

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОГО МОМЕНТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Чан Ле Тхай¹, Д.В. Тарлаковский^{1,2}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия

²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия

Аннотация

Рассматривается упругое однородное изотропное полупространство, заполненное средой Коссера. Деформированное состояние характеризуется независимыми векторами перемещения и поворота. В начальный момент времени и на бесконечности возмущения отсутствуют. На границе полупространства заданы нормальные перемещения. Все компоненты напряженно-деформированного состояния полагаются ограниченными. Используется цилиндрическая система координат с осью, направленной вглубь полупространства. С учетом осевой симметрии разрешающая система уравнений включает в себя три гиперболических уравнений относительно скалярного потенциала и ненулевых компонент векторного потенциала и вектора поворота. Компоненты векторов перемещений, угла поворота, тензоров напряжений и моментов напряжений связаны с потенциалы известными соотношениями.

Решение задачи ищется в виде обобщенных сверток заданного перемещения с соответствующими поверхностными функциями влияния. Для построения последних применяются преобразования Ханкеля по радиусу и Лапласа по времени. Все изображения представляются в виде трех слагаемых. Первые из них соответствуют волне растяжения-сжатия, а два других определяются связанными между собой волнами сдвига и вращения. Оригиналы первых составляющих находятся точно с помощью последовательного обращения преобразований. Для остальных же слагаемых используется разложение в степенные ряды по малому параметру, характеризующему связь волн сдвига и вращения. Найдены изображения первых двух коэффициентов этих рядов. Соответствующие оригиналы определяются последовательным обращением преобразований.

Приведены примеры расчетов регулярных составляющих функций влияния зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице.

Ключевые слова: среда Коссера, поверхностные функции влияния, метод малого параметра, интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля, связь плоской и осесимметричной задач

Введение

При исследовании динамических процессов в композиционных материалах, которые в последнее время широко используются в конструкциях объектов авиационной и ракетно-космической техники [1–7], требуются модели сплошных сред, отличные от традиционных. Например, классическая теория упругости основывается на идеализированной модели упругого континуума, в которой материальная

частица совпадает с точкой, а деформированное состояние описывается перемещением точки. Несмотря на то что теория упругости успешно описывает распределение напряжений в конструкциях, существуют и модели сред, учитывающих внутренний момент количества движения, при которых она становится неприменимой.

Общая теория моментной упругости впервые была разработана братьями Э. и Ф. Коссера в 1910 г. [8]. Здесь в отличие от классической теории упругости деформация среды описывается не только вектором перемещения \mathbf{u} , но и вектором поворота ω , являющимся функцией координат частицы и времени. Линейная теория среды Коссера рассмотрена в статье [9], а дополнительный учет температурного поля приведен в [10–14]. В статье [11] исследована начальнo-краевая задача линейной динамики термоупругих оболочек Коссера с полостями. В работе [15] рассматривается задача о распространении поверхностных волн в среде Коссера (случай полупространства). В [16] исследовано распространение нестационарных поверхностных возмущений для полуплоскости, заполненной псевдоконтинуумом Коссера. Осесимметричные волны в аналогичной среде со сферическими границами рассмотрены в работах [17–19]. Публикации о распространении нестационарных поверхностных возмущений в полупространстве, занятом средой Коссера, практически отсутствуют. Одна из таких задач и рассматривается ниже.

1. Постановка задачи

В цилиндрической системе координат r, ϑ, z ($r \geq 0, -\pi < \vartheta \leq \pi, z \in R$) рассматривается полупространство $z \geq 0$.

Предполагается, что полупространство заполнено упругой однородной изотропной средой Коссера. Ее осесимметричное движение описывается следующими соотношениями:

– уравнения относительно скалярного потенциала φ и ненулевой компоненты ψ векторного потенциала перемещений (точками обозначены производные по времени):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \Delta\varphi, & \ddot{\psi} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \Delta\psi + 2\alpha\omega - (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\psi}{r^2}, \\ \ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2} \Delta\omega - 2\alpha\beta\Delta\psi - 4\alpha\beta\omega - \frac{1}{r^2} (\gamma_2^{-2}\omega - 2\alpha\beta\psi); \end{aligned} \quad (1)$$

– связь касательного u и нормального w перемещений с потенциалами:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}; \quad (2)$$

– связь напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), & \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{u}{r} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), & \sigma_{rz} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + 2\alpha\omega, \\ \sigma_{zr} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha\omega, \\ \mu_{r\vartheta} &= \frac{\partial\omega}{\partial r} - \kappa \frac{\omega}{r}, & \mu_{\vartheta r} &= -\frac{\omega}{r} + \kappa \frac{\partial\omega}{\partial r}, & \mu_{z\vartheta} &= \frac{\partial\omega}{\partial z}, & \mu_{\vartheta z} &= \kappa \frac{\partial\omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ второе и третье уравнения в (1) становятся независимыми.

