

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ: АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ, ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

*Л. У. Султанов*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

### Аннотация

Работа посвящена разработке методики расчета упругопластических трехмерных тел с учетом конечных деформаций. Кинематика упругопластических деформаций основана на мультипликативном разложении полного градиента деформации на упругую и неупругую составляющие. Напряженное состояние характеризуется тензором напряжений Коши. Физические соотношения получены на основе уравнения второго закона термодинамики с введением функции свободной энергии. Функция свободной энергии записана в виде зависимости от инвариантов левого тензора упругой деформации Коши – Грина. Рассмотрена упругопластическая модель с изотропным упрочнением. На основе аналога ассоциированного закона пластического течения и критерия пластичности разработан метод проецирования напряжений на поверхность текучести с итерационным уточнением текущего напряженно-деформированного состояния. Итерационная процедура основана на введении в разрешающее уравнение мощности дополнительных напряжений. Построены определяющие соотношения для скоростей и приращений истинных напряжений Коши. В рамках метода последовательных нагружений получено вариационное уравнение, основанное на принципе возможных мощностей. Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов, использован восьмиузловой конечный элемент. Представлено решение задачи о растяжении стержня круглого поперечного сечения и дано сравнение с результатами других авторов.

**Ключевые слова:** нелинейная упругость, конечные деформации, пластичность

### Введение

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которых приведены основные кинематические соотношения и определяющие соотношения. Используются мультипликативное разложение градиента деформаций на упругую и неупругую составляющие. Для разделения упругих и неупругих деформаций применяется метод проецирования напряжений на поверхность текучести, получен аналог ассоциированного закона течения. Решение задачи ведется в рамках метода последовательных нагружений на базе уравнения принципа виртуальных мощностей. Численная дискретизация основана на методе конечных элементов.

### 1. Кинематика

Кинематику конечных упругопластических деформаций будем описывать с помощью градиента деформации  $\mathbf{F}$ , который представляется в виде мультипликативного разложения [1–8]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p,$$

где  $\mathbf{F}_e$  – градиент упругих деформаций,  $\mathbf{F}_p$  – градиент неупругих деформаций. Напряженное состояние описывается тензором напряжений Коши  $\boldsymbol{\sigma}$  [1, 9]:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}_e} = \frac{2\rho_0}{J}\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}_e}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$  – левый тензор Коши–Грина упругих деформаций,  $J = \rho_0/\rho$  – относительное изменение объема,  $\rho_0$  – плотность среды в начальном состоянии,  $\rho$  – плотность среды в актуальном состоянии,  $\psi$  – функция свободной энергии, которая определяется как скалярная функция от тензора меры упругих деформации  $\mathbf{B}_e$ .

В качестве условия пластического течения примем

$$\Phi_p(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = 0, \quad (2)$$

где  $\Phi_p$  – функция текучести,  $\chi$  – параметр упрочнения. Воспользуемся выражением для обобщенной скорости  $\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_e$ , которое получено из условия минимума обобщенного функционала [1]:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_e = -2\dot{\lambda} \frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}_e. \quad (3)$$

Линеаризируя определяющие соотношения (1) и используя (3), получим тензор скорости напряжения Коши [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \Lambda_e \cdot \cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^T - I_{1d}^k \boldsymbol{\sigma} - \\ &\quad - \dot{\lambda} 4\rho \left\{ \frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}_e} + \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{B}_e\partial\mathbf{B}_e} : \frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{B}_e \right\} = \\ &= \Lambda_e \cdot \cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^T - \dot{\lambda} \left\{ 2 \frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \Lambda_e \cdot \cdot \frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right\} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e = \Lambda_e \cdot \cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^T - I_{1d}^k \boldsymbol{\sigma}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p = -\dot{\lambda} \left\{ 2 \frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \Lambda_e \cdot \cdot \frac{\partial\Phi_p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right\},$$

$$\Lambda_e = \frac{4\rho_0}{J} \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{B}_e\partial\mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{B}_e.$$

