

$$a_i = 1(c^2 + \Phi) \left[\delta^k_i - u_i u^k \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}. \quad (2)$$

В нерелятивистском пределе (2) сводится к известному соотношению $\frac{d\vec{V}}{dt} = -grad\Phi$.

Далее, по аналогии с электродинамикой запишем полное действие системы “частица + поле”

$$W = -m \int (c^2 + \Phi) d\tau + \int \lambda^{jk} E_j E_k \sqrt{-g} d\Omega, \quad (3)$$

где

$$E_k = \frac{1}{(c^2 + \Phi)} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \quad (4)$$

вектор, описывающий “меру воздействия” гравитационного поля на пробную частицу, $d\Omega$ - элемент 4-объема пространства Минковского, λ^{jk} - симметричная матрица, характеризующая поляризационные свойства среды.

Путем варьирования действия (4) по полевой функции Φ получим

$$\sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\lambda^{jk}}{(c^2 + \Phi)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \sqrt{-g} \right] + \frac{\lambda^{jk}}{(c^2 + \Phi)^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = -\frac{\rho}{\gamma} \quad (5)$$

(здесь $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, ρ - плотность массы частицы).

В пределе слабого поля для неподвижного источника и при $\lambda^{jk} = \frac{c^4}{4\pi G} \eta^{jk}$ выражение (15) сводится к уравнению Пуассона. Поэтому (5) можно интерпретировать как релятивистское уравнение гравитационного поля. Кроме того, здесь Φ является скалярной функцией и должна иметь “абсолютный смысл”. Материальные функции гравитирующей системы определяются как компоненты тензора энергии-импульса

$$T^k_l = \Phi_{,l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,k}} - \mathcal{L} \delta^k_l \quad (6)$$

где $\mathcal{L} = \lambda^{ik} E_i E_k$.

FIELD THEORY OF GRAVITATION

V.V. Karbanovski, K.E. Beloushko, O.V. Melehina, T.V. Kairov, S.V. Akin'shina, P.V. Rodina

The proposed field theory of gravitation, built on the analogy with electrodynamics.

Keywords: The equations of the gravitational field, classical limit, Gravitational waves.

UDC 514.822

SOME REMARKS TO SPHERICALLY SYMMETRIC SOLUTION IN RELATIVISTIC THEORIES

S.M. Kozyrev¹, R.A. Daishev², S.N. Andrianov³

¹ *sergey@tnpko.ru*; Scientific center for gravity wave studies “Dulkyn”, Kazan, Russia

² *rinat.daishev@ksu.ru*; Kazan Federal University

³ *adrianovsn@mail.ru*; Scientific center for gravity wave studies “Dulkyn”, Kazan, Russia

This paper discusses the split of static spherically symmetric tensors $g^{\mu\nu}$ into physical and geometrical terms in the language of “gauge” transformation. We consider the vacuum static spherically symmetric solutions of general relativity to illustrate this. This construction allowed us to reformulate significant aspects of observer dependence of physical quantities from “gauge” transformation.

Keywords: spherically symmetric solution, relativistic theories.

1. Introduction

In order to establish a link to experiments in classical theories one starts with a point set and introduces structure on them. The introduced structures can be divided into two classes, the absolute objects and the dynamical objects. Absolute object determines the behavior of dynamical objects but is not affected by these objects in turn.

Examples of absolute objects are the Minkowski space-time of special relativity, the absolute time and Euclidean space of Newtonian mechanics. Theorists have in recent years revived the old idea, going back to Immanuel Kant [9], that space and time are not absolute objects, but have to be considered as preconditions for the possibility of all experience.

This approach for convenience, one can separated in four Levels, each of which based upon following sequence: representing the minimal set of necessary component assumptions that go into the underlying space-time models of almost all physical theories. The traditional representation of physics based on the assumption that *there is the space-time* described as a fixed scaffolding with which to build the dynamical objects.

Level 1: Historically the quantification of geometry led to the identification of point set with Euclidean space, as absolute object, whose points are the ordered sets of n real numbers. Initially in relativity theory there is not a space-time (*which emerged only after Einstein field equations solved*) as a result a set of events exist in abstract pre-geometric set, which have not an absolute objects. Then choice of the mentioned quadruple of numbers for each points is completely arbitrary not limited by anything.

Level 2: In modern usage, a topology can be defined in terms of open sets, or their generators, neighborhoods. This leads to the notion of a topological manifold as a point set with topology which is locally Euclidean. The notation of locality is provided by the topological structure of manifold, which specifies which subset of events are open sets (neighborhoods). In relativity theory we would have no idea of which events neighbor on each others. This information is pre-determined every time by the introduced constraints as coordinate condition or “gauge” structure on set, which choice is arbitrary. Thus different “gauge” define a notation of locality have to represent different topological structure.

A pre-geometric set of relativity theory includes no concept of length or distance and no a connection - structure that allows tangent vectors of different points to be compared or related to each other. Moreover, for a pre-geometric set there is no general prescription that every point has no open neighborhood of homeomorphism to open subset R^4 , so that an a priori selection criterions must be adopted.

Level 3: Current physics based on the tacit assumption that there is some natural, standard smoothness structure on that transition to third level, is trivial, a topological manifold, given by the coordinates x^μ . In all dimensions, the Euclidean space R^n with $n \neq 4$ admits a unique smoothness structure, up to diffeomorphisms. However, a four dimensional manifold have an infinity of possible smoothness structures non diffeomorphic to each other [1]. In this way relativity theory model requires the specification of its smoothness structure. This means that one can try to solve the Einstein equations on one of this non-diffeomorphic R^4 . We see that Einstein gravity is quite nontrivial even in the absence of matter.

Level 4: Any physics needs the establishment of a space-time geometry by attributing its metric, connection, etc. The geometric aspects of space-time one can obtain in terms of the metric field $g^{\mu\nu}(x)$, the most important of these being, by far, the invariant interval

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu. \quad (1)$$

These intervals are obtained on the basis of the inner product of vectors on the tangent space at every point P , it constitutes the most fundamental relationship between space-

time points that remains unchanged for any coordinate system.

An unsatisfactory feature of relativity theory is that the field equations do not have any direct physical and geometrical interpretation. Relativistic theories is to choose the “gauge” on unphysical grounds, by some convention to simplify the solution of the differential equations. Unless solved the Einstein equations, we can not interpreted $g^{\mu\nu}$ geometrically; it is a parametrization of the gravitational field and nothing else in general [13]. Specifying only interval ds^2 between infinitesimally close points, the geometry of space-time is not fixed. In order to create real gravitational field one must solve the inverse task, which in general have not unique solution. If instead the metric tensor is known there are many compatible space-times. A trivial example is in the geometry of two-dimensional flat spaces, where we don't get to differentiate between a plan, a cone and a cylinder from the metric tensor. Likewise, one can use approach to gravity in which our curved space-time is considered as a surface in flat ambient space in higher dimension [3, 14]. It is know that exist six kinds of embedding with different topology of the spherically symmetric metric

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2)$$

in a flat six-dimensional space if the embedding have the symmetry of Schwarzschild solution [12].

2. Connection decomposition.

The standard treatment of general relativity through the matter action is independent from the connection that the covariant derivatives contained in the Lagrangian density of the matter field are the ones built from the metric connection. In the general relativity formulation the single object $g^{\mu\nu}$ determines at the same time, the causal structure, the length and distance and free fall of test particles. The connection constituted by coefficients with no dynamics.

The leading axiom of general relativity and therefore the only one that is usually mentioned, is the set of field equations [6]. The formal background of Einstein theory consists essentially in manifold geometry, in particular, in the theory of Riemann spaces. This is reflected by the dynamics of gravity, which is governed by the Einstein-Hilbert action [6]

$$S = \int \sqrt{-g}R(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})d^4x \quad (3)$$

which together with the matter action yields the Einstein equations

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}^M \quad (4)$$

where Ricci tensor and scalar curvature are derived as $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho$ and $R = R_{\mu}^\mu$. The curvature tensor associated with the connection $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ is defined by

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}. \quad (5)$$

Note Einstein recognized the possibility to describe the theory of general relativity assuming the independence of the affine connection from the metric [5]. It would seem that the peculiar characteristic of general relativity the possibility of a direct coupling of

matter with a connection. Therefore it is quite easy to show [8, 15] that the connection can be decomposed as

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \{\gamma_{\alpha\beta}\} + \frac{1}{2}(-Q_\alpha{}^\gamma{}_\beta + Q^\gamma{}_\beta{}_\alpha - Q_{\beta\alpha}{}^\gamma) + S_{\alpha\beta}{}^\gamma - S_\beta{}^\gamma{}_\alpha + S^\gamma{}_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

where $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ is the Levi-Civita connection of the metric (also known as Christoffel symbols of the metric) and we have defined the nonmetricity tensor $Q_{\alpha\beta\gamma} \equiv \nabla_\alpha g_{\beta\gamma}$ and the antisymmetric part of the connection, otherwise known as the Cartan torsion tensor, $S_{\alpha\beta}{}^\gamma \equiv \Gamma^\gamma_{[\alpha\beta]}$.

