

УДК УДК 532.5.031:533.6.011.32:533.694.2

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДВУХЭЛЕМЕНТНОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

П.А. Волков, Н.Б. Ильинский

Аннотация

Предложено численно-аналитическое решение задачи нахождения формы двухэлементного крылового профиля с максимальным коэффициентом подъемной силы при условии безотрывного обтекания дозвуковым потоком вязкого газа. Совместный учет вязкости и сжимаемости достигнут по моделям пограничного слоя и газа Чаплыгина.

Ключевые слова: оптимизация, пограничный слой, газ Чаплыгина, обратная крайевая задача аэрогидродинамики, двухэлементный крыловой профиль.

Введение

Конкурентоспособность дозвуковой транспортной авиации в значительной степени определяется увеличением грузоподъемности самолета и снижением материальных затрат на его производство. Повышенные требования к техническим характеристикам летательного аппарата обуславливают актуальность разработки эффективных методов проектирования оптимальных форм крыловых профилей, то есть профилей с максимальной подъемной силой, максимальным аэродинамическим качеством, минимальным сопротивлением.

Предложенный метод построения формы двухэлементного крылового профиля (биплана, профиля с закрылком или предкрылком) с максимальной подъемной силой в классе безотрывно обтекаемых профилей основан на решении обратной краевой задачи аэрогидродинамики (см., например, [1]). Суть метода состоит в отыскании в рамках выбранной математической модели «оптимального» распределения скорости, заданного вдоль поверхности неизвестного контура профиля и соответствующего максимально возможному значению коэффициента подъемной силы на искомом профиле.

Традиционные способы (см., например, [2]) оптимизации заключаются в многократном решении прямой задачи и подборе крылового профиля с желаемыми аэродинамическими характеристиками. Метод, предложенный в нашей работе, позволяет непосредственно определить оптимальную форму профиля из фиксированного класса контуров по параметрическому распределению скорости вдоль его поверхности. Углы атаки и положение профилей друг относительно друга при этом не задаются, а находятся в процессе решения. Модель течения построена таким образом, что появляется возможность пренебречь эффектами сжимаемости внутри пограничного слоя.

1. Постановка задачи

В физической плоскости z (рис. 1, *a*) искомые непроницаемые крыловые профили $A_k B_k$ ($k = 1, 2$), составляющие двухэлементный профиль биплана, обтекаются безотрывно плоским установившимся потенциальным дозвуковым потоком с заданными числами Рейнольдса Re_∞ и Маха M_∞ на бесконечности. Контур L_k

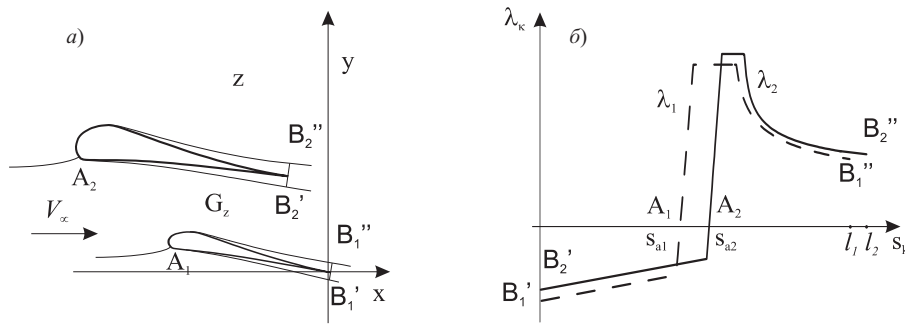


Рис. 1. Физическая плоскость (а) и распределения приведенной скорости (б) по контурам двухэлементного профиля: индексы 1 и 2 соответствуют L_1 и L_2

профилей считаются гладкими за исключением задних кромок B_k , где внутренний к области течения угол равен 2π .

Направление оси абсцисс в физической плоскости z выбрано по направлению скорости v_∞ набегающего потока. Периметры профилей известны и равны l_k ($k = 1, 2$).