## 2. Алгоритм интегрирования определяющих соотношений

Будем использовать метод проецирования напряжений на поверхность текучести [6, 10–14]. Для этого запишем скорость напряжений Коши (4) в  $k$ -м состоянии

$$\begin{aligned} {}^k\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= {}^k\Lambda_e \cdot \cdot {}^k\mathbf{d} + {}^k\mathbf{h} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^k\mathbf{h}^T - I_{1d}^k {}^k\boldsymbol{\sigma} - \\ &\quad - {}^k\dot{\lambda} \left\{ 2 \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \cdot {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma} + {}^{k+1}\Lambda_e \cdot \cdot \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

По известным параметрам  $k$ -го состояния, используя (5), определим  $(k+1)$ -е по следующей формуле:

$$\begin{aligned} {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma} &= {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\dot{\boldsymbol{\sigma}}\Delta t = \\ &= {}^k\boldsymbol{\sigma} + \left[ {}^k\Lambda_e \cdot \cdot {}^k\mathbf{d} + {}^k\mathbf{h} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^k\mathbf{h}^T - I_{1d}^k {}^k\boldsymbol{\sigma} - {}^k\dot{\lambda} \left( 2 \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\Lambda_e \cdot \cdot \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \right) \right] \Delta t = \\ &= {}^k\boldsymbol{\sigma} + \left[ {}^k\Lambda_e \cdot \cdot {}^k\mathbf{d} + {}^k\mathbf{h} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^k\mathbf{h}^T - I_{1d}^k {}^k\boldsymbol{\sigma} \right] \Delta t - \dot{\lambda} \left( 2 \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\Lambda_e \cdot \cdot \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \right) \Delta t = \\ &= {}^{k+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \left( 2 \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\Lambda_e \cdot \cdot \frac{\partial\Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \right) \Delta t. \end{aligned} \quad (6)$$

Введя в рассмотрении тензор пробных напряжений

$${}^{k+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^k\boldsymbol{\sigma} + [{}^{k+1}\boldsymbol{\Lambda}_e \cdot \cdot {}^k\mathbf{d} + {}^k\mathbf{h} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^k\mathbf{h}^T - I_1 {}^k\mathbf{d} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma}] \Delta t,$$

из (6) получим уравнение для определения истинных напряжений

$${}^{k+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{k+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - {}^k\dot{\lambda} \left( 2 \frac{\partial \Phi_p}{\partial {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + {}^{k+1}\boldsymbol{\Lambda}_e \cdot \cdot \frac{\partial \Phi_p}{\partial {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}} \right) \Delta t. \quad (7)$$

Алгоритм расчета состоит в нахождении тензора истинных напряжений и скорости пластических деформаций из критерия пластичности (2) и соотношения (7).

### 3. Интегрирование уравнения движения

Представим процесс деформирования в виде последовательности напряженно-деформированных состояний (НДС) исследуемого тела, реализующихся в определенные моменты времени (временные слои). Подобная стратегия решения нелинейных задач является в настоящее время доминирующей и с успехом применяется в задачах как статики (метод последовательных нагружений), так и динамики (метод пошагового интегрирования) [13–15]. В соответствии с этой методикой считаем, что в некоторый момент времени  ${}^k t$  известны все параметры процесса, включая конфигурацию, напряженное состояние, величины упругих и неупругих деформаций и т. д. Задача состоит в определении НДС в момент времени  ${}^{k+1} t = {}^k t + \Delta t$ .

В качестве базового примем уравнение виртуальных мощностей в актуальном состоянии [9, 16, 17]. Запишем его в виде операторного уравнения  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ . На  $k$ -м временном слое должно выполняться уравнение  ${}^k \mathbf{G} = \mathbf{0}$ . Аналогичное уравнение на следующем временном слое можно представить в виде  ${}^{k+1} \mathbf{G} = {}^k \mathbf{G} + {}^k \dot{\mathbf{G}} \Delta t = \mathbf{0}$ . В нашем случае уравнение виртуальных мощностей в актуальном состоянии (при  $t = {}^{k+1} t$ ) принимает вид

$$\left\{ \int_{V_k} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta^k \mathbf{d} dV - \int_{S_k^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n \delta \mathbf{v} dS - \int_{V_k} {}^k \mathbf{f} \delta \mathbf{v} dV \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ \int_{V_k} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta^k \mathbf{d} dV - \int_{S_k^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{V_k} {}^k \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV \right\} \Delta t = 0. \quad (8)$$

