УДК 512+512.5+512.6+512.81+51(470)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ОТ В.В. МОРОЗОВА ДО НАШИХ ДНЕЙ

А.Н. Абызов, Ю.А. Альпин, Н.А. Корешков,
М.Ф. Насрутдинов, С.Н. Тронин

Аннотация

В статье приведен обзор исследований по алгебре в Казанском университете в период с начала заведования кафедрой алгебры В.В. Морозовым (1947 г.) по настоящее время.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, теория колец и модулей, операды, полумодули, теория матриц, алгебры Хопфа.

Современное развитие исследований по алгебре в Казанском университете началось в 1927 г. с приглашения Николая Григорьевича Чеботарёва на должность профессора кафедры математики. Научная деятельность Н.Г. Чеботарёва в казанский период описана в обзоре В.В. Морозова [1] о развитии исследований по алгебре в Казанском университете с 1917 по 1947 гг. в журнале «Успехи математических наук».

Наш обзор охватывает время с 1947 года, когда В.В. Морозов принял руководство кафедрой алгебры после скоропостижной кончины Н.Г. Чеботарёва, до настоящего времени.

Хотя основные научные интересы В.В. Морозова были в области алгебр Ли, он всегда стремился расширить тематику кафедры и остро чувствовал новые перспективные области исследований. Его аспиранты И.И. Сахаев и М.М. Арсланов впоследствии стали основателями новых направлений исследований на кафедре – по теории колец и модулей и теории алгоритмов. В наш обзор не вошло описание работ по теории алгоритмов, поэтому мы отсылаем заинтересованных читателей к обзорам М.М. Арсланова и И.Ш. Калимуллина [2, 3].

1. Алгебры Ли

Исследования по группам и алгебрам Ли ведутся со времен Н.Г. Чеботарёва. Тематику его работ продолжили два его ученика – И.Д. Адо и В.В. Морозов.

И.Д. Адо доказал теорему о существовании точного конечномерного представления для любой конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики [4]. Так как это позволяет отождествить произвольную конечномерную алгебру Ли с матричной алгеброй и считать вложенной ее в $gl(n)$, то возникает возможность построить группу Ли Γ (даже линейную, то есть $\Gamma \subseteq GL(n)$), алгебра Ли которой $Lie\ \ \Gamma$ совпадает с L. Этот результат был настолько важен в доказательстве эквивалентности групп и алгебр Ли, что И.Д. Адо была присуждена степень доктора физико-математических наук при защите им кандидатской диссертации в 1938 г.

Вообще говоря, этот результат в диссертации И.Д. Адо был получен как следствие разработанной им техники для описания разрешимых алгебр Ли. Если алгебра $G \cong G_1/Z$, где Z – центр алгебры G_1 и $\dim G_1$ – максимально возможная, то G_1 называется полным центром для G. Аналогично можно построить полный центр G_2 для G_1 и т. д., то есть имеем последовательность алгебр $G, G_1, G_2, \ldots$ Если G – алгебра нулевого ранга, то есть все корни полинома Киллинга равны нулю, то и любая алгебра G_i также алгебра нулевого ранга. И.Д. Адо доказал, что любая разрешимая алгебра нулевого ранга является факторалгеброй некоторой алгебры такого ряда. А такой ряд однозначно определяется своей первой алгеброй. Это дает определенное описание разрешимых алгебр Ли нулевого ранга.

Пусть L – полупростая алгебра Ли, тогда $Z(L) = 0$ и $adL \cong L$. Поэтому присоединенное представление полупростой алгебры Ли дает точное конечномерное представление этой алгебры. Так как произвольная алгебра Ли L над полем нулевой характеристики имеет вид $L = L_1 \oplus R$, где L_1 – полупростая алгебра, а R – разрешимый радикал, то задача построения необходимого представления сводится к задаче построения представления радикала R, точного на центре этого радикала. Последняя и была решена И.Д. Адо с использованием техники полных центров.

Н.Г. Чеботарёв предложил В.В. Морозову заняться задачей об описании всех примитивных групп Ли, то есть групп Ли, действующих примитивно на некотором множестве. Эта задача эквивалентна описанию максимальных подалгебр в алгебрах Ли. В диссертации, защищенной в 1938 г., В.В. Морозов полностью разобрал случаи, когда 1) алгебра L содержит разрешимый радикал, 2) L полупроста, но не проста. В случае, когда L проста, удалось разобрать только некоторые случаи. Содержание диссертации изложено в работе [5], вышедшей в 1939 г. в «Математическом сборнике». Занимаясь этой задачей, В.В. Морозов заметил, что ситуация существенно зависит от регулярности искомой подалгебры. В частности, если алгебра M содержит картановскую подалгебру H, то разложения $M = H \oplus \sum\limits_{\alpha \in \widetilde{R}} L_\alpha$, $L = H \oplus \sum\limits_{\alpha \in R} L_\alpha$, (где R – система корней полупростой алгебры L) согласованы, то есть $\widetilde{R} \subseteq R$. Тогда задача сводится к изучению подсистем в системе корней полупростой алгебры. Перебирая различные случаи таких подсистем, В.В. Морозов обнаружил, что если M – не полупростая максимальная подалгебра, то она обязательно регулярна. Эту гипотезу ему удалось доказать, и этот результат под названием «теорема регулярности» был центральным в докторской диссертации В.В. Морозова, которую он защитил в Казани в 1943 г. В то время в Казани была «вся математика СССР». В частности, в Казань был эвакуирован весь Стекловский институт. Одним из оппонентов Морозова был А.И. Мальцев. Используя полученные результаты, Морозов перечислил все максимальные неполупростые подалгебры и максимальные полупростые в полупростых алгебрах Ли [6, 7]. Через три года вышла работа Е.Б. Дынкина [8], в которой тот доказал, что любая полупростая алгебра Ли однозначно определяется системой простых корней, и, используя технику графов определенного вида, описал структуру всех полупростых алгебр Ли над полем комплексных чисел. В 1950 г. в работах [9, 10] Е.Б. Дынкин, используя технику простых корней, перечислил все регулярные полупростые подалгебры в полупростых алгебрах Ли, и в частности максимальные подалгебры, а в 1951 г. Ф.И. Карпелевич в [11] описывает все неполупростые максимальные подалгебры. В терминах систем простых корней результат звучит следующим образом: любая не полупростая максимальная подалгебра полупростой алгебры Ли сопряжена с подалгеброй, порожденной корневыми пространствами, у которых корни в своем разложении через простые не содержат один из них с отрицательными коэффициентами. Так как любой корень есть целочисленная линейная комбинация простых корней либо с положительными, либо с отрицательными коэффициентами, то указанная подалгебра имеет вид $\langle L_\alpha, \alpha \in R_+, L_{-\gamma}, \gamma \in R_+(\pi \backslash \alpha_1)\rangle$, где R_+ – множество положительных корней, отвечающих простой системе корней $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, а $R_+(\pi \backslash \alpha_1)$ – аналогичное множество для $\pi \backslash \alpha_1$. Объединяя эти результаты, получается описание всех максимальных подалгебр в полупростых алгебрах Ли.

