Оценки констант Лебега интерполяционных процессов типа Лагранжа

Алексей Лукашов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Казань, 27 августа 2021

Пусть

1. $w_n(x)$ - последовательность гладких функций на $E \subset \mathbb{R}$ с простыми нулями $x_{k,n} \in E, k = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots,$
2. $q(x, y)$ - гладкая функция двух переменных такая, что для $(x, y) \in E^2$ sign $q^2(x, y) =$ sign $(x - y)^2$, и при всех $y \in E$

$$q(x, y) = x - y + o(x - y),\ x \to y.$$

Тогда интерполяционным процессом типа Лагранжа будем называть последовательность функций

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_n(x)}{q(x, x_{k,n}) w_n'(x_{k,n})} f(x_{k,n}).$$

Нетрудно видеть, что $L_n(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}), k = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots.$

Пример

(Классические) интерполяционные многочлены Лагранжа $w_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_{k,n}); q(x, y) = x - y.$

Пример

Интерполирование тригонометрическими полиномами (полуцелого) порядка

$$w_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{x - x_{k,n}}{2}; q(x, y) = 2\sin\frac{x - y}{2}; E = [0, 2\pi).$$

Пример

"Операторы Э.Т. Уиттекера"(А.Ю. Трынин)

$$w_n(x) = \sin nx; q(x, y) = x - y; E = [0, \pi].$$

$$w_n(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{u_j}{x - x_{j,n}} \right)^{-1},$$

$$q(x, y) = x - y$$

Лемма

При любых различных значениях $x_{j,n} \in \mathbb{R}$ и $u_j = (-1)^j, j = 1, \ldots, n$, многочлен $\prod_{j=1}^{n}(x - x_{j,n})(w_n(x))^{-1}$ не имеет действительных корней.

Если рассматривать $L_n(f,x)$ как операторы

$$L_n : C(E) \to C(E),$$

то их нормы

$$\mathcal{L}_n = \max_{x\in E} \sum_{k=1}^{n} \left|\ell_{k,n}(x)\right|,$$

где

$$\ell_{k,n}(x) = \frac{w_n(x)}{q(x, x_{k,n}) w_n'(x_{k,n})},$$

называются константами Лебега.

Теорема

Если $U_n : C[a,b] \to \mathcal{P}_n$ *- линейный оператор такой, что* $U_n(P_n) = P_n$ *для всех алгебраических многочленов* $P_n \in \mathcal{P}_n$, *то*

$$\|U_n\| \geq \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

Теорема

Пусть

1. $E = [a, b]$;
2. $w_n(x) = \cos \varphi_n(x)$, *где* φ_n- *гладкая строго монотонная на* $[a, b]$, *функция*, $\varphi_n([a, b]) = [0, n\pi]$,
$$|\varphi_n'(x)| \asymp \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, x \in [a, b];$$
3. $$|q(x, y)| \asymp |x - y|,$$
4. $L_n(1, x) \rightrightarrows 1$ *при* $n \to \infty$.

Тогда

$$\mathcal{L}_n \leq C \ln n.$$

Без ограничения общности считаем, что $[a,b]=[-1,1]$. Положим $x=\cos\theta$, $x_{k,n}=\theta_{k,n}$. Тогда

$$\mathcal{L}_n \le C \max_{\theta\in[0,\pi]} \frac{|\cos\varphi_n(\cos\theta)|}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\theta_{k,n}}{|\cos\theta-\cos\theta_{k,n}|}.$$

Из равенства $|\varphi_n(x_{k+1,n})-\varphi_n(x_{k,n})|=\pi$ следует $|\theta_{k+1,n}-\theta_{k,n}|\asymp\frac{1}{n}$. Пусть $x_{p,n}$ - ближайший к x узел. Тогда

$$|\ell_{p,n}(x)| \le C + \sum_{k\ne p} |\ell_{k,n}(x)|\,.$$

Последнюю сумму разбиваем на две в зависимости от положения узлов по отношению к точке x. В каждой из них слагаемое, соответствующее ближайшему к x узлу, оцениваем сверху константой с помощью неравенства $|\cos\theta-\cos\theta_{k,n}|\ge 1/2|\cos\theta_{k\pm1,n}-\cos\theta_{k,n}|$.

Пусть $E = [-1, 1], w_n(x) = \cos(n \arccos x), q(x, y) = x - y$. Тогда

1. $\mathcal{L}_n = \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{8}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^{2k}}$;
2. последовательность $\mathcal{L}_n - \frac{2}{\pi} \ln n$ строго убывает (Т. Ривлин, 1974).