Линеаризуя (8) и принимая во внимание соотношение (5), получим разрешающее уравнение

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \left\{ {}^k \mathbf{d} \cdot \cdot {}^k \boldsymbol{\Lambda}_e \cdot \cdot \delta \mathbf{d} + \frac{1}{2} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\delta \mathbf{h}^T \cdot {}^k \mathbf{h} + {}^k \mathbf{h}^T \cdot \delta \mathbf{h}] - [{}^k \nabla \cdot {}^k \mathbf{v}] {}^k \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} - \right. \\ & \left. - \dot{\lambda} \left[ 2 \frac{\partial \Phi_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\Lambda}_e : \frac{\partial \Phi_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \right\} dV - \int_{S_k^\sigma} \{ {}^k \mathbf{t}_n \cdot {}^k \mathbf{h}^T - [{}^k \nabla \cdot {}^k \mathbf{v}] {}^k \mathbf{t}_n \} \delta \mathbf{v} dS = \\ & = \int_{S_k^\sigma} {}^k \Delta \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_{V_k} {}^k \Delta \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \\ & - \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V_k} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta^k \mathbf{d} dV - \int_{S_k^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{V_k} {}^k \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Так как решаются квазистатические задачи, то можно перейти от скоростей к приращениям, например, полагая  $\mathbf{v} = \Delta \mathbf{u} / \Delta t$ .

Решая уравнение (9), получим вектор перемещений  $\mathbf{u}$ , который определяет конфигурацию на следующем шаге нагружения

$${}^{k+1}\mathbf{x} = {}^k\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t.$$

В задачах статики приращение времени является параметром нагружения, который обычно полагают равным единице. При возникновении пластических деформаций используется метод проецирования напряжений с итерационным уточнением, который заключается в следующем. Путем решения упругой задачи (9) находим приращение поля перемещений, по которым определяем поле пробных напряжений на следующем шаге нагружения

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^k\boldsymbol{\sigma} + [{}^{k+1}\boldsymbol{\Lambda}_e \cdot \cdot {}^k\mathbf{d} + {}^k\mathbf{h} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^k\mathbf{h}^T - I_{1^k\mathbf{d}} {}^k\boldsymbol{\sigma}].$$

Затем применяем метод проецирования напряжений на поверхность текучести, который заключается в решении системы нелинейных уравнений

$${}^{k+1}\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta\lambda \left( 2 \frac{\partial \Phi_p}{\partial {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + {}^{k+1}\boldsymbol{\Lambda}_e \cdot \cdot \frac{\partial \Phi_p}{\partial {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\Phi_p({}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}, \chi(\Delta\lambda)) = 0. \quad (11)$$

Решив систему нелинейных уравнений (10), (11) методом Ньютона, получим тензор истинных напряжений  ${}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}$  и приращение скорости пластических деформаций  $\Delta\lambda$ . В силу того, что полученное истинное напряженное состояние не удовлетворяет уравнению равновесия (9), строится итерационная процедура уточнения полученного НДС, которая основана на введении в разрешающую систему уравнений (9) мощности дополнительных напряжений на возможных деформациях скорости

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \left\{ {}^k\mathbf{d} \cdot \cdot {}^k\boldsymbol{\Lambda}_e \cdot \cdot \delta\mathbf{d} + \frac{1}{2} {}^k\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\delta\mathbf{h}^T \cdot {}^k\mathbf{h} + {}^k\mathbf{h}^T \cdot \delta\mathbf{h}] - [{}^k\nabla \cdot {}^k\mathbf{v}] \cdot {}^k\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} - \right. \\ & \left. - \Delta_m^k \lambda \left[ 2 \frac{\partial \Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \cdot {}^k\boldsymbol{\sigma} + {}^k\boldsymbol{\Lambda}_e \cdot \cdot \frac{\partial \Phi_p}{\partial {}^k\boldsymbol{\sigma}} \right] \right\} dV - \int_{S_k^\sigma} \{ {}^k\mathbf{t}_n \cdot {}^k\mathbf{h}^T - [{}^k\nabla \cdot {}^k\mathbf{v}] \cdot {}^k\mathbf{t}_n \} \delta\mathbf{v} dS = \\ & = \int_{S_k^\sigma} \Delta^k \mathbf{t}_n \cdot \delta\mathbf{v} dS + \int_{V_k} \Delta^k \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} dV - \\ & - \left\{ \int_{V_k} {}^k\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta^k \mathbf{d} dV - \int_{S_k^\sigma} {}^k\mathbf{t}_n \cdot \delta\mathbf{v} dS - \int_{V_k} {}^k\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} dV \right\} + \int_{V_k} {}^k\boldsymbol{\sigma}_{ad} \cdot \cdot \delta^k \mathbf{d} dV, \end{aligned}$$

где  ${}^{k+1}\boldsymbol{\sigma}_{ad} = {}^{k+1}\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ .

