

УДК 519.95

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334

## УТОЧНЕННЫЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ДЕШИФРАТОРА В МОДЕЛИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И КОММУТАЦИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*С.А. Ложкин, В.С. Зизов**Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
г. Москва, 119991, Россия*

### Аннотация

Рассмотрена модель клеточных схем (КС) в одном базисе из функциональных и коммутационных элементов, который построен на основе стандартного базиса  $B_0$ , состоящего из функций алгебры логики (ФАЛ)  $x_1 \& x_2$ ,  $x_1 \vee x_2$ ,  $\bar{x}_1$ . В рамках этой модели входы и выходы КС  $\Sigma$ , которым сопоставляются различные выходные и выходные булевы переменные (БП), бесповторно располагаются на границе соответствующей ей прямоугольной решетки, а сама КС  $\Sigma$  как структурно, так и функционально соответствует некоторой схеме из функциональных элементов (СФЭ) в базисе  $B_0$  с теми же наборами входных и выходных булевых переменных.

Исследована сложность (площадь) КС с  $n$  входами и  $2^n$  выходами, которая реализует систему из всех  $2^n$  элементарных конъюнкций ранга  $n$  от входных булевых переменных, то есть дешифратор порядка  $n$ . Доказано, что минимально возможная площадь клеточной схемы, реализующей дешифратор порядка  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равна  $n2^{n-1}(1 + \mathcal{O}(1/n))$ , тем самым, для нее впервые в модели КС получены так называемые асимптотические оценки высокой степени точности, то есть оценки с относительной погрешностью порядка  $\mathcal{O}(1/n)$ .

**Ключевые слова:** функциональные элементы, коммутационные элементы, клеточные схемы, площадь, дешифратор, асимптотические оценки

### Введение

Впервые модель клеточных схем (КС) в «стандартном» базисе из функциональных и коммутационных элементов была предложена в 1967 г. С.С. Кравцовым в работе [1], где под сложностью КС понималась ее площадь. Клеточная схема представляет собой математическую модель интегральных схем (ИС), которая учитывает особенности их физического синтеза. Принципиальным отличием от хорошо изученных классов схем из функциональных элементов (СФЭ) является наличие дополнительных требований на геометрию схемы, которые обеспечивают учет необходимых трассировочных ресурсов при создании ИС.

А. Альбрехт в работе [2] показал, что асимптотика функции Шеннона, характеризующей сложность самой «сложной» функции алгебры логики (ФАЛ) от  $n$  переменных при  $n = 1, 2, \dots$ , в модели [1] имеет вид  $\sigma 2^n$ , где  $\sigma$  – некоторая константа. При этом точное значение константы  $\sigma$  до сих пор неизвестно, хотя из работ [1, 2] следует, что она находится в сегменте  $\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\right]$ . В статье С.В. Грибка [3] приводится базис клеточных схем, для которого удалось получить такую же асимптотику для аналогичной функции Шеннона с константой  $\sigma = 1$ .

В ряде работ поведение сложности реализации некоторых специальных ФАЛ или систем ФАЛ в классе КС исследовалось на уровне асимптотически точных оценок как в модели КС на основе СФЭ [4–6], так и в модели КС на основе контактных схем [5, 7, 8]. В них было доказано, в частности, что для некоторых систем ФАЛ вида  $F_n = (f_1, \dots, f_{N_n})$  от  $n$  переменных,  $n = 1, 2, \dots$ , сложность их реализации в указанных классах схем асимптотически равна  $CnN_n$ , то есть равна  $CnN_n(1 \pm o(1))$ , с указанием константы  $C$ . Так, оказалось, например, что для дешифратора порядка  $n$ , то есть для системы из всех элементарных конъюнкций ранга  $n$  от  $n$  переменных, для которой  $N_n = 2^n$ , константа  $C$  в обеих моделях равна  $1/2$  и т. д. При этом в модели на базе СФЭ для указанного дешифратора было обнаружено явление антагонизма между площадью и числом функциональных элементов КС [4].

В рамках модели клеточных схем также были получены точные по порядку роста нижние оценки сложности для некоторых специальных функций и систем булевых функций. Так, Н.А. Шкаликова исследовала [9] сложность реализации плоскими схемами некоторых конкретных булевых операторов, в том числе и систем симметрических функций. Она установила, в частности, порядок роста вида  $n2^n$  для сложности дешифратора, то есть системы из всех  $2^n$  элементарных конъюнкций ранга  $n$  от  $n$  переменных. В работе Ю. Хромковича, С.А. Ложкина и др. [10] получены нижняя и верхняя оценки для одной конкретной булевой функции от  $n$  переменных с порядком роста  $n^2$ .

Исследовались вопросы сложности реализации в модели КС функций из более «узких» по сравнению с классом всех функций, но, тем не менее, достаточно «мощных» классов функций, а также частичных функций. Д.А. Жуков предложил [11] метод синтеза оптимальных по порядку площади и глубине КС, реализующих частичные булевы функции. В работе А.Ю. Яблонской [12] была установлена асимптотика площади  $C \frac{2^n}{\log n}$  для площади КС с ограниченной высотой и кратными входами, реализующих функции из ненулевого инвариантного класса, где константа  $C$  зависит от мощности этого класса.