Из книги Й. Сабадоша, П. Вертеши (1990): The asymptotic expression ... has an interesting but quite usual history. It was proved independently by R. Günttner; P.N. Shivakumar and R. Wong; V.K. Dzjadyk and V.V. Ivanov; and finally, by V.K. Dzjadyk(!), S.J. Dzjadyk and A.S. Pripik.

Из книги В.К. Дзядыка (1988): "Отметим, что в [149] ... тот факт, что каждая из функций ... имеет ... единственный экстремум ... только декларируется.
Строгое доказательство этого факта ... принадлежит автору."

Пусть $E = [-1, 1], q(x, y) = x - y$.

1. $w_n(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x), \alpha, \beta \le -1/2$;
2. "Дополненные"матрицы Якоби;
3. "$|\theta_{k+1,n} - \theta_{k,n}| = \frac{\pi}{n} + \frac{a_{k,n}}{n^2}, |a_{k,n}| \le A$"E.Berriochoa et al., 2020
4. $x_k = \frac{e^{kh}-1}{e^{kh}+1}, k = -N, \dots, N$ M. Youssef et al., 2016

Boyd(1999)

1. Коши: минимизировать $\|w_n\|_{C[a,b]}$;
2. Лебега: минимизировать $\mathcal{L}_n$;
3. CFM: минимизировать $\max_{1\le j\le n} \|\ell_{j,n}\|_{C[a,b]}$;
4. VDM: максимизировать определитель Вандермонда в каком-то базисе;
5. Фейера: минимизировать $\|\sum_{j=1}^{n} \ell_{j,n}^2\|_{C[a,b]}$;
6. Эрдеша: минимизировать $\|\sum_{j=1}^{n} \ell_{j,n}^2\|_{L_2[a,b]}$;

$$\left\| \frac{x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c^n}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2n}(1 - a_{i,n}x)}} \right\|_{C(E)} \to \min_{\{c_1,\ldots,c_n\}\subset\mathbf{R}}, \qquad (1)$$

где $E = [-1, 1]$ и $\mathfrak{A} = \{a_{i,n}\}, 1/a_{i,n} \in \mathbb{C} \setminus E$ - действительные или попарно сопряженные комплексные числа.

В случае, когда знаменатель - многочлен, решение было получено П.Л. Чебышевым, а А.А. Марков дал другое представление решения:

$$M_n(x; [-1, 1], \mathfrak{A}) = M_n \cos\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \arccos \frac{x - a_{j,n}}{1 - a_{j,n}x}\right) = M_n \cos \frac{1}{2}\gamma_n(x).$$

J. van Deun, K. Deckers, A. Bultheel and J.A.C. Weideman (2009) построили и зарегистрировали алгоритм (882) для построения нулей этих рациональных функций.

Пусть B - область в $\overline{\mathbb{C}}$ такая, что ее граница состоит из конечного числа попарно непересекающихся кусочно гладких дуг или кривых, и пусть α - замкнутое подмножество границы ∂B, также состоящее из дуг или кривых. Обозначим через $\omega(z, \alpha, B)$ ограниченную гармоническую функцию в B такую, что $\omega(z, \alpha, B) \to 1$ при z, стремящихся к внутренним точкам α, и $\omega(z, \alpha, B) \to 0$ при z, стремящихся к внутренним точкам $\partial B \setminus \alpha$. Функция $\omega(z, \alpha, B)$ называется гармонической мерой α относительно B в точке z.

Матрица $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} = \{a_{k,n}\} \subset \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \tag{2}$$

называется регулярной по отношению к системе отрезков J_s,

$$J_s = \bigcup_{i=1}^{s} [c_{2i-1}, c_{2i}], -1 = c_1 < c_2 < \cdots < c_{2s-1} < c_{2s} = 1 \tag{3}$$

если для каждого $j = 1, \ldots, s$ и $n \geq s$ сумма гармонических мер отрезка $[c_{2j-1}, c_{2j}]$ в точке $1/a_{k,n}$ является натуральным числом, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(1/a_{k,n}, [c_{2j-1}, c_{2j}], \mathbb{C} \backslash J_s) = q_{j,n}, \quad q_{j,n} \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{4}$$

$$w_n(x) = \cos\left(\pi \sum_{k=1}^{n} \omega(1/a_{k,n}, J_s \cap [c_1, x], \mathbb{C} \backslash J_s)\right). \qquad (5)$$