General relativity model requires the specification of the source of the metric field through another “energy-momentum” tensor field. The relation between both tensor field is given by field equation. Furthermore, the components of metric tensor appears on both left and right sides of Einstein equations, so the manifold structure and the “matter” sources of manifold constitute a dynamical system, the equations of which can only be solved together. This circumstance raises an ambiguity in the definition of the stress-energy tensor.

However, one could equally well represent solutions of Einstein equations in any other unholonom frame so long as willing the propose a decomposition of defining stress-energy tensor as a function of nonmetricity and Cartan torsion tensors [8]. In this way the components of nonmetricity and Cartan torsion tensors in (6) transform the vacuum Einstein equation in holonom frame to field equation with matter source in unholonom frame and vice versa.

Non-linearity and incompleteness could explain the specific interplay of metric and stress-energy tensors in the right hand side of the Einstein equations and justify a particular coupling prescription for matter. The explicit form of the Schwarzschild interior

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3-8\pi r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \text{Sin}[\theta]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} \left(3 + \sqrt{9 - 24\pi r^2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

and vacuum solutions

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \text{Sin}[\theta]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1 - \frac{1}{r}\right) \end{pmatrix}$$

can be of use for studying the relation between holonom and unholonom representation frame to field equation with or without matter source. Obviously, one can decomposed the Levi-Civita connection as (6) then the Cartan torsion tensor for unholonomic frames is defined by

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}^1 &= \frac{1}{2(-1+r)r} + \frac{8\pi r}{3-8\pi r^2}, \\
\Psi_{22}^1 &= \frac{1}{3}(-3+8\pi r^3)\text{Sin}[\theta]^2, \\
\Psi_{33}^1 &= -1-2r + \frac{8\pi r^3}{3}, \\
\Psi_{44}^1 &= -\frac{-1+r}{2r^3} + \frac{8}{9}\pi r(-3+8\pi r^2 - \sqrt{9-24\pi r^2}), \\
\Psi_{14}^4 &= \frac{1}{2r-2r^2} - \frac{8\pi r}{(3-8\pi r^2 + \sqrt{9-24\pi r^2})},
\end{aligned} \tag{7}$$

where $\Psi_{\alpha\beta}^\gamma = S_{\alpha\beta}^\gamma - S_{\beta\alpha}^\gamma + S^\gamma_{\alpha\beta}$.

In this way the we can assume the Schwarzschild interior and vacuum solutions as a same object in holonom or unholonom frame.

3. “Gauge” decomposition.

In the following, we intend to illustrate the “gauge” freedom in the context of static, spherically symmetric simple example. In the specific case of static spherically symmetric source free configurations solution of the Einstein equations is given by [10]

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -\left(1 - \frac{2\mu}{\sqrt{\rho(r)}}\right) dt^2 + \left(\frac{\rho'(r)^2}{4\rho(r)} - \chi(r)^2\right) \left(1 - \frac{2\mu}{\sqrt{\rho(r)}}\right)^{-1} dr^2 + \\
& \chi(r) dr dt + \rho(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),
\end{aligned} \tag{8}$$

where $\rho(r), \chi(r)$ are a arbitrary function of r ¹. While the description of this functions may seem foreboding they meaning can not be more geometrically clear. Thus observability is not an intrinsic property of physical object but depends also on the means of these functions. A rapid inspection of solution (8) show that the form of the metric generated by the suitable choice of functions $\rho(r), \chi(r)$ are in particular identical to solution in Hilbert or isotropic “gauge” .

In a general curved space-time, there is no way of separating part of $g^{\mu\nu}$ due to the choice of the frame/observer and part of $g^{\mu\nu}$ due to “genuine” gravitational effects [11]. Having separated the metric tensor one can use Einstein equation to define the terms of new energy momentum tensor which can be assigned to the “emergence” of a matter density and pressure. Let us consider two sets of “gauges” fixing standard Hilbert one (2) for which Einstein equations are

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} + \frac{B'}{B} - \frac{A}{r} &= 0, \\
\frac{r}{2A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) - \frac{r^2 B'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{r^2 B''}{2AB} &= 0, \\
B \left(-\frac{1}{r} + \frac{A}{r} + \frac{A'}{A}\right) &= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

¹ The notation prime denote derivation with respect to r are used throughout the paper.

and the other isotropic one

$$ds^2 = -b(r)dt^2 + a(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (10)$$

with

$$\begin{aligned} \frac{4a'}{r} + \frac{a'^2}{a} + \frac{4ab'}{rb} + \frac{2a'b'}{b} &= 0, \\ 2rba' - \frac{2r^2ba'^2}{a} + 2rab' - \frac{r^2ab'^2}{b} + 2r^2ba'' + 2r^2ab'' &= 0, \\ b\left(\frac{8a'}{r} - \frac{3a'^2}{a} + 4a''\right) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Suppose that, in isotropic “gauge”, metric tensor (10) in (11) is decomposed into the sum

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu} \quad (12)$$

of a Hilbert term and additional “physical” term

$$g_{00} \rightarrow \hat{b} + \beta, \quad (13)$$

$$g_{11} \rightarrow \hat{a} + \alpha, \quad (14)$$

$$g_{22} \rightarrow r^2 + \gamma, \quad (15)$$

where α, β and γ is a “physical” term. A simplifying assumption about the “physical” terms are that $\alpha = 0, \beta = 0$ and $\gamma = r^2(\hat{a} - 1)$. Then from (11) one can obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{\hat{b}'}{r\hat{b}} - \frac{\hat{a}}{r^2} &= T_{11}, \\ \frac{r}{2\hat{a}} \left(\frac{\hat{b}'}{\hat{b}} - \frac{\hat{a}'}{\hat{a}} \right) - \frac{r^2\hat{b}'}{4\hat{a}\hat{b}} \left(\frac{\hat{a}'}{\hat{a}} + \frac{\hat{b}'}{\hat{b}} \right) + \frac{r^2\hat{b}''}{2\hat{a}\hat{b}} &= T_{22}, \\ \frac{\hat{b}}{r} \left(-\frac{1}{r} + \frac{\hat{a}}{r} + \frac{\hat{a}'}{\hat{a}} \right) &= T_{44}. \end{aligned} \quad (16)$$

For our model for $T_{\mu\nu}$, we can interpret that of an anisotropic perfect fluid with radial pressure P , tangential pressure τ and density ρ , the only nonzero elements of $T_{\mu\nu}$ are

$$T_{00} = -\rho g_{00}, T_{11} = P g_{11}, T_{22} = \tau g_{22}, T_{33} = \tau g_{33}. \quad (17)$$

After bit of algebra one can obtain from (8) the well known solution for isotropic “gauge”

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\mu/r}{1+\mu/r}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^4 [dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (18)$$

having decomposed (13) - (15) and substituting this in the (16) we obtain

$$P = \frac{5r^2\mu^4 + 4r\mu^5 + \mu^6 - 6r^4\mu^2}{r^2(r-\mu)(r+\mu)^5}, \quad (19)$$

$$\tau = \frac{2r^2\mu}{(r-\mu)} \frac{(2r^2 - 3r\mu - \mu^2)}{(r+\mu)^6}, \quad (20)$$

$$\rho = \frac{1}{r^2} - \frac{r^2(r+5\mu)}{(r+\mu)^5} \quad (21)$$

The solution that we obtain show the anticipated property that the stress energy tensor do not vanish, i.e. the “gauge” decomposition ‘creates” a matter.

An intriguing consequences of the above proposition in relativistic theories is the occurrence of the researcher by “gauge” fixing influences results of measurements and physics and geometry are different in a different “gauges”.

4. Discussion

We have shown that in general relativity a “gauge” transformation leads to a certain transformation of all physical and geometrical quantities and, as consequences “gauge” and coordinate transformation are two different manipulations. This is because the Einstein field equations is written in pregeometric manifold, while observations are usually analyzed in the physical space-time endowed with its Riemannian metric. The parameters x^μ on an pregeometric manifold M do not identify an operationally well-defined position in space-time, although they can be regarded as defining a “gauge”. While the points of the manifold have an inherent essence as elements of space-time, they lack uniqueness as individualized points of that space-time (events) unless and until a explicit metric tensor and non-geometrical fields are specified.