Здесь использованы безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в последующем изложении опущены):

$$\begin{aligned}
 u'_i &= \frac{u_i}{L}, & r' &= \frac{r}{L}, & z' &= \frac{z}{L}, & \tau &= \frac{c_1 t}{L}, \\
 \varphi' &= \frac{\varphi}{L^2}, & \psi' &= \frac{\psi}{L^2}, & \omega' &= \omega, & \gamma_1^2 &= \frac{c_1^2}{c_2^2}, & \gamma_2^2 &= \frac{c_1^2}{c_3^2}, \\
 \kappa &= \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, & \sigma'_{\xi\varsigma} &= \frac{\sigma_{\xi\varsigma}}{\lambda + 2\mu}, & \mu'_{\xi\varsigma} &= \frac{L\mu_{\xi\varsigma}}{\gamma + \varepsilon}, & \beta &= \frac{\rho L^2}{J}, \\
 c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, & c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho}, & c_3^2 &= \frac{\gamma + \varepsilon}{J}, \\
 \alpha' &= \frac{\alpha}{\rho c_1^2} = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, & \vartheta &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2\gamma_1^{-2}, & \{\xi, \varsigma\} &= \{r, \vartheta, z\},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические параметры моментной среды; ρ – плотность среды; t – размерное время; L – некоторый характерный линейный размер; J – мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции).

В начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0 \tag{5}$$

Все искомые функции предполагаются ограниченными, а на граничной плоскости касательные силы и угол поворота равны нулю и заданы нормальные перемещения:

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \tag{6}$$

Искомые компоненты напряженно-деформированного состояния, перемещения и угол поворота как решения начально-краевой задачи (1)–(3), (5) и (6) записываем в виде свертки по времени и обобщенной свертки по радиусу r (они обозначаются звездочками). Под последней понимается следующий интеграл:

$$f(r) * G_\nu = \int_0^\infty f(\xi) G_\nu(r, \xi, z, \tau) d\xi.$$

Здесь $G_\nu(r, \xi, z, \tau)$ – поверхностные функции влияния, где индекс ν принимает одно из следующих значений: $u, w, \omega, zz, rz, zr, r\vartheta, \vartheta r, z\vartheta$ или ϑz .

В приводимых ниже равенствах нижнему индексу функции влияния соответствуют компоненты напряженно-деформированного состояния $U_\nu(r, z, \tau)$, под которыми понимаются $u, w, \omega, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{zr}, \mu_{r\vartheta}, \mu_{\vartheta r}, \mu_{z\vartheta}$ или $\mu_{\vartheta z}$:

$$U_\nu(r, z, \tau) = w_0(r, \tau) * G_\nu,$$

здесь

$$\begin{aligned}
 G_u &= u, & G_w &= w, & G_\omega &= \omega, & G_{zz} &= \sigma_{zz}, & G_{rz} &= \sigma_{rz}, \\
 G_{zr} &= \sigma_{zr}, & G_{r\vartheta} &= \mu_{r\vartheta}, & G_{\vartheta r} &= \mu_{\vartheta r}, & G_{z\vartheta} &= \mu_{z\vartheta}, & G_{\vartheta z} &= \mu_{\vartheta z}
 \end{aligned} \tag{7}$$

есть решения уравнений (1) с начальными условиями (5) и следующими граничными условиями:

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(r - \xi) \delta(\tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \tag{8}$$

Здесь и далее $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака [20, 21].

2. Изображения поверхностных функций влияния

К начально-краевой задаче (1)–(3), (5) и (8) применяем преобразование Лапласа по времени τ и Ханкеля по радиусу r нулевого порядка “0” для φ , w и первого порядка “1” для ψ , u , ω (значки “L” и “H” указывают на соответствующие изображения; s и q – параметры этих преобразований). Тогда уравнения (1) переходят в следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{HL}}{\partial z^2} - (q^2 + s^2) \varphi^{HL} &= 0, \\ (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - [(\gamma_1^{-2} + \alpha) q^2 + s^2] \psi^{HL} + 2\alpha \omega^{HL} &= 0, \\ \gamma_2^{-2} \frac{\partial^2 \omega^{HL}}{\partial z^2} - 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - (\gamma_2^{-2} q^2 + s^2 + 4\alpha\beta) \omega^{HL} + 2\alpha\beta q^2 \psi^{HL} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Изображения необходимых для отыскания функций Грина перемещений и напряжений, а также граничных условий (8) определяются по формулам

$$u^{HL} = -q\varphi^{HL} - \frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, \quad w^{HL} = \frac{\partial \varphi^{HL}}{\partial z} + q\psi^{HL}; \quad (10)$$

$$\sigma_{zr}^{HL} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u^{HL}}{\partial z} - (\gamma_1^{-2} - \alpha) qw^{HL} - 2\alpha\omega^{HL}; \quad (11)$$

$$\sigma_{zr}^{HL}|_{z=0} = 0, \quad w^{HL}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega^{HL}|_{z=0} = 0. \quad (12)$$

Общее решение первого уравнения в (9) с учетом его ограниченности имеет вид

$$\varphi^{HL}(q, z, s) = C_0(q, s) E_0(q, z, s), \quad (13)$$

$$E_0 = \exp(-k_0(q, s)z), \quad k_0(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_0^2 s^2}, \quad \gamma_0 = 1, \quad \operatorname{Re} \sqrt{q^2 + \gamma_0^2 s^2} > 0,$$

где C_0 – постоянная интегрирования.

