ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 30 ноября 2022 г.

Аннотация: *Вычислимо отделимые модели. Критерий вычислимой отделимости нумерованной модели. Алгоритмические представления линейных порядков. Вычислимые сечения и эффективно предельные точки нумерованных линейных порядков. Негативные плотные линейные порядки. Продуктивность семейства вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка. Структура степеней негативной представимости линейных порядков. Поле рациональных чисел над негативными эквивалентностями.*

Определение 1.1

Нумерованная модель (M, ν) *называется вычислимо отделимой, если для всякого n-местного отношения* P *(включая равенство) модели* M *и любого такого кортежа натуральных чисел* $\overline{x} \in \omega^n$*, что* $M \models \neg P(\nu\overline{x})$*, существует такое* ν*-замкнутое вычислимое множество* $A \subseteq \omega^n$*, что* $\overline{x} \in A \& \forall a \in A (M \models \neg P(\nu a))$.

Это определение является естественным обобщением определения вычислимо отделимой алгебры. Неформально говоря, вычислимая отделимость нумерованной модели означает, что каждая точка ложности любого предиката имеет вычислимую окрестность, не пересекающуюся с областью истинности данного предиката.

С технической точки зрения удобнее следующее

Определение 1.2

Нумерованная модель (M, ν) называется вычислимо отделимой, если для всякого n-местного отношения P (включая равенство) модели M и любого такого кортежа натуральных чисел $\overline{x} \in \omega^n$, что $M \models \neg P(\nu \overline{x})$, существуют такие ν-замкнутые вычислимые множества $A_1 \subseteq \omega, \ldots, A_n \subseteq \omega$, что $\overline{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \& \forall a \in A_1 \times \ldots \times A_n (M \models \neg P(\nu a))$.

Предложение 1.1

Определения 1.1 и 1.2 эквивалентны.

Доказательство. Достаточно показать, что из вычислимой отделимости модели по первому определению следует вычислимая отделимость модели по второму определению.
Пусть A – вычислимое множество, отделяющее фиксированную точку ложности $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \omega^n$ n-местного отношения P от области истинности данного отношения. Рассмотрим следующую процедуру.
Шаг 0:
Положим ${A_i}^0 = \{x_i\}$ для всех $i = \overline{1, n}$ и $B^0 = \varnothing$.
Шаг $e + 1$:
Берём первый кортеж $\overline{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$, не принадлежащий множеству ${A_1}^e \times \ldots \times {A_n}^e \cup B^e$ при перечислении A. Если для всех $i = \overline{1, n}$ выполняется условие ${A_1}^e \times \ldots \times \{z_i\} \times \ldots \times {A_n}^e \subseteq A$, то полагаем ${A_i}^{e+1} = {A_i}^e \bigcup \{z_i\}$ и $B^{e+1} = B^e$. В противном случае ${A_i}^{e+1} = {A_i}^e$ и $B^{e+1} = B^e \bigcup \{\overline{z}\}$. Конец шага $e + 1$.

1. Вычислимо отделимые модели

Положим $A_i = \bigcup\limits_{e \in \omega} A_i{}^e$ и $B = \bigcup\limits_{e \in \omega} B^e$. Тогда $A = A_1 \times \ldots \times A_n \bigcup B$. И множества $A_1 \times \ldots \times A_n$, и B перечислимы. Поскольку - вычислимое множество, то построенное множество вычислимо. По построению и из ν-замкнутости следует ν-замкнутость $A_1 \times \ldots \times A_n$. Отсюда вытекает, что A_i(для всех $i = \overline{1, n}$) является ν-вычислимыми множествами и $\overline{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \& \forall a \in A_1 \times \ldots \times A_n (M \models \neg P(\nu a))$. Предложение доказано.

2. Критерий вычислимой отделимости

Из результатов обзорной работы [1] вытекает исключительная важность негативных нумераций и негативных алгебр с точки зрения теории вычислимо отделимых нумерованных алгебр. Негативные модели играют аналогичную роль в характеризации вычислимо отделимых нумерованных моделей. Кроме того, понятие негативной модели является алгоритмически "двойственным" одному из важнейших понятий теории вычислимых моделей и теории абстрактных типов данных – понятию позитивной модели. Наконец, негативные нумерации и негативные модели сами по себе являются весьма естественным объектами. В данном подразделе даётся характеризация вычислимо отделимых нумерованных моделей в терминах их гомоморфизмов на негативные модели. Следующая теорема показывает, что негативные модели являются важными (и неочевидными) примерами вычислимо отделимых моделей.