В зарубежных источниках аналогичная математическая модель была описана К.Д. Томпсоном в работе [13]. Модель является основной для исследований, связанных с ИС. Ее недостатком считается то, что она не учитывает возникающих при распространении сигнала задержек. В статье Б. Чазелле и М. Лоуис [14] была предложена альтернативная модель, исправляющая этот недостаток. Подробное исследование Г. Биларди, М. Прадчи, Ф.П. Препарат [15] возможностей обеих моделей и их практического применения показало, что модель плоских схем Томпсона является удовлетворительным приближением для ИС, по крайней мере для монокристаллических систем. Более того, в случаях, когда модель не может верно отразить все особенности проектируемых систем, она остается точным приближением для небольших участков (отдельных компонентов) ИС.

Имеется ряд работ, в том числе упоминавшаяся работа [11], в которых КС оптимизируются как по площади, так и по некоторым другим параметрам, таким как глубина, мощность, средняя мощность, динамическая активность. Например, О.В. Черемисин в работе [21] исследовал меру активности клеточных схем и показал, что дешифратор нельзя реализовать схемой, одновременно оптимальной по порядку роста площади и активности, обнаружив, тем самым, их антагонизм (ср. [4]). В работах Г.В. Калачева [16–18] исследованы вопросы синтеза КС, которые реализуют как произвольные, так и частичные ФАЛ, а также ФАЛ из ряда специальных классов, и на которых достигаются оптимальные по порядку роста значения нескольких из функционалов сложности (площадь, глубина, мощность) для почти всех реализуемых ФАЛ.

В настоящей работе для одного базиса КС получены верхние и нижние оценки сложности дешифратора порядка  $n$ , которые имеют вид  $n2^{n-1}(1 + \mathcal{O}(1/n))$ , то есть по аналогии с [20] их можно считать оценками высокой степени точности.

### 1. Основные определения и описание модели

Понятия, которые здесь не определяются, можно посмотреть, например, в [19].

Предметом изучения настоящей работы являются клеточные схемы, каждая из которых представляет собой прямоугольную решетку на плоскости, состоящую из клеток – единичных квадратов. Каждая клетка, в свою очередь, представляет собой элемент базиса, входами и выходами которого являются контакты, расположенные на серединах его сторон. При этом каждый контакт является либо входом элемента, либо выходом элемента, либо его изолированным полюсом. Каждый элемент базиса реализует на своих выходах систему ФАЛ от БП, сопоставленных его входам, за исключением так называемого *изолятора* – элемента, все контакты которого являются изолированными полюсами.

Каждый элемент будем относить к одному из двух типов: коммутационный элемент (КЭ) и функциональный элемент (ФЭ). При этом *функциональным* называется элемент, который реализует хотя бы одну нетождественную, то есть отличную от переменной, булеву функцию, а любой другой элемент, включая изолятор, считается *коммутационным* элементом. Таким образом, коммутационные элементы реализуют только тождественные функции, и их назначением является передача сигналов. Будем считать, что каждый ФЭ базиса Б реализует на своих выходах только одну отличную от его входных БП ФАЛ и будем называть те выходы, на которых она реализуется, *основными*.

Кроме того, передача сигналов может осуществляться через вход ФЭ и тот его выход, на котором реализуется ФАЛ, тождественно равная этому входу, или, иначе, через данную вход-выходную пару ФЭ, которую тоже будем называть *коммутационной*. Выход коммутационной пары ФЭ, а также любой выход КЭ будем считать *коммутационным*.

В настоящей работе рассматривается базис  $B'_0$  – один из возможных базисов КС, связанных с элементами стандартного базиса алгебры логики  $B_0 = \{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ , который состоит из 3 функциональных и 6 коммутационных элементов, включая изолятор (см. рис. 1). Заметим, что каждый из трех ФЭ этого базиса имеет одну вход-выходную коммутационную пару. Напомним, что базис КС, рассматривавшийся в работах [1, 2, 4–6, 8, 9, 19–21], тоже связан с базисом  $B_0$ .

Будем, как обычно, считать, что при вложении элементов базиса Б в клетки прямоугольной решетки допускаются их повороты на угол, кратный  $90^\circ$ , а также «перевороты» вокруг любой из осей симметрии единичного квадрата. Напомним также, что при указанном вложении происходит «естественное» совмещение контактов соседних по какому-либо ребру решетки элементов, в результате которого вход (выход) одного из них совмещается либо с выходом (соответственно входом) другого элемента, либо с его изолированным полюсом.

Все (некоторые) расположенные на границе прямоугольной решетки КС входы (соответственно выходы) ее элементов объявляются входами (соответственно выходами) данной КС.