Из двух последних уравнений в (9) получаем равенство

$$\omega^{HL} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ [(\gamma_1^{-2} + \alpha) q^2 + s^2] \psi^{HL} - (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} \right\} \quad (14)$$

и уравнение четвертого порядка

$$A \frac{\partial^4 \psi^{HL}}{\partial z^4} - B \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} + C \psi^{HL} = 0, \quad (15)$$

где

$$A = P_0 + \alpha Q_0, \quad B = P_1(q^2, s^2) + \alpha Q_1(q^2, s^2), \quad C = P_2(q^2, s^2) + \alpha Q_2(q^2, s^2),$$

$$P_0 = \gamma_1^{-2} \gamma_2^{-2}, \quad Q_0 = \gamma_2^{-2},$$

$$P_1(q, s) = 2\gamma_1^{-2} \gamma_2^{-2} q + \gamma^2 s, \quad Q_1(q, s) = 2\gamma_2^{-2} q + s + 4\beta \gamma_1^{-2},$$

$$P_2(q, s) = \gamma_1^{-2} \gamma_2^{-2} q^2 + \gamma^2 qs + s^2, \quad Q_2(q, s) = \gamma_2^{-2} q^2 + qs + 4\beta \gamma_1^{-2} q + 4\beta s,$$

$$\gamma^2 = \gamma_1^{-2} + \gamma_2^{-2}.$$

Соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению (15) характеристическое уравнение есть

$$A\kappa^2 - B\kappa + C = 0, \quad \kappa = k^2. \quad (16)$$

Его корни вычисляются по формулам

$$k_{1,2}(q, s) = \sqrt{\kappa_{1,2}(q, s)}, \quad \kappa_{1,2}(q, s) = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad \operatorname{Re} k_{1,2} > 0, \quad \Delta = B^2 - 4AC. \quad (17)$$

Тогда ограниченное общее решение уравнения (15) записывается следующим образом:

$$\psi^{HL}(q, z, s) = C_1(q, s) E_1 + C_2(q, s) E_2 = \sum_{l=1}^2 C_l(q, s) E_l, \quad E_l = e^{-k_l(q, s)z}, \quad (18)$$

где C_l – произвольные постоянные.

Подставляя (13) и (18) в равенства (10) и (11) с учетом (14), получаем

$$\begin{aligned} u^{HL} &= -qC_0E_0 + \sum_{l=1}^2 k_l C_l E_l, & w^{HL} &= -k_0 C_0 E_0 + q \sum_{l=1}^2 C_l E_l, \\ \omega^{HL} &= \frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s) C_l E_l, & \gamma_1^2 \sigma_{zr}^{HL} &= 2qk_0 C_0 E_0 - \sum_{l=1}^2 k_3^2(q, s) C_l E_l, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$T_l(q, s) = (\gamma_1^{-2} + \alpha) [q^2 - k_l^2(q, s)] + s^2, \quad k_3^2(q, s) = 2q^2 + \gamma_1^2 s^2. \quad (20)$$

Использование этих равенств и граничных условий (12) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно C_0 , C_1 и C_2 :

$$\mathbf{AC} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2qk_0(q, s) & -k_3^2(q, s) & -k_3^2(q, s) \\ -k_0(q, s) & q & q \\ 0 & T_1(q, s) & T_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0(q, s) \\ C_1(q, s) \\ C_2(q, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (21) имеет вид

$$\begin{aligned} C_0(q, s) &= -\frac{k_3^2(q, s)}{2\pi\gamma_1^2 s^2 k_0(q, s)}, & C_1(q, s) &= \frac{qT_2(q, s)}{\pi\gamma_1^2 s^2 R(q, s)}, \\ C_2(q, s) &= -\frac{qT_1(q, s)}{\pi\gamma_1^2 s^2 R(q, s)}, & R(q, s) &= T_1(q, s) - T_2(q, s). \end{aligned} \quad (22)$$

Принимая во внимание равенства (22), из (19) с учетом обозначений (7) находим изображения функций влияния, соответствующих (10) и (14):

$$G_\chi^{HL} = \sum_{j=0}^2 G_{\chi j}^{HL}, \quad \chi = \{u, w, \omega\}. \quad (23)$$

Здесь

$$G_{u0}^{HL} = \frac{qk_3^2(q, s)}{2\pi\gamma_1^2 s^2 k_0(q, s)} E_0(q, z, s), \quad G_{w0}^{HL} = \frac{k_3^2(q, s)}{2\pi\gamma_1^2 s^2} E_0(q, z, s), \quad G_{\omega 0}^{HL} = 0; \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
G_{u1}^{HL} &= \frac{qT_2(q, s)k_1(q, s)}{\pi\gamma_1^2s^2R(q, s)}E_1(q, z, s), & G_{u2}^{HL} &= -\frac{qT_1(q, s)k_2(q, s)}{\pi\gamma_1^2s^2R(q, s)}E_2(q, z, s), \\
G_{w1}^{HL} &= \frac{q^2T_2(q, s)}{\pi\gamma_1^2s^2R(q, s)}E_1(q, z, s), & G_{w2}^{HL} &= -\frac{q^2T_1(q, s)}{\pi\gamma_1^2s^2R(q, s)}E_2(q, z, s), \\
G_{\omega 1}^{HL} &= \frac{qT_1(q, s)T_2(q, s)}{2\alpha\pi\gamma_1^2s^2R(q, s)}E_1(q, z, s), & G_{\omega 2}^{HL} &= -\frac{qT_1(q, s)T_2(q, s)}{2\alpha\pi\gamma_1^2s^2R(q, s)}E_2(q, z, s).
\end{aligned} \tag{25}$$