[1] Н.Х.Касымов, Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры // Успехи мат. наук, 1996, 51, No. 3, 145–176.

2.Критерий вычислимой отделимости

Теорема 2.1

Всякая негативная модель является вычислимо отделимой.

Доказательство. Пусть (M, ν) – негативная модель. Обозначим через $[\ ]_\nu$ оператор ν-замыкания, т.е. $[\alpha]_\nu$ есть наименьшее ν-замкнутое множество, содержащее α. Будем говорить, что натуральное число z отвергается множеством α, если $z \notin [\alpha]_\nu$. Пусть $\delta_0, \dots \delta_n, \dots$ – сильно перечислимая последовательность конечных множеств (т.е. по номеру n множества δ_n можно эффективно восстановить все элементы этого мнжества). Заметим, что в силу негативности ν отношение "z отвергается множеством δ_n" является перечислимым, равномерно зависящим от z и n. Допустим, что $M \models \neg P(\nu \overline{x})$. Построим множество $A \subseteq \omega^n$, определяемое следующей процедурой.

2. Критерий вычислимой отделимости

Шаг 0: Полагаем $\alpha^0 = \{\overline{x}\}, \beta^0 = \varnothing$.

Шаг $e+1$: Выбираем первый кортеж $\overline{z} \in \omega^n$ (в некотором фиксированном перечислении всех кортежей длины n, например, заданном канторовской нумерационной функцией), не принадлежащий $\alpha^e \bigcup \beta^e$ и начинаем проверять $\overline{z}$ на предмет отвержения каждым из этих множеств. Если $\overline{z}$ отвергается α^e, то полагаем $\alpha^{e+1} = \alpha^e$, $\beta^{e+1} = \beta^e \bigcup \{\overline{z}\}$.

Если $\overline{z}$ отвергается β^e, то начинаем проверять условие $P(\nu\overline{z})$ ложно. Если ответ "да", то полагаем $\alpha^{e+1} = \alpha^e \bigcup \{\overline{z}\}$.

Если это не так, то, гарантированно, через конечное число шагов $\overline{z}$ отвергнется α^e и, в этом случае, полагаем $\alpha^{e+1} = \alpha^e$, $\beta^{e+1} = \beta^e \bigcup \{\overline{z}\}$. Конец шага $e+1$.

Покажем, что каждый шаг e завершается с занесением текущего набора $\overline{z}$ в одно из множеств α^e, β^e.
На шаге 0 имеем $[\alpha^0]_\nu \bigcap [\beta^0]_\nu = \varnothing$.
Пусть $[\alpha^e]_\nu \bigcap [\beta^e]_\nu = \varnothing$, тогда любое $\overline{z}$ отвергается хотя бы одним из множеств α^e, β^e. Если $\overline{z}$ отвергается β^e, то либо $M \models \neg P(\nu\overline{z})$, либо $\overline{z}$ отвергается α^e. Следовательно, множества α^e и β^e определены для всех e.
Положим

$$\alpha = \bigcup_{e \geq 0} \alpha^e; \ \beta = \bigcup_{e \geq 0} \beta^e.$$

2. Критерий вычислимой отделимости

Поскольку $\overline{z}$ относится к одному из этих множеств, то $\alpha \bigcup \beta = \omega^n$. Из $[\alpha^e]_\nu \bigcap [\beta^e]_\nu = \varnothing$ для всех e, следует что $\alpha \bigcap \beta = \varnothing$. Остаётся проверить, что α (а значит и β) является ν-замкнутым. Пусть $\overline{u} \in \alpha$ и $\nu\overline{u} = \nu\overline{v}$. Если $c\overline{u} < c\overline{v}$ (c – канторовская функция свертки), то для некоторого e имеем $\overline{u} \in \alpha^e$ и $\overline{v} \notin \alpha^e \bigcap \beta^e$, тогда $\overline{v}$ не отвергается множеством α ни на каком шаге, а значит $\overline{v}$ отвергается на некотором шаге $e_1 > e$ множеством β^{e_1} и имеет место $M \models \neg P(\nu\overline{v})$, следовательно $\overline{v} \in \alpha$. Если $c\overline{u} > c\overline{v}$, то $\overline{v} \in \alpha$, так как в противном случае $\overline{u}$ не отвергается β^e ни на каком шаге, а значит $\overline{u}$ отвергается α^e, но тогда $\overline{u} \notin \alpha^e$. Противоречие. Следовательно α – ν-замкнутое вычислимое множество.