Предполагается, что каждый вход (выход) КС  $\Sigma$  помечается входной (соответственно множественно выходных) БП из счетного упорядоченного алфавита  $\mathfrak{X} = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  (соответственно  $\mathfrak{Z} = \{z_1, \dots, z_m, \dots\}$ ). При описании функционирования КС будем в соответствии с [19] обозначать через  $P_2(n)$  множество всех ФАЛ  $f$  от БП  $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , каждая из которых задает отображение вида

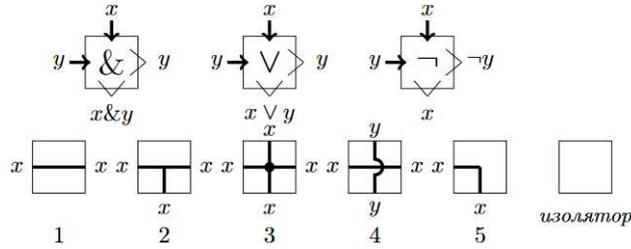


Рис. 1. Базис  $B'_0$ : функциональные элементы конъюнкции (&), дизъюнкции ( $\vee$ ) и отрицания ( $\neg$ ), коммутационные элементы – проводник (1), Т-образный разветвитель (2), разветвитель (3), пересечение без соединения (4), поворот (5). Здесь и далее условная ось функциональных элементов (вертикаль у знаков & и  $\vee$ , горизонталь у  $\neg$ ) сонаправлена нетождественному (основному) выходу

$B^n \xrightarrow{f} B$ , где  $B^n$  –  $n$ -я декартова степень множества  $B = \{0, 1\}$ , или единичный  $n$ -мерный куб. При этом  $m$ -я степень  $P_2^m(n)$  множества  $P_2(n)$  будет состоять из так называемых  $(n, m)$ -операторов, то есть систем вида  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , где  $f_i \in P_2(n)$  при всех  $i, i = 1, \dots, m$ .

Для описания структуры КС  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ , то есть КС с входными БП  $X(n)$  и выходными БП  $Z(m) = \{z_1, \dots, z_m\}$  в базисе  $B$ , связанном с базисом  $B_0$ , сопоставим ей ориентированный ациклический помеченный граф  $G$  такой, что:

- 1) множество вершин  $G$  взаимно однозначно соответствует множеству ФЭ и входов  $\Sigma$ , причем пометкой вершины служит либо тип сопоставленного ей ФЭ, либо та БП, которая является пометкой соответствующего ей входа;
- 2) дуга  $(u, v)$  является дугой  $G$  тогда и только тогда, когда из связанного с  $u$  «узла», то есть из основного выхода соответствующего ей ФЭ или входа  $\Sigma$ , по цепи из последовательно соединенных коммутационных вход-выходных пар элементов  $\Sigma$  достигим вход ФЭ, соответствующего его вершине  $v$ ;
- 3) вершина  $u$  графа  $G$  помечается выходной БП  $z_j$  тогда и только тогда, когда либо  $z_j$  является пометкой соответствующего  $u$  узла  $\Sigma$ , либо из указанного узла  $\Sigma$  достигим в смысле пункта 2 коммутационный выход элемента  $\Sigma$ , имеющий пометку  $z_j$ .

Будем предполагать, что построенный таким образом граф  $G$  является СФЭ (см., например, [19])  $S = S(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$  в базисе  $B_0$ , и считать, что функционирование  $S$ , которое задается системой ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_n)$  из  $P_2^m(n)$ , определяет также функционирование КС  $\Sigma$ .

Определим *функционал площади* КС, который далее будет служить их критерием сложности. Схема  $\Sigma$ , не содержащая ни рядов, ни столбцов, состоящих только из изоляторов, имеет следующие размерности: *длину*  $l(\Sigma)$ , измеряемую по горизонтали, и *высоту*  $h(\Sigma)$ , измеряемую по вертикали. Всюду далее без ограничения общности будем считать, что  $h(\Sigma) \leq l(\Sigma)$ . Площадью  $A(\Sigma)$  клеточной схемы  $\Sigma$  называется площадь прямоугольной решетки схемы  $\Sigma$ , то есть произведение ее длины  $l(\Sigma)$  на высоту  $h(\Sigma)$ , таким образом,

$$A(\Sigma) = l(\Sigma) \cdot h(\Sigma). \tag{1}$$

При этом для системы ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  из  $P_2^m(n)$  определим, как обычно, величину  $A(F)$ , равную минимальной площади КС, реализующих  $F$ , которую будем

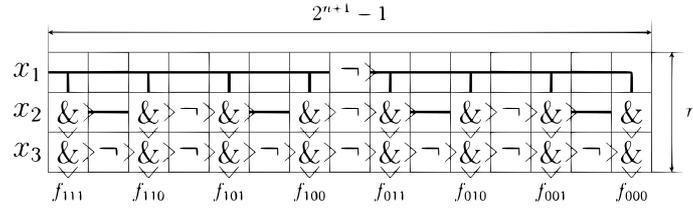


Рис. 2. Пример схемы вида  $\check{S}_3$ , реализующей дешифратор порядка  $n = 3$

называть площадью (сложностью) системы  $F$ .

## 2. Дешифратор и верхние оценки его сложности

Пусть  $Q_n$  - множество всех элементарных конъюнкций (ЭК) ранга  $n$  от входных переменных  $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , то есть множество ФАЛ вида  $K(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ , где  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in B^n$ ,  $x_i^0 = \neg x_i$ ,  $x_i^1 = x_i$ . При этом вектор-строку  $\vec{Q}_n$ , которая состоит из всех ЭК множества  $Q_n$ , упорядоченных в порядке возрастания номеров их столбцов значений, будем называть конъюнктивным дешифратором порядка  $n$ . Под конъюнктивным *схемным* дешифратором порядка  $n$  будем понимать схему с  $n$  входами и  $2^n$  выходами, которая реализует систему  $\vec{Q}_n$ .