3. Оригиналы функций $G_{\chi 0}^{HL}$

Оригиналы функций в (24) могут быть найдены последовательным обращением преобразований с использованием их свойств. Для этого нетривиальные изображения представляем в виде

$$\begin{aligned}
G_{u0}^{HL}(q, z, s) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{q^2}{\gamma_1^2s^2} + \frac{1}{2} \right) f_{10}^{H_1L}(q, s, z), \\
G_{w0}^{HL}(q, z, s) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{q^2}{\gamma_1^2s^2} + \frac{1}{2} \right) f_{20}^{H_0L}(q, s, z),
\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
f_{1j}^{H_1L}(q, s, z) &= \frac{q \exp\left(-z\sqrt{q^2 + \gamma_j^2s^2}\right)}{\sqrt{q^2 + \gamma_j^2s^2}}, \\
f_{2j}^{H_0L}(q, s, z) &= \exp\left(-z\sqrt{q^2 + \gamma_j^2s^2}\right), \quad j = 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{27}$$

Сначала для функций (27) с помощью таблиц, приведенных в [21], находим оригиналы преобразования Ханкеля:

$$\begin{aligned}
f_{1j}^L(r, s, z) &= \frac{r}{r_3^3} (1 + \gamma_j r_3 s) \exp(-\gamma_j r_3 s), \\
f_{2j}^L(q, s, z) &= \frac{z}{r_3^3} (1 + \gamma_j r_3 s) \exp(-\gamma_j r_3 s), \\
r_3 &= \sqrt{r^2 + z^2}.
\end{aligned}$$

Затем обращаем преобразование Лапласа [22]:

$$\begin{aligned}
f_{1j}(r, z, \tau) &= \frac{r}{r_3^3} [\delta(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3)], \\
f_{2j}(r, z, \tau) &= \frac{z}{r_3^3} [\delta(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3)].
\end{aligned} \tag{28}$$

Остальные оригиналы определяем с использованием свойств преобразований [21–25]:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{q^2}{s^2} f_{1j}^{H_1L}(q, s, z) \right]^{H_1^{-1}L^{-1}} &= \frac{r}{r_3^6} [3\tau(4z^2 - r^2)H(\tau - \gamma_j r_3) + \\
&\quad + 2\gamma_j r_3(2z^2 - r^2)\delta(\tau - \gamma_j r_3) - \gamma_j^3 r^2 r_3^2 \delta'(\tau - \gamma_j r_3)], \\
\left[\frac{q^2}{s^2} f_{2j}^{H_0L}(q, s, z) \right]^{H_0^{-1}L^{-1}} &= \frac{z}{r_3^6} [3\tau(2z^2 - 3r^2)H(\tau - \gamma_j r_3) + \\
&\quad + 2\gamma_j^2 r_3(z^2 - 2r^2)\delta(\tau - \gamma_j r_3) - \gamma_j^3 r^2 r_3^2 \delta'(\tau - \gamma_j r_3)].
\end{aligned} \tag{29}$$

Применяя (28) и (29), оригиналы функций (26) представляем так:

$$\begin{aligned} G_{u0}(r, z, \tau) &= u_{0r}(r, z, \tau) + u_{0s}(r, z, \tau), \\ G_{w0}(r, z, \tau) &= w_{0r}(r, z, \tau) + w_{0s}(r, z, \tau), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_{0r}(r, z, \tau) &= \frac{3r\tau(4z^2 - r^2)}{\pi\gamma_1^2 r_3^6} H(\tau - \gamma_0 r_3), \\ w_{0r}(r, z, \tau) &= \frac{3\tau z(2z^2 - 3r^2)}{\pi\gamma_1^2 r_3^6} H(\tau - \gamma_0 r_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{0s}(r, z, \tau) &= \frac{1}{2\pi\gamma_1^2 r_3^5} \{ r [4\gamma_0(2z^2 - r^2) + \gamma_1^2 r_3^2] \delta(\tau - \gamma_0 r_3) + \\ &\quad + \gamma_0 r r_3 (\gamma_1^2 r_3^2 - 2\gamma_0^2 r^2) \delta'(\tau - \gamma_0 r_3) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{0s}(r, z, \tau) &= \frac{z}{2\pi\gamma_1^2 r_3^5} \{ [4\gamma_0^2(z^2 - 2r^2) + \gamma_1^2 r_3^2] \delta(\tau - \gamma_0 r_3) + \\ &\quad + \gamma_0 r r_3 (r_3 \gamma_1^2 - 2\gamma_0^2 r) \delta'(\tau - \gamma_0 r_3) \}. \end{aligned}$$

Остальные функции $G_{\chi 0}$ находятся с помощью формул (3).

4. Оригиналы остальных функций влияния

Поскольку найти оригиналы остальных функций влияния в аналитическом виде не представляется возможным, раскладываем все искомые функции в степенные ряды по малому параметру α (коэффициентам рядов соответствует дополнительный нижний индекс). А именно функции (23), (25) и κ в уравнении (16) представляем в виде

$$G_{\chi}(r, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} G_{\chi m}(r, z, \tau) \alpha^m, \tag{30}$$

$$G_{\chi j}(r, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} G_{\chi j m}(r, z, \tau) \alpha^m, \quad j = 1, 2;$$

$$\kappa = \sum_{m=0}^{\infty} \kappa_m \alpha^m. \tag{31}$$

С помощью последнего ряда находим

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\kappa}_m \alpha^m, \quad \tilde{\kappa}_0 = \kappa_0^2, \\ \tilde{\kappa}_1 &= 2\kappa_1 \kappa_0, \quad \tilde{\kappa}_m = 2\kappa_m \kappa_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \kappa_{m-j} \kappa_j, \quad m \geq 2. \end{aligned} \tag{32}$$