Положим $A = \alpha$. Тогда, по построению, $\overline{x} \in A$ и $\forall a \in A(M \models \neg P(\nu a))$. Теорема доказана.

2. Критерий вычислимой отделимости

Формулировке следующей теоремы предпошлем замечание алгебраического характера.
Пусть A_0, A_1 – разбиение основного множества модели M на две непересекающиеся части. Рассмотрим множество $\Theta(A_0, A_1)$ всех конгруэнций функционального обеднения модели M, не "склеивающих" никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1.
Тогда в $\Theta(A_0, A_1)$ имеется наибольший элемент. Обозначим эту конгруэнцию через $Q^*(A_0, A_1)$.
Теперь, если (M, ν) – нумерованная модель и $\nu^{-1}A_0$ (а значит и $\nu^{-1}A_1$) вычислимо, то функциональное обеднение нумерованной фактор-модели $(M/Q^*(A_0, A_1), \nu^*)$, где через ν^* обозначена естественная проекция ν по конгруэнции $Q^*(A_0, A_1)$ (т.е. $\nu^* = \nu/Q^*(A_0, A_1)$), является негативным (Н.Х.Касымов [?]).

Теорема 2.2

Нумерованная модель (M, ν) является вычислимо отделимой тогда и только тогда когда она аппроксимируется негативными моделями.

Доказательство. Пусть (M, ν) – вычислимо отделимая модель и для некоторого $\overline{x} \in \omega^n$ и n-местного отношения модели $(M \models \neg P(\nu\overline{x}))$. Тогда, по условию, существуют вычислимые множества $A_1 \subseteq \omega^n, \ldots, A_1 \subseteq \omega^n$, что $\overline{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \wedge \forall a \in A_1 \times \ldots \times A_n(M \models \neg P(\nu a))$. Рассмотрим негативные конгруэнции $Q_i^*(A_i, \overline{A_i})(i = \overline{1, n})$ функционального обеднения модели.

Лемма 2.2.1

Пересечение вычислимого семейства негативных конгруэнций является негативной конгруэнцией.

Согласно этой лемме конгруэнция $Q^* = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i^*(A_i, \overline{A_i})$ является негативной конгруэнцией функционального обеднения модели (M, ν), не "склеивающей" никакой элемент из $A_1 \times \ldots \times A_n$ ни с каким элементом из его дополнения. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : (M, \nu) \to (M/Q^*, \nu^*)$ такой, что $M/Q^* \models \neg P(\varphi \nu a) \Leftrightarrow a \in A_1 \times \ldots \times A_n$, а остальные отношения (исключая равенство) полагаем тождественно истинными в $(M/Q^*, \nu^*)$. В силу вычислимости $A_1 \times \ldots \times A_n$, P является негативным отношением, сохраняющим ложность в точке $\varphi \nu \overline{x}$.

2. Критерий вычислимой отделимости

Обратно, пусть нумерованная модель (M, ν) аппроксимируется негативными моделями. Если для некоторого $\overline{x} \in \omega^n$ и n-местного отношения P имеет место $(M \models \neg P(\nu\overline{x}))$, то согласно условию, существует такая негативная модель (N, μ), гомоморфизм $\varphi : (M, \nu) \to (N, \mu)$ и вычислимая функция f, что $(N \models \neg P(\varphi\nu\overline{x}))$ и $\varphi\nu = \mu f$. По теореме 2.1 негативная модель (N, μ) вычислимо отделима. Следовательно, существует μ-замкнутое вычислимое множество α, отделяющее $f\overline{x}$ от области истинности P, но тогда $f^{-1}\alpha$ является ν-замкнутым вычислимым множеством, отделяющим $\overline{x}$ от области истинности отношения P. Теорема доказана.