При условии безотрывного обтекания и малости толщины пограничного слоя дуговые абсциссы s_k контуров профилей и полутел вытеснения на участках $B_k'A_kB_k''$ будем считать совпадающими и отсчитывать их от нуля в точках B_k' до l_k в B_k'' так, чтобы при возрастании s_k область течения оставалась слева.

Распределения приведенной скорости λ_k вдоль участков $B_k'A_kB_k''$ полутел вытеснения в параметрическом виде есть

$$\lambda_k = v_k(s_k, d_j)/a_* = \lambda_k(s_k, d_j), \quad s_k \in [0, l_k], \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, 5,$$

где d_j – свободные параметры, a_* – критическая скорость (рис. 1, б). Функции λ_k – кусочно-гладкие, обращающиеся в нули в точках A_k разветвления потока s_{ak} , и в этих точках они непрерывно дифференцируемы. Распределения приведенной скорости выбираются из класса гидродинамически целесообразных (ГЦРС) [3], что обеспечивает безотрывное обтекание в рамках принятой математической модели. Эти распределения берутся с так называемой «полкой» (рис. 2, а), то есть с участком постоянной скорости, так как именно «полочные» распределения являются экстремальными в задаче максимизации площади эпюры распределений скорости.

Задания распределений скорости вдоль искомого контура не достаточно для получения физически реализуемого решения – профиля заданной толщины, ограниченного замкнутым контуром без точек самопересечения. Дополнительные геометрические ограничения, налагаемые на L_k (рис. 2, б) и позволяющие зафиксировать класс искомых решений, имеют вид:

$$\min_{t \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(t) \geq c', \quad (1)$$

$$c''' \geq \max_{t \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(t) \geq c'', \quad (2)$$

где $c_k(t)$ – значение функции относительной толщины k -го профиля в процентах от хорды этого профиля в точке $x^* = t$; участок хорды $[x_{k1}, x_{k2}]$ и величины c' , c'' , c''' задаются. Первое из ограничений выражает условие отсутствия точек самопересечения контура, второе эквивалентно определению границ изменения максимальной толщины профиля.

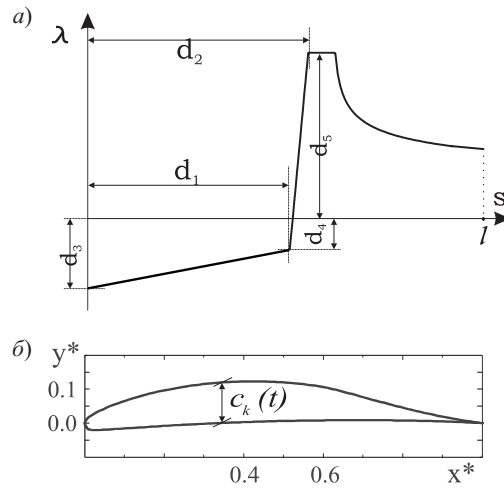


Рис. 2. Схема (а) задания свободных параметров d_j ($j = 1, \dots, 5$) в распределениях приведенной скорости; геометрические ограничения (б), налагаемые на L_k ($k = 1, 2$)

В соответствии с принятой математической моделью течения существует комплексный потенциал потока $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$. Считаем, что известен расход q_* между контурами L_k полутел вытеснения и разность потенциалов φ_* между точками A_2 и A_1 . Положив $w(z)$ равным нулю в точке A_1 , будем иметь:

$$\varphi(s_{a1}) = 0, \quad \psi(s_{a1}) = 0, \quad \varphi(s_{a2}) = \varphi_*, \quad \psi(s_{a2}) = q_*.$$

Требуется найти форму двухэлементного крылового профиля, обладающего максимальной подъемной силой.

2. Решение обратной задачи

В качестве характерного линейного размера выберем величину $l = 0.5(l_1 + l_2)$ полусуммы периметров искомых профилей.