В.В. Морозов еще какое-то время занимался улучшением доказательства теоремы регулярности, и в 1956 г. в «Успехах математических наук» выходит его последняя работа [12], посвященная доказательству теоремы регулярности. По поводу этой работы он писал впоследствии в воспоминаниях, посвященных А.И. Мальцеву, что «он смог наконец предъявить А.И. достаточно хороший способ доказательства». Дело в том, что А.И. Мальцев высказывал В.В. Морозову упреки по поводу большой сложности доказательств различных фактов, используемых в теореме регулярности.

В дальнейшем теория групп и алгебр Ли развивалась в работах учеников Морозова.

В первую очередь рассмотрим работы по теории групп Ли. Этой тематикой занимались ученики Морозова Я.И. Заботин и Л.Д. Эскин. Я.И. Заботин описал импримитивные группы преобразований 4-мерного комплексного пространства [13, 14]. После защиты кандидатской диссертации по этой тематике он перешел к изучению задач линейного и выпуклого программирования и их применению к различным экономическим вопросам.

Л.Д. Эскин вначале занимался теорией представлений групп Ли. Им были построены операторы Лапласа на группе комплексных унитарных матриц, и с их помощью исследовались матричные элементы неприводимых бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца [15–17].

В цикле работ [18–21], выполненных в 60-е годы, Л.Д. Эскин построил фундаментальные решения уравнения теплопроводности на многообразиях комплексных полупростых групп Ли и симметрических римановых пространств. Полученные результаты Л.Д. Эскин применил к построению преобразований Вейерштрасса на симметрических римановых пространствах и получил новый метод вычисления меры Планшереля для этих пространств.

В последние годы Л.Д. Эскин развивал методы построения асимптотических разложений в окрестности сингулярных точек для инвариантных решений ряда нелинейных задач математической физики [22, 23].

В этих задачах Л.Д. Эскин использует технику продолженных дифференциальных операторов соответствующей группы Ли, которую в 60-е годы начали применять А.В. Овсянников и Н.Х. Ибрагимов к различным задачам математической физики. Дело в том, что теория Ли дает в основном отрицательный ответ на вопрос разрешимости системы дифференциальных уравнений. Но если алгебра Ли соответствующей системы дифференциальных уравнений имеет нетривиальный радикал, то, используя технику продолженных дифференциальных операторов, можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений и в некоторых задачах математической физики разобраться с решениями такой системы. Следует заметить, что эта техника была использована еще Софусом Ли при изучении им групп преобразований на прямой и плоскости.

В 70-е годы задачами по теории групп Ли занимался ученик Л.Д. Эскина – Е.Л. Столов. При реализации представлений классических групп появляются новые специальные функции, обобщающие известные специальные функции. Эти функции возникают как матричные элементы соответствующих представлений. Если $T(g)$ – представление группы, то формула $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$ порождает функциональные соотношения между матричными элементами. При этом получаются как известные соотношения между старыми специальными функциями, так и новые формулы. Е.Л. Столов изучал асимптотические свойства этих функций. В качестве групп рассматривались группы $SO(n)$ и их представления. А в качестве приложений этой задачи Е.Л. Столов рассматривал методы решения одного дифференциального уравнения [24–27].

Среди работ по теории алгебр Ли в первую очередь следует отметить работы Г.Н. Мубаракзянова и Э.Н. Сафиуллиной [28–32], посвященные описанию нильпотентных и разрешимых алгебр Ли размерности, не превосходящей 7. В.В. Морозов надеялся, изучая строение нильпотентных и разрешимых алгебр Ли малых размерностей, заметить общую схему в их структуре, которую удастся обобщить на случай произвольной размерности. Надежду вселяла аналогия с изучением примитивных групп Ли. Действительно, как было отмечено выше, структуру примитивных групп Ли в пространствах размерности ≤ 3 изучил Софус Ли, а в пространствах размерности 4 – В.В. Морозов. В результате он нашел закономерности в строении примитивных групп произвольной размерности. В.В. Морозов и сам занимался конкретными исследованиями этих алгебр. В 1958 г. вышла его статья «Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка» [33]. Но результаты получились настолько разнородными, что обобщить их не удалось.

В 50-е годы В.В. Морозов привлекает своих учеников к исследованию алгебр Ли над полями положительной характеристики. Уже в 1952 г. в ДАН СССР выходит работа А.В. Сульдина [34], в которой он доказывает существование точного конечномерного представления конечномерной алгебры Ли над полем положительной характеристики, то есть переносит результат И.Д. Адо на случай модулярных алгебр Ли (так принято называть алгебры Ли над полем положительной характеристики). Затем изучением алгебр Ли над полями положительной характеристики занимался А.Х. Долотказин. Обобщая результаты И. Капланского и Р. Блока, он описал строение модулярных алгебр Ли ранга 1 [35]. В 70-е годы теорией модулярных алгебр Ли начал заниматься еще один ученик В.В. Морозова – Ю.Б. Ермолаев. Его первые работы были посвящены изучению центра универсальной обертывающей алгебры для алгебры Витта и алгебры Цассенхауза. Строение центра универсальной обертывающей алгебры существенным образом определяет вид неприводимых модулей над этой алгеброй Ли. Ю.Б. Ермолаев нашел образующие и определяющие соотношения между этими образующими для центра универсальной обертывающей алгебры алгебр Витта и Цассенхауза [36–39].