Предложение 2.1

Нумерованная модель негативна тогда и тодько тогда, когда она является равномерно вычислимо отделимой со слабо вычислимо перечислимыми дополнениями всех основных отношений.

3. Алгоритмически представления линейных порядков

С точки зрения реализации целей настоящей лекции особо важный случай представляют $\sum_1^0$- и $\prod_1^0$-представимые модели, первые из которых называются позитивно, а вторые – негативно представимыми. Например, нумерация ν линейного порядка $\langle L; \preceq\rangle$ называется позитивной (негативной), если множества $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq \nu y\}$ и $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ (соответственно $\omega^2 \setminus \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ и $\omega^2 \setminus \{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq \nu y\}$) являются перечислимыми. Далее, для краткости, множества с перечислимыми дополнениями будем называть коперечислимыми.

Линейный порядок обладающий позитивной (негативной) нумерацией называется позитивно (негативно) представимым.

3. Алгоритмически представления линейных порядков

Как обычно, сечением линейного порядка назовем такое разбиение основного множества этого порядка на два непустых непересекающихся множества A и B, что всякий элемент из A строго меньше (в смысле $\preceq_L$) всякого элемента из B. При этом множество A называется нижним классом сечения, а B – верхним.

Существует три типа сечений:

в A есть наибольший элемент и в B есть наименьший (скачок);

в A есть наибольший элемент, а в B нет наименьшего, либо в A нет наибольшего, а в B есть наименьший (дедекиндово сечение);

в A нет наибольшего элемента и в B нет наименьшего (щель).

В случае плотных порядков случай скачков не имеет места, что будет использоваться далее без напоминаний.

Сечение $A|B$ нумерованного линейного порядка (L, ν) называется вычислимым, если вычислимо множество всех ν-номеров нижнего класса сечения. Заметим, что в силу симметричности понятия вычислимости и непустоты обоих классов сечения, не имеет значения брать ли нижний класс или верхний.
Элемент a линейного порядка $\langle L; \preceq_L \rangle$ называется предельным снизу, если $\forall x [x \prec_L a \to \exists y (x \prec_L y \prec_L a)]$, где $\prec_L$ обозначает "строго меньше". Аналогично определяется предельность сверху. Предельным называется элемент предельный либо снизу, либо сверху. Если элемент пределен как сверху, так и снизу, то мы будем называть его двухсторонне предельным.

3. Алгоритмически представления линейных порядков

Пусть η – произвольная (не обязательно негативная или позитивная) бесконечная эквивалентность на ω. Предельный снизу элемент n/η представимого над η линейного порядка $(\omega/\eta; \preceq_\eta)$ называется эффективно предельным снизу, если существует такая вычислимая последовательность $x_0, x_1, \ldots$ натуральных чисел, что
$x_0/\eta \prec_\eta x_1/\eta \prec_\eta \cdots \prec n/\eta$,
$\forall z[z/\eta \prec_\eta n/\eta \to \exists i \in \omega(z/\eta \prec_\eta x_i/\eta)]$,
где $\prec_\eta = \preceq_\eta \setminus id\ \omega/\eta$.
Аналогично определяется эффективно предельный сверху элемент.

Определение 3.1 (о представимости)

Система M называется $\sum_n^0(\prod_n^0)$-представимой над эквивалентностью η на ω, если существует $\sum_n^0(\prod_n^0)$-нумерация системы M с нумерационной эквивалентностью равной η.

При этом, вообще говоря, в самом общем случае можно не предполагать, что ядро нумерации, т.е. η является $\sum_n^0(\prod_n^0)$-множеством.

Пусть η – эквивалентность на ω. Подмножество γ множества натуральных чисел ω называется η-замкнутым, если γ вместе с каждым числом содержит и все ему η-эквивалентные, т.е. $x \in \gamma$ и $x = y \pmod{\eta} \to y \in \gamma$.
Для двух эквивалентностей будем говорить, что первая является расширением второй, если вторая содержится в первой.
Характеристической трансверсалью эквивалентности η называется множество минимальных представителей всех η-классов, т.е. $\{x \mid \forall y (x = y \pmod{\eta} \to x \leq y)\}$, которое обозначается через $tr(\eta)$.
Очевидна перечислимость характеристической трансверсали любой негативной эквивалентности.
Эквивалентность с бесконечным (конечным) числом смежных классов будем называть бесконечной (конечной).