A coordinate system give us a numerical labelling, which enables us to distinguish points of space-time from one another, *which can be obtained only after Einstein field equations solved*. Thus, coordinates of space-time in general relativity are physically meaningless before specifying the metric tensor though they designate a particular point of underlying manifold. In order to avoid this ambiguity, the values of four independent invariants of the metric fields are supposed to individuate the space-time points in the generic case.

In the realm of general relativity “gauge” transformation may be interpreted as decomposition of metric tensor into the sum of “physical” and “geometrical” terms associated with coordinate choice [2]. The related transformation of stress-energy tensor of Einstein equations can be obtain directly by moving the all emerges “non-geometric” terms into right hand side. The physical property of gravitational field that we obtain show the anticipated property that the deviation of stress energy tensor do not vanish, i.e. the “gauge” transformation “creates” a matter.

Indeed approaches, that attempt to describe universe as a solution of Einstein’s equations add more sophistication to the picture, as even concepts of space-time is not well defined and, as consequences the notation of holonom and unholonom frame has no clear interpretation. It is easy to show, for example, that the Schwarzschild interior and vacuum solutions one can interpreted as a same object in holonom or unholonom frame.

References

1. Asselmeyer-Maluga T. Exotic smoothness and physics / Torsten Asselmeyer-Maluga, Carl H. Brans. - World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. - 323 p.
2. Xiang-Song Chen Physical decomposition of the gauge and gravitational fields/ Xiang-Song Chen, Ben-Chao Zhu// Physical Review D. - 2011. - № 83. - P. 084006.
3. Deser S. New embedding model of general relativity/ S. Deser, F. A. E. Pirani, D. C. Robinson// Physical Review D. - 1976. - № 14. - P. 3301.
4. Einstein A. The Meaning of Relativity: Including the Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field/ A. Einstein. Princeton University Press, 1956. - 200 p.
5. Ferraris M. Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 “Palatini’s method” discovered by Einstein in 1925 /M. Ferraris, M. Francaviglia, C. Reina // General Relativity and Gravitation. - 1982. - № 14 (3). - P. 243-254.
6. Fock V.A. The Theory of Space, Time and Gravitation/ V.A. Fock. - London - New-York - Paris - Los Angeles - Pergamon Press, 1959.
7. Gullstrand A. Allgemeine Lösung des statischen Einkörperproblem in der Einsteinschen Gravitationstheorie/A. Gullstrand// Jahrbuch Database. - 1921. - № 16(8). - P.15.
8. Ivanenko D.D. Gravitation / D.D. Ivanenko, G. Sardanashvily. - Naukova dumka, Kiev, 1985. - 196 p.
9. Kant I. Prolegomena to Any Future Metaphysics: and the Letter to Marcus Herz 2nd Edition/ Immanuel Kant. - Hackett Classics, 2001. - 160 p.
10. Logunov A.A. Relativistic Theory of Gravity / A.A. Logunov. - Nova Science Publishers, 1998. - 114 p.
11. Padmanabhan T. Gravity in six elegant steps / T. Padmanabhan // International Journal of Modern Physics D. - 2015. - № 24(12). - P. 1544002.
12. Paston S.A. Embeddings for the Schwarzschild metric: classification and new results / S.A. Paston, A.A.Sheykin // Classical Quantum Gravity. - 2012. - №29. - P. 095022. - Access mode: [arXiv:1202.1204.].
13. Poincaré H. Science and Hypothesis / H.Poincaré. - Dover Publications, Inc. New York, 1952.
14. Regge T. General relativity ‘a la string: a progress report / T. Regge, C. Teitelboim // Proceedings - 1st Marcel Grossmann Meeting, Trieste, R. Ruffini, Ed., 1975. - Italy, 1977. - P. 77-88.
15. Schouten J.A. Tensor Analysis for Physicists/ J.A. Schouten. - Oxford, Clarendon Press, 1951.

УДК 5530.12+531.51

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В УСКОРЕННОЙ ВСЕЛЕННОЙ

И.А. Кох¹

¹ *irina_kokh@rambler.ru*; Казанский федеральный университет; научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Игнатъев Ю.Г.

Проведено численное моделирование процесса космологической эволюции частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной на основе уравнения типа Фоккера - Планка, предложенного Ю.Г. Игнатъевым в более ранних работах [1].

Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерное моделирование, диффузионное уравнение, космология, СКМ Maple. Рассматривается процесс космологической эволюции частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной с пространственно - плоской метрикой Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

на основе уравнения типа Фоккера - Планка, полученного в [1]:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = A \frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right], \quad (1)$$

где p, q — абсолютные величины импульса,

$$A = \frac{16\pi^2}{L(s)}, \quad L(s) = 1 + \ln^2 \left(1 + \frac{s_0}{s} \right), \quad s_0 = 4.$$

В этих обозначениях плотность числа частиц и след тензора энергии-импульса частиц имеют вид:

$$n(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q^2 f(q) dq, \quad (2)$$

$$T_s(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q f(q) dq, \quad (3)$$

При переходе к величинам:

$$p = \frac{\tilde{p}}{a}, \quad n = \frac{\tilde{n}}{a^3}, \quad T_s = \frac{\tilde{T}_s}{a^2}, \quad (4)$$

и к безразмерному (кинетическому) времени:

$$\tau = \frac{1}{16\pi} \int_0^t \frac{A dt}{a}, \quad (5)$$

уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} = \frac{1}{\tilde{p}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \tilde{p} \left(\tilde{n} \frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} + 2\tilde{T}_s f \right). \quad (6)$$

В точной модели ускоренной Вселенной при переходе от ультрарелятивистской стадии к инфляционной, когда материя состоит из ультрарелятивистской жидкости и жидкости с уравнением состояния $\varepsilon + p = 0$ (космологическая постоянная, точное решение уравнения Эйнштейна примет вид:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}} \sqrt{\text{sh}(2\Lambda_0 t)}, \quad (7)$$

которое при $t \rightarrow 0$ переходит в ультрарелятивистское решение:

$$a(t) = \sqrt{t}, \quad (8)$$

а при $t \rightarrow \infty$ - в решение для инфляционной стадии:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}} e^{\Lambda_0 t}. \quad (9)$$

С введением конформной плотности числа частиц и плотности энергии [2]:

$$\tilde{n}(\tau) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\tau, \tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p} = \text{Const}(\equiv n_0),$$

$$\tilde{\varepsilon}(\tau) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\tau, \tilde{p}) \tilde{p}^3 d\tilde{p},$$

с помощью которых можно ввести средний конформный импульс: $\langle \tilde{p} \rangle = \tilde{\varepsilon}(t) / \tilde{n}(t)$, так что $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} / a^4$, где $\langle p \rangle = \langle \tilde{p} \rangle / a$, и, следовательно, имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{\varepsilon} = \langle \tilde{p} \rangle \tilde{n} \rightarrow \langle \tilde{p} \rangle = \text{Const}(\equiv \langle \tilde{p}_0 \rangle).$$

Энергию импульса представим в виде:

$$\beta(\tau) \tilde{n} = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\tau, \tilde{p}) \tilde{p} d\tilde{p},$$

и запишем окончательный вид уравнения (1):

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} = \frac{\tilde{n}}{\tilde{p}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \tilde{p} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} + 2\beta(\tau) f \right). \quad (10)$$

Производим нормировку с помощью формул

$$x = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0}, \quad f(\tau, x) = \frac{3\pi}{4(2S+1)} \frac{G(x, \tau)}{\tilde{p}_0^4},$$

так что

$$\int_0^{\infty} G(x)x^2 dx = 1,$$

и получим диффузионное уравнение относительно функции G в форме:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right), \quad (11)$$

где

$$b(\tau) = \int_0^{\infty} G(x, \tau)x dx. \quad (12)$$

Функция $G(x, \tau)$ должна удовлетворять начальным и граничным условиям вида:

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= G_0(x), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} G(x, \tau)x^3 &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где τ - безразмерная временная, а x - безразмерная импульсная переменные. Исходя из вышеперечисленных выражений, делаем вывод, что функция $G_0(x)$ должна удовлетворять интегральным условиям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G_0(x)x^2 dx &= 1, \\ \int_0^{\infty} G_0(x)x^3 dx &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Решим задачу Коши (11) с начально-граничными условиями (13). Выполняя в (11) подстановку $G(x, \tau) = \frac{V(x, \tau)}{x}$, получим:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, \tau), \quad (15)$$

где

$$F(x, \tau) = \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} xVb(\tau), \quad (16)$$

$$b(\tau) = \int_0^{\infty} V(x, \tau) dx. \quad (17)$$

Причем $V(x, 0) = xG_0(x)$, $V(0, \tau) = G(0, \tau) \cdot 0 = 0$.