В 1969 г. в журнале «Известия АН СССР» была опубликована статья А.И. Кострикина и И.Р. Шафаревича [40], в которой они доказали, что все имеющиеся примеры простых модулярных алгебр Ли являются так называемыми алгебрами картановского типа, а именно алгебрами дифференцирований кольца срезанных многочленов, то есть некоторого коммутативного ассоциативного кольца. Эти алгебры выделяются в виде подалгебр в алгебре всех дифференцирований указанного кольца своим действием на некоторую дифференциальную форму. И вскоре была выдвинута гипотеза, что любая простая конечномерная алгебра Ли $\mathcal{L}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 7$ является либо аналогом комплексной простой конечномерной алгебры Ли, либо фильтрованной деформацией некоторой градуированной алгебры Ли L картановского типа, то есть $cr\mathcal{L} \cong L$.

В первую очередь рассматривалась задача классификации простых градуированных алгебр Ли, то есть алгебр, представимых в виде прямой суммы $L = \oplus_{i\in Z} L_i$, где $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$. Рассматривались различные ограничения на подалгебру L_0 и на ее действия на компонентах L_i, в первую очередь L_{-1}. (Это связано с использованием техники полного картановского продолжения.) Ю.Б. Ермолаев ввел класс так называемых моногенных алгебр Ли, где ослабил ограничения, о которых речь шла выше, и классифицировал моногенные алгебры достаточно большой длины, то есть алгебры, имеющие достаточно много компонент в положительной части градуировки. Полученные им результаты [41–43] полностью подтверждали гипотезу Кострикина – Шафаревича, но существенное ограничение на длину градуировки не позволяло эффективно использовать их в дальнейшей классификации. Кроме Ю.Б. Ермолаева задачами классификации занимались еще два аспиранта В.В. Морозова: М.Ю. Целоусов и Г.О. Эльстинг (оба – ученики А.Х. Долотказина). М.Ю. Целоусов описал алгебры дифференцирований всех алгебр Ли картановского типа [44]. К сожалению, он трагически погиб вскоре после начала работы на кафедре.

Г.О. Эльстинг занимался переносом некоторых фактов, определенных для градуированных алгебр Ли на алгебры Ли с фильтрацией. В первую очередь это касалось описания алгебры, порожденной элементами, квадраты операторов умножения которых равны нулю [45, 46].

В завершающей стадии реализации проекта по классификации простых модулярных алгебр Ли принял участие ученик А.Х. Долотказина и А.И. Кострикина – С.М. Скрябин. Так как согласно гипотезе Кострикина – Шафаревича любая простая модулярная алгебра Ли, не являющаяся аналогом комплексной простой алгебры, будет фильтрованной деформацией некоторой градуированной алгебры Ли картановского типа, то возникал вопрос об описании этих деформаций. В.Г. Кац показал [47], что фильтрованные деформации строятся так же, как и градуированные алгебры Ли картановского типа, но исходя из некоторого более общего класса дифференциальных форм. С.М. Скрябин классифицировал все формы гамильтоновского типа, что явилось основой для описания соответствующих алгебр Ли [48, 49].

Наряду с вопросами классификации простых модулярных алгебр Ли рассматривалась задача описания представлений этих алгебр. Как показывает случай нулевой характеристики, при классификации простых и полупростых алгебр Ли существенно используются факты теории представлений. Поэтому структура представлений (в первую очередь неприводимых) являлась достаточно актуальной задачей. Этой проблематикой занимался ученик А.Х. Долотказина – Н.А. Корешков. Им получено описание неприводимых представлений p-алгебр Ли картановского типа в терминах индуцированных представлений [50, 51], когда в качестве подмодуля, с которого осуществляется индуцирование, рассматривался неприводимый модуль над максимальной подалгеброй. Последняя представляется как прямая сумма радикала и простой алгебры Ли классического типа. Так как структура неприводимых представлений указанных алгебр определяется результатами Х. Цассенхауза и А.Н. Рудакова, то получается определенное описание неприводимых представлений p-алгебр Ли картановского типа.

Для изучения некоторых вопросов, связанных с неприводимыми модулями, например для вычисления максимальной размерности неприводимых представлений, необходимо рассмотреть структуру центра универсальной обертывающей алгебры соответствующей алгебры Ли. Н.А. Корешков нашел некоторые серии элементов центра, а для гамильтоновой алгебры ранга один описал множество всех порождающих центра ее универсальной обертывающей алгебры [52].

В настоящее время ряд сотрудников кафедры алгебры и математической логики занимаются изучением структур различных классов алгебр, в той или иной мере связанных с теорией алгебр Ли.

С.М. Скрябин и его аспирант М.С. Еряшкин работают в области алгебр Хопфа. Алгебры Хопфа, их действия и кодействия на ассоциативных алгебрах представляют значительный интерес не только как объекты с весьма богатой алгебраической структурой, но и в связи с возможными приложениями в математической физике. С.М. Скрябиным установлен ряд важных теоретико-кольцевых свойств произвольной артиновой ассоциативной алгебры, вытекающих исключительно из отсутствия ненулевых нильпотентных идеалов этой алгебры, устойчивых относительно действия некоторой алгебры Хопфа [53]. Им получены результаты о проективности и плоскостности алгебры Хопфа как модуля над подалгебрами Хопфа и коидеальными подалгебрами, а также более общие результаты о проективности эквивариантных и коэквивариантных модулей [54–56]. В последней из названных публикаций разработана теория, обобщающая категорные эквивалентности, связанные с категориями квазикогерентных пучков на однородном пространстве, в духе некоммутативной алгебраической геометрии. В совместной работе с М.С. Еряшкиным [57] доказано существование наибольшей подалгебры Хопфа в любой слабо конечной биалгебре. М.С. Еряшкин получил аналог классического результата о конечной порождённости подалгебр инвариантных элементов в случае действия полупростой алгебры Хопфа на некоммутативных алгебрах специального вида [58].

2. Теория колец и модулей, теория полуколец и полумодулей

В.В. Морозов всегда стремился расширить тематику кафедры. Во многом благодаря ему на кафедре появилось новое направление – исследования по теории колец и модулей. В 1959 г. он принял в аспирантуру И.И. Сахаева, который стал заниматься вопросами гомологической классификации колец.

В 1960 г. в известной статье [59] Х. Басс получил характеризацию колец, над которыми проективны все правые плоские модули. Такие кольца называются *совершенными справа* и имеют внутреннее описание, а именно: кольцо R является совершенным справа тогда и только тогда, когда R – полулокальное кольцо и его радикал Джекобсона $J(R)$ T-нильпотентен слева, то есть для всякой последовательности элементов $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ из $J(R)$ существует такое k, что $a_k a_{k-1} \ldots a_1 = 0$.