Подставляя (31) и (32) в уравнение (16), получаем равенство

$$\begin{aligned} P_0 \kappa_0^2 - P_1(q^2, s^2) \kappa_0 + P_2(q^2, s^2) + \sum_{m=1}^{\infty} (P_0 \tilde{\kappa}_m + Q_0 \tilde{\kappa}_{m-1}) \alpha^m - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} [P_1(q^2, s^2) \kappa_m + Q_1(q^2, s^2) \kappa_{m-1}] \alpha^m + Q_2(q^2, s^2) \alpha = 0, \end{aligned}$$

из которого вытекает рекуррентная система уравнений:

$$P_0 \kappa_0^2 - P_1 (q^2, s^2) \kappa_0 + P_2 (q^2, s^2) = 0; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} P_0 \tilde{\kappa}_1 + Q_0 \tilde{\kappa}_0 - P_1 (q^2, s^2) \kappa_1 - Q_1 (q^2, s^2) \kappa_0 + Q_2 (q^2, s^2) = \\ = 2P_0 \kappa_1 \kappa_0 + Q_0 \kappa_0^2 - P_1 (q^2, s^2) \kappa_1 - Q_1 (q^2, s^2) \kappa_0 + Q_2 (q^2, s^2) = 0; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} P_0 \left(2\kappa_m \kappa_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \kappa_{m-j} \kappa_j \right) + Q_0 \sum_{j=0}^{m-1} \kappa_{m-1-j} \kappa_j - P_1 (q^2, s^2) \kappa_m - \\ - Q_1 (q^2, s^2) \kappa_{m-1} = 0, \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (35)$$

Корни уравнения (33) имеют вид (второй индекс здесь и далее указывает на номер ветви коэффициента κ_m в (31) в соответствии с (17)):

$$\kappa_{0l} = q^2 + \gamma_l^2 s^2, \quad l = 1, 2. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (34), а затем полученные результаты в (34) и (35), приходим к следующим равенствам для второго и третьего коэффициентов разложения (31):

$$\kappa_{11} = -\gamma_1^4 s^2, \quad \kappa_{12} = 4\beta\gamma_2^2, \quad (37)$$

$$\kappa_{21} = \frac{4\beta\gamma_1^2}{\gamma_1^{-2} - \gamma_2^{-2}} + \gamma_1^6 s^2, \quad \kappa_{22} = \frac{4\beta\gamma_2^2}{\gamma_2^{-2} - \gamma_1^{-2}}. \quad (38)$$

Коэффициенты разложений

$$k_l = \sum_{m=0}^{\infty} k_{ml} \alpha^m, \quad l = 1, 2$$

находим с использованием (17) и (36)–(38):

$$k_{0l} = \sqrt{\kappa_{0l}}, \quad k_{1l} = \frac{\kappa_{1l}}{2k_{0l}}, \quad k_{2l} = \frac{\kappa_{2l} - k_{1l}^2}{2k_{0l}}, \dots \quad (39)$$

Далее в окончательных формулах ограничиваемся линейными по α членами и приближенные равенства везде заменяем точными:

$$k_l = k_{0l} + \alpha k_{1l}.$$

Соответствующие равенства для экспонент в (18) имеют вид

$$E_l = (1 - k_{1l}\alpha z) \exp(-k_{0l}z). \quad (40)$$

Здесь в соответствии с (39)

$$k_{0l} = \sqrt{q^2 + \gamma_l^2 s^2}, \quad l = 1, 2, \quad k_{11} = -\frac{\gamma_1^4 s^2}{2k_{01}}, \quad k_{12} = \frac{2\beta\gamma_2^2}{k_{02}}. \quad (41)$$

Кроме того, с учетом (36)–(38) и (41) строим линейные по α представления функций $T_l(q, s)$ и $R(q, s)$ в (20) и (22):

$$T_1(q, s) = T_{12}(q, s) \alpha^2, \quad T_{12}(q, s) = -\frac{4\beta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2},$$

$$T_2(q, s) = T_{20}(q, s) + \alpha T_{21}(q, s),$$

$$T_{20}(q, s) = \gamma_1^{-2} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2, \quad T_{21}(q, s) = -\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 (4\beta + \gamma_1^2 s^2),$$

$$R(q, s) = T_1(q, s) - T_2(q, s) = -T_{20}(q, s) - \alpha T_{21}(q, s).$$

Подставляя их в (25), с учетом (40) получаем следующие коэффициенты рядов (30):

$$\begin{aligned} G_{u10}^{HL}(q, z, s) &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{q^2}{\gamma_1^2 s^2} + 1 \right) f_{11}^{HL}(q, s, z), \\ G_{u11}^{HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^2}{2\pi} [f_{11}^{HL}(q, s, z) - z f_{31}^{HL}(q, s, z)], \\ G_{u2}^{HL}(q, z, s) &= 0; \\ G_{w10}^{HL}(q, z, s) &= -\frac{1}{\pi \gamma_1^2} \frac{q^2}{s^2} f_{21}^{HL}(q, s, z), \quad G_{w11}^{HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2}{2\pi} z f_{41}^{HL}(q, s, z), \\ G_{w2}^{HL}(q, z, s) &= 0; \\ G_{\omega l 0}^{HL}(q, z, s) &= 0, \quad G_{\omega l 1}^{HL}(q, z, s) = (-1)^l \frac{T_{12}(q, s)}{2\pi \gamma_1^2 s^2} f_{3l}^{HL}(q, s, z), \quad l = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$f_{3j}^{HL}(q, s, z) = qe^{-zk_{0j}}, \quad f_{4j}^{HL}(q, s, z) = \frac{q^2 e^{-zk_{0j}}}{k_{0j}}, \quad j = 1, 2.$$