В [2, 3] были предложены методы решения подобной задачи разложением решений по малости временной функции $b(\tau) = 0$. Следуя этому методу, в нулевом приближении получим:

$$\frac{\partial V^0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}, \quad (18)$$

где V^0 должно удовлетворять следующим начально-краевым условиям:

$$\begin{aligned} V^0(0, \tau) &= 0; \\ V^0(x, 0) &= \varphi(x); \\ x, \tau &\in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (19)$$

В первом приближении получим:

$$\frac{\partial V^1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V^1}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} x V^0 b^0(\tau), \quad (20)$$

где V^1 должно удовлетворять следующим начально-краевым условиям:

$$\begin{aligned} V^1(0, \tau) &= 0; \\ V^1(x, 0) &= 0; \\ x, \tau &\in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (21)$$

Причем $b^0(\tau) = \int_0^\infty V^0(x, \tau) dx$.

Второе условие в (21) следует из следующих рассуждений:

$$V(x, 0) = V^0(x, 0) + V^1(x, 0) + \dots \Rightarrow V^1(x, 0) = 0.$$

В результате приходим к рассмотрению начально - краевых задач Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности на полубесконечной прямой. Метод решения таких задач описан в [4] и основан на известной лемме математической физики, с помощью которой рассматривается способ решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с заданными начальными и граничными условиями.

В качестве функции начального распределения выбираем функцию вида

$$G_0(x) = \frac{a \exp(-bx)}{x},$$

где переменные a и b находятся из условия (14). Таким образом, имеем:

$$G_0(x) = \frac{4 \exp(-2x)}{x}. \quad (22)$$

Использование метода [4], описывается в [5], где было получено решение задач (18)-(19) и (20)-(21).

В нулевом приближении функция G будет иметь вид:

$$G^0(x, \tau) = \frac{2}{x\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\right) \right) G_0(\xi) \xi d\xi \quad (23)$$

В первом приближении функция G будет иметь вид:

$$G^1(x, \tau) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{b^0(t) dt}{\sqrt{(\tau-t)}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(\tau-t)}\right) \right\} \frac{2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 G^0(\xi, t) d\xi, \quad (24)$$

где

$$b^0(\tau) = \int_0^{\infty} G^0(x, \tau) x dx. \quad (25)$$

Подставляя в (23) функцию первоначального приближения (22), получим:

$$G^0(x, \tau) = \frac{2}{x\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau} - 2\xi\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau} - 2\xi\right) \right) d\xi \quad (26)$$

Вычисляя (26), получаем

$$G^0(x, \tau) = \frac{2}{x} \left(e^{4\tau-2x} \operatorname{erf}\left(\frac{4\tau-x}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{4\tau-2x} + e^{4\tau+2x} \operatorname{erf}\left(\frac{4\tau+x}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{4\tau+2x} \right). \quad (27)$$

Найдем $b^0(\tau)$. Из (25) и (27) имеем:

$$b^0(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \left(e^{4\tau-2x} \operatorname{erf}\left(\frac{4\tau-x}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{4\tau-2x} + e^{4\tau+2x} \operatorname{erf}\left(\frac{4\tau+x}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{4\tau+2x} \right) dx. \quad (28)$$

Вычисляя (28), получаем

$$b^0(\tau) = -2. \quad (29)$$

При численном моделировании функции $G^0(x, \tau)$ с помощью СКМ Maple выясняем, что она не удовлетворяет интегральным условиям (14) при малых значениях τ (Рис. 1, 2), а при $\tau \geq 10$ имеем $G^0(x, \tau) \approx 0$.

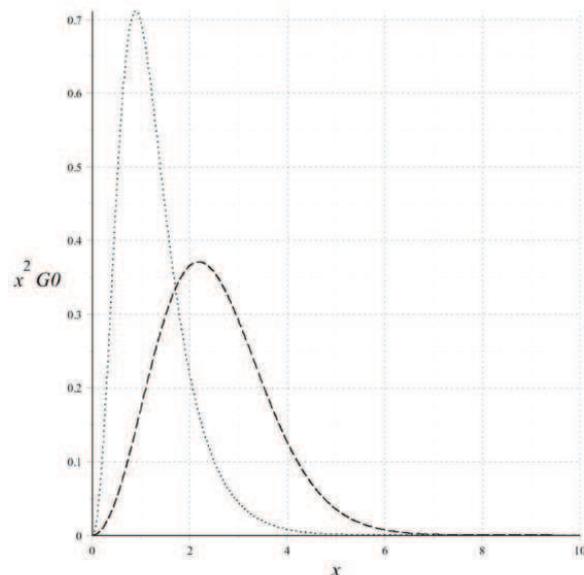


Рис. 1. Эволюция распределения плотности числа частиц в нулевом приближении при $\tau = 0.1; 1; 10$.

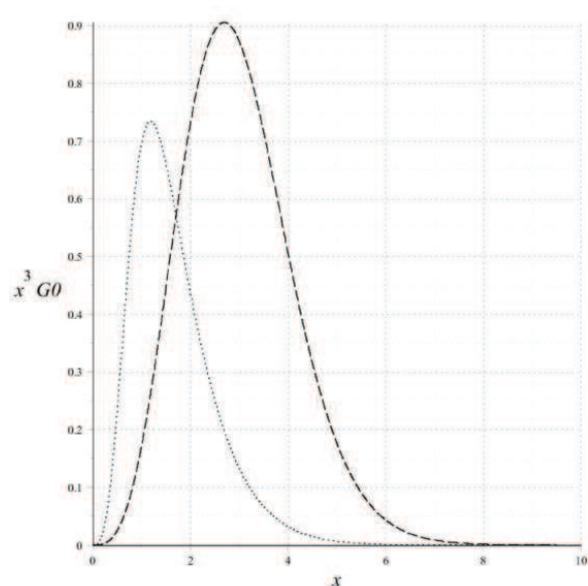


Рис. 2. Эволюция распределения плотности энергии частиц в нулевом приближении при $\tau = 0.1; 1; 10$.

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной / Ю.Г. Игнатъев // Известия Вузов, Физика. - 1986. - Т. 29, № 2. - С. 19-24.
2. Ignatyev Yu.G. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe / Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov // Gravitation & Cosmology. - 2006. - Vol. 12, № 4 (48). - P. 1-12.
3. Ignatyev Yu.G. Diffusion Model of Evolution of Superthermal High-Energy Particles under Scaling in the Early Universe. II. Early Stages / Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov // Gravitation and Cosmology. - 2008. - Vol. 14, № 4. - P. 301--308.
4. Боголюбов А.Н. Задачи по математической физике: Учебн. пособие / А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. - М.:Изд-во МГУ, 1998. - 350 с.
5. Кох И.А. Компьютерное моделирование в СКМ Maple диффузии частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной на основе асимптотических оценок / И.А. Кох // Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики: материалы конференции и труды семинара. - Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. - С. 224-227.

NUMERICAL MODELLING OF DIFFUSION OF THE SUPERHIGH ENERGIES PARTICLES IN ACCELERATED UNIVERSE

I.A. Kokh

The numerical modelling in CAS Maple of the superhigh energies particles cosmological evolution process in accelerated Universe on the basis of equation type Fökker - Planck, introduced by Yu.G. Ignat'ev in most early works [1], is carried.

Keywords: mathematical modelling, computer modelling, diffusion equation, cosmology, SCM Maple.

УДК 530.12+539.12

ТЕОРИЯ ВСЕГО КАК АЛГОРИТМ

А.Л. Круглый¹

¹ akrugly@mail.ru; ГУ ФНЦ Научно Исследовательский Институт Системных Исследований РАН

Излагается подход к построению теории всего в рамках модели последовательного роста ориентированного ациклического графа.

Ключевые слова: теория всего, причинностное множество, ориентированный ациклический граф.

В настоящем докладе излагается подход к построению “теории всего”, основанный на локальной причинности и конечной делимости [1].