В настоящей работе рассматривается только конъюнктивный дешифратор  $\vec{Q}_n$ , однако аналогичные построения и оценки верны также и для дизъюнктивного дешифратора  $\vec{J}_n$ , определяемого двойственным образом, а соответствующие ему схемы отличаются от построенных ниже лишь заменой ФЭ конъюнкции на ФЭ дизъюнкции.

**Лемма 1.** *Существует КС  $\check{S}_n$ , реализующая дешифратор  $\vec{Q}_n$  с высотой  $n$  и длиной  $2^{n+1} - 1$ .*

**Доказательство.** Построим схему  $\check{S}_n$  следующим образом (см. рис. 2). Все входные переменные будут подаваться с левой вертикальной стороны. В нечетных столбцах, отвечающих различным наборам  $\sigma$ ,  $\sigma \in B^n$ , будут располагаться ФЭ конъюнкции, основной выход которых расположен снизу, причем на выходе последнего из них реализуется ЭК  $K_\sigma$ . Каждый четный столбец обеспечивает смену наборов и содержит некоторое число отрицаний. Все переменные  $x_1, \dots, x_n$  передаются слева направо либо через КЭ, либо через ФЭ отрицания. Все реализуемые ЭК отвечают выходам  $z_0, \dots, z_{2^n-1}$  схемы  $\check{S}_n$ , расположенным на ее нижней стороне с шагом 2. Из построения видно, что высота схемы составляет  $n$ , а ее длина почти вдвое больше числа выходов и равна  $2^{n+1} - 1$ .  $\square$

**Лемма 2.** *Существует клеточная схема  $\hat{S}_n$ , реализующая дешифратор  $\vec{Q}_n$  с высотой  $2n$  и длиной  $2^n + 1$ .*

**Доказательство.** Построим схему так, как показано на рис. 3. Все входные переменные будут составлять условный левый «нулевой» столбец схемы  $\hat{S}_n$ . При этом первый столбец схемы представляет собой разводку, которая при помощи одного дополнительного инвертора, расположенного во втором столбце, добавляет ФАЛ  $\neg x_i$  для каждой входной БП  $x_i$ . В каждом столбце схемы  $\hat{S}_n$ , начиная со второго, происходит выбор нужного набора степеней БП  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а также их «вертикальное» конъюнктирование с использованием коммутационных элементов

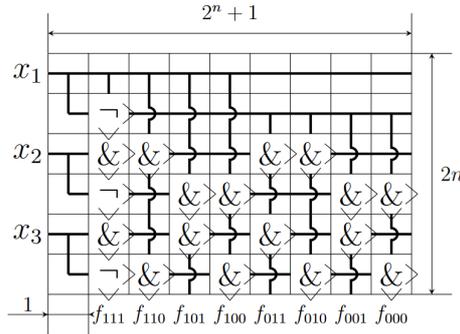


Рис. 3. Пример схемы вида  $\widehat{S}_3$ , реализующей дешифратор порядка  $n = 3$

и элементов конъюнкции. Порядок формирования столбцов, отвечающих отдельным наборам, может быть изменен. Все реализуемые ЭК отвечают выходам, плотно расположенным на нижней стороне схемы. Из построения видно, что высота схемы  $h = 2n$ . Длина схемы в точности равна числу выходов плюс ширина разводки, то есть  $l = 2^n + 1$ . □

**Теорема 1 (о верхней оценке).** Для сложности дешифратора  $\vec{Q}_n$ , в модели КС при  $n = 1, 2, \dots$  верна верхняя асимптотическая оценка

$$A(\vec{Q}_n) \leq n2^{n-1} + 8 \cdot 2^{n-1} + 2n + 16.$$

**Доказательство.** Построим необходимую схему  $S_n$  на основе полученных в леммах 1 и 2 схем (см. рис. 4). Разобьем множество входных переменных  $X(n)$  на два множества  $X'$  и  $X''$ , содержащих по  $(n - q)$  первых и  $q$  последних его БП, где  $q > 1$  и  $n > q$ , так, что:

$$X(n) = X' \cup X'', \quad X' \cap X'' = \emptyset, \quad |X'| = n - q, \quad |X''| = q.$$

Построим по лемме 2 схему  $\widehat{S}_{n-q}$  для множества входов  $X'$ . Растянем эту КС по горизонтали так, чтобы все выходы получившейся КС  $\widehat{S}'_{n-q}$  были расположены на расстоянии  $2^q$  друг от друга, причем четные выходы были бы расположены на нижней стороне, а нечетные – на верхней. Каждый выход должен быть, кроме того, снабжен «разводкой» на  $2^q$  выходов, состоящей из  $2^q$  расположенных в одной строке коммутационных элементов. К выходам каждой указанной «разводки» своей горизонтальной стороной без выходов подключается схема  $\check{S}_q$  для множества входов  $X''$ , в верхней строке которой КЭ заменены на ФЭ &. Указанные КС  $\check{S}_q$  образуют два горизонтальных ряда, один из которых расположен выше, а другой – ниже КС  $S'_{n-q}$ , содержащие по  $2^{n-q-1}$  схем в каждом из них.