Учитывая безотрывный характер обтекания, воспользуемся предположениями, что для больших (порядка $10^5 \div 10^7$) значений числа Re_∞ вязкость будет сказываться лишь в достаточно тонком пограничном слое около профиля, а для дозвуковых скоростей внешнего потока сжимаемостью внутри слоя можно пренебречь. Решение обратной задачи сведется при этом к нахождению контуров полутел вытеснения, обтекаемых потоком газа Чаплыгина, зная которые находим форму искомых профилей, отступив на участках $B_k' A_k B_k''$ внутрь полутел на толщину вытеснения $\delta_k^*(s)$.

Из теории пограничного слоя известно, что отрыв потока может происходить лишь на диффузорных участках, характеризующихся отрицательными градиентами скорости. Поэтому распределение приведенной скорости на возможно большей части контура следует задавать неубывающим, а на оставшейся части дорабатывать его так, чтобы выполнялось условие безотрывности

$$f_k(s) = \frac{a\lambda_k'(s)}{|\lambda_k(s)|^b} \left[\int_{L_k^*}^s |\lambda_k(\tau)|^{b-1} d\tau + f_{tk} \right] \geq f_0,$$

где $f_k(s)$ – формпараметр, f_0 , a , b – эмпирические постоянные, f_{tk} характеризует вклад в f_k ламинарных участков. Если пограничный слой на профиле полностью турбулентный, то $f_{tk} = 0$, $a = 1.17$, $b = 4.75$, $f_0 = -2$.

В качестве канонической области во вспомогательной плоскости $u = \xi + i\eta$ выбран прямоугольник со сторонами ω_1 и $\omega_2 = i\pi/2$. Область изменения комплексного потенциала в плоскости w для газа Чаплыгина сохранит тот же вид, что и для идеальной несжимаемой жидкости [4]:

$$w(u) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta) = \Lambda\zeta(u - i\alpha) + \bar{\Lambda}\zeta(u + i\alpha) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(u - i\alpha)}{\sigma(u + i\alpha)} + u\gamma_1 + \beta,$$

$$\frac{dw}{du}(u) \equiv \Omega(u) = -\Lambda\rho(u - i\alpha) - \bar{\Lambda}\rho(u + i\alpha) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} [\zeta(u - i\alpha) - \zeta(u + i\alpha)] + \gamma_1,$$

$$\varphi_1(\xi_1) = \varphi(\xi_1, \pi i/2), \quad \psi_1(\xi_1) = \psi(\xi_1, \pi i/2),$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \varphi(\xi_2, 0), \quad \psi_2(\xi_2) = \psi(\xi_2, 0), \quad \xi_1, \xi_2 \in [0, \omega_1],$$

где ω_1 , $\xi_1, \xi_2 \in [0, \omega_1]$; $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$; $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, α – неизвестные постоянные; $\rho(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ – функции Вейерштрасса с полупериодами $\pi i/2$ и $\omega_1/2$; $\eta_1 = \zeta(u + \omega_1) - \zeta(u)$ – константа, зависящая от ω_1 ; циркуляции скорости Γ_k по каждому контуру L_k равны $\varphi_k(l_k) - \varphi_k(0)$; $\gamma_1 = \frac{1}{\omega_1} \left[-\Gamma_1 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{\alpha \eta_1}{\pi} - (\Lambda + \bar{\Lambda})\eta_1 \right]$ – константа, зависящая от ω_1 , α .

Модели газа Чаплыгина соответствует вспомогательная функция

$$\chi(u) = \ln \frac{2|\lambda(u)|}{1 + \sqrt{1 + 4c^2\lambda^2(u)}} - i\theta, \quad c^2 = 0.296,$$

имеющая логарифмические особенности в точках A_k обращения приведенной скорости λ_k в нуль. Выделив эти особенности

$$\chi(u) = \chi^*(u) + \ln \left[\sin \frac{\pi(u - u_{a1})}{\omega_1} \sin \frac{\pi(u - u_{a2})}{\omega_1} \right],$$