Под локальной причинностью понимается, что события образуют частично упорядоченное множество, и отношение порядка интерпретируется как отношение причинности. Примером является пространство Минковского. В пространстве Минковского в фиксированный момент времени не могут существовать конечные объекты, обладающие внутренними свойствами. В фиксированный момент времени имеется только множество физически не связанных точек. Нет физической

связи, нет структуры, нет внутренних свойств. Связь одновременных событий осуществляется только через общее прошлое. Только вместе с общим прошлым возникает структура и какие-либо внутренние свойства. У точек конечного объекта общее прошлое отстоит на конечный интервал времени. Структура с конечной длительностью есть процесс. Объект в момент времени может быть только аппроксимацией процесса, если его длительностью можно пренебречь. На фундаментальном уровне мир надо описывать на языке процессов. Рассмотрим конечную делимость процессов. Множеством Александра двух событий является множество событий между ними, то есть следующих за первым и предшествующих второму. В пространстве Минковского это пересечение светового конуса будущего первого события со световым конусом прошлого второго события. Оно может быть или пустым, или содержать континуум событий. Частично упорядоченное множество событий называется локально конечным, если множество Александра любой пары событий содержит конечное число событий. В литературе оно получило название “причинностное множество” (causal set). отождествим конечную делимость процессов с локальной конечностью множества событий.

Локально конечное частично упорядоченное множество событий может быть представлено ориентированным ациклическим графом (без ориентированных циклов). Вершины идентифицируются с элементарными событиями, ориентированные ребра - с элементарными причинно-следственными связями. Две вершины причинно связаны, если их соединяет ориентированный маршрут. Для такого графа очевидно вводятся дискретные аналоги мировых линий, световых конусов, пространственноподобных гиперповерхностей. Однако вопрос о предельном переходе к континуальному пространству времени является нерешенной проблемой рассматриваемой модели. На языке процессов любой устойчивый объект есть повторяющийся процесс. В рассматриваемой модели - это линейно упорядоченная последовательность повторяющихся структур графа. Простейшим примером является ориентированный маршрут, который представляет собой линейно упорядоченную последовательность вершин и ребер. Поскольку вершины и ребра неделимы, то они не имеют внутренних свойств. Все их свойства есть топологические свойства их окружения. Таким образом, все свойства любого физического объекта (масса, спин, заряд...) должны сводиться к топологическим характеристикам соответствующей структуры графа. Можно предположить, что важную роль играют симметрии структур и связанные с ними конечные группы.

Рассмотрим динамику модели. Динамика есть способ предсказывать будущие состояния изучаемой системы, или реконструировать прошлые состояния. Если мы знаем некоторый конечный граф, то мы обладаем полной информацией о рассматриваемом процессе на некотором конечном этапе. Реконструировать будущие или прошлые этапы процесса означает добавить новые фрагменты к известному графу. Это можно делать последовательно. Минимальный фрагмент - это одна вершина. Таким образом, динамика сводится к последовательному добавлению вершин по одной. В литературе она получила название “динамика последовательного роста”. Новая вершина может быть различными способами связана ребрами с уже имеющимися вершинами. Должен быть алгоритм выбора конкретного варианта добавления. Поиск алгоритма последовательного роста является центральной проблемой

модели. Однако обзор подходов, результатов и проблем выходит за рамки настоящего доклада.

Последовательная реализация принципа конечной делимости приводит к отказу от дифференциального исчисления, как языка моделирования. Вместо него языком теории становится дискретная математика и, в первую очередь, теория графов. При этом законы формулируются не в форме уравнений, тем более не в форме дифференциальных уравнений, как это традиционно сложилось в физике, а в форме алгоритмов. Переход к формулировке законов в форме алгоритмов может оказаться плодотворным не только на фундаментальном уровне, но и в частных науках.

Литература

1. Круглый А.Л. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph / А.Л. Круглый // Вестник РУДН, серия "Математика. Информатика. Физика". - 2014. - № 1. - с. 124-138. - Режим доступа: arXiv: 1112.1064

THE THEORY OF EVERYTHING AS AN ALGORITHM

A.L. Krugly

The model of sequential growth of directed acyclic graph is considered as a theory of everything.

Keywords: theory of everything, causal set, directed acyclic graph.

УДК 5530.12+531.51

МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.М. Морозов¹, В.М. Журавлев²

¹ aiel@rambler.ru; Ульяновский государственный университет

² zhvictorm@mail.ru; Ульяновский государственный университет

В работе рассматривается задача о вычислении собственных функций некоторых многомерных линейных операторов параболического типа. Особое внимание уделялось двумерным параболическим операторам, для которых представлена полная процедура вывода решений и показано появление специфического вырождения, связанного с многозначностью решений.

Ключевые слова: точные решения линейных многомерных параболических уравнений, вырождение собственных функций, многозначные решения, двумерный квантовый осциллятор.

Рассмотрим d -мерные линейные операторы следующего вида:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - D\Delta,$$

где D - комплексная постоянная, а Δ - d - мерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2},$$

заданный на пространстве R^d с координатами x^α , $\alpha = 1, \dots, d$. Рассмотрим действие оператора \hat{L} на функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ общего вида:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{\theta(\mathbf{x}, t)} F(e^{\phi(\mathbf{x}, t)}), \quad (1)$$

где $\theta(\mathbf{x}, t)$ и $\phi(\mathbf{x}, t)$ - две вспомогательных функции, а $F(s)$ - некоторая аналитическая функция, допускающая разложение в формальный ряд Тейлора в нуле:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n s^n, \quad A_n = F^{[n]}(0) / n!.$$

В двумерном случае подстановка решения приводит к параболическим уравнениям с потенциалами вида:

$$U(z, \bar{z}, t) = A(t)|z|^2 + B_1(t)\bar{z} + B_2(t)z + C(t), \quad (2)$$

где $z = x + iy$.

При соответствующем выборе постоянных, уравнение $\hat{L}\Psi(\mathbf{x}, t) = U(z, \bar{z}, t)\Psi(\mathbf{x}, t)$ будет соответствовать нестационарному уравнению Шредингера для гармонического осциллятора. В работе показано, что для данного уравнения можно найти точные многозначные решения $\Psi(\mathbf{x}, t)$ вида:

$$\Psi_n(z, z^*, t) = e^{f(z, t)z^* + g(z, t) + n\phi(z, t)}, \quad (3)$$

где n - номер листа. Функции $f(z, t)$, $g(z, t)$, $\phi(z, t)$ удовлетворяют условиям:

$$\prod_{s=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} P_n(C_1, C_2 | \underline{Q}_{sn}) = 0, \quad C_{1,2} = \omega_{1,2}(\mp f + k_0 z + q_{1,2}), \quad (4)$$

$$g = 4D \int f'(z(t), t) dt + B_2 \int z(t) dt + Ct + G(C_1, C_2), \quad (5)$$

$$\phi(z, t) = \Phi(C_1, C_2). \quad (6)$$

Следствием многозначности функций $f(z, t)$, $\theta(z, t)$, $\phi(z, t)$ является специфическое “топологическое” вырождение собственных функций оператора $\hat{S}_1 = \hat{L} - U(z, t)$. Это означает, что в тех областях пространства-времени, где функции $f(z, t)$, $\theta(z, t)$, $\phi(z, t)$ многозначны, каждому листу этих функций будет соответствовать отдельная функция $\Psi(x, y, t)$, отвечающая одному и тому же потенциалу $U(x, y, t)$. Это означает, что к вырождению по числу n добавляется вырождение равное числу листов решений. Поэтому (4) можно рассматривать как аналог дисперсионного соотношения, которое определяет в случае обычных решений параметры допустимых собственных функций, отвечающих заданному собственному числу. При этом отдельные листы могут иметь точки ветвления, а могут их и не иметь.

Литература

1. Журавлев В.М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов / В.М. Журавлев // ТМФ. - 2016. - № 186(3). - С. 371-385.
2. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов / В.И. Арнольд. - М: Фазис, 1996.

3. Кравцов Ю.А. Геометрическая оптика неоднородных сред / Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов. - М: Наука, 1980.
4. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики 2-е изд., испр. / М.А. Шубин. - М.: МЦНМО, 2003. — 303 с.
5. Журавлев В.М. Принцип суперпозиции и точные решения уравнения нелинейной диффузии / В.М. Журавлев // ТМФ. - 2015. - № 183(1). - С.36-50.

MULTIVALUED SOLUTIONS OF MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATIONS

V.M. Morozov, V.M. Zhuravlev

The work is dedicated to the task of finding solutions to some of multivariate linear operators of parabolic type. Particular attention was paid to the two-dimensional parabolic operators, which shows the complete procedure for finding solutions and shows the appearance of a specific degeneration associated with many-valued solutions.

Keywords: exact solutions of multidimensional parabolic equations, degeneration of eigenfunctions, multivalued solutions, two-dimensional quantum oscillator.

УДК 53.02/608.3

НЕЛИНЕЙНОСТИ В ПЕРЕДАЧЕ ЭНЕРГИИ

И.С. Нурғалиев¹

¹ *ildus58@mail.ru*; Всероссийский научно - исследовательский институт электрификации сельского хозяйства, Москва

Рассматривается проблема передачи энергии на расстояния с минимальными потерями. Приведены несколько подходов для решения такой задачи.