η-замыканием множества α, обозначаемым через $[\alpha]_\eta$, называется пересечение всех η-замкнутых расширений множества α. Множество называется η-бесконечным (η-конечным), если его η-замыкание состоит из бесконечного (конечного) числа классов η-эквивалентности. Очевидно, что необходимым условием η-бесконечности множества является его бесконечность.
Если η – эквивалентность и δ – множество, то будем говорить, что число x η-отвергается множеством δ, если $x \notin [\delta]_\eta$. Очевидно, что для любой фиксированной негативной эквивалентности η отношение "натуральное число x η-отвергается конечным множеством δ" является равномерно перечислимым по x, δ (подразумевается явное задание всех элементов множества δ, например, посредством его канонического индекса).

Определение 3.2 (о представимости позитивных и негативных линейных порядков)

Линейный порядок $\langle L; \preceq_L \rangle$ *называется негативно (позитивно) представимым над эквивалентностью* η *на* ω, *если существует такая его нумерация* ν, *что* $\eta = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ *и множество* $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x \preceq_L \nu y\}$ *является коперечислимым (соответственно перечислимым).*

Предложение 3.1

Негативный (позитивный) линейный порядок с позитивной (соответственно негативной) нумерационной эквивалентностью является вычислимым.

Таким образом, для рассмотрения собственных расширений класса линейных порядков, обладающих вычислимыми представлениями имеет смысл изучение линейных порядков, негативно (позитивно) представимых над негативными же (соответственно позитивными) эквивалентностями, т.к. другие комбинации дают вычислимые порядки.

Предложение 3.2

Существует позитивная эквивалентность, над которой не определим никакой линейный порядок.

Заметим, что любая позитивная (негативная) эквивалентность с конечным числом смежных классов является вычислимой и порядковый тип всякого линейного порядка, эффективно реализуемого над ней, с точностью до изоморфизма, есть начальный отрезок порядкового числа ω. Поэтому с точки зрения дескриптивной теории алгоритмов (т.е. принципиального наличия или отсутствия алгоритмов) интерес представляют лишь бесконечные эквивалентности.

Известно, что всякий предельный элемент негативного линейного порядка является эффективно предельным, в то время как предельный элемент позитивного линейного порядка может не быть эффективно предельным и, более того, существует позитивная совершенная нумерация порядка рациональных чисел $\langle Q; \preceq_Q \rangle$, в которой никакой элемент не является эффективно предельным или, эквивалентно, в данном позитивном представлении порядкового типа τ множество вычислимых сечений пусто. Для любой же негативной нумерации порядка типа τ семейство вычислимых сечений трудно обозримо.

Предложение 3.3

Существует позитивный линейный порядок, никакое сечение которого не является вычислимым.

Следующая теорема вместе с предложением 2 обосновывает целесообразность рассмотрения именно негативных линейных порядков как наиболее широкого и естественного класса моделей, в котором можно развить теорию эффективных предельных переходов. Эти же факты обуславливают приоритетность негативных порядков перед позитивными, хотя, традиционно считалось, что позитивные модели гораздо важнее негативных.

4. Негативные плотные линейные порядки

Теорема 4.1

Над всякой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представимы все типы изоморфизмов счетных плотных линейных порядков.

Следствие 4.1.1

Счетный плотный линейный порядок негативно представим над негативной эквивалентностью η тогда и только тогда, когда η бесконечна.

Следствие 4.1.2

Над всякой бесконечной негативной эквивалентностью негативно представим порядковый тип $\tau + 2 + \tau$.

Заметим, что порядковый тип $\tau + 2 + \tau$ – не плотный.

Теорема 4.2

Для любого негативного плотного линейного порядка существует эффективная процедура, сопоставляющая всякой паре различных элементов этого порядка вычислимую щель, отделяющую эти элементы.