Дополнительные обозначения

$$H(x) = \prod_{j=1}^{s} (x - c_{2j-1})(x - c_{2j}), \qquad (6)$$

$$\gamma_n(J_s, \mathfrak{A}, x) = \sqrt{-H(x)}\pi \sum_{k=1}^{n} \omega'(1/a_{k,n}, J_s \cap [c_1, x], \mathbb{C} \backslash J_s), \quad x \in \operatorname{int} J_s. \quad (7)$$

Занумеруем обратные величины полюсов следующим образом: $a_{1,n} = \ldots = a_{\kappa_n,n} = 0$ (здесь $1/0 = \infty$), $a_{k,n} \neq 0$, $k = \kappa_n + 1, \ldots, n$, Re $a_{k,n} > 0, k = \kappa_n + 1, \ldots, n_1$, Re $a_{k,n} < 0, k = n_1 + 1, \ldots, n$, и для Im $a_{k,n} > 0$ Im $a_{k+1,n} = -$ Im $a_{k,n}$. Здесь мы не указывем зависимость n_1 от n.

Пусть $s = 1, \kappa_n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, и матрица $\mathfrak{A}$ не имеет предельных точек на $\{|z| = 1\}$ кроме, быть может, $\{\pm 1\}$, достигаемых по некасательным путям, и удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^{n_1} \frac{\sqrt{1-|a_{k,n}|}t}{1-|a_{k,n}|+t^2} \geq C, \qquad \sqrt{1 - \max_{1 \leq k \leq n_1} |a_{k,n}|} \leq t \leq 1; \tag{8}$$

$$\sum_{k=n_1+1}^{n} \frac{\sqrt{1-|a_{k,n}|}t}{1-|a_{k,n}|+t^2} \geq C, \qquad \sqrt{1 - \max_{n_1+1 \leq k \leq n} |a_{k,n}|} \leq t \leq 1. \tag{9}$$

Тогда для w_n из (5) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_n \leq C \log \|\gamma_n(J_1, \mathfrak{A}, \cdot)\|_{J_1}. \tag{10}$$

Теорема Старовойтова обобщает более ранние результаты, в частности, оценку

$$\mathcal{L}_n \leq C \ln n,$$

полученную В.Н. Русаком в 1962 году в той же работе, в которой впервые были рассмотрены подобные интерполяционные процессы.
G. Min в 1998 при тех же предположениях, что и у В.Н. Русака, $(-\alpha \leq a_{k,n} \leq \alpha, \alpha < 1)$, доказал, что

$$\mathcal{L}_n \asymp \ln n,$$

и поставил вопрос о необходимости сделанного им предположения для справедливости последнего равенства.

Пусть $s = 2$, матрица $\mathfrak{A}$ регулярна относительно J_2, не имеет предельных точек на $\{|z| = 1\}$, кроме, быть может, $\{\pm 1\}$, достигаемых по некасательным путям, и удовлетворяет условиям (8),(9),

$$\min_{x \in J_2} \frac{\gamma_n(J_2, \mathfrak{A}, x)}{\sqrt{(x - c_2)(x - c_3)}\gamma_n(J_2, \mathfrak{A}, (c_3 + 1)/2))} \geq C, n \geq 2. \qquad (11)$$

Тогда для w_n из (5) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_n \leq C \log \|\gamma_n(J_2, \mathfrak{A}, \cdot)\|_{J_2}. \qquad (12)$$

Нетрудно видеть, что выбор полюсов в соответствии с равенствами $a_{2,n} = \ldots = a_{n,n} = 1 - 1/n$ удовлетворяет всем условиям теоремы Старовойтова и, следовательно, дает отрицательный ответ на вопрос Г. Мина. Более того, последняя теорема с небольшой модификацией этого выбора дает отрицательный ответ и на его аналог для двух отрезков.

Пусть $s > 1$, матрица $\mathfrak{A} \subset \{|z| \leq r\}, 0 < r < 1$, регулярна относительно J_s. Тогда для w_n из (5) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_n \leq C \log n. \tag{13}$$

Классический результат Фабера: для любой последовательности многочленов w_n с нулями на $J_1 = [a, b]$

$$\mathcal{L}_n \geq c \log n$$

с некоторой зависящей лишь от a, b константой $c > 0$.