Ключевые слова: нелинейности, передача энергии, экономия энергии.

Нобелевская премия этого года по физике была вручена за “за теоретические открытия топологических фазовых переходов и топологических фаз материи”. Несмотря на то, что это может быть не всем заметно, это направление имеет прямое отношение к теме нашей конференции. Не только потому, что Дэвиду Таулесу, Дункану Халдейну и Майклу Костерлитцу удалось до товарного вида довести то, что начато в советско-российской школе теоретической физики. Трое ученых, имена которых объявили в Стокгольме, при помощи математических формул описали необычные физические эффекты, происходящие при таких явлениях, как сверхпроводимость, сверхтекучесть, и в тонких магнитных пленках, которые благодаря перестройке внутренней геометрии приобретаются как следствие возникающих новых нелинейностей.

В таких состояниях как поведение материи, так и процессы, например, передача энергии на расстояния, демонстрирует свойства, присущие непривычным нам механизмам в трехмерном, в двумерном или, даже, в одномерном пространстве, таким как единичный провод.

Массо- и энергообмен в сельском хозяйстве в виде разнообразных процессов вещественных и энергетических превращений и перемещений в пространстве представляет собой, во-первых, саму суть сельского хозяйства. А с другой стороны он

представляет собой физическую природу многих технологических процессов, в частности, генерации, преобразования, передачи к месту потребления энергии, в том числе - электрической. По этой фундаментальной причине постановка задачи правильного понимания, описании и моделирования потоков является наиглавнейшей в направлении повышения эффективности использования возобновляемых источников энергии сельском хозяйстве. На кафедре ЮНЕСКО проведены поисковые теоретические исследования по описанию потоков с использованием методов аффинной геометрии, а также векторного и тензорного исчисления. Как оказалось, использование этих методов в более последовательно, чем это традиционно делается, решает многие традиционные проблемы описания процессов, представляющих собой поток. К таковым относятся такие представленные в повестке ВИЭСХ направления как основы вихревой энергетики, передача электромагнитной энергии без проводов и вдоль одиночного провода, организация фото-активируемой культивации микроводорослей для нужд биоэнергетики, поддержка горения газожидкостных композиционных топлив.

Самые краткие замечания основ найденного подхода заключаются в следующем. Поле вектора скорости V_α следует для использования в физическом конфигурационном пространстве радиусов-векторов R^β сначала проектировать в это пространство с векторного (касательного к конфигурационному):

$$V_\alpha = H_{\alpha\beta} R^\beta \quad (1)$$

Тензор H в (1) с координатами $H_{\alpha\beta}$ назовем тензором адвекции-дисторсии-завихренности. Его расщепляем в три части: в диагональная (след), симметричная бесследовая и антисимметричная, которые отвечают соответственно скоростям расширения, $\theta\delta_{\alpha\beta}/3$, сдвига $\sigma_{\alpha\beta}$ и завихренности $\omega_{\alpha\beta}$:

$$H_{\alpha\beta} = \theta\delta_{\alpha\beta}/3 + \sigma_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Такое расширение приводит при его использовании для выражения законов (баланса) сохранения в многокомпонентной реагирующей среде, каковыми являются потоки в самом сельском хозяйстве и в технологических процессах сельского хозяйства, в частности процессах энергогенерации, энергопередачи и энергопотребления, подчиняются следующему уравнению

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(\{x_j\}) + \nabla_k D^k_j(r) \nabla^j x_i. \quad (3)$$

Уравнение (3) уместно назвать уравнением нелинейной диффузии реакции многокомпонентной среды для дидактического сопоставления его с другими, ранее известными фундаментальными уравнениями.

Мы являемся свидетелями одного из механизмов генерации нелинейностей в динамических уравнениях. В данном случае это учет композиционной организации потока и взаимодействий, ранее неучтенных, в процессе функционирования энергетической системы. Такой путь, приводит к раскрытию как количественных, так и качественных новых свойств функционирования систем. Классический пример - обнаружение сверхпроводимости.

Изучение вопросов передачи электроэнергии по одному проводу имеет довольно длинную историю. Несмотря на это и несмотря на актуальность вопроса со все

возрастающей остротой в теории описания явления нет единодушия. В данной работе предпринята попытка понять причину проблемы и привнести маленький вклад в копилку существующих моделей. Начнем с того, что такое собственно понимание. Авторы придерживаются собственной версии определения понимания как ощущения достаточно тесного соответствия (говоря математически, гомеоморфизма) между тем, что надо понять и тем, что уже понятно. Как авторам кажется, такое определение прослеживается и в том, как возникла теория электромагнетизма. Классики оперировали понятными им образами гидродинамики.

Прибегнем к такому методу и мы. Дело в том, что работа однопроводной линии в значительной степени связана с поверхностными процессами. Однако многие попытки понять ее функционирование базируются на интуиции выработанных на изучении волновой передачи энергии в толще среды. Поверхностные волны имеют другую природу во многих аспектах физики процесса. Представим, что мы находимся на границе двух сред, так как это имеет место, когда мы купаемся, и на поверхности воды на некотором расстоянии произошел небольшой взрыв или иное возмущение. Если мы внимательны, мы должны признать, что мы об этом событии получим сигнал, а следовательно, и некоторую энергию, как минимум шестью волнами. А именно: две акустические по двум средам, две электромагнитные по двум средам и две поверхностные - акустическую и электромагнитную. Это утверждение ново и достойно осмысления. Те, кто изучал школьную физику с увлечением, вспомнят качественную задачу в о спасающемся из терпящего крушение корабля, который, нырнув в воду и вынырнув, был уверен, что взрыва было два.

Заметим, как разительно отличается от двух акустических волн поверхностная волна по физике процесса. Так же сильно по физике процесса отличается поверхностная электромагнитная волна от свободных волн в однородной среде.

Простые аналогии с гидродинамикой находятся и для волноводного характера единичного провода для цилиндрической поверхностной волны вдоль провода. Дачники и деревенские жители к стоку под краем крыши привязывают либо провод, либо веревку для придания более фокусированного характера стекающей струе дождевой воды и уменьшить ее разбрызгивание. Провод и веревка, хотя и не пропускают воду через себя, смачиваясь, однако, служат как направляющие для потока. Тем самым просто и эффективно обеспечивают сфокусированность потока, каналируя его в бочку. Эта функция аналогична роли однопроводной линии для электромагнитного поля. Несмотря на наивность гидродинамических моделей, они помогают понять физику процесса.

Часто дискуссия о энергопередаче затруднена еще из-за банальной подмены понятий. Волна чего? Что является носителем? Как с ними связана энергия? Передается ли она? А если волна стоячая, переносится ли энергия, и т.д. В год юбилея Михаила Васильевича Ломоносова уместно будет упомянуть, что законы сохранения не содержат суждений о количестве каналов переноса энергии-материи. Их может быть от нуля до скольких угодно. И, например, возможно, что ни один из них не представляет собой металлический провод. Причем, если требуется поиск второго провода, то им является остальная часть Вселенной (на Земле - Земля).

Из методических соображений уместно сказать несколько слов о толковании самого термина энергия. Здесь также поможет аналогия как инструмент понимания.

Энергия аналогична деньгам. Как известно, попытки применить деньги не как инструмент мены и меры, а, для практического применения может привести к досадному фиаско. Т.е. деньги очень бесполезный объект, если пытаться их применить напрямую, как физический объект. Другое дело, их можно обменять на товар или услугу. Так и с энергией. Она не есть наше самое ценное. Мы ее тратим для совершения работы, приближающей нас к цели [2]. Текущая задача человечества заключается в том, чтобы вписаться в поток поступающей от Солнца и рассеивающейся в космос энергии, переставая пользоваться запасами природных ресурсов, а ограничиваясь только запасами буферного характера для надежного энергообеспечения. Поэтому неправильно от однопроводной линии добиваться лишь высокого КПД передачи (еще одно понятие дискурса, нуждающееся в методической очистке) как ее единственного достоинства. Основное ее достоинство в том, чтобы решать проблему последней мили (снова аналогия, теперь с интернетизацией или с проводной телефонизацией).

Для описания функционирования однопроводной линии передачи электроэнергии предложены

1. упомянутая выше много-, например, трехволновая модель (все три компоненты электромагнитные),
2. модель акустического гофрирования, основанная на взаимодействии акустической, электронно-токовой и электромагнитно-полевой волн.

Среди выводов такого рассмотрения: направляющим, может служить цилиндрическая (точнее - осесимметричная с еще одной дискретной симметрией) граница, т.е. металличность провода необязательна. Ток можно пропускать вдоль границы двух сред. Если эффективность контура обеспечивается резонансной настройкой умной сети. Это совершенно новый канал повышения энергоэффективности.