Пусть χ – фиксированная вычислимая нумерация семейства всех одноместных частично рекурсивных функций. Например, если k – бинарная клиниевская функция, универсальная для класса унарных частичных вычислимых функций (т.е. семейство одноместных частичных вычислимых функций есть множество объектов $\{\lambda x.k(x,n) | n \in \omega\}$), то можно положить $\chi(n) = \lambda x.k(x,n)$.

Следующие определения содержат неизбежные коллизии, возникающие при различных толкованиях вездесущего прилагательного "вычислимый".

Определение 4.1 вычислимого семейства сечений

Нумерация γ семейства вычислимых сечений $\Re$ негативного линейного порядка называется вычислимой, если существует такая вычислимая функция f, что $\gamma = \chi f$ (т.е. по любому γ-номеру сечения (=его характеристической функции) эффективно определяется некоторый его χ-номер).

Семейство вычислимых сечений негативного линейного порядка называется вычислимым, если существует его вычислимая нумерация. Неформально, вычислимость семейства вычислимых сечений означает перечислимость алгоритмов разрешения для сечений данного семейства.

Назовем семейство вычислимых щелей негативного линейного порядка относительно полным, если любая пара различных элементов этого порядка отделяется подходящей щелью из данного семейства.

Следствие 4.2.1 об относительно полных семействах щелей

Для всякого негативного плотного линейного порядка существует вычислимая (даже негативная) нумерация относительно полного семейства вычислимых щелей.

Определение 4.2 вычислимого пополнения

Вычислимым пополнением негативного плотного линейного порядка называется множество всех вычислимых щелей (индексов вычислимых характеристических функций их нижних классов) данного порядка.

Ниже будет показано, что упомянутая в предыдущем следствии относительно полная система отделяющих вычислимых щелей негативных плотных линейных порядков далеко не исчерпывает всего разнообразия вычислимых сечений, что обосновывает введение данного определения.

Если элемент негативного порядка не является двухсторонне предельным, то он есть рубеж вычислимого сечения.

Пример 4.1

Простейший пример негативной нумерации, в которой для единственного предельного (как снизу, так и сверху) элемента нет вычислимого сечения, рубежом которого он является, реализуется порядковым типом $\omega + 1 + \omega^*$.

В связи с теоремой 4.2, согласно которой существует относительно полная система отделяющих вычислимых щелей, задаваемая равномерно эффективной процедурой, возникает естественный и принципиальный вопрос об алгоритмической природе совокупности всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка.

Определение 4.3 продуктивности семейства вычислимых сечений

Семейство $\mathfrak{R}$ вычислимых сечений нумерованного линейного порядка называется продуктивным, если существует эффективная процедура, позволяющая по каждому перечислимому (по индексам характеристических функций множеств номеров нижних классов сечений) подсемейству $\mathfrak{R}_0 \subseteq \mathfrak{R}$ строить вычислимое сечение из $\mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_0$.

Теорема 4.3

Семейство всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка является продуктивным.

Следствие 4.3.1

Множество всех вычислимых сечений произвольного негативного плотного линейного порядка не является вычислимым.

5. Степени негативной представимости линейных порядков

Для негативной эквивалентности η обозначим через $L(\eta)$ класс всех линейных порядков, негативно представимых над η.
На множестве негативных эквивалентностей на ω введем следующее бинарное отношение $\trianglelefteq_{NLO}$:
$\eta_1 \trianglelefteq_{NLO} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2)$.
Очевидно, что $\trianglelefteq_{NLO}$ является предпорядком (т.е. рефлексивным и транзитивным отношением) на множестве всех негативных эквивалентностей на ω. Тогда его симметричное замыкание $\equiv_{NLO}$ есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на $\equiv_{NLO}$-классы эквивалентности. Содержательно, $\equiv_{NLO}$-эквивалентность двух эквивалентностей означает совпадение представимых над ними классов порядковых типов.

5. Степени негативной представимости линейных порядков

Если Π – семейство всех негативных эквивалентностей, то на $\Pi/\equiv_{NLO}$ действует частичный порядок, индуцированный предпорядком $\trianglelefteq_{NLO}$, который мы будем обозначать так же (корректность этого очевидна). Частично упорядоченное множество $\langle \Pi/\equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO} \rangle$ будем называть структурой негативной представимости линейных порядков, а его элементы – степенями негативной представимости. Далее, если будет ясно о чем идет речь, структуру негативной представимости линейных порядков будем называть просто структурой негативной представимости, а ее элементы – степенями. Для сокращения обозначений через $d(\eta)$ будем обозначать степень эквивалентности η. Будем также говорить, что линейный порядок представим над заданной степенью, если он представим над некоторой (а значит и над любой) эквивалентностью из этой степени.