аналитическую функцию $\chi^*(u) = S^* - i\theta^*$, действительная часть которой на границах прямоугольника известна:

$$S_k(\xi_k) = S^*(\xi_k, \eta_k) = \ln \frac{2|\lambda(s_k(\xi_k))|}{1 + \sqrt{1 + 4c^2\lambda^2(s_k(\xi_k))}} - \ln \left| \sin \frac{\pi(\xi_k - \xi_{a1} - \frac{1}{2}(k-1)\pi i)}{\omega_1} \sin \frac{\pi(\xi_k - \xi_{a2} + \frac{1}{2}(2-k)\pi i)}{\omega_1} \right|,$$

восстановим по формуле Виля (см., например, [6]):

$$\chi^*(u) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\omega_1} [S_1(\xi)\zeta(u - \xi - \frac{1}{2}\pi i) - S_2(\xi)\zeta(u - \xi)] d\xi + \frac{\eta_1 - 2}{2\omega_1} P_1 + iP_2,$$

где P_2 – произвольная вещественная постоянная, а для P_1 имеем

$$P_1 = \int_0^{\omega_1} S_1(\xi) d\xi = \int_0^{\omega_1} S_2(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Условие (3) является условием однозначности функции $\chi^*(u)$.

Координаты контуров полутел вытеснения находятся интегрированием выражения

$$dz = \exp[-\chi(u)]w'(u) du - c^2 \overline{\exp[\chi(u)]w'(u) du}, \quad (4)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Форму искомого профиля находим, отступив по нормали на участках $B_k' A_k B_k''$ внутрь полутел на величину толщины вытеснения $\delta_k^*(s)$. Функция $\delta_k^*(s)$ определяется при помощи любого из известных методов, например, однопараметрического метода Кочина – Лойцянского [5].

Контур L_k искомого двухэлементного профиля будут замкнуты, если соответствующие контуры полутел вытеснения, определяемые из (4), разомкнуты на величину

$$\Delta z_k = -i\delta_{0k}^* \exp(i\theta_{0k}), \quad (5)$$

где θ_{0k} – аргумент вектора скорости в точках B_k' и B_k'' ; $\delta_{0k}^* = \delta_k^*(0) + \delta_k^*(l_k)$; $\delta_k^*(0)$, $\delta_k^*(l_k)$ – значения толщин вытеснения в точках B_k' и B_k'' соответственно. Кроме того, должно выполняться условие (3) однозначности функции χ^* и условие совпадения величины приведенной скорости набегающего потока, найденной в ходе решения задачи, с заданным значением $\lambda_\infty = v_\infty/a_*$:

$$\operatorname{Re} \chi(i\alpha) = \ln \left\{ 2\lambda_\infty \left[1 + \{1 + 4c^2\lambda_\infty^2\}^{1/2} \right]^{-1} \right\}. \quad (6)$$

3. Нахождение аэродинамических характеристик

Коэффициенты сопротивления C_{xk} и подъемной силы C_{yk} каждого из профилей двухэлементного профиля определяются формулами

$$C_{xk} = \oint_{L_k} (c_{fk} dx + c_{pk} dy), \quad C_{yk} = \oint_{L_k} (c_{fk} dy - c_{pk} dx),$$

где c_{fk} – местный коэффициент трения, c_{pk} – коэффициент давления для адиабатического течения

$$c_{pk} = \frac{2}{\nu_0 M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 - \lambda_k^2 / [(\nu_0 + 1)(\nu_0 - 1)]}{1 - \lambda_\infty^2 / [(\nu_0 + 1)(\nu_0 - 1)]} \right)^{\nu_0(\nu_0 + 1)} - 1 \right],$$

$\nu_0 = 1.41$ для воздуха.