В 1961 г. профессор Л.А. Скорняков предложил программу гомологической классификации колец [60], в которой предлагалось охарактеризовать кольца при помощи гомологических свойств категории модулей над ними. Одним из классов таких колец были кольца, над которыми проективны все конечно порожденные правые плоские модули.

В 60-е годы И.И. Сахаев изучал кольца, над которыми каждый правый конечно порожденный проективный модуль является проективным. Такие кольца в настоящее время называются правыми S-кольцами. S-кольцам посвящены многие работы, в частности можно отметить работы С. Эндо [61], В. Васкенселоса [62], рассматривавших коммутативные S-кольца, работы И.И. Сахаева [63, 64], С. Йондрупа [65], совместные работы И.И. Сахаева, А. Факкини и Д. Херберы [66, 67]. Основные результаты о S-кольцах И.И. Сахаев получил с помощью развитой им техники работы с регулярными последовательностями. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ элементов кольца R называется регулярной, если $a_{i+1}a_i = a_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$ В 1965 г. И.И. Сахаев в работе [63] установил, что для произвольного кольца R проективность каждого n-порожденного плоского правого R-модуля эквивалентна стабилизации всякой цепочки правых идеалов

$$A_1 R_n \subseteq A_2 R_n \subseteq \ldots \subseteq A_m R_n \subseteq \ldots,$$

где A_m $(m = 1, 2, \ldots)$ – регулярная последовательность $n \times n$-матриц над кольцом R. S-кольцами также занимались ученики И.И. Сахаева – Г.В. Чирков и М.Ф. Насрутдинов. В работе [68] Г.В. Чирков построил пример кольца, над которым каждый циклический плоский модуль является проективным, но не всякий конечно порожденный плоский модуль обладает этим свойством. М.Ф. Насрутдиновым изучались групповые S-кольца [69, 70].

В 1974 г. Лазаром была выдвинута гипотеза о конечной порожденности каждого проективного модуля P [71], у которого фактормодуль $P/PJ(R)$ конечно порожден. Для коммутативных колец эта гипотеза была доказана самим Лазаром. Справедливость этой гипотезы для PI-колец была установлена С. Йондрупом. И.И. Сахаевым в работе [72] было показано, что гипотеза Лазара эквивалентна проективности всякого конечно порожденного плоского правого R-модуля P, у которого фактор-модуль $P/PJ(P)$ является проективным $R/J(R)$-модулем. Цешингером и независимо Сахаевым для произвольного кольца R была установлена эквивалентность следующих двух условий:

1) если для проективного правого R-модуля P фактор-модуль $P/PJ(R)$ является циклическим, то модуль P конечно порожден;

2) для любых элементов a и b из кольца R выполнена импликация $ab = 0$ и $1-(a+b) \in J(R) \Rightarrow b(a+b)^{-1}a = 0$.

В работе [73] В.Н. Герасимовым и И.И. Сахаевым был построен пример полулокального кольца, для которого гипотеза Лазара не выполняется.

Контрпример дает следующая конструкция. Пусть $R = K < x, y | xy = 0 >$ – алгебра над полем K, порожденная элементами x, y и с одним определяющим соотношением $xy = 0$. Рассмотрим гомоморфизм $\phi : R \to K \times K$, при котором $\phi(x) = (1, 0), \phi(y) = (0, 1)$. Пусть Σ – множество всех квадратных матриц над R, у которых образ под действием гомоморфизма ϕ является обратимым и R_Σ – универсальное Σ-обращающее R-кольцо. Тогда R_Σ – полулокальное кольцо без нетривиальных идемпотентов, $R_\Sigma/J(R_\Sigma) \cong K \times K$ и $J(R_\Sigma) = (1-x_1)R_\Sigma \cap \cap R_\Sigma(1-y_1)$, где x_1, y_1 – образы элементов x, y соответственно в R_Σ. Причем $(1-x_1)R_\Sigma$ и $R_\Sigma(1-y_1)$ – единственные максимальные двусторонние (и односторонние) идеалы кольца R_Σ. Элементы x_1, y_1 удовлетворяют следующим условиям: $x_1y_1 = 0, 1-(x_1+y_1) \in J(R_\Sigma)$ и $y_1(x_1+y_1)^{-1}x_1 \neq 0$.

Из последних условий и результатов Цешингера и Сахаева следует, что кольцо R_Σ является контрпримером к гипотезе Лазара. Более точно, И.И. Сахаевым было показано, что над кольцом R_Σ правый модуль $P = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(x_1+y_1)^{-i-1}x_1(x_1+y_1)^iR_\Sigma$ не является конечно порожденным, хотя $P/J(P)$ – циклический модуль.

Кольцо R_Σ также является контрпримером к следующим гипотезам:

1. Если P – проективный модуль и $P/J(P)$ – простой модуль, то P – локальный модуль.

2. Если P – проективный модуль и $\mathrm{End}(P)$ – полулокальное кольцо, то модуль P – конечно порожденный [74].

Г.Е. Пунинским на основе техники И.И. Сахаева и результатов А. Факкини в 2004 г. был построен еще один контрпример к гипотезе Лазара [75]. Результаты И.И. Сахаева получили свое развитие в работах А. Факкини, Д. Херберы, Г.Е. Пунинского, П. Приходы. Так, например, Г.Е. Пунинским было показано, что R_Σ – проективно-свободное кольцо, над которым каждый проективный правый модуль является прямой суммой копий модулей P и R_Σ. В работе Факкини, Херберы, Сахаева [67] был получен новый критерий плоских модулей. В работе [76] П. Прихода показал, что каждый проективный правый R-модуль P, у которого $P/PJ(R)$ является циклическим, имеет вид $P = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} p_iR$, где $p_1, p_2, \ldots \in P$ и для некоторого $r \in R$ имеют место равенства $p_{i+1} = p_ir (i \in \mathbb{N})$.

Полулокальные кольца, построенные в работах В.Н. Герасимова, И.И. Сахаева и Г.Е. Пунинского, дают примеры колец с «патологическими» свойствами, для которых невыполнимы ряд классических утверждений. Техника, развитая И.И. Сахаевым, позволяет находить необходимые и достаточные условия, при которых соответствующие классические результаты имеют место.