5. Степени негативной представимости линейных порядков

Строение структуры негативной представимости линейных порядков отражает алгоритмическую природу эквивалентностей с точки зрения предоставляемых возможностей для реализации над ними важных объектов, каковыми, в частности, являются линейные порядки. Ясно, что чем $\trianglelefteq_{NLO}$-выше расположена степень, тем больше реализационных возможностей она предоставляет. Такой подход может оказаться также полезным в рамках теоретической информатики.

5. Степени негативной представимости линейных порядков

Счетный плотный линейный порядок представим над любой бесконечной степенью.
Отметим, что конечные негативные эквивалентности (которые в данном случае, очевидно, будут вычислимыми) порождают изолированные степени в структуре негативной представимости, т.к. если число классов эквивалентности есть n, то над ней представим только порядковый тип, изоморфный конечному ординалу n.
Отбросив все $\equiv_{NLO}$-классы, порожденные конечными эквивалентностями, получим ограничения отношений $\trianglelefteq_{NLO}, \equiv_{NLO}$ на бесконечные негативные эквивалентности. Всюду далее, структура негативной представимости рассматривается в контексте отсутствия степеней, содержащих конечные эквивалентности.

Предложение 5.1

Структура негативной представимости имеет наибольший элемент.

5. Степени негативной представимости линейных порядков

Лемма 5.1 о существовании вычислимого представления

Всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимую нумерацию.

Таким образом, всякий негативно представимый бесконечный линейный порядок представим над степенью $d(id\ \omega)$, которая и является наибольшей в структуре негативной представимости.
Важно отметить, что наличие позитивного представления линейного порядка вовсе не влечет существование его вычислимого представления.

5. Степени негативной представимости линейных порядков

Теорема 5.1

Существует бесконечно убывающая цепь степеней негативной представимости линейных порядков.

Следствие 5.1.1 (о бесконечности структуры степеней негативной представимости порядков)

Структура бесконечных степеней негативной представимости линейных порядков является бесконечной.

Следствие 5.1.2 (о вложимости порядка, двойственного ω^*

Структура бесконечных степеней негативной представимости линейных порядков содержит множество степеней, упорядоченное по типу $1+\omega^*$.

5. Степени негативной представимости линейных порядков

Если η – эквивалентность на ω, то алгебру $\langle A; \Sigma \rangle$ будем называть представимой над η, если существует нумерация этой алгебры с нумерационной эквивалентностью равной η, т.е., равносильно, найдется такое вычислимое семейство F вычислимых функций, согласованных с эквивалентностью η (из η-эквивалентности аргументов следует η-эквивалентность значений), что $\langle A; \Sigma \rangle$ изоморфна фактор-алгебре вычислимой алгебры $\langle \omega; F \rangle$ по конгруэнции η. Всякая алгебра, представимая над эквивалентностью η называется η-алгеброй. Заметим, что любая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (например, индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной Σ-алгебры от счетного множества свободных порождающих, т.к. любая Σ-алгебра есть гомоморфный образ абсолютно свободной от подходящего числа свободных порождающих).

6. Поле рациональных чисел над негативными эквивалентностями

Пусть $\mathbf{Q} = \langle Q; +, * \rangle$ – поле рациональных чисел. Заметим, что всякая позитивная нумерация поля является вычислимой, т.к. любое поле – простая алгебра. В то же время, известно, что существует невычислимая негативная нумерация поля $\mathbf{Q}$. Такие нумерации являются весьма специфическими, т.к. далеко не над каждой негативной эквивалентностью определимо поле $\mathbf{Q}$. К примеру, эквивалентность хотя бы с одним вычислимым смежным классом назовем локально вычислимой. Соответственно, нумерацию назовем локально вычислимой, если таковой является ее нумерационная эквивалентность. Имеет место

Теорема 6.1

Всякая локально вычислимая нумерация поля рациональных чисел вычислима.