Оригиналы этих и связанной с ними функции определяются аналогично (28) [21–23]:

$$\begin{aligned} f_{3j}(r, z, \tau) &= \frac{rz}{r_3^5} [3\delta(\tau - \gamma_j r_3) + 3\gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j^2 r_3^2 \delta''(\tau - \gamma_j r_3)], \\ f_{4j}(r, z, \tau) &= \frac{1}{r_3^5} \{ (2z^2 - r^2) [\delta(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j r_3 \delta'(\tau - \gamma_j r_3)] - \\ &\quad - \gamma_j^2 r_3^2 r^2 \delta''(\tau - \gamma_j r_3) \}; \end{aligned} \tag{42}$$

$$\left[\frac{f_{3j}^{HL}(q, s, z)}{s^2} \right]^{H_1^{-1}L^{-1}} = \frac{rz}{r_3^5} [3\tau H(\tau - \gamma_j r_3) + \gamma_j^2 r_3^2 \delta(\tau - \gamma_j r_3)]. \tag{43}$$

Используя (28), (29), (42) и (43), окончательно получаем

$$\begin{aligned} G_{u1}(r, z, \tau) &= u_{1r}(r, z, \tau) + u_{1s}(r, z, \tau), \quad G_{u2}(r, z, \tau) = 0, \\ G_{w1}(r, z, \tau) &= w_{1r}(r, z, \tau) + w_{1s}(r, z, \tau), \quad G_{w2}(r, z, \tau) = 0, \\ G_{\omega 1}(r, z, \tau) &= \omega_{1r}(r, z, \tau) + \omega_{1s}(r, z, \tau), \quad G_{\omega 2}(r, z, \tau) = \omega_{2r}(r, z, \tau) + \omega_{2s}(r, z, \tau), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_{1r}(r, z, \tau) &= -\frac{3r\tau(4z^2 - r^2)}{\pi \gamma_1^2 r_3^6} H(\tau - \gamma_1 r_3), \\ u_{1s}(r, z, \tau) &= \frac{r}{\pi r_3^3} \left[-\frac{2(2z^2 - r^2)}{\gamma_1 r_3^2} - 1 + \alpha \frac{\gamma_1^2}{2} \left(1 - \frac{3z^2}{r_3^2} \right) \right] \delta(\tau - \gamma_1 r_3) + \\ &\quad + \frac{\gamma_1 r}{\pi r_3^2} \left[\frac{r^2}{r_3^2} - 1 + \alpha \frac{\gamma_1^2}{2} \left(1 - \frac{3z^2}{r_3^2} \right) \right] \delta'(\tau - \gamma_1 r_3) - \alpha \frac{\gamma_1^4 r z^2}{2\pi r_3^3} \delta''(\tau - \gamma_1 r_3), \\ w_{1r}(r, z, \tau) &= -3\tau z \frac{2z^2 - 3r^2}{\pi \gamma_1^2 r_3^6} H(\tau - \gamma_1 r_3), \\ w_{1s}(r, z, \tau) &= -\frac{z}{2\pi r_3^5} [4(z^2 - 2r^2) + \alpha \gamma_1^2 (2z^2 - r^2)] \delta(\tau - \gamma_1 r_3) + \\ &\quad + \frac{\gamma_1 z}{2\pi r_3^4} [2r^2 - \alpha \gamma_1^2 (2z^2 - r^2)] \delta'(\tau - \gamma_1 r_3) + \alpha z \frac{\gamma_1^4 r^2}{2\pi r_3^3} \delta''(\tau - \gamma_1 r_3), \end{aligned}$$

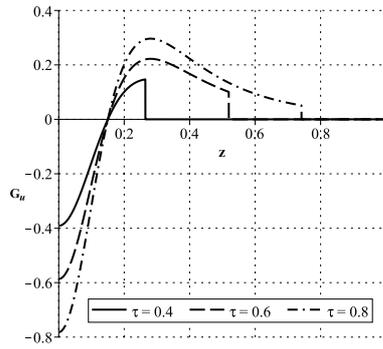


Рис. 1

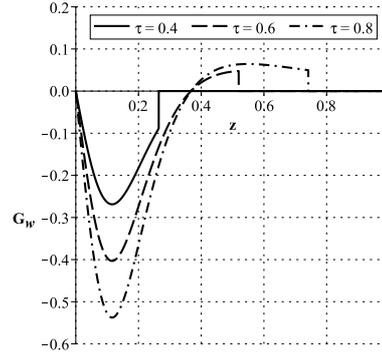


Рис. 2

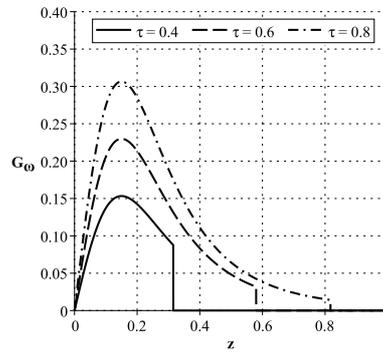


Рис. 3

$$\omega_{1r}(r, z, \tau) = \frac{6\alpha\beta\gamma_2^2 r z \tau}{\pi r_3^5 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} H(\tau - \gamma_1 r z), \quad \omega_{1s}(r, z, \tau) = \frac{2\alpha\beta\gamma_1^2 \gamma_2^2 r z}{\pi r_3^3 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \delta(\tau - \gamma_1 r z),$$

$$\omega_{2r}(r, z, \tau) = -\frac{6\alpha\beta\gamma_2^2 r z \tau}{\pi r_3^5 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} H(\tau - \gamma_2 r z), \quad \omega_{2s}(r, z, \tau) = -\frac{2\alpha\beta\gamma_2^4 r z}{\pi r_3^3 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \delta(\tau - \gamma_2 r z).$$

Остальные функции G_{χ_1} , G_{χ_2} находятся с помощью формул (3).