В начале 90-х годов Х. Хакми, ученик И.И. Сахаева, изучал слабо регулярные модули. В работе [77] им были изучены проективные слабо регулярные модули. Кольца, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным, были описаны в работах А.Н. Абызова (ученика И.И. Сахаева) и А.А. Туганбаева [78–80].

Одним из естественных обобщений колец и модулей являются полукольца и полумодули. Фактически, определение полукольца отличается от определения ассоциативного кольца лишь необязательностью существования противоположных элементов, но именно это обстоятельство приводит к весьма значительному расширению класса изучаемых алгебраических систем.

С конца 90-х годов прошлого века исследованиями полуколец на кафедре занимается ученик Ю.А. Альпина – С.Н. Ильин. Первые его работы были связаны преимущественно с матричными полукольцами – были описаны обратимые матрицы над некоторыми классами полуколец и алгебраических систем, близких к полукольцам [81, 82], а также был получен критерий регулярности полных матричных полуколец [82].

В настоящее время С.Н. Ильин занимается вопросами, связанными с изучением и описанием различных классов полуколец по заданным свойствам свободных, проективных и инъективных полумодулей над ними, иначе говоря, тематикой, которую часто называют «гомологической» классификацией полуколец [83–86].

3. Теория матриц

Теория матриц как наука возникла в середине XIX в. С этого времени, кроме решения собственных задач, теория матриц играет важнейшую роль в алгебре. В частности, развитие классических направлений алгебры, представленное выше, во многих случаях предполагает утончённое использование матричной техники. Следует упомянуть и «чисто матричную» работу В.В. Морозова [87]. Исследования по теории матриц на кафедре проводились Ю.А. Альпиным и С.Н. Ильиным в начале его деятельности.

Локализация собственных значений – традиционная тема линейной алгебры, по которой, однако, постоянно появляются новые результаты. В [88–91] найдены новые области локализации для собственных значений матриц и корней полиномов.

В последние десятилетия внимание многих исследователей привлекло понятие совместного спектрального радиуса системы матриц. Это связано с его применением в теории вейвлетов, функциональных уравнений и динамических систем. На эту тему написаны работы [92, 93].

В вопросе о нормальной форме единственной комплексной матрицы достигнута полная ясность, однако задача о нормальной форме системы матриц допускает различные формулировки и подходы. Некоторые из них представлены в работах [94–97]. Общей особенностью этих исследований является интерес к рациональным (использующим конечное число арифметических операций) процедурам построения форм или рациональным критериям проверки их существования.

В работе [98] известный критерий Шпехта – Пирси унитарного подобия двух комплексных матриц переносится на случай матричных семейств. В [99] предложен критерий унитарной конгруэнтности двух матриц. Существенно, что оба критерия допускают конечную процедуру проверки.

4. Операды и смежные вопросы

Теория операд – это сравнительно новый раздел математики (не только алгебры, но и топологии), появившийся в конце 60-х – начале 70-х годов. С современным состоянием этой теории можно познакомиться по монографиям [100–103].

Операды можно представлять себе как многомерные (и даже счетномерные) обобщения полугрупп с единицей или ассоциативных колец с единицей.

Разработкой теории операд на кафедре занимается С.Н. Тронин со своими учениками.

В кандидатскую диссертацию С.Н. Тронина [104], руководителем которой был И.И. Сахаев, была включена глава, основным результатом которой было утверждение о том, что многообразия линейных мультиоператорных алгебр, определяемые полилинейными тождествами, (и только они) рационально эквивалентны многообразиям линейных алгебр над линейными симметрическими операдами. Впрочем, основной целью диссертации было решение вопроса о свободности ретрактов свободных конечно порожденных алгебр в некоторых многообразиях линейных алгебр. Одним из существенных продвижений в этом направлении было доказательство того, что любой ретракт кольца многочленов над совершенным полем, имеющий размерность Крулля, равную двум, изоморфен кольцу многочленов от двух переменных [105]. Этот результат до сих пор не улучшен. Кроме того, было установлено в самом общем виде соотношение между ретракциями свободных алгебр и всеми теми гомоморфизмами, среди которых только и можно искать изоморфизмы между данным ретрактом и какой-то свободной (или похожей на нее) алгеброй [106].

В конце 90-х годов С.Н. Трониным было построено категорное обобщение известной в теории ассоциативных колец конструкции матричной локализации (П. Кон, Дж. Бергман, В.Н. Герасимов, П. Малколмсон) [107]. Результат этой работы позволяет строить по аналогии с кольцами частных алгебраические теории частных путем обращения некоторых семейств гомоморфизмов между свободными конечно порожденными алгебрами. Условие на семейства обращаемых морфизмов, найденное в [107], наряду с условием наличия исчисления левых или правых частных, практически исчерпывает список известных «хороших» и достаточно общих случаев, когда структура исходной категории переносится на категорию частных.

В работе [108] С.Н. Тронин вместе со своим аспирантом О.А. Коппом начал построение теории эквивалентности Мориты для многообразий алгебр над линейными симметрическими операдами. Позднее главный результат этой работы был получен другим способом Ю.И. Маниным и М.М. Капрановым [109].

В работе [110] С.Н. Тронин ввел понятия вербальной категории и операды над вербальной категорией. Операды над вербальными категориями являются широкими обобщениями изучавшихся ранее операд (симметрических и несимметрических). Основной вывод, который следует из результатов докторской диссертации С.Н. Тронина [111], состоит в том, что всю традиционную теорию многообразий универсальных алгебр можно считать (с точностью до рациональной эквивалентности) теорией многообразий алгебр над обобщенными операдами – операдами над теми или иными вербальными категориями. Более детально изучались случай максимальной вербальной категории [110, 112] и случай вербальной категории Σ, операды над которой – это обычные симметрические операды [113].

В работах [114, 115] С.Н. Трониным была построена общая теория всех возможных супералгебр (произвольной сигнатуры) и их представлений. Самым подходящим средством для этого построения оказался язык теории операд.