Коэффициент сопротивления C_x , коэффициент подъемной силы C_y и аэродинамическое качество K двухэлементного профиля находятся по формулам:

$$C_x = C_{x1} + C_{x2}, \quad C_y = C_{y1} + C_{y2}, \quad K = C_y/C_x.$$

4. Решение задачи оптимизации

Это решение состоит в оптимальном выборе исходных распределений приведенной скорости $\lambda_k = \lambda_k(s_k, d_j)$, при которых функционал $F(d_j) = C_y(\lambda_k(s_k, d_j))$ принимает максимальное значение с учетом условий разрешимости обратной задачи (3), (5), (6), геометрических ограничений (1), (2) и дополнительных линейных ограничений на свободные параметры:

$$A_1 d = g_1, \quad (7)$$

$$A_2 d \leq g_2, \quad (8)$$

$$d_l \leq d \leq d_m, \quad (9)$$

где матрицы A_1, A_2 и векторы $g_1, g_2, d_l, d_m \in R^n$ заданы.

Для решения оптимизационной задачи применен комбинированный подход, сочетающий в себе метод штрафных функций и метод последовательного квадратичного программирования. В качестве вспомогательного функционала выбран

$$\Phi(d_j) = \varepsilon_1 \Delta z + \varepsilon_2 \Delta c^* + \varepsilon_3 \Delta c^{**} - C_y, \quad (10)$$

где Δz – сумма квадратов невязок условий разрешимости обратной задачи, а величины $\Delta c^*, \Delta c^{**}$ отыскиваются из выражений:

$$\begin{aligned} \Delta c^* &= \Delta_1 c^* + \Delta_2 c^*, \quad \delta \Delta c^{**} = \Delta_1 c^{**} + \Delta_2 c^{**}, \\ \Delta_k c^* &= \begin{cases} (c_k^* - c')^2, & c_k^* < c', \\ 0, & c_k^* \geq c', \end{cases} \\ \Delta_k c^{**} &= \begin{cases} (c_k^{**} - c'')^2, & c_k^{**} < c'', \\ 0, & c'' \leq c_k^{**} \leq c''', \\ (c_k^{**} - c''')^2, & c_k^{**} > c''', \end{cases} \\ c_k^* &= \min_{t \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(t), \quad c_k^{**} = \max_{t \in [x_{k1}, x_{k2}]} c_k(t). \end{aligned}$$

Для заданных величин штрафа $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_3 > 0$ решается задача минимизации функционала (10) с линейными ограничениями (7)–(9). Численная реализация решения задачи осуществлена на языке Фортран при помощи процедуры, основанной на алгоритме «TOLMIN» [7].

Решение задачи минимизации (10) выполняется многократно для различных значений штрафа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Эти величины подбираются так, чтобы уменьшение значений функционала достигалось (в соответствии с поставленной задачей) за счет увеличения коэффициента подъемной силы C_y . Затем построенные контуры с максимальным C_y , которые, как правило, получаются разомкнутыми, замыкаются путем постепенного увеличения ε_1 . Одновременно увеличивая $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, добиваемся выполнения геометрических ограничений (1), (2). При этом следует избегать резких скачков штрафов и, как следствие, больших падений C_y . Сходимость описанного процесса подтверждена численными экспериментами.

5. Результаты расчетов

Для численной реализации предложенного метода решения оптимизационной задачи разработан комплекс программ. Рассматривалось обтекание двухэлементного профиля полностью турбулентным сжимаемым потоком при $M_\infty = 0.3$ и $Re_\infty = 1.45 \cdot 10^7$.

В качестве исходных задавались параметрические распределения $\lambda_k = \lambda_k(s_k, d_j)$, $k = 1, 2$, приведенной скорости «полочного» типа из класса ГЦРС. Из соображений безотрывности обтекания осуществлялся выбор длины полки (участок $\lambda = \lambda_{\max}$) и достраивалось распределение λ_k на участке торможения. Оптимальный выбор λ_k осуществлен подбором свободных параметров d_j ($j = 1, \dots, 5$) (рис. 2, а).