#### 4. Численный пример

Рассмотрим задачу растяжения круглого стержня со следующими параметрами: радиус поперечного сечения  $R = 6.413$  мм, длина стержня  $L = 53.334$  мм. Отметим, что для конкретизации места образования шейки в центре стержня задается снижение радиуса на 1.8% [2–4]. Функция свободной энергии задается в следующем виде:

$$\rho_0 \psi = \frac{\lambda + 2\mu}{8} (I_{1\mathbf{B}} - 3)^2 + \mu (I_{1\mathbf{B}} - 3) - \frac{\mu}{2} (I_{2\mathbf{B}} - 3),$$

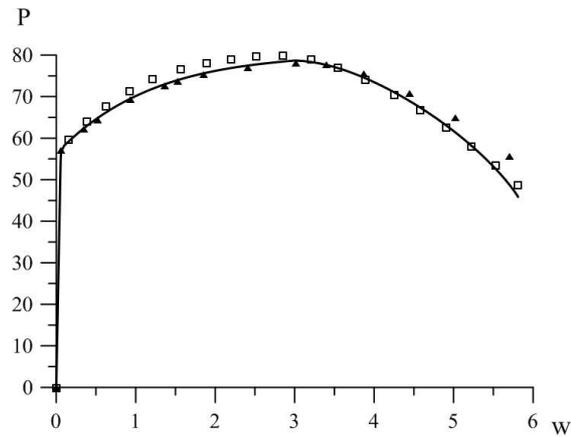


Рис. 1. График зависимости силы от перемещения. Сплошная линия – зависимость, полученная с помощью разработанной нами методики, □ – [2], ▲ – [3]

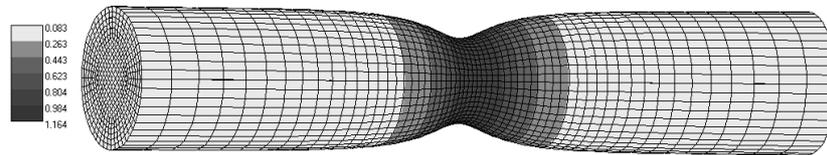


Рис. 2. Интенсивность пластических деформаций

где  $\lambda, \mu$  – параметры Ляме. В качестве критерия упругого деформирования примем условие Губера–Мизеса, которое для изотропной среды допускает обобщение в виде

$$\Phi = \sigma_{\text{int}} - \sigma_T(\chi) \leq 0.$$

Здесь  $\sigma_{\text{int}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'}$  – интенсивность напряжений,  $\sigma_T(\chi)$  – функция упрочнения,  $\chi$  – параметр упрочнения,  $\boldsymbol{\sigma}'$  – девиатор тензора напряжений.

Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид [2–4]

$$\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi}).$$

Параметры материала следующие:  $E = 206900$  МПа,  $\nu = 0.29$ ,  $\sigma_\infty = 715$  МПа,  $\sigma_T = 450$  МПа,  $h = 0.129$ ,  $\delta = 16.93$ . Численная реализация основана на методе конечных элементов. Используется трехмерный 8-узловой конечный элемент. На рис. 1 показан график зависимости силы, возникающей на торце стержня, от перемещения. Сплошной линией показана зависимость, полученная с помощью вышеописанной методики, □ – [2], ▲ – [3]. Видно, что наши результаты хорошо согласуются с результатами других авторов. На рис. 2 изображено деформированное состояние стержня с полем интенсивности пластических деформаций. Интенсивность пластических деформаций принимает максимальное значение в области образования шейки.

