

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.5

doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.221-243

О ПРИЧИНАХ ПОТЕРИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОМПОЗИТНОГО ТЕСТ-ОБРАЗЦА ПРИ ТРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ

*В.Н. Паймушин^{1,2}, Р.А. Каюмов^{3,2}, Ф.Р. Шакирзянов^{3,2},
С.А. Холмогоров^{1,2}*

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

³*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Казань, 420043, Россия*

Аннотация

Приведены результаты экспериментальных исследований и численных задач о трехточечном изгибе композитного тест-образца (балки). При численном анализе поведения балки, который проводится в физически и геометрически нелинейной постановке задачи, учтено, что она изготовлена путем послойной выкладки однонаправленной углеленты, уложенной вдоль оси образца. Для определения предельной нагрузки, при достижении которой происходит потеря прочности фаз композита тест-образца, использован критерий Цая–Ву. Проведен сравнительный анализ поведения тест-образца при различных ее толщинах и различных диаметрах нагружающего ролика. Выявлено, что разрушение коротких тест-образцов происходит в результате потери прочности материала под нагружающим роликом (посередине), а в длинных расслоение срединной плоскости образцов происходит по тонкому адгезионному слою. Этот эффект объясняется потерей устойчивости адгезионного слоя по неклассической поперечно-сдвиговой форме. Показано, что диаметр ролика практически не влияет на величину предельной нагрузки, в то время как нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости слоя на лицевой поверхности тест-образца, весьма чувствительна к изменению его величины. Выявлена хорошая корреляция численных результатов с данными, полученными в экспериментальных исследованиях рассматриваемых типов образцов.

Ключевые слова: композит, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность, потеря устойчивости, прочность, адгезионный слой, тест-образец

Введение

В изделиях аэрокосмической, судостроительной, авиационной и автомобильной техники в качестве несущих элементов конструкции широко используются волокнистые композитные материалы (ВКМ) на основе стекло- и углепластиков ввиду того, что они обладают, в частности, высокими прочностными и жесткостными характеристиками при малом удельном весе, а также имеют высокую технологичность производства по сравнению с металлическими материалами.

Перед прочностным расчетом конструкций из ВКМ необходимо определить его механические характеристики. Для их определения, как правило, проводят различные испытания. В отличие от металлов для ВКМ ввиду анизотропии их свойств требуется определить гораздо большее количество механических характеристик,

что привело к появлению немалого количества различных стандартов испытаний ВКМ. Анализ экспериментальных исследований показал, что, в отличие от традиционных изотропных материалов, ВКМ проявляют специфические свойства при испытаниях на различные виды нагрузок [1–7].

Одними из традиционных и наиболее простыми в реализации являются испытания на изгиб. Существуют различные их стандарты, одним из которых является испытание на трехточечный изгиб (ASTM D790 Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials). Этому виду испытаний посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований [8–22]. В некоторых случаях и в этом виде деформирования композитных балок проявляются специфические свойства поведения ВКМ. Например, в работе [1] выявлена такая особенность поведения тест-образца ВКМ, как неклассическая форма потери устойчивости фаз композита при четырехточечном изгибе балки. Причиной появления таких эффектов может быть то, что фазы композита находятся в условиях сложного напряженного состояния, поскольку в области закрепления или нагружения композита возникают сильные градиенты напряженно-деформированного состояния (НДС).

Кроме того, к появлению таких эффектов может привести наличие в структуре материала фаз особого строения, вызванного процессом создания ВКМ. В частности, в современном производстве элементов конструкций из ВКМ часто используют технологию послойной выкладки из препрега, в которой технологический процесс получения изделий из ВКМ делится на два этапа: получение заготовок заданной формы и их последующее отверждение. Препрег представляет собой предварительно пропитанные при высокой температуре и давлении предкатализированной смолой ткани или волокна. При изготовлении препрега материал поступает из разматывающего устройства, разглаживается, пропускается через ванны со смолой, тщательно отжимается при помощи системы специальных прецизионных валов, высушивается в специальных сушилках, а затем сматывается в рулон или разрезается на листы заданного размера. Смола в препрегах находится в полутвердом состоянии. Ее полное отверждение происходит при воздействии повышенной температуры.