Пример численного решения оптимизационной задачи, когда геометрические ограничения (1, 2) не учитывались, приведен на рис. 3 (штриховая кривая на рис. 3, а соответствует распределению приведенной скорости $\lambda'_2 = \lambda_2/\lambda_\infty$ основного профиля, сплошная кривая – распределению $\lambda'_1 = \lambda_1/\lambda_\infty$ закрылка). Ясно,

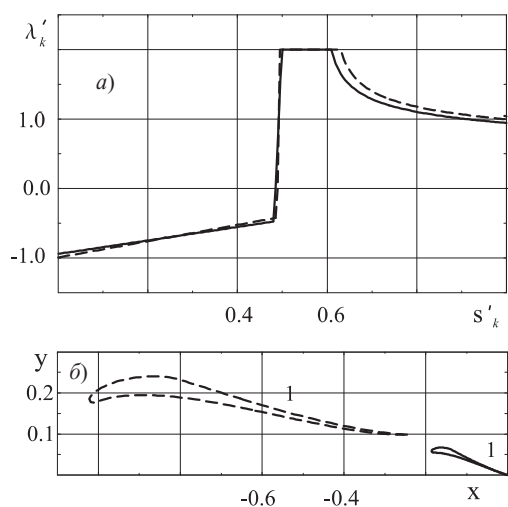


Рис. 3. Распределения приведенной скорости (а) и контур (б) оптимального двухэлементного профиля без учета геометрических ограничений

Табл. 1

№ профиля	b_1	c_1^*	c_1^{**}	b_2	c_2^*	c_2^{**}	C_x	C_y	K
1	0.19	0.2	7.4	0.78	0.7	5.9	0.0086	1.54	179
2	0.19	1.0	15.8	0.76	6.8	20.2	0.0130	1.47	113

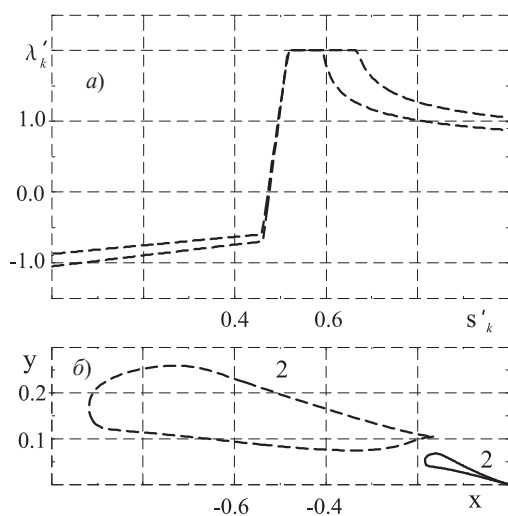


Рис. 4. Распределения приведенной скорости (а) и контур (б) оптимального двухэлементного профиля с учетом геометрических ограничений

что физическая реализация таких тонких профилей на практике затруднительна. Действительно, в результате оптимизации максимальная толщина каждого из элементов профиля не превысила 8% хорды элемента, а с приближением к задней кромке их толщина снизилась и составила в точке 0.85 хорды 0.2% и 0.7% соответственно (см. табл. 1, профиль 1).