### Заключение

В работе представлена методика решения задач деформирования с учетом конечных упругопластических деформаций. Используется мультипликативное разло-

жение градиента деформации. Определяющее соотношение записано в актуальном состоянии в виде зависимости тензора напряжения Коши от левого тензора деформации Коши – Грина. Для учета пластических деформаций применяется метод проецирования напряжений на поверхность текучести с итерационным уточнением текущего НДС. В рамках метода последовательных нагружений получено разрешающее уравнение. Численная реализация основана на методе конечных элементов. В качестве демонстрации работоспособности разработанной методики решена задача о растяжении стержня с образованием шейки и проведено сравнение результатов решения с решением других авторов.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта 16-11-10299.

### Литература

1. Султанов Л.У. Исследование конечных упругопластических деформаций. Кинематика среды и определяющие соотношения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 158–165.
2. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Comput. Mater. Sci. – 2003. – V. 28, No 3–4. – P. 732–742. – doi: 10.1016/j.commatsci.2003.08.027.
3. Schröder J., Gruttmann F., Löblein J. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // Comput. Mech. – 2002. – V. 30, No 1. – P. 48–64. – doi: 10.1007/s00466-002-0366-3.
4. Simo J.S. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1988. – V. 66, No 2 – P. 199–219. – doi: 10.1016/0045-7825(88)90076-X.
5. Miehe C. A theory of large-strain isotropic thermoplasticity based on metric transformation tensors // Arch. Appl. Mech. – 1995. – V. 66, No 1–2. – P. 45–64. – doi: 10.1007/BF00786688.
6. Basar Y., Itskov M. Constitutive model and finite element formulation for large strain elasto-plastic analysis of shell // Comput. Mech. – 1999. – V. 23, No 5–6. – P. 466–481. – doi: 10.1007/s004660050426.
7. Meyers A., Schieube P., Bruhns O.T. Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates // Acta Mech. – 2000. – V. 139, No 1–4. – P. 91–103. – doi: 10.1007/BF01170184.
8. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // Int. J. Plasticity. – 2000. – V. 16, No 2. – P. 143–177. – doi: 10.1016/S0749-6419(99)00045-5.
9. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. – 283 p.
10. Rouainia M., Wood D.M. Computational aspects in finite strain plasticity analysis of geotechnical materials // Mech. Res. Commun. – 2006. – V. 33, No 2. – P. 123–133. – doi: 10.1016/j.mechrescom.2005.06.014.
11. Simo J.S., Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations // Comput. Methods. Appl. Mech. Engng. – 1985. – V. 49, No 2. – P. 221–245. – doi: 10.1016/0045-7825(85)90061-1.
12. Eterovic A.L., Bathe K.-J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and

- strain measures // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 1990. – V. 30, No 6. – P. 1099–1114. – doi: 10.1002/nme.1620300602.
13. *Давыдов Р.Л., Султанов Л.У.* Численный алгоритм решения задачи о больших упруго-пластических деформациях МКЭ // *Вестн. ПНИПУ. Механика.* – 2013. – № 1. – С. 81–93.
  14. *Davydov R.L., Sultanov L.U.* Numerical algorithm for investigating large elasto-plastic deformations // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 2015. – V. 88, No 5. – P. 1280–1288. – doi: 10.1007/s10891-015-1310-7.
  15. *Golovanov A.I., Sultanov L.U.* Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2005 – V. 41, No 6. – P. 614–620. – doi: 10.1007/s10778-005-0129-x.
  16. *Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U.* Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids // *Materials Phys. Mech.* – 2016. – V. 26, No 1. – P. 30–32.
  17. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. IV. Конечноэлементная реализация. Примеры решения задач // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2010. – Т. 152, кн. 3. – С. 115–126.