Многосортные аналоги операд – мультикатегории – являются многомерными обобщениями обычных категорий. Мультикатегории над вербальными категориями были введены С.Н. Трониым в работе [112]. В работе [116] было предложено понятие естественного мультипреобразования между мультифункторами, являющееся непосредственным обобщением естественного преобразования между функторами, которое С. Маклейн и С. Эйленберг считали центральным понятием всей теории категорий. В [116] было показано также, что введенные в [113] коммутативные операды являются в точности центрами мультикатегорий (в том же смысле, в котором ассоциативные коммутативные кольца являются центрами аддитивных категорий).

Можно еще отметить, что операды естественным образом возникают в таких областях, как теории графов, гиперграфов, схем отношений, алгебр инцидентности и т. п.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта для ведущих научных школ НШ-5383.2012.1.

Summary

A.N. Abyzov, Yu.A. Alpin, N.A. Koreshkov, M.F. Nasrutdinov, S.N. Tronin. Algebraic Studies at Kazan University from V.V. Morozov to Our Days.

This article reviews the researches on algebra at Kazan University in the period from 1947, when V.V. Morozov became the head of the Department of Algebra, up to the present.

Key words: Lie algebras and groups, theory of rings and modules, operads, semimodules, theory of matrices, Hopf algebras.

Литература

1. *Морозов В.В.* Алгебра // Усп. матем. наук. – 1947. – Т. 2, № 6. – С. 3–8.
2. *Арсланов М.М.* Структурная теория степеней неразрешимости // НИИММ им. Н.Г. Чеботарева КГУ 2003–2007: Сб. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. – С. 54–68.
3. *Арсланов М.М., Калимуллин И.Ш.* Исследования по теории вычислимости // На рубеже веков. НИИММ им. Н.Г. Чеботарева 1998–2002: Сб. ст. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2003. – С. 50–67.
4. *Адо И.Д.* Представление алгебр Ли матрицами // Усп. матем. наук. – 1947. – Т. 22, № 6. – С. 159–173.
5. *Морозов В.В.* О примитивных группах // Матем. сб. – 1939. – Т. 5, № 2. – С. 355–390.
6. *Морозов В.В.* О нильпотентном элементе в полупростой алгебре Ли // Докл. АН СССР. – 1942. – Т. 36, № 3. – С. 91–94.
7. *Морозов В.В.* О централизаторе полупростой подалгебры в полупростой алгебре Ли // Докл. АН СССР. – 1942. – Т. 36, № 9. – С. 275–277.
8. *Дынкин Е.Б.* Классификация простых групп Ли // Матем. сб. – 1946. – Т. 18, № 3. – С. 347–352.
9. *Дынкин Е.Б.* Регулярные полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Докл. СССР. – 1950. – Т. 73, № 5. – С. 877–880.
10. *Дынкин Е.Б.* Максимальные подгруппы полупростых групп Ли и классификация примитивных групп преобразований // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 75, № 3. – С. 33–336.
11. *Карпелевич Ф.И.* О неполупростых максимальных подалгебрах полупростых алгебр Ли // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 76, № 6. – С. 755–778.
12. *Морозов В.В.* Доказательство теоремы регулярности // Усп. матем. наук. – 1956. – Т. 11, № 5. – С. 191–194.
13. *Заботин Я.И.* Полупростые тразитивные импримитивные группы четырехмерного пространства // Изв. вузов. Матем. – 1958. – № 4. – С. 67–79.

14. *Заботин Я.И.* О транзитивных импримитивных группах с радикалом в четырехмерном комплексном пространстве // Изв. вузов. Матем. – 1958. – № 6. – С. 73–85.
15. *Эскин Л.Д.* Замечание об операторах Лапласа на унимодулярной группе // Изв. вузов. Матем. – 1957. – № 2. – С. 259–269.
16. *Эскин Л.Д.* К теории релятивистских сферических функций // Науч. докл. высш. школы. – 1959. – № 2. – С. 95–97.
17. *Эскин Л.Д.* О матричных элементах неприводимых представлений группы Лоренца // Изв. вузов. Матем. – 1961. – № 6. – С. 179–184.
18. *Эскин Л.Д.* Фита функция на группе унитарных матриц // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 152, № 6. – С. 1327–1328.
19. *Эскин Л.Д.* Уравнение теплопроводности в теории компактных групп // Усп. матем. наук. – 1964. – Т. 19, № 2. – С. 200–202.
20. *Эскин Л.Д.* Уравнение теплопроводности на группах Ли // Памяти Н.Г. Чеботарева. 1894–1947 гг.: Сб. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. – С. 113–132.
21. *Эскин Л.Д.* Уравнение теплопроводности и преобразования Вейерштрасса на некоторых симметрических римановых пространствах // Изв. вузов. Матем. – 1965. – № 5. – С. 151–166.
22. *Эскин Л.Д.* К задаче В.Я. Полубариновой-Кочиной об опорожнении бассейна // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 9. – С. 73–84.
23. *Эскин Л.Д.* Об одном обобщении задачи В.Я. Полубариновой-Кочиной об опорожнении бассейна // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 2. – С. 56–72.
24. *Столов Е.Л.* Асимптотика одного интеграла, содержащего многочлены Гегенбауэра // Функц. анализ и теория функции: Сб. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1969. – № 6. – С. 134–139.
25. *Столов Е.Л.* Об одном методе исследования матричных элементов представлений групп // Изв. вузов. Матем. – 1969. – № 7. – С. 79–86.
26. *Столов Е.Л.* О матричных элементах представлений $SO(n)$ // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 7. – С. 86–91.
27. *Столов Е.Л.* Две асимптотические формулы для специальных функций // Изв. вузов. Матем. – 1972. – № 2. – С. 72–77.
28. *Мубаракзянов Г.М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. – 1963. – № 1. – С. 114–123.
29. *Мубаракзянов Г.М.* Классификация вещественных структур разрешимых алгебр Ли 5-го порядка // Изв. вузов. Матем. – 1963. – № 3. – С. 99–106.
30. *Мубаракзянов Г.М.* Классификация разрешимых алгебр Ли 6-го порядка с одним нильпотентным базисным элементом // Изв. вузов. Матем. – 1964. – № 4. – С. 104–116.
31. *Мубаракзянов Г.М.* Некоторые теоремы о разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. – 1966. – № 6. – С. 95–98.
32. *Сафиуллина Э.Н.* Классификация нильпотентных алгебр Ли 7-го порядка // Сб. аспир. работ. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. – С. 103–105.
33. *Морозов В.В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. вузов. Матем. – 1958. – № 4. – С. 161–171.
34. *Сульдин А.В.* О линейных представлениях алгебр Ли над полем характеристики $p > 0$ // Докл. АН СССР. – 1952. – № 4. – С. 529–531.