При этом только у первой схемы в ряду присутствует разводка из отрицаний и коммутаторов, а у всех остальных на том же месте стоят продолжения контактов из предыдущей схемы. Кроме того, в первых  $q$  столбцах КС  $S_n$  происходит «переброска» входных БП  $X'$  из верхнего ряда в нижний (см. рис. 5).

Таким образом, для каждого набора значений  $\sigma' \in B^{n-q}$  переменных из  $X'$  ровно один блок вида  $\check{S}_q$  получает на вход сигнал «1» и реализует на своих выходах дешифратор от переменных из множества  $X''$  при фиксированном  $\sigma'$ . В свою очередь, из построения схемы  $\widehat{S}'_{n-q}$  следует, что для каждого набора  $\sigma'$  найдется такой блок. Значит, схема  $S_n$  реализует необходимый дешифратор  $\vec{Q}_n$ .

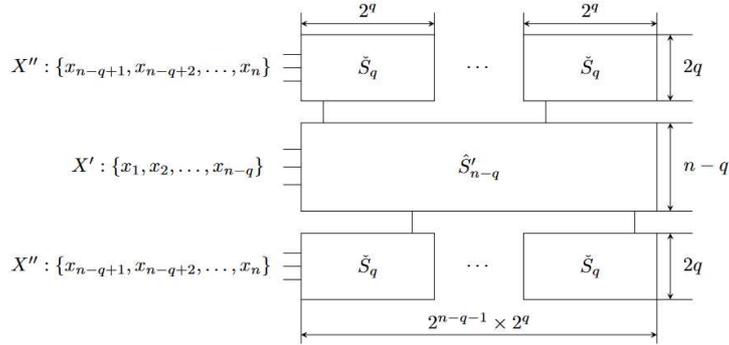


Рис. 4. Общий вид схемы  $S_n$ , реализующей дешифратор порядка  $n$

Оценим теперь ее площадь:

$$l(S_n) = 2^{n-q} \cdot 2^q / 2 + q,$$

$$h(S_n) = 2 \cdot (2q) + 2 + n - q,$$

$$A(S_n) = l(S_n) \cdot h(S_n) = (2^{n-1} + q) \cdot (n + 3q + 2).$$

Взяв достаточно «небольшое»  $q = 2$ , можно получить схему с площадью

$$A(S_n) = (n + 8)2^{n-1} + 2n + 16.$$

□

**Следствие.** При любом  $q = o(n)$ ,  $q > 2$  и  $n \rightarrow \infty$  верно асимптотическое неравенство

$$A(S_n) \lesssim \frac{1}{2} n 2^n.$$

Отсюда следует, что

$$A(\vec{Q}_n) \lesssim \frac{1}{2} n 2^n.$$

Далее, в теореме 2 будет показано, что полученная в теореме 1 оценка является асимптотически точной в смысле главного члена разложения и, более того, является так называемой асимптотической оценкой высокой степени точности (см., например, [20]), то есть устанавливает поведение сложности  $A(\vec{Q}_n)$  с относительной погрешностью вида  $\mathcal{O}(1/n)$ .

### 3. Нижняя оценка площади дешифратора

**Теорема 2 (о нижней оценке).** Для любой (однократной) схемы  $S$ , реализующей дешифратор  $\vec{Q}_n$  в модели клеточных схем в любом базисе, верна нижняя оценка

$$A(S_n) \geq n 2^{n-1} - \frac{n^2}{2} + 3n - 4.$$

**Доказательство.** Пусть существует схема  $S_n$ , реализующая дешифратор  $\vec{Q}_n$  и имеющая длину  $l$  при высоте  $h$ . Так как периметр однократной схемы не меньше суммарного числа ее входов и выходов, то

$$2(h + l) \geq n + 2^n. \tag{2}$$

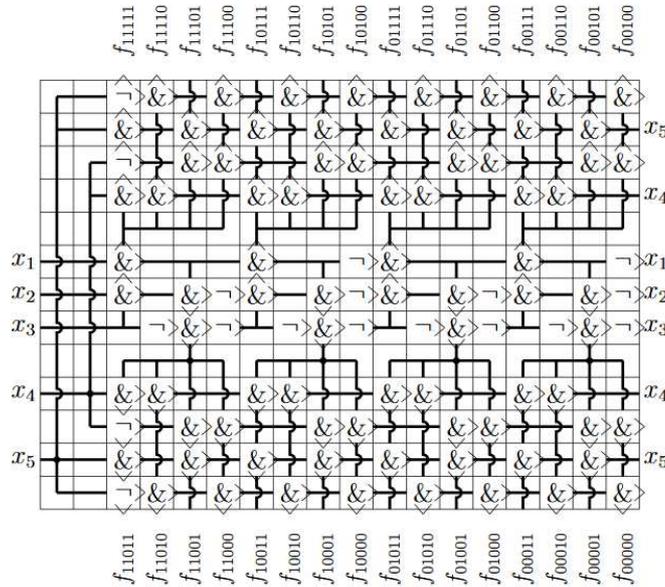


Рис. 5. Пример схемной реализации дешифратора порядка 5 при  $q = 2$

Решая классическую задачу о максимизации произведения  $l \cdot h$  при условиях  $H \leq h \leq l$  и при ограничении (2) получим, что

$$\frac{1}{2} H(n + 2^n - 2H) \leq A(S_n) \tag{3}$$

Покажем, что  $h \geq n - 2$ , то есть  $H = n - 2$ . Для этого построим вертикальный разрез  $\pi$ , который делит схему  $S$  на две части  $S'$  и  $S''$ , максимально близкие друг к другу по числу содержащихся в них выходов. Сначала рассмотрим случай, когда сечение  $\pi$  совпадает с одной из вертикальных сторон  $S_n$ , на которой, таким образом, должно быть расположено не менее чем  $2^{n-1}$  выходов. Тогда  $h \geq 2^{n-1} \geq n - 2$ .