К методам формования ВКМ относятся вакуумное, автоклавное формование и формование под давлением с помощью матрицы-пуансона. В случае вакуумного формования после укладки необходимого числа монослоев, пока смола еще не полимеризовалась, на будущее изделие накидывается вакуумный мешок. Отверждение композиции осуществляется в прижатом к форме состоянии при комнатной температуре либо при нагревании воздушными сушилками и другими устройствами. В результате таких операций образуется слоистый композиционный материал со слабым адгезионным слоем между монослоями, что может привести при нагружении к потере устойчивости этого слоя по сдвиговой форме.

На рис. 1 представлено поперечное сечение образца из ВКМ, на котором можно отчетливо видеть скрепляющую продольные основные волокна технологическую нить, также являющуюся своеобразным разделителем между слоями. Высота волны этой нити составляет около 200 мкм (черным цветом выделяются пустоты в структуре композита, которые, как хорошо видно, совпадают с линией поперечной нити).

Кроме того, на устойчивость фаз композиционного материала могут оказывать влияние его реологические свойства [23]. В ряде классических работ [24–30] приводятся результаты исследований процесса потери устойчивости конструкций с учетом ползучести. В них показано, что в ряде случаев потеря устойчивости может быть вызвана перераспределением напряжений, изменением геометрии тела

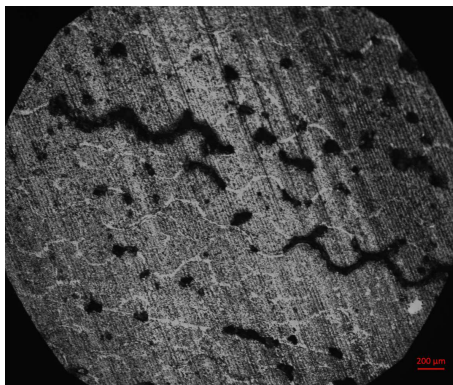


Рис. 1. Поперечное сечение композита ЭЛUR-II

и направления силового воздействия по причине наличия ползучести. При этом время потери устойчивости можно оценить обычным образом, анализируя возможность существования неединственного поля перемещений (бифуркации), принимая в этот момент упругий закон деформирования (ввиду практически мгновенной перестройки этого поля перемещений). В других случаях неустойчивость конструкций проявляется в том, что через некоторое время скорость деформации катастрофически быстро увеличивается [1, 2, 31]. Таким образом, эти задачи становятся, с одной стороны, физически и геометрически нелинейными, а с другой – зависящими от времени. Однако для простоты нередко особенности поведения материала, обусловленные реологическими его свойствами, описываются моделями нелинейно упругого деформирования [32–34].

Различные формы потери устойчивости фаз композиционного материала являются факторами, приводящими или к мгновенной потере несущей способности конструкции, или к процессам приспособления, или к прогрессирующему накоплению микрповреждений и окончательному разрушению ВКМ (например, при циклических нагрузках [4, 5, 35–37]). Некоторые из этих эффектов могут привести к неправильному определению прочностных характеристик композита при испытании на изгиб. В настоящей работе ставятся задачи экспериментального исследования поведения композитного тест-образца при трехточечном изгибе и численного моделирования его поведения при использовании физически и геометрически нелинейных соотношений механики деформируемого твердого тела с целью выявления причин и механизмов потери несущей способности тест-образцов. Исследуются две возможные причины: потеря устойчивости или потеря прочности фаз композита.

1. Материалы и методы

1.1. Параметры тест-образцов. Материал тест-образца представляет собой ВКМ, армированный в направлении длинной стороны образца. Длина тест-образца составляет L , размеры поперечного сечения $B \times H$. Тест-образец опирается на нижние ролики, а через верхний ролик к нему прикладывается погонная нагрузка P (рис. 2).

Для проведения испытаний на трехточечный изгиб были изготовлены тест-образцы (короткие и длинные) из препрега HSE 180 REM на основе однонаправленной углеленты с прямолинейными волокнами. Испытание образцов проводилось согласно стандарту ASTM D790. В ходе испытаний определялась предельная нагрузка и прогиб под центральным роликом.