5. Примеры расчетов

Полагаем, что материалом, заполняющим полупространство, является зернистый композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [26]:

$$\lambda = 7.59 \text{ ГПа}; \quad \mu = 1.89 \text{ ГПа}; \quad \alpha = 7.45 \text{ МПа};$$

$$\gamma + \varepsilon = 2.64 \text{ кН}; \quad J = 0.429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}.$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1$ м. При этом безразмерные параметры в (4) таковы:

$$\gamma_1 = 6.016, \quad \gamma_2 = 0.919, \quad \beta = 120046.6, \quad \alpha' = 6.6 \cdot 10^{-6}$$

На рис. 1–3 представлены зависимости регулярных составляющих функций влияния G_u , G_w и G_ω от координаты z при $r = 0.3$ для трех моментов времени: $\tau = 0.4$, $\tau = 0.6$ и $\tau = 0.8$.

Отметим качественное отличие этих результатов от тех, которые имели бы место при использовании классической теории упругости. Разрывы первого рода

на рис. 1–3 соответствуют фронту дополнительной «моментной» (обусловленной моментной теорией упругостью) волны, распространяющейся со скоростью $1/\gamma_2$. Для модели классической упругой среды эта волна, естественно, отсутствовала бы, и аналогичные разрывы соответствовали бы фронту волны сдвига, распространяющейся со скоростью $1/\gamma_1$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-00787).

Литература

1. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V.* Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2017. – V. 208, No 1. – Art. 012002, P. 1–7. – doi: [iopscience.iop.org/1757-899X/208/1/012002](https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012002).
2. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Контактная постановка задач механики подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 1. – С. 77–85.
3. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
4. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 158, No 1. – Art. 012011, P. 1–9. – doi: [iopscience.iop.org/10.1088/1757-899X/158/1/012011](https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012011).
5. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending // Proc. Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1050–1055. – doi: [10.1016/j.proeng.2016.07.213](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.213).
6. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test // Proc. Eng. – 2016. – V. 150. – P. 1056–1062. – doi: [10.1016/j.proeng.2016.07.214](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.214).
7. *Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler // Res. J. Appl. Sci. – 2015, – V. 10, No 8. – P. 428–435. – doi: [10.3923/rjas.2015.428.435](https://doi.org/10.3923/rjas.2015.428.435).
8. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
9. *Азро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – Т. 2, № 7. – С. 1399–1409.
10. *Новацки В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
11. *Birsan M.* Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids // Mech. Res. Commun. – 2006. – V. 33, No 2. – P. 157–176. – doi: [10.1016/j.mechrescom.2005.08.008](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2005.08.008).
12. *Birsan M.* Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells // Eur. J. Mech., A: Solids. – 2009. – V. 28, No 1. – P. 94–101. – doi: [10.1016/j.euromechsol.2008.03.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.03.001).
13. *Kumar R., Gupta R.R.* Propagation of waves in transversely isotropic micropolar generalized thermoelastic half space // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2010. – V. 37, No 10. – P. 1452–1458. – doi: [10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.08.001).

14. *Nistor I.* Generalized theory of Cosserat thermoelastic media // *Bull. Inst. Polytech. Jassy.* – 1991. – V. 37, No 1. – P. 89–96.
15. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О свойствах поверхностных волн в упругой среде Коссера // Математическое моделирование систем и процессов: Сб. науч. тр. – Пермь: ПГТУ, 2006. – Вып. 14. – С. 109–113.
16. *Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // *Прикл. матем. и механика.* – 2012. – Т. 76, Вып. 5. – С. 850–859.
17. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2011. – Т. 17, № 2. – С. 184–195.
18. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // *Электронный журнал «Труды МАИ».* – 2012. – № 53. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267/>.
19. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии.* – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 119–125.
20. *Ван Дер Поль Б., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. – М.: Иностран. лит., 1952. – 506 с.
21. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
22. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лаплас и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
23. *Сагомонян А.Я.* Волны напряжения в сплошных средах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 416 с.
24. *Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
25. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М.: Иностран. лит., 1955. – 688 с.
26. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.

Поступила в редакцию
28.02.17

Чан Ле Тхай, аспирант кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: tranlethai@yandex.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: tdvhome@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 2, pp. 231–245

Nonstationary Axisymmetric Motion of an Elastic Momentum Semi-Space under Non-Stationary Normal Surface Movements

Tran Le Thai^{a}, D.V. Tarlakovskii^{a,b**}*

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

^b*Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*

E-mail: **tranlethaivk@gmail.com*, ***tdvhome@mail.ru*

Received February 28, 2017

Abstract

An elastic homogeneous isotropic half-space filled with the Cosserat medium has been considered. The deformed state is characterized by independent displacement and rotation vectors. At the initial instant of time and at infinity, there are no perturbations. On the boundary of a half-space, normal displacements have been given. All components of the stress-strain state are supposed to be limited. A cylindrical coordinate system with an axis directed inward into the half-space has been used. With allowance for axial symmetry, the resolving system of equations includes three hyperbolic equations with respect to the scalar potential and the nonzero components of the vector potential and the rotation vector. The components of displacement vectors, rotation angle, stress tensors, and stress moments are related to the potentials by the known relationships.