Пусть теперь сечение  $\pi$  не совпадает ни с одной из вертикальных сторон  $S_n$ , и, тем самым, обе подсхемы  $S'$  и  $S''$  имеют положительную длину. Обозначим через  $n'$  и  $n''$  число входов в  $S'$  и  $S''$  соответственно, а через  $m'$  и  $m''$  число выходов в них. Заметим, что  $m'$  и  $m''$  отличаются не более чем на 2, так как в противном случае разрез можно сдвинуть, чтобы уменьшить это различие. Таким образом,

$$n = n' + n'', \quad 2^n = m' + m'', \quad |m' - m''| \leq 2. \tag{4}$$

Часть  $S'$  имеет условные входы, которыми являются направленные в нее выходы элементов, находящихся по другую сторону разреза. Обозначим их число через  $s'$ , а через  $s''$  – число таких же условных входов части  $S''$  (см. рис. 6). Множества этих элементов не пересекаются в силу ориентированности цепей. Тогда число входов в части  $S'$  будет равно  $n' + s'$ , и она может реализовать на своих выходах не более чем  $2^{n'+s'}$  различных наборов значений своих выходных БП. С другой стороны, учитывая специфику функционирования дешифратора  $\vec{Q}_n$ , это число не меньше числа  $m' + 1$ , которое в силу (4) не меньше, чем  $2^{n-1}$ . Аналогичные утверждения верны для части  $S''$ .

Таким образом, в случае, когда  $m' = 2^{n-1} = m''$ , выполняются неравенства

$$2^{n'+s'} \geq m' + 1 = 2^{n-1} + 1, \quad 2^{n''+s''} \geq m'' + 1 = 2^{n-1} + 1,$$

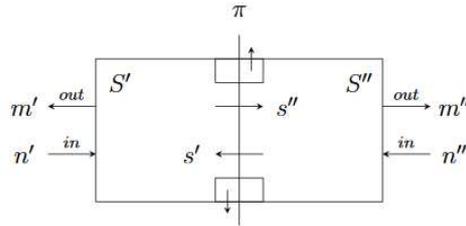


Рис. 6. К доказательству теоремы 2

а когда  $m' = 2^{n-1} - 1 = m'' - 2$  – неравенства

$$2^{n'+s'} \geq m' + 1 = 2^{n-1}, \quad 2^{n''+s''} \geq m'' + 1 = 2^{n-1} + 2.$$

Перемножив левые части неравенств и сравнив их с произведением правых частей, получим

$$2^{n'+n''+s'+s''} = 2^{n+s'+s''} \geq 2^{2n-2} + 2^n. \quad (5)$$

При  $n > 1$  и целых  $s', s''$  это неравенство превращается в неравенство  $s' + s'' \geq n - 2$ , из которого следует, что  $h \geq n - 2 = H$ .

Отсюда в силу (2), (3) получается оценка

$$A(\vec{Q}_n) \geq \frac{1}{2}(n-2)(2^n - n + 4) = n2^{n-1} - \frac{n^2}{2} + 3n - 4.$$

□

**Следствие.** Из теоремы 2 вытекает асимптотическое неравенство

$$A(\vec{Q}_n) \gtrsim n2^{n-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Следствие.** Из теорем 1 и 2 следует, что при  $n \rightarrow \infty$  в модели однократных КС справедливы оценки

$$A(\vec{Q}_n) = n2^n \left( \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

являющиеся так называемыми асимптотическими оценками высокой степени точности.

### Заключение

В настоящей работе получены асимптотические нижние и верхние оценки высокой степени точности для площади однократных клеточных схем, реализующих дешифратор. При этом конструктивно построено семейство схем, реализующих дешифратор с площадью, равной верхней оценке.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики и РФФИ (проект № 18-01-00800).

### Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1967. – Вып. 19. – С. 285–292.