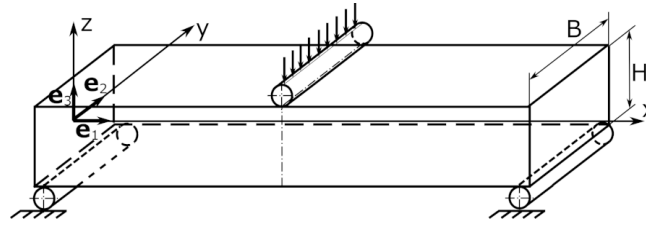
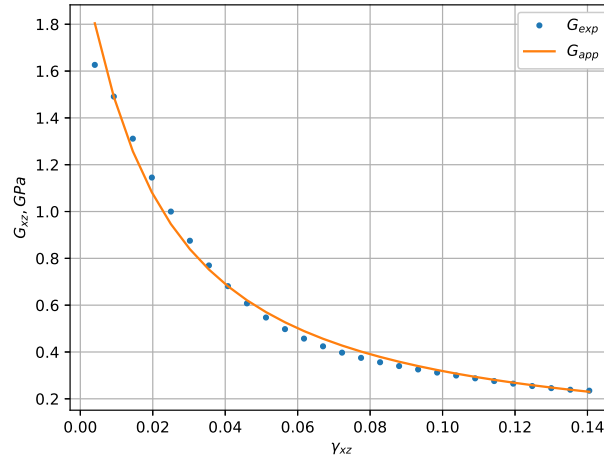


Рис. 2. Схема нагружения тест-образца на трехточечный изгиб

Рис. 3. Экспериментальная зависимость секущего модуля от деформаций сдвига $G_{xz}^s = G_{xz}^s(\gamma_{xz})$

1.2. Основные соотношения. При численном моделировании процесса трехточечного изгиба тест-образца из ВКМ задача решалась в геометрически и физически нелинейной постановке. Физическая нелинейность учитывалась при моделировании сдвига в поперечной плоскости тест-образца, а в адгезионном слое, исходя из результатов проведенных ранее исследований связующего ВКМ [1], закон упругости принимался физически линейным. На основе ранее полученных результатов [1] также была получена экспериментальная зависимость секущего модуля поперечного сдвига G_{xz}^s от деформации поперечного сдвига γ_{xz} . Этот модуль аппроксимировался следующей функцией:

$$G_{xz}^s = \frac{G_1}{1 + G_2 |\gamma_{xz}|^\alpha}, \quad (1)$$

где G_1 , G_2 , α — механические характеристики, получаемые минимизацией квадратичной невязки расчетных и экспериментальных значений секущего модуля, приведенного на рис. 3.

Параметры, входящие в функцию (1), которая описывает изменение секущего модуля от поперечного сдвига, равны

$$G_1 = 2.096 \text{ ГПа}, \quad G_2 = 70.25, \quad \alpha = 1.1.$$

Длина контакта взаимодействия нагружающих и опорных роликов с тест-образцом (на рис. 4 обозначена через c) считается постоянной, равной тому значению, при котором достигается потеря несущей способности балки по причине потери прочности или потери устойчивости ее элементов. При этом контактные давления

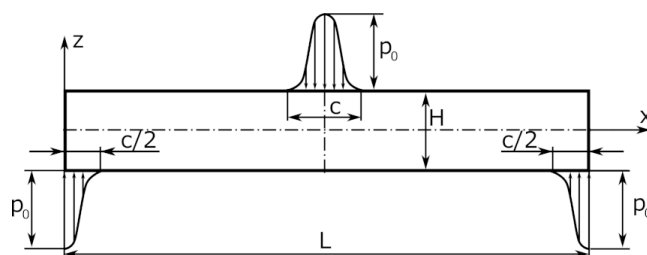


Рис. 4. Схема приложения внешней нагрузки

аппроксимировались переменной по длине c поверхностной нагрузкой p , изменяющейся по закону

$$p = p_0 \left[\cos \left(\frac{2\pi x}{c} \right) + 1 \right], \quad (2)$$

где p_0 – амплитуда нагрузки.

1.3. Критерий прочности Цая – Ву. Как было отмечено, тест-образец может разрушиться либо из-за потери прочности его элементов, либо из-за потери устойчивости этих элементов в области нагружающего ролика. Для оценки прочности элемента балки был принят критерий прочности Цая – Ву [38]. Поскольку с большой точностью можно считать, что балка находится в плоском напряженном состоянии, этот критерий можем записать в виде

$$f = B_{11}\sigma_1^2 + B_{22}\sigma_2^2 + B_{66}\tau_{12}^2 + 2B_{12}\sigma_1\sigma_2 + B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 \leq 1, \quad (3)$$

где

$$B_{11} = \frac{1}{X_t X_c}, \quad B_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}, \quad B_{66} = \frac{1}{S^2}, \quad B_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad B_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}.$$

Здесь X_t , Y_t – пределы прочности на растяжение вдоль осей x , y соответственно; X_c , Y_c – пределы прочности на сжатие вдоль осей x , y ; S – предел прочности на сдвиг, σ_1 , σ_2 – напряжения вдоль осей ортотропии.