35. *Долотказин А.Х.* Алгебры Ли ранга один с ненулевым внутренним произведением, II // Изв. вузов. Матем. – 1966. – № 5. – С. 70–77.

36. *Ермолаев Ю.Б.* Вычисление центрального элемента универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 5. – С. 20–28.

37. *Ермолаев Ю.Б.* Минимальный многочлен центрального элемента универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта // Изв. вузов. Матем. – 1976. – № 10. – С. 32–41.

38. *Ермолаев Ю.Б.* О центральных элементах универсальной обертывающей алгебры алгебры Цассенхауза // Изв. вузов. Матем. – 1978. – № 6. – С. 73–88.

39. *Ермолаев Ю.Б.* О структуре центра универсальной обертывающей алгебры алгебры Цассенхауза // Изв. вузов. Матем. – 1978. – № 12. – С. 46–59.

40. *Кострикин А.И., Шафаревич И.Р.* Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – № 33. – С. 251–322.

41. *Ермолаев Ю.Б.* Моногенные градуированные алгебры Ли // Изв. вузов. Матем. – 1981. – № 8. – С. 70–74.

42. *Ермолаев Ю.Б.* К вопросу о существовании простых алгебр Ли с градуировкой достаточно большой длины // Изв. вузов. Матем. – 1981. – № 10. – С. 66–69.

43. *Ермолаев Ю.Б.* Алгебры Ли с моногенной градуировкой достаточно большой длины // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 60–63.

44. *Целоусов М.Ю.* Дифференцирования алгебр Ли картановского типа // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 7. – С. 126–134.

45. *Эльстинг Г.О.* О системах образующих в некоторых простых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 4. – С. 112–115.

46. *Эльстинг Г.О.* Об одной инвариантной подалгебре в гамильтоновой и контактной алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. – 1976. – № 1. – С. 129–131.

47. *Кац В.Г.* Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1974. – № 38. – С. 800–838.

48. *Скрябин С.М.* Канонический вид гамильтоновых и контактных форм над алгебрами разделенных степеней. – Депонировано в ВИНИТИ, № 8594. – 1986.

49. *Скрябин С.М.* Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней // Матем. сб. – 1990. – Т. 181, № 1. – С. 114–133.

50. *Корешков Н.А.* О неприводимых представлениях одной алгебры Ли // Изв. вузов. Матем. – 1978. – № 9. – С. 49–57.

51. *Корешков Н.А.* О неприводимых представлениях p-алгебры Ли W_2 // Изв. вузов. Матем. – 1980. – № 4. – С. 39–46.

52. *Корешков Н.А.* Центральные элементы в алгебре $U(K_m)$ // Изв. вузов. Матем. – 1991. – № 5. – С. 16–22.

53. *Skryabin S.M.* Structure of H-semiprime artinian algebras // Algebr. Represent. Theory. – 2011. – V. 14, No 5. – P. 803–822.

54. *Skryabin S.M.* Projectivity of Hopf algebras over subalgebras with semilocal central localization // J. K-Theory. – 2008. – V. 2, No 1. – P. 1–40.

55. *Skryabin S.M.* Projectivity and freeness over comodule algebras // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – V. 359. – P. 2597–2623.

56. *Skryabin S.M.* Models of quasiprojective homogeneous spaces for Hopf algebras // J. Reine Angew. Math. – 2010. – No 643. – P. 201–236.

57. *Еряшкин М.С., Скрябин С.М.* Наибольшая подалгебра Хопфа в биалгебре // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86, № 6. – С. 942–946.

58. *Еряшкин М.С.* Инварианты действия полупростой конечномерной алгебры Хопфа на алгебрах специального вида // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 8. – С. 14–22.

59. *Bass H.* Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466–488.

60. *Скорняков Л.А.* Гомологическая классификация колец // Труды IV Всесоюз. матем. съезда, М., 1961 г. – М.: Наука, 1964. – Т. 2. – С. 22–32.

61. *Endo S.* On semi-hereditary rings // J. Math. Soc. Japan. – 1961. – V. 13, No 2. – P. 109–119.

62. *Vasconcelos W.V.* On finitely generated flat modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 138. – P. 505–512.

63. *Сахаев И.И.* О проективности конечно порожденных плоских модулей // Сиб. матем. журн. – 1965. – Т. 6, № 3. – С. 564–573.

64. *Сахаев И.И.* О проективности конечно порожденных плоских модулей над полулокальными кольцами // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, № 2. – С. 152–161.

65. *Jøndrup S.* On Finitely generated flat modules // Math. Scand. – 1970. – V. 26. – P. 233–240.

66. *Facchini A., Herbera D., Sakhajev I.* Finitely generated flat modules and a characterisation of semiperfect rings // Commun. Algebra. – 2003. – V. 31, No 9. – P. 4195–4214.

67. *Facchini A., Herbera D., Sakhajev I.* Flat modules and lifting of finitely generated projective modules // Pacific J. Math.– 2005. – V. 220, No 1. – P. 49–67.

68. *Чирков Г.В* Лево-полусовершенное кольцо, не являющееся лево-f-полусовершенным // Изв. вузов. Матем. – 1971. – № 6. – С. 102–110.

69. *Насрутдинов М.Ф.* О полулокальных групповых алгебрах // Матем. заметки. – 2005. – № 3. – С. 409–412.

70. *Насрутдинов М.Ф.* Стабильная конечность групповых колец // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 11. – С. 29–32.

71. *Lazard D.* Liberté des gros modules projectifs // J. Algebra. – 1974. – V. 31. – P. 437–451.

72. *Сахаев И.И.* О конечно порожденности проективных модулей // Изв. вузов. Матем. – 1977. – № 9. – С. 69–79.

73. *Герасимов В.Н., Сахаев И.И.* Контрпример к двум гипотезам о проективных и плоских модулях // Сиб. матем. журн. – 1984. – Т. 25, № 6. – С. 31–53.

74. *Lomp C.* On semilocal modules and rings // Comm. Algebra. – 1999. – V. 27, No 4. – P. 1921–1935.

75. *Puninski G.* Projective modules over the endomorphism ring of a biuniform module // J. Pure Appl. Algebra. – 2004. – V. 188, No 1. – P. 227–246.