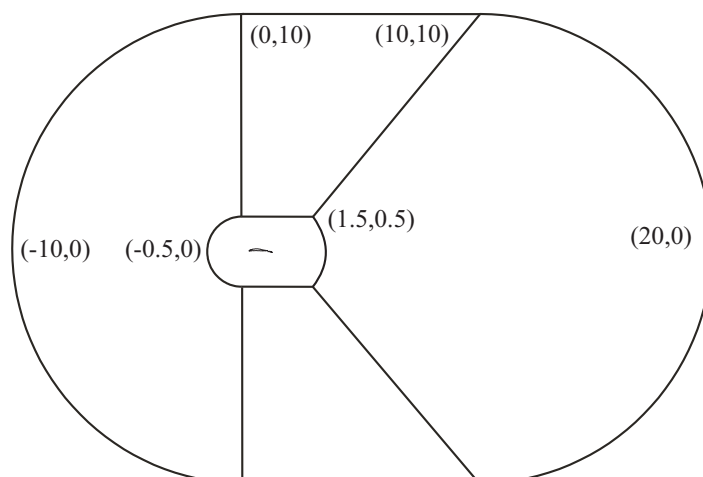


Рис. 5. Расчетная сетка: область на бесконечности

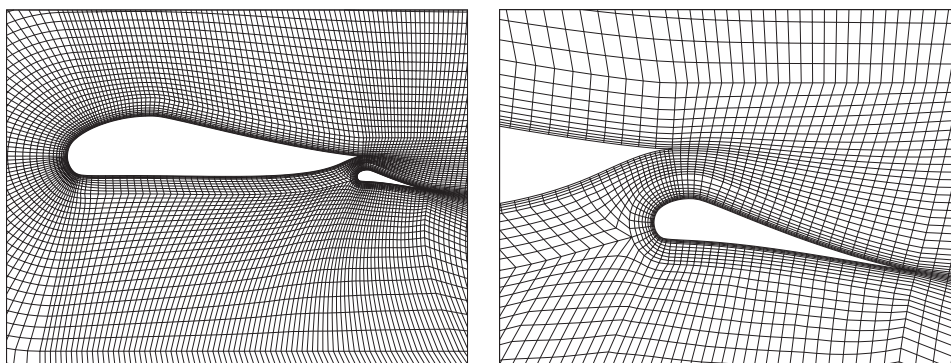


Рис. 6. Расчетная сетка: области, прилегающие к контурам

На рис. 4 приведен результат решения оптимизационной задачи в полной постановке для $c' = 1\%$, $c'' = 10\%$, $c''' = 25\%$, $x_{k1} = 0.1$, $x_{k2} = 0.85$, $k = 1, 2$. Здесь основной профиль и соответствующее ему распределение $\lambda'_2 = \lambda_2/\lambda_\infty$ изображены штриховой кривой, а закрылок и распределение $\lambda'_1 = \lambda_1/\lambda_\infty$ – сплошной.

Полученный двухэлементный профиль удовлетворяет всем требованиям класса искомых решений. Увеличение толщины профиля до приемлемых значений привело к снижению коэффициента C_y подъемной силы на 4.5% по сравнению с профилем 1 (рис. 3) и значительному (более 50%) увеличению коэффициента C_x сопротивления, что негативно сказалось на величине K аэродинамического качества (см. табл. 1, профиль 2).

6. Тестовый расчет

Для обоснования достоверности полученных результатов был проведен прямой расчет обтекания оптимального профиля 2 (рис. 4) установившимся дозвуковым потоком вязкого газа. Дискретизация области течения осуществлена структурированной мультиблочной сеткой с прямоугольными ячейками (рис. 5, 6; размеры указаны в хордах: $b = b_1 + b_2$).