Теорема (А.Л., Й. Сабадош 2016)

Для любой последовательности многочленов w_n *с нулями на* J_s

$$\mathcal{L}_n \geq c(J_s) \log n.$$

Теорема (А.Л., Й. Сабадош 2016)

Для любой системы отрезков J_s существует последовательность многочленов w_n с нулями на J_s такая, что

$$\mathcal{L}_n \leq c(J_s) \log n.$$

Для любого $s \geq 2$ и для любой системы отрезков (3) существует класс матриц $\mathfrak{A}$, регулярных относительно J_s, причем соответствующие полюсы имеют предельные точки на J_s, включая все концы этих отрезков, и таких, что для w_n из (5) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_n \leq C \log \|\gamma_n(J_s, \mathfrak{A}, \cdot)\|_{J_s}. \tag{14}$$

Пусть $\mathfrak{Y}$ - произвольная матрица узлов интерполирования на $(-1, 1)$, и $\mathfrak{B}$ - произвольная матрица обратных величин полюсов из внешности J_1.
Если существуют полюсы $1/d_k, k = 1, \dots, m$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{m} \omega(1/d_k, [c_{2j-1}, c_{2j}], \mathbb{C}\backslash J_s) = p_j, \quad p_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, s,$$

то система отрезков J_s является прообразом отрезка $[-1, 1]$ при отображении рациональной функцией

$$r_m(x) = \cos\left(\pi \sum_{k=1}^{m} \omega(1/d_k, J_s \cap [c_1, x], \mathbb{C}\backslash J_s)\right)$$

с фиксированными полюсами $1/d_k, k = 1, \dots, m$. Тогда для любой матрицы $\mathfrak{Y} \subset (-1, 1)$ строки с номерами mn матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{X} \subset \operatorname{int} J_s$ определяются равенствами

$$\{x_{k,mn} : k = 1, \dots, mn\} = r_m^{-1}(\{y_{i,n} : i = 1, \dots, n\}).$$

Перенумеруем их так:

$$y_{k,n} = r_m(x_{(k,j),n}),\ k = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m.$$

Вместо w_n для $\mathfrak{X}$ будем использовать обозначение

$$\Omega_{mn}(x) = w_n(r_m(x)) = \prod_{k=1}^{n} \frac{r_m(x) - y_{k,n}}{1 - b_{k,n} r_m(x)} = C(m,n) \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{x - x_{(k,j),n}}{1 - a_{(k,j),n} x},$$

где

$$\frac{1}{b_{k,n}} = r_m \left(\frac{1}{a_{(k,j),n}} \right), \; k = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m.$$

Фундаментальные функции интерполирования для множеств $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{X}$ имеют вид

$$\ell_{k,n}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, y) = \frac{w_n(y)}{w_n'(y_{k,n})(y - y_{k,n})}, \; k = 1, \ldots, n$$

и

$$\ell_{(k,j),n}(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, x) = \frac{\Omega_{mn}(x)}{\Omega_{mn}'(x_{(k,j),n})(x - x_{(k,j),n})}, \; k = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m.$$

Если существуют полюсы $1/d_k, k = 1, \ldots, m$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{m} \omega(1/d_k, [c_{2j-1}, c_{2j}], \mathbb{C}\backslash J_s) = p_j, \quad p_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, s,$$

то для любой матрицы $\mathfrak{Y}$ узлов интерполирования на $(-1, 1)$, и для любой матрицы $\mathfrak{B}$ обратных величин полюсов из внешности $[-1, 1]$ имеем

$$|\ell_{(k,j),n}(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, x)| \leq C(d_1, \ldots, d_m)\left(|\ell_{k,n}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, r_m(x))| + |w_n(r_m(x))| \cdot\right.$$

$$\left.\left(\left|\frac{\ell_{k,n}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, 1)}{w_n(1)}\right| + \left|\frac{\ell_{k,n}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, -1)}{w_n(-1)}\right|\right)\right), k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m;\ x \in J_s.$$

Пусть F - произвольное конечное подмножество отрезка $J_1 = [-1, 1]$, $F = \{t_1, \dots, t_N\} \subset [-1, 1]$. Тогда существует матрица обратных величин полюсов $\mathfrak{A}$ такая, что каждая точка F является предельной для множества соответствующих полюсов и для матрицы w_n из (5) выполнено неравенство (13).

Рассмотрим функции

$$f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \arccos \frac{t_i - \alpha_j}{1 - \alpha_j t_i}, \ i = 1, \dots, N,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ - различные точки $(0, 1)$. Подсчет производных дает

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \right)_{i,j=1}^{N} = \prod_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{1 - t_j^2}}{2\pi\alpha_j \sqrt{1 - \alpha_j^2}} \cdot \det \left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} - t_j} \right)_{i,j=1}^{N}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!