Электрическая сеть всегда ранее строилась как система однонаправленной передачи. Она состояла из одной или нескольких очень мощных генерирующих станций, связанных с потребителями энергии при заданных заранее параметрах. Переход к возобновляемым источникам энергии и появление новых интеллектуальных устройств позволяют, точнее, диктуют иного подхода - строительства самонастраивающейся интеллектуальной сети (Smart Grid). К примеру, сегодня на крышах домов чаще устанавливаются солнечные батареи, а многие домовладельцы все чаще пользуются собственными небольшими генераторами. Это значит, что генераторы и потребители то и дело могут меняться местами в зависимости где и кому в текущий момент нужна энергия, и энергия и информация должны идти в обоих направлениях. Инфраструктура энергообеспечения приобретает новые компоненты. Заметно, что кроме обеспечения энергоэффективности и экономии мы получаем новые требования на систему с точки зрения безопасности, мониторинга и принятия решений (автоматизированных и не автоматизированных).

Таким образом, например, коммунальные службы могли бы превратиться частично в информационные компании и передавать не только электричество, но и данные. Нужна сильно разветвленная, как бы капиллярная, сеть, резко повышающая востребованность однопроводной линии с экономией металла. Автоматизированные системы оценки ситуации энергопотребления и принятия оптимального

решения участниками рынка энергопотребления должны были бы в реальном времени оценивать спрос и адаптировать к нему свое предложение, если они экономически поставлены в такие условия, если их благополучие зависело бы от экономии. При этом они могли бы в реальном времени передавать пользователям ценную информацию, чтобы регулировать спрос, а точнее предлагать им разнообразие тарифных планов. Используемая с однопроводной линией резонансная технология позволяет использовать предсказываемые автором на основе многоволнового описания дополнительные “окна прозрачности” как информационный канал. Так мы делаем еще один шаг к экономике знаний. Данные методические соображения являются аннотацией к дополнительному методическому приложению к отчету технического характера с целью объяснения явления более широкому кругу лиц, таких как, например, инвесторы, а также как вводный материал для студентов, желающих пройти на кафедре ЮНЕСКО ознакомительную практику.

Остановимся на конкретном предложении технической реализации генерации нелинейностей и использования их для передачи с минимальными потерями электромагнитной энергии без проводов. Такой способ встречается как содержание патента RU 2143775. Недостатком способа, защищенного патентом RU 2143775, является основанность на фотоионизации и ударной ионизации, как на основном способе формирования передающего канала, что требует большую мощность для формирования и поддержания канализированных ионных токов проводимости. Тем временем, минимальные значения токов проводимости и есть основное преимущество представленного данным способом передачи электромагнитной энергии, когда носителем энергии является не электрический ток (ни ионный, ни электронный, которые отключаются, если возникли на этапе формирования канала), а электромагнитная волна, которую можно назвать ведомой.

Существует два способа передачи электрической энергии: проводящий канал формируют со стороны источника электрической энергии или со стороны приемника. Еще в одном варианте способа передачи электрической энергии проводящий канал формируют с помощью генератора излучения в импульсивном режиме, но необязательно с синхронной подачей на проводящий канал электрических импульсов от высоковольтного высокочастотного трансформатора Тесла, как это предусмотрено патентом RU 2143775. Возникший при импульсе направляющий канал далее может сохранять свои направляющие свойства в режиме самофокусировки или, другими словами, в режиме самоволноводного распространения (Аскарьян Г. А., Эффект самофокусировки, “УФН”, 1973, т. 111, в. 2, с.249-260). При избыточной интенсивности лазерного луча наступает режим фото- и ударной ионизации с недостатками механизма, описанного патентом RU 2143775.

Эффекты самовоздействия электромагнитной волны обусловлены зависимостью свойств среды (показателя преломления) от интенсивности электромагнитной волны, то есть нелинейностью. Такая зависимость может обеспечиваться разными физическими механизмами - электрострикцией, эффектом Керра (ориентационным и электронным), тепловыми эффектами и т.д. в зависимости свойств среды.

Для направленной передачи электромагнитной энергии на разные расстояния представляет интерес использование ограниченных пучков. В этом случае возникает так называемая нелинейная рефракция, то есть в поле ограниченного пучка

однородная нелинейная среда становится неоднородной; мощный луч электромагнитного излучения, проходя сквозь вещество, изменяет его свойства, и тем самым, например, искривляет путь самого луча. Поэтому в зависимости от того, увеличивается или уменьшается показатель преломления в поле пучка (то есть в зависимости от знака нелинейности), наблюдается, соответственно, концентрация энергии или, наоборот, ее рассеяние.

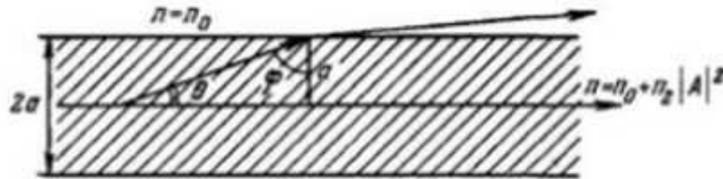


Рис. 1. К выводу условия самофокусировки

Рассмотрим пучок электромагнитного излучения радиуса a , распространяющийся в среде с кубической (керровской) нелинейностью (см. рис. 1):

$$n = n_0 + n_2|A|^2, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2|A|^2,$$

где $\varepsilon_0 = n_0^2$ - линейная часть диэлектрической проницаемости, $\varepsilon_2 = 2n_2\varepsilon_0/n_0$ - коэффициент нелинейности, A - амплитуда световой волны. В общем случае, как известно, коэффициент нелинейности является, вообще говоря, комплексным $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + i\varepsilon_2''$, то есть имеет место нелинейное поглощение.

Пусть для простоты ε_2'' . Самофокусировка наблюдается в том случае, если $\varepsilon_2' > 0$, так что внутри пучка показатель преломления возрастает, а на его границе поэтому, в частности, возможно полное внутреннее отражение лучей. Его критический угол находится по формуле $\theta_0 = \arccos\left(\frac{n_0}{n_0 + n_2|A|^2}\right)$. Лучи, идущие под углом $\theta > \theta_0$, покидают пучок, а те, для которых $\theta < \theta_0$, отклонятся в сторону оси пучка. Угол расхождения лучей в пучке с плоским фазовым фронтом определяется соотношением $\theta_d = \frac{0,61\lambda_0}{n_0 a}$, где λ_0 - длина волны в вакууме. В зависимости от соотношения углов θ_0 и θ_d возможны следующие физические ситуации:

- если $\theta_0 < \theta_d$, пучок расплывается, но медленнее, чем в линейной среде;
- если $\theta_0 = \theta_d$, дифракционное расплывание вне пределов канала отсутствует и полностью компенсируется нелинейной рефракцией. Формируется своеобразный, можно сказать, нелинейный волновод, по которому пучок распространяется без расходимости. Этот режим можно называть самоканализацией пучка. Критическая мощность излучения, при которой возникает этот эффект, можно выразить как $P_c = \frac{(1,22)^2 \lambda_0^2 c}{256 n_2}$.
- Если $\theta_0 > \theta_d$ (или $P > P_c$), лучи отклоняются к оси пучка - происходит как раз явление самофокусировки. Нелинейная среда действует подобно собирающей линзе, эффективное фокусное расстояние которой можно оценить, если ввести так называемую дифракционную длину $R_d = \frac{k_0 a^2}{2} \approx \frac{a}{\theta_d}$ ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$ - волновое

число). Тогда условие $\theta_0 = \theta_d$ эквивалентно $R_d = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_2|A|^2}} = R_{nl}$, где R_{nl} называется нелинейной дифракционной длиной, или длиной самофокусировки. В случае большой мощности ($P \gg P_c$) поведение пучка может быть описано в приближении геометрической оптики. В случае $\varepsilon'_2 < 0$ (уменьшение показателя преломления в поле пучка) имеет место самодефокусировка электромагнитной волны.

Литература

1. Стребков Д.С. Резонансные методы передачи электрической энергии. - 3-е издание, дополненное./ Стребков Д.С., Некрасов А.И. - Москва, 2008. - 352 с.
2. Нурғалиев И.С. Вихри новых рисков требуют стратегий развития./И.С. Нурғалиев // “Экономические стратегии”. 2011.-№6 - С. 56-60.
3. 3. Нурғалиев И.С. Геометрический подход в теории принятия диагностических решений/ И.С.Нурғалиев // Лобачевский и современная геометрия: тезисы докладов Международной научной конференции. - Казань, 1992. - Часть 2. - С.44-45.
4. 4. Стребков Д.С. Физика передачи электроэнергии по одному проводу/ Д.С.Стребков , И.С.Нурғалиев // Энергообеспечение и энергосбережение в сельском хозяйстве: труды 8 международной научно-технической конференции. - Москва: ВИЭСХ, 2012. - Ч.1. - С.136-140.