Поступила в редакцию  
29.08.17

---

**Султанов Ленар Усманович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: [Lenar.Sultanov@kpfu.ru](mailto:Lenar.Sultanov@kpfu.ru)

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 4, pp. 509–517

---

### **Analysis of Large Elastic-Plastic Deformations: Integration Algorithm and Numerical Examples**

*L.U. Sultanov*

*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*  
E-mail: [Lenar.Sultanov@kpfu.ru](mailto:Lenar.Sultanov@kpfu.ru)

Received August 29, 2017

#### **Abstract**

An algorithm for investigation of elastic-plastic solids with regard to finite deformations has been developed. The kinematics of elastic-plastic deformations is based on multiplicative decomposition of the deformation gradient into elastic and inelastic parts. The stress state is determined by the Cauchy stress tensor. The constitutive equations have been obtained from

the second law of thermodynamics with the introduction of the elastic free energy function. The elastic free energy function is formulated in an invariant form of the left Cauchy–Green tensor. The von Mises yield criterion with isotropic hardening has been used. The radial return method with an iterative refinement of the current state of deformation has been applied for dividing the elastic and plastic deformations. The principle of virtual work in terms of the virtual velocity has been used. The numerical implementation is based on the finite element method. The solution of the necking of a circular bar has been presented.

**Keywords:** nonlinear elasticity, finite deformations, plasticity

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10299).

### Figure Captions

Fig. 1. Force-displacement graph. Solid line – a dependence obtained with the help of the developed algorithm, □ – [2], ▲ – [3].

Fig. 2. Plastic deformation intensity.

### References

1. Sultanov L.U. Analysis of finite elastoplastic deformations. Kinematics and constitutive equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 158–165. (In Russian)
2. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: Multiplicative formulation and numerical implementation. *Comput. Mater. Sci.*, 2003, vol. 28, nos. 3–4, pp. 732–742. doi: 10.1016/j.commatsci.2003.08.027.
3. Schröder J., Gruttmann F., Löblein J. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures. *Comput. Mech.*, 2002, vol. 30, no. 1, pp. 48–64. doi: 10.1007/s00466-002-0366-3.
4. Simo J.S. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1988, vol. 66, no. 2, pp. 199–219. doi: 10.1016/0045-7825(88)90076-X.
5. Miehe C. A theory of large-strain isotropic thermoplasticity based on metric transformation tensors. *Arch. Appl. Mech.*, 1995, vol. 66, nos. 1–2, pp. 45–64. doi: 10.1007/BF00786688.
6. Basar Y., Itskov M. Constitutive model and finite element formulation for large strain elasto-plastic analysis of shell. *Comput. Mech.*, 1999, vol. 23, nos. 5–6, pp. 466–481. doi: 10.1007/s004660050426.
7. Meyers A., Schievbe P., Bruhns O.T. Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates. *Acta Mech.*, 2000, vol. 139, nos. 1–4, pp. 91–103. doi: 10.1007/BF01170184.
8. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient. *Int. J. Plast.*, 2000, vol. 16, no. 2, pp. 143–177. doi: 10.1016/S0749-6419(99)00045-5.
9. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997. 283 p.
10. Rouainia M., Wood D.M. Computational aspects in finite strain plasticity analysis of geotechnical materials. *Mech. Res. Commun.*, 2006, vol. 33, no. 2, pp. 123–133. doi: 10.1016/j.mechrescom.2005.06.014.

11. Simo J.S., Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1985, vol. 49, no. 2, pp. 221–245. doi: 10.1016/0045-7825(85)90061-1.
12. Eterovic A.L., Bathe K.-J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1990, vol. 30, no. 6, pp. 1099–1114. doi: 10.1002/nme.1620300602.
13. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformations by FEM. *Vestn. PNIPU. Mech.*, 2013, no. 1, pp. 81–93. (In Russian)
14. Davydov R.L., Sultanov L.U. Numerical algorithm for investigating large elasto-plastic deformations. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2015, vol. 88, no. 5, pp. 1280–1288. doi: 10.1007/s10891-015-1310-7.
15. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies. *Int. Appl. Mech.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 614–620. doi: 10.1007/s10778-005-0129-x.
16. Abdrakhmanova A.I., Sultanov L.U. Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids. *Mater. Phys. Mech.*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 30–32.
17. Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U. Numerical investigation of finite deformations of hyperelastic bodies. IV. Finite-element implementation. Examples of the solution of problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2010, vol. 152, no. 3, pp. 115–126. (In Russian)

---

⟨ **Для цитирования:** Султанов Л.У. Исследование конечных упругопластических деформаций: алгоритм решения, численные примеры // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 509–517. ⟩

⟨ **For citation:** Sultanov L.U. Analysis of large elastic-plastic deformations: Integration algorithm and numerical examples. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 509–517. (In Russian) ⟩