The solution of the problem has been sought in the form of generalized convolutions of the given displacement with the corresponding surface influence functions. To construct the latter, Hankel transforms along the radius and Laplace transforms in time have been applied. All images have been presented in three terms. The first of them correspond to the tension-compression wave, and the other two are determined by the associated shear and rotation waves. The originals of the first components have been found accurately by means of successive reversal of the transformations. For the remaining terms, we have used expansion in power series in a small parameter characterizing the connection between the shear and rotation waves. The images of the first two coefficients of these series have been found. The corresponding originals have been determined by the successive inversion of the transformations.

Examples of calculations of the regular components of the influence of a granular composite from an aluminum shot in an epoxy matrix have been given.

Keywords: Cosserat medium, superficial influence function, Laplace and Hankel transforms, small parameter method, relation between flat and axially symmetric problems

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-08-00787).

References

1. Badriev I.B, Banderov V.V., Makarov M.V. Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 208, no. 1, art. 012002, pp. 1–7. doi: [iopscience.iop.org/1757-899X/208/1/012002](https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012002).

2. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 69–75. doi: 10.3103/S1066369X1701008X.
3. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of a physically nonlinear problem of longitudinal bending of sandwich plate with transversal-soft core. *PNRPU Mech. Bull.*, 2017, no. 1, pp. 39–51. (In Russian)
4. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, art. 012011, pp. 1–9. doi: iopscience.iop.org/10.1088/1757-899X/158/1/012011.
5. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Numerical investigation of physically nonlinear problem of sandwich plate bending. *Proc. Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1050–1055. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.213.
6. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Mathematical simulation of nonlinear problem of three-point composite sample bending test. *Proc. Eng.*, 2016, vol. 150, pp. 1056–1062. doi: 10.1016/j.proeng.2016.07.214.
7. Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paymushin V.N. Numerical solution of the issue about geometrically nonlinear behavior of sandwich plate with transversal soft filler. *Res. J. Appl. Sci.*, 2015, vol. 10, no. 8, pp. 428–435. doi: 10.3923/rjasci.2015.428.435.
8. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p. (In French)
9. Aero EL, Kuvshinskiy E.V. Basic equations of the theory of elasticity of media with rotational interaction of particles. *Fiz. Tverd. Tela*, 1960, vol. 2, no. 7, pp. 1399–1409. (In Russian)
10. Novatsky V. *Theory of Elasticity*. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (In Russian)
11. Birsan M. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids. *Mech. Res. Commun.*, 2006, vol. 33, no. 2, pp. 157–176. doi: 10.1016/j.mechrescom.2005.08.008.
12. Birsan M. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells. *Eur. J. Mech., A: Solids*, 2009, vol. 28, no. 1, pp. 94–101. doi: 10.1016/j.euromechsol.2008.03.001.
13. Kumar R., Gupta R.R. Propagation of waves in transversely isotropic micropolar generalized thermoelastic half space. *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 2010, vol. 37, no. 10, pp. 1452–1458. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.08.001.
14. Nistor I. Generalized theory of Cosserat thermoelastic media. *Bull. Inst. Polytech. Jassy*, 1991, vol. 37, no. 1, pp. 89–96.
15. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. On the properties of surface waves in the elastic Cosserat medium. *Mat. Model. Sist. Protsessov*. Perm, PGU, 2006, no. 14, pp. 109–113. (In Russian)
16. Suvorov E.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 511–518. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
17. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D.V. Propagation of non-stationary kinematic perturbations from a spherical cavity in the Cosserat pseudocontinuum. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 184–195. (In Russian)
18. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D.V. Propagation of nonstationary axisymmetric perturbations from the surface of a sphere filled with a Cousser pseudoelastic medium. *Tr. Mosk. Aviats. Inst.*, 2012, no. 53. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267/>. (In Russian)

19. Lai Thanh Tuan, Tarlakovskiy D.V. Diffraction of waves by a spherical cavity in the Cosserat pseudo-continuum. *Radioelectron., Nanosist., Inf. Tekhnol.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 119–125. (In Russian)
20. Van Der Pol B., Bremmer H. Operational Calculus based on the Two-Sided Laplace Transform. Cambridge Univ. Press, 1950. 415 p.
21. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. Waves in Continuous Media. Moscow, FIZMATLIT, 2004. 472 p. (In Russian)
22. Dech G. Guide to the Practical Use of the Laplace Transform and z-Transform. Moscow, Nauka, 1971. 288 p. (In Russian)
23. Sagomonyan A.Ya. Stress Waves in Continuous Media. Moscow, Izd. Mosk. Gos. Univ., 1985. 416 p. (In Russian)
24. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. Integral Transformations in Unsteady Problems of Mechanics. Leningrad, Sudostroyeniye, 1980. 344 p. (In Russian)
25. Sneddon I. Fourier Transforms. Courier Corp., 1995. 542 p.
26. Erofeev V.I. Wave Processes in Solids with Microstructure. Moscow, Izd. Mosk. Gos. Univ., 1999, 328 p. (In Russian)

Для цитирования: Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 231–245.

For citation: Tran Le Thai, Tarlakovskii D.V. Nonstationary axisymmetric motion of an elastic momentum semi-space under non-stationary normal surface movements. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 231–245. (In Russian)