NONLINEARITIES IN ENERGY

I.S. Nurgaliev

The problem of effective energy transfer is considered. A few approaches are proposed for solving this task.

Keywords: nonlinearities, energy transfer, energy saving.

UDC 5530.12+531.51

EFFECT OF SELF-ACTION IN THE WORMHOLE SPACETIMES

A.A. Popov¹

¹ *apopov@kpfu.ru; Kazan Federal University*

We consider the problem of computing the self-force on a scalar or electric charge at rest in the wormhole spacetimes.

Keywords: effect of self-action, wormhole spacetime.

The motion of a charged point-like object in a fixed background spacetime, is affected by the coupling between the object's own charge, and the field that this charge induces. This coupling results in a self-force acting on the object. At leading order, the object's acceleration due to this self-force (in the absence of non-gravitational external interactions) is proportional to q^2/M , where q and M denotes the object's charge and mass, respectively. This leading order is obtained by treating the particle's field as a linear perturbation over a fixed curved background spacetime.

In flat spacetime this effect is produced by a local distortion of the field lines associated with the particle's acceleration. For electrically charged particles in flat spacetime, the self-force is given by the Abraham-Lorentz-Dirac formula. In the gravitational field the self-energy problem becomes more complicated. The reason is that contribution to the self-energy in this case is non-local. The self-force problem for an electric charge in a curved space background was first investigated by DeWitt and Brehme and later by Hobbs[1]. The gravitational self-force was first calculated almost simultaneously by Mino, Sasaki and Tanaka[2] and by Quinn and Wald[3]. Later, Quinn derived the equivalent formula for a charge coupled to a minimally-coupled massless scalar field[4].

Analysis of the self-force in curved spacetime also has a practical motivation: one possible source for LISA - the planned spacebased gravitational wave detector, is a binary system with an extreme mass ratio, which inspirals toward coalescence. Here, the self-force is required for the calculation of the accurate orbital evolution of such systems. These orbits are needed in order to design templates for the gravitational waveforms of the emitted gravitational radiation.

A number of simple static configurations has been analyzed, including the self-force acting on scalar or electric charges held static in the spacetime of a Schwarzschild black hole[5], electric or magnetic dipoles which are static outside a Schwarzschild black hole[6], a static electric charge outside a Kerr black hole[7] or a Kerr-Newman black hole[8], a static electric charge in a spherically-symmetric Brans-Dicke field[9]. The self-force can be nonzero for a static particle in flat spacetimes of the topological defects[10]. In curved spacetimes with nontrivial topological structure the investigations of this type have the additional interesting features[11].

Unfortunately, the authors do not know the results of calculation of the self-force of the charge, which is the source of a massive field. In this paper we consider the problem of computing the self-force on a scalar charge at rest in the spacetimes of long throats, allowing for the arbitrary values of the mass of field and coupling constant. It gives the possibility to compare the explicit calculation of the self-force in the limit of large mass of the field with the corresponding result of paper[12].

References

1. Hobbs J. A vierbein formalism of radiation damping / J. Hobbs // *Annals of Physics*. - 1968. - Vol. 47, Issue 1. - P. 141–165.
2. Mino Y. Gravitational radiation reaction to a particle motion / Y. Mino, M. Sasaki, T. Tanaka // *Phys. Rev. D*. - 1997. - Vol. 55. - P. 3457–3476.
3. Quinn T.C. Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime / T.C. Quinn, R.M. Wald // *Phys. Rev. D*. - 1997. - Vol. 56. - P. 3381–3394.
4. Quinn T.C. Axiomatic approach to radiation reaction of scalar point particles in curved spacetime / T.C. Quinn // *Phys. Rev. D*. - 2000. - Vol. 62. - P. 064029.
5. Wiseman A.G. Self-force on a static scalar test charge outside a Schwarzschild black hole / A.G. Wiseman // *Phys. Rev. D*. - 2000. - Vol. 61. - P. 084014.
6. Leaute B. Self-interaction of an electric or magnetic dipole in the Schwarzschild space-time / B. Leaute, B. Linet // *Classical and Quantum Gravity*. - 1984. - Vol. 1, № 1. - 55–60.

7. Ottewill A.C. Static Kerr Green's function in closed form and an analytic derivation of the self-force for a static scalar charge in Kerr space-time / A.C. Ottewill, P.A. Taylor // Phys. Rev. D. - 2012. - Vol. 86. - P. 024036.
8. Lohiya D. Classical self-force on an electron near a charged, rotating black hole / D. Lohiya // J. Phys. A. - 1982. - Vol. 15, № 6. - P. 1815–1819.
9. Linet B., Teyssandier P. Point charge in a static, spherically symmetric Brans-Dicke field / B. Linet, P. Teyssandier // Gen. Relativ. Grav. - 1979. - Vol. 10, Issue 4. - P. 313-319.
10. Khusnutdinov N. Charged particle in the spacetime of a supermassive cosmic string / N. Khusnutdinov // Teor. Mat. Fiz. - 1995. - Vol. 103, № 2. - P. 339–350.
11. Casals M. Self-Force Calculations with Matched Expansions and Quasinormal Mode Sums / M. Casals, S. Dolan, A. Ottewill, B. Wardell // arXiv:0903.0395 [gr-qc]
12. Popov A. Renormalization for the self-potential of a scalar charge in static space-times / A. Popov // Phys. Rev. D. - 2011. - Vol. 84. - P. 064009.

ЭФФЕКТ САМОДЕЙСТВИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ КРОТОВЫХ НОР

А.А. Попов

Рассмотрен эффект самодействия зарядов, являющихся источниками неминимально связанного с кривизной скалярного поля или электромагнитного поля в пространствах кротовых нор.

Ключевые слова: эффект самодействия, кротовая нора.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

- A**
Aladjev V.Z. 6
Andrianov S.N. 300
- B**
Boiko V.K. 6
- D**
Daishev R.A. 300
- G**
Gal'tsov D.V. 29
- I**
Ignat'ev Yu.G. 130
- K**
Kirsanov M.N. 179
Kozyrev S.M. 300
- P**
Popov A.A. 323
- S**
Shishakov M.L. 6
- V**
Vaganov V.A. 6
- Z**
Zaslavskii O.B. 66
- A**
Абдульмянов Т.Р. 236
Авакян Р.М. 244
Агафонов А.А. 157
Акиньшина С.В. 297, 299
Алферов Д.И. 254
Арутюнян Г.Г. 244
- Б**
Баранов А.М. 245
- Белоушко К.Е. 297, 299
Болохов С.В. 251
Бронников К.А. 251
- В**
Владимиров Ю.С. 10, 253
- Г**
Гальцов Д.В. 254
Голоскоков Д.П. 44
Гуц А.К. 273
- Ж**
Журавлев В.М. 73, 280, 315
- И**
Игнат'ев Ю.Г. 146, 157, 191, 283
- К**
Каиров Т.В. 297, 299
Карбановский В.В. 297, 299
Кох И.А. 308
Круглый А.Л. 313
- М**
Мелёхина О.В. 297, 299
Михайлов М.Л. 283
Морозов В.М. 315
- Н**
Нургалиев И.С. 317
- Р**
Родина П.В. 297, 299
- С**
Самигуллина А.Р. 191
- Ч**
Чеботарева Э.В. 223

**ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ
ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ
МАТЕМАТИКИ – KAZCAS-2016»**

**И МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА
«НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ, СТАТИСТИКЕ,
ТЕОРИИ ПОЛЯ И КОСМОЛОГИИ – GRACOS-16»**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления – **Ю.Г. Игнатъев**

Техническая редакция, набор и верстка: **А.А. Агафонов, Г.А. Бабанова,
Н.В. Зайцева, И.А. Кох, А.М. Нигмедзянова**

Оформление обложки - **А.А. Агафонов**

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2 ϵ в учебно - научной лаборатории «Информационных технологий в математическом образовании» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета.

В сборнике трудов опубликованы 29 статей, посвященных современным проблемам теории гравитации, математическому и компьютерному моделированию в системах компьютерной математики.

Подписано в печать 25.10.2016 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печ. л. 14,25.
Общий тираж 500 экз. Первый завод 150 экз. Заказ № 25/10/1

Отпечатано с готового оригинал-макет
в типографии издательства
Академии наук Республики Татарстан
420111, РТ, г. Казань, ул. Баумана, 20