Следствие 6.1.1 (о негативной непредставимости)

Существует негативная эквивалентность, над которой негативно не представимо упорядоченное поле $Q_{\leqslant}$.

Таким образом, свойство "универсальности" счетных плотных линейных порядков, заключающееся в их негативной определимости над любой бесконечной негативной эквивалентностью, в случае поля рациональных чисел не имеет места. Тем не менее, используя эффективность характеристических трансверсалей негативных эквивалентностей, можно ввести метрические свойства и развить аналог упорядоченого поля рациональных чисел над любой бесконечной негативной эквивалентностью на основе вычислимых частичных функций.

6. Поле рациональных чисел над негативными эквивалентностями

Пусть η – бесконечная негативная эквивалентность и $\langle \omega/\eta; \trianglelefteq \rangle$ – негативный линейный порядок, изоморфный порядковому типу τ рациональных чисел (существующий по теореме 1). Выберем любое вычислимое представление порядкового типа τ, которое обозначим через $\langle \omega; \preceq_Q \rangle$, т.е. на ω зададим вычислимый плотный линейный порядок $\preceq_Q$.

Предложение 6.1

Порядок $\langle \omega; \preceq_Q \rangle$ эффективно сводится к $\langle \omega/\eta; \trianglelefteq \rangle$.

Важное замечание 6.1

Заметим, что f-образ всякой вычислимой $\preceq_Q$-щели вычислим. Однако f-образ вычислимого $\preceq_Q$-сечения может и не быть вычислимым.

6. Поле рациональных чисел над негативными эквивалентностями

Пусть $\langle A; \Sigma \rangle$ – частичная алгебра. Эквивалентность θ на основном множестве этой алгебры назовем конгруэнцией, если для любой Σ-операции и любых наборов соответствующей местности из эквивалентности аргументов и определенности значений следует их (значений) эквивалентность, т.е.
$\forall \sigma \in \sum [\, \forall \overline{x}, \overline{y} \, (\quad \overline{x} = \overline{y} \pmod{\theta} \wedge \sigma\overline{x} \downarrow \wedge \sigma\overline{y} \downarrow \rightarrow \ \sigma\overline{x} = \sigma\overline{y} \pmod{\theta})].$

6. Поле рациональных чисел над негативными эквивалентностями

Рассмотрим вычислимое упорядоченное поле рациональных чисел $\langle\omega; +, *, \leq\rangle$, заданное на множестве ω. Выберем любую бесконечную негативную эквивалентность η и зафиксируем линейный порядок $\langle\omega/\eta; \trianglelefteq\rangle$, негативно заданный над ней. По Предложению 6.1 существует эффективный изоморфизм $\varphi : \langle\omega \leq\rangle \to \langle\omega/\eta; \trianglelefteq\rangle$, поддерживаемый на номерах подходящей вычислимой функцией f. Построим теперь частичное η-поле следующим образом. Определим на $tr(\eta)$ две операции $\oplus, \otimes$:
$x \oplus y = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$,
$x \otimes y = f^{-1}(x) * f^{-1}(y)$.

6. Поле рациональных чисел над негативными эквивалентностями

В частичной алгебре $\langle \omega; \oplus, \otimes \rangle$ эквивалентность η есть конгруэнция, т.к. значения операций определены только на η-трансверсальных элементах. Рассмотрим фактор-поле $\langle \omega/\eta; \oplus, \otimes \rangle$ этого частичного поля вместе с линейным порядком $\trianglelefteq$. Тогда, очевидно, справедливо

Предложение 6.2

Вычислимая функция f осуществляет эффективный изоморфизм Q на упорядоченное поле $\langle \omega/\eta; \oplus, \otimes, \trianglelefteq \rangle$.

Теперь, в рамках $\langle \omega/\eta; \oplus, \otimes, \trianglelefteq \rangle$ (для любой бесконечной негативной эквивалентности η) можно рассматривать основные понятия, касающиеся упорядоченного поля рациональных чисел.

6. Поле рациональных чисел над негативными эквивалентностями

Проблема 6.1

Существует ли невычислимое негативное представление упорядоченного поля рациональных чисел?

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!