2. *Альбрехт А.* О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1975. – Вып. 33. – С. 209–214.
3. *Грибок С.В.* Об одном базисе для схем из клеточных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 1999. – № 4. – С. 36–39.
4. *Ложкин С.А.* О соотношении между сложностью и площадью клеточных дешифраторов // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XIV Междунар. конф. – М.: Изд-во мех.-матем. фак. МГУ, 2005. – С. 88.
5. *Ложкин С.А., Евдокимова Т.Н.* О сложности реализации некоторых систем функций в классе обобщенных клеточных схем // Материалы VIII Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения». – М.: Изд-во мех.-матем. фак. МГУ, 2004. – С. 61–63.
6. *Ложкин С.А., Пашковский А.М.* О сложности реализации некоторых систем функций алгебры логики клеточными и планарными схемами // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. IX Всесоюз. конф. – Волгоград, 1991. – Ч. 1. – С. 28.
7. *Грибок С.В.* Об асимптотике сложности клеточного контактного дешифратора // Вестн. Нижегород. гос. ун-та. Матем. моделирование и оптимальное управление. – 2000. – Вып. 1. – С. 68–72.
8. *Lozhkin S.A., Evdokimova T.N.* On the asymptotics of complexity of a universal cellular contact multiterminal circuit // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. – 2005. – No 4. – P. 32–41.
9. *Шкаликowa Н.А.* О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов // Матем. вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1989. – Вып. 2. – С. 177–197.
10. *Hromkovich Yu., Lozhkin S., Rybko A., Sapozhenko A., Shkalikova N.* Lower bounds on the area complexity of Boolean circuits // Theor. Comput. Sci. – 1992. – V. 97, No 2. – P. 285–300. – doi: 10.1016/0304-3975(92)90079-U.
11. *Жуков Д.А.* О вычислении частичных булевых функций клеточными схемами // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2004. – Т. 11, № 2. – С. 32–40.
12. *Яблонская А.Ю.* О сложности реализации булевых функций из инвариантных классов клеточными схемами ограниченной высоты с кратными входами // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – Т. 1, № 4. – С. 225–231.
13. *Thompson C.D.* A complexity theory for VLSI: Ph.D. Thesis. – Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon Univ., 1980. – 148 p.
14. *Chazelle B., Louis M.* A model of computation for VLSI with related complexity results // J. Associat. Comput. Machinery. – 1985. – V. 32, No 3. – P. 573–588.
15. *Bilardi G., Pracchi M., Preparata F.P.* A critique of network speed in VLSI models of computation // IEEE J. Solid-State Circuits. – 1982. – V. 17, No 4. – P. 696–702. – doi: 10.1109/JSSC.1982.1051799.
16. *Калачев Г.В.* Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретн. матем. – 2014. – Т. 26, № 1. – С. 49–74.
17. *Калачев Г.В.* Об одновременной оптимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. – 2016. – Т. 20, № 2. – С. 203–266.
18. *Калачев Г.В.* О мощностной сложности плоских схем: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – М., 2017. – 167 с.
19. *Ложкин С.А.* Лекции по основам кибернетики. – М.: Изд. отд. фак. ВМиК МГУ, 2004. – 253 с.

20. *Ложкин С.А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1996. – Вып. 6. – С. 189–214.
21. *Черемисин О.В.* Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций // Дискрет. матем. – 2003. – Т. 15, № 2. – С. 113–122.

Поступила в редакцию  
12.08.2020

---

**Ложкин Сергей Андреевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия  
E-mail: *lozhkin@cs.msu.ru*

**Зизов Вадим Сергеевич**, магистр кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия  
E-mail: *vzs815@gmail.com*

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 3, pp. 322–334

---

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334

### Refined Estimates of the Decoder Complexity in the Model of Cellular Circuits with Functional and Switching Elements

*S.A. Lozhkin\**, *V.S. Zizov\*\**

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*  
E-mail: *\*lozhkin@cs.msu.ru*, *\*\*vzs815@gmail.com*

Received August 12, 2020

#### Abstract

The model of cellular circuits was considered in a single basis of functional and switching elements, which is built in accordance with the standard basis  $B_0$  consisting of Boolean functions  $x_1 \& x_2$ ,  $x_1 \vee x_2$ ,  $\overline{x_1}$ . In this model, both inputs and outputs of the cellular circuit  $\Sigma$  associated with various input and output Boolean variables, respectively, are irreversibly located on the border of the corresponding rectangular lattice, and the cellular circuit  $\Sigma$  itself corresponds, structurally and functionally, to a scheme of functional elements  $S$  in the basis  $B_0$  with the same sets of input and output Boolean variables.

We studied the complexity (area) of cellular circuits with  $n$  inputs and  $2^n$  outputs that implements a system of all  $2^n$  elementary conjunctions of rank  $n$  from input Boolean variables, i.e., a binary decoder with power  $n$ . It was proved that the smallest possible area of a cellular

circuit implementing such a decoder, provided that  $n = 1, 2, \dots$ , is equal to  $n2^{n-1}(1 + \mathcal{O}(1/n))$ . This is the first time when so-called asymptotic estimates of a high degree of accuracy, i.e., estimates with a relative error  $\mathcal{O}(1/n)$ , were obtained for it.

**Keywords:** functional elements, switching elements, cellular circuits, area, decoder, asymptotic estimates

**Acknowledgments.** The study was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics and the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00800).

### Figure Captions

Fig. 1. Basis  $B'_0$ : *functional elements* conjunctions (&), disjunctions ( $\vee$ ), and negations ( $\neg$ ), *switching elements* – conductor (1), T-shaped splitter (2), splitter (3), intersection without junction (4), turn (5). Hereinafter, the conditional axis of functional elements (vertical line of the signs & and  $\vee$ , horizontal line of  $\neg$ ) is co-directed with the non-identical (main) output.

Fig. 2. Example of the circuit of  $\tilde{S}_3$  type, which implements the decoder of  $n = 3$  order.

Fig. 3. Example of the circuit of  $\hat{S}_3$  type, which implements the decoder of  $n = 3$  order.

Fig. 4. General view of the circuit  $S_n$ , which implements the decoder of  $n$  order.