76. *Prihoda P.* Projective modules are determined by their radical factors // J. Pure Appl. Algebra. – 2007. – V. 210, No 3. – P. 827–835.

77. *Hamza H.* I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. – 1998. – V. 40. – P. 91–97.

78. *Абызов А.Н.* Слабо регулярные модули над нормальными кольцами // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 721–738.

79. *Абызов А.Н., Туганбаев А.А.* Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями // Фундамент. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 3-12.

80. *Абызов А.Н.* Обобщенные SV-модули // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50, № 3. – С. 481–488.

81. *Ильин С.Н.* Обратимость матриц над упорядоченными алгебраическими системами // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 551–559.

82. *Ильин С.Н.* Обратимые матрицы над (неассоциативными) полукольцами // Универсальная алгебра и ее приложения: Тр. участников междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Л.А. Скорнякова. – Волгоград, 2000. – С. 81–89.

83. *Ильин С.Н.* Полукольца, над которыми все полумодули инъективны (проективны) // Матем. вестн. педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. – Киров, 2006. – Вып. 8. – С. 50–53.

84. *Ильин С.Н.* О применимости к полукольцам двух теорем теории колец и модулей // Мат. заметки. – 2008. – Т. 83, № 4. – С. 536–544.

85. *Ильин С.Н.* Прямые суммы инъективных полумодулей и прямые произведения проективных полумодулей над полукольцами // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 10. – С. 31–43.

86. *Il'in S.N., Katsov Y.* On p-Schreier varieties of semimodules // Comm. Algebra. – V. 39, No 4. – P. 1491–1501.

87. *Морозов В.В.* О коммутативных матрицах // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1952. – Т. 112, кн. 9. – С. 17–20.

88. *Альпин Ю.А.* Границы для перронова корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства её графа // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 4. – С. 635–637.

89. *Альпин Ю.А.* Сближение границ Фробениуса для перронова корня неотрицательной матрицы // Журн. вычисл. матем. и матем физ. – 1997. – Т. 37, № 2. – С. 131–138.

90. *Alpin Yu.A., Kolotilina L.Yu.* Inequalities for the Perron root related to Levinger's theorem // Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 283, No 1–3. – P. 99–113.

91. *Alpin Yu.A., Chien M.-T., Yeh L.* The numerical radius and bounds for zeros of a polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – V. 131. – P. 725–730.

92. *Альпин Ю.А., Колотилина Л.Ю., Корнеева Н.Н.* Совместные оценки для перроновских корней неотрицательных матриц и их приложения // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. – 2006. – Т. 334. – С. 30–56.

93. *Альпин Ю.А.* Границы для совместных спектральных радиусов неотрицательных матриц // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, № 1. – С. 13–16.

94. *Alpin Yu.A., Elsner L. Ikramov Kh.D.* On condensed forms for partially commuting matrices // Linear Algebra Appl. – 2000. – V. 306, No 1–3. – P. 165–182.

95. *Alpin Yu.A., George A., Ikramov Kh.D.* Solving the two-dimensional CIS problem by a rational algorithm // Linear Algebra Appl. – 2000. – V. 312, No 1–3. – P. 115–123.

96. *Alpin Yu.A., Ikramov Kh.D.* Reducibility theorems for pairs of matrix as rational criteria // Linear Algebra Appl. – 2000. – V. 313, No 1–3. – P. 155–161.

97. *Альпин Ю.А., Корешков Н.А.* Об одновременной триангулизуемости матриц // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68, № 5. – С. 648–652.

98. *Альпин Ю.А., Икрамов Х.Д.* Об унитарном подобии матричных семейств // Матем. заметки. – 2003 – Т. 74, № 6. – С. 815–826.

99. *Альпин Ю.А., Икрамов Х.Д.* Критерий унитарной конгруэнтности матриц // Докл. РАН. – 2011. – Т. 437, № 1. – С. 7–8.

100. *Смирнов В.А.* Операдные и симплициальные методы в алгебраической топологии. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 272 с.

101. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology and Physics. – Amer. Math. Soc., 2002. – 350 p.

102. *Leinster T.* Higher Operads, Higher Categories. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 448 p.

103. *Loday J.-L., Valette B.* Algebraic Operads. – 2010. – XVIII + 512 p. – URL: http://math.unice.fr/~brunov/Operads.pdf.

104. *Тронин С.Н.* О ретракциях свободных алгебр и модулей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Кишинев, 1989. – 105 с.

105. *Тронин С.Н.* О коммутативных ассоциативных проективных алгебрах ранга 2 над совершенным полем // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, № 6. – С. 776–780.

106. *Тронин С.Н.* Ретракты и ретракции свободных алгебр // Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 1. – С. 67–78.

107. *Тронин С.Н.* Произведения в категориях частных и универсальное обращение гомоморфизмов // Матем. сб. – 1997. – Т. 188, № 10. – С. 109–130.

108. *Тронин С.Н., Копп О.А.* Матричные линейные операды // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 8. – С. 53–62.

109. *Kapranov M., Manin Yu.* Modules and Morita theorem for operads // Amer. J. Math. – 2001. – V. 123, No 5. – P. 811–838.

110. *Тронин С.Н.* Абстрактные клоны и операды // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43, № 4. – С. 924–936.

111. *Тронин С.Н.* Операдные и категорные методы в теории многообразий универсальных алгебр: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Казань, 2011. – 350 с.

112. *Тронин С.Н.* Мультикатегории и многообразия многосортных алгебр // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 1185–1202.

113. *Тронин С.Н.* Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 670 – 694.

114. *Тронин С.Н.* Супералгебры и операды. I // Сиб. матем. журнал. – 2009. – Т. 50, № 3. – С. 631–646.

115. *Тронин С.Н.* О супералгебрах над операдами // Сиб. матем. журнал. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1401–1412.

116. *Тронин С.Н.* Естественные мультипреобразования мультифункторов // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 11. – С. 58–71.

Поступила в редакцию
14.02.12

Абызов Адель Наилевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *AAbyzov@ksu.ru*

Альпин Юрий Абдуллович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Yuri.Alpin@ksu.ru*

Корешков Николай Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Nikolai.Koreshkov@ksu.ru*

Насрутдинов Марат Фаритович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *MNasrutd@ksu.ru*

Тронин Сергей Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Serge.Tronin@ksu.ru*