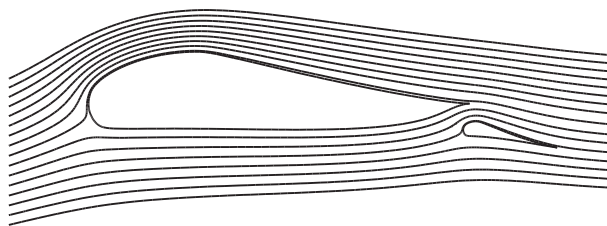


Рис. 7. Линии тока

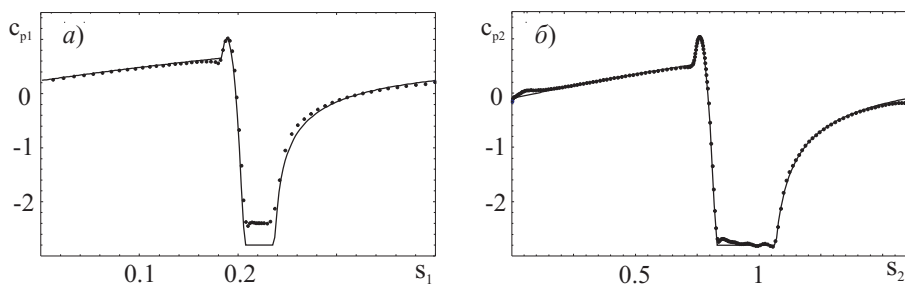


Рис. 8. Сравнение результатов расчета c_{pk} с данными программы FLUENT

Характеристики набегающего потока следующие: $M_\infty = 0.3$, $Re_\infty = 1.45 \cdot 10^7$, плотность $\rho_\infty = 1.29 \text{ кг/м}^3$, давление $p_\infty = 101325 \text{ Па}$, температура $T_\infty = 273 \text{ К}$, скорость $v_\infty = 100 \text{ м/с}$, динамический коэффициент вязкости $\mu_\infty = 1.7894 \cdot 10^{-5} \text{ кг/мс}^{-1}$, характерный линейный размер $l = 2 \text{ м}$.

Расчет проводился для однопараметрической модели турбулентности Спаларта–Аллмараса с использованием программы FLUENT. Результаты расчета представлены на рис. 7, 8.

На рис. 7 изображены линии тока.

Расчет поля чисел Маха показал, что в областях разрежения давления, примыкающих к верхней поверхности основного профиля и закрылка и соответствующих «полочным» участкам распределений приведенной скорости λ_k , течение – дозвуковое, а величина M варьируется в пределах $0.55 \div 0.58$.

На рис. 8 приведено сравнение графиков коэффициентов давления c_{pk} , $k = 1, 2$, полученных из решения обратной задачи, с данными, вычисленными при помощи программы FLUENT (значения c_{pk} , найденные при помощи программы FLUENT, отмечены точками). В целом графики удовлетворительно согласуются. Некоторое рассогласование коэффициентов давления c_{p1} на «полочном» участке закрылка объясняется влиянием «следа» за основным профилем на характеристики закрылка, которое в обратной задаче не учитывалось. Последнее обстоятельство, хотя и является одной из причин несовпадения величины коэффициента сопротивления $C_x = 0.0253$ с величиной $C_x = 0.0130$, полученной ранее в ходе решения задачи, не оказало значительного влияния на расчет коэффициента подъемной силы $C_y = 1.44$ (разница в 2% по сравнению с $C_y = 1.47$, см. табл. 1).

Заключение

Решена задача оптимизации формы двухэлементного крылового профиля, обладающего максимальным коэффициентом подъемной силы при безотрывном обтекании дозвуковым потоком вязкого газа. При решении задачи использовались

методы теории обратных краевых задач для аналитических функций. Вычислительный эксперимент подтвердил сходимость описанного процесса. Приведены примеры расчетов оптимального профиля с закрылком. Показано, что учет геометрических ограничений приводит к незначительному снижению коэффициента подъемной силы искомого профиля.

Summary

P.A. Volkov, N.B. Ilinskiy. About the Problem of Two-Element Airfoil Optimization.

A numerical solution is presented for the problem of finding an optimal two-element wing airfoil shape with maximum lift coefficient flowed by a subsonic viscous non-separation stream. The solution method is based on the theory of inverse boundary-value problem of aerohydrodynamics for analytical functions. The effects of viscosity and compressibility within the framework of boundary layer theory and the Chaplygin's gas model are taken into account.

Key words: optimization, boundary layer, Chaplygin's gas, inverse boundary-value problem of aerohydrodynamics, two-element airfoil.

Литература

1. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1994. – 440 с.
2. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНТИ, 1989. – Т. 23. – С. 3–115.
3. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
4. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.;Л.: Гостехиздат, 1950. – 444 с.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
6. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
7. *Бартенев О.В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 2. – М.: Диалог-МИФИ, 2001. – 320 с.

Поступила в редакцию
11.12.07

Волков Павел – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник отдела краевых задач НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Ильинский Николай Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом краевых задач НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Nikolay.Ilinskiy@ksu.ru*