Fig. 5. Example of the circuit implementation of the decoder of the order of 5 at  $q = 2$ .

Fig. 6. On the proof of theorem 2.

### References

1. Kravtsov S.S. Realization of Boolean functions in a class of circuits of functional and switching elements. *Probl. Kibern.*, 1967, no. 19, pp. 285–292. (In Russian)
2. Al'brekht A. Circuits from cellular elements. *Probl. Kibern.*, 1975, no. 33, pp. 209–214. (In Russian)
3. Gribok S.V. On a basis for circuits from cellular elements. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15. Vychisl. Mat. Kibern.*, 1999, no. 4, pp. 36–39. (In Russian)
4. Lozhkin S.A. On the complexity and area of cellular decoders. *Problemy teoreticheskoi kibernetiki: Tez. dokl. XIV Mezhdunar. konf.* [Problems of Theoretical Cybernetics: Proc. XIV Int. Conf.]. Moscow, Izd. Mekh.-Mat. Fak. Mosk. Gos. Univ., 2005, p. 88. (In Russian)
5. Lozhkin S.A., Evdokimova T.N. On the complexity of realization of some systems of functions in a class of generalized cellular circuits. *Materialy VIII Mezhdunar. seminara "Diskretnaya matematika i ee prilozheniya"* [Proc. VIII Int. Semin. "Discrete Mathematics and Its Applications"]. Moscow, Izd. Mekh.-Mat. Fak. Mosk. Gos. Univ., 2004, pp. 61–63. (In Russian)
6. Lozhkin S.A., Pashkovskii A.M. On the complexity of realization of some systems of Boolean functions using cellular and planar circuits. *Problemy teoreticheskoi kibernetiki: Tez. dokl. IX Vsesoyuz. konf.* [Problems of Theoretical Cybernetics: Proc. IX All-Union Conf.]. Volgograd, 1991, pt. 1, p. 28. (In Russian)
7. Gribok S.V. On the asymptotics of complexity of a cellular contact decoder. *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ. Mat. Model. Optim. Upr.*, 2000, no. 1, pp. 68–72. (In Russian)
8. Lozhkin S.A., Evdokimova T.N. On the asymptotics of complexity of a universal cellular contact multiterminal circuit. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2005, no. 4, pp. 32–41.
9. Shkalikova N.A. Realization of Boolean functions by circuits of cell elements. *Mat. Vopr. Kibern.*, 1989, no. 2, pp. 177–197. (In Russian)

10. Hromkovich Yu., Lozhkin S., Rybko A., Sapozhenko A., Shkalikova N. Lower bounds on the area complexity of Boolean circuits. *Theor. Comput. Sci.*, 1992, vol. 97, no. 2, pp. 285–300. doi: 10.1016/0304-3975(92)90079-U.
11. Zhukov D.A. On the computation of partial Boolean functions by cellular schemes. *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser 1*, 2004, vol. 11, no. 2, pp. 32–40. (In Russian)
12. Yablonskaya A.Yu. On realization of the complexity of Boolean functions from invariant classes by cellular circuits with limited height and multiple inputs. *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N.I. Lobachevskogo*, 2012, vol. 1, no. 4, pp. 225–231. (In Russian)
13. Thompson C.D. A complexity theory for VLSI. *PhD Thesis*. Pittsburgh, PA, Carnegie Mellon Univ., 1980. 148 p.
14. Chazelle B., Louis M. A model of computation for VLSI with related complexity results. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1985, vol. 32, no. 3, pp. 573–588.
15. Bilardi G., Pracchi M., Preparata F.P. A critique of network speed in VLSI models of computation. *IEEE J. Solid-State Circuits*, 1982, vol. 17, no. 4, pp. 696–702. doi: 10.1109/JSSC.1982.1051799.
16. Kalachev G.V. Order of power of planar circuits implementing Boolean functions. *Discrete Math. Appl.*, 2014, vol. 24, no. 4, pp. 185–205. doi: 10.1515/dma-2014-0018.
17. Kalachev G.V. On the simultaneous minimization of area, power, and depth of planar circuits implementing Boolean operators. *Intellekt. Sist. Teor. Prlozh.*, 2016, vol. 20, no. 2, pp. 203–266. (In Russian)
18. Kalachev G.V. On power complexity of planar circuits. *Cand. Phys. Mat. Sci. Diss.* Moscow, 2017. 167 p. (In Russian)
19. Lozhkin S.A. *Lektsii po osnovam kibernetiki* [Lectures on Principles of Cybernetics]. Moscow, Izd. Otd. Fak. VMiK MGU, 2004. 253 p. (In Russian)
20. Lozhkin S.A. Exact bounds on the complexity of circuits of some classes. *Mat. Vopr. Kibern.*, 1996, no. 6, pp. 189–214. (In Russian)
21. Cheremisin O.V. On the activity of cell circuits realising the system of all conjunctions. *Discrete Math. Appl.*, 2003, vol. 13, no. 2, pp. 209–219. doi: 10.1515/156939203322109159.

---

⟨ **Для цитирования:** Ложкин С.А., Зизов В.С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 322–334. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334. ⟩

⟨ **For citation:** Lozhkin S.A., Zizov V.S. Refined estimates of the decoder complexity in the model of cellular circuits with functional and switching elements. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 322–334. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334. (In Russian) ⟩