Коэффициент определяется при испытании на двухосное нагружение при $\sigma_1 = \sigma_2 = p$. Однако из-за трудоемкости проведения испытаний на двухосное растяжение, коэффициент B_{12} обычно находят из испытаний на одноосное растяжение образцов из однонаправленных композитов с укладкой волокон под углом $\pm 45^\circ$. Поэтому при проведении расчетов коэффициент был принят в более простом варианте, предложенном Хоффманом (см. [39])

$$B_{12} = \frac{1}{2X_t X_c}.$$

1.4. Разрешающие уравнения. Решение задачи выявления возможных форм потери устойчивости элементов тест-образца из ВКМ в настоящей работе основано на геометрически нелинейном анализе процесса деформирования, использующем глобальную инкрементальную теорию Лагранжа [40–42]. Для изложения этого подхода запишем основные соотношения теории деформирования в тензорном виде. Пусть текущая геометрия конструкции описывается в декартовой системе координат уравнением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t),$$

где \mathbf{X} – радиус-вектор, описывающий первоначальную геометрию тела (рис. 5).

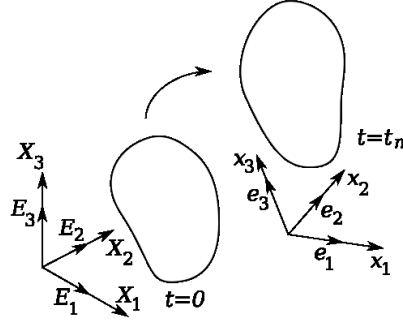


Рис. 5. Исходное и деформированное состояния сплошной среды

Запишем выражение для тензора градиента деформации в виде

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (4)$$

Компоненты ее будут иметь следующий вид:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad (5)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, u_i – компоненты вектора перемещений \mathbf{u} .

Тогда тензор деформаций Грина можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (6)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор, а компоненты этого тензора могут быть записаны в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ji}F_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right). \quad (7)$$

Вариационное уравнение Лагранжа представимо в виде

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV, \\ \delta W_{\text{ext}} &= \int_{V_0} \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{A_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь δW_{int} – вариация работы внутренних сил, δW_{ext} – вариация работы внешних сил, \mathbf{S} – второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа, $\delta \mathbf{E}$ – вариация тензора деформаций Грина, \mathbf{f}_0 – объемные силы, \mathbf{t}_0 – поверхностные силы, $\delta \mathbf{u}$ – вариация перемещений, V_0 – начальный объем, A_0 – начальная площадь поверхности тела.

Вариация тензора деформаций Грина (7) запишется в виде

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} F_{kj} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} F_{ki} \right) = \frac{1}{2} (\delta u_{k,i} F_{kj} + \delta u_{k,j} F_{ki}), \quad (10)$$

Зависимость между тензорами напряжений Пиолы–Кирхгофа \mathbf{S} и деформациями Грина \mathbf{E} для физически нелинейного случая запишем в приращениях в виде

$$\Delta \mathbf{S}(\mathbf{E}) = \mathbf{D}(\mathbf{E}) : \Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ – тензор нелинейно-упругих характеристик материала (тензор касательных жесткостей).

Вариационное уравнение (9) после линеаризации примет вид [40–42]:

$$\Delta \delta W_{\text{int}} = \Delta \delta W_{\text{ext}}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \delta W_{\text{int}} &= \int_{V_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{D} : \Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) dV + \int_{V_0} \mathbf{S} : [(\nabla_0 \Delta \mathbf{u})^T \cdot \nabla_0 \delta \mathbf{u}] dV, \\ \Delta \delta W_{\text{ext}} &= \int_{V_0} \Delta \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{A_0} \Delta \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}), \quad \Delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}).$$

Для численного решения сформулированной задачи о трехточечном изгибе тест-образца из ВКМ на основе вариационного уравнения (11) была разработана конечно-элементная модель с использованием восьмиузловых изопараметрических трехмерных конечных элементов [43–46] с учетом геометрической и физической нелинейности. Под физической нелинейностью подразумевалась зависимость модуля сдвига от деформации сдвига, которая учитывалась соотношением (1). Матрица упругих констант строилась как матрица секущих модуля упругости при сдвиге. Для численного решения уравнений использовался метод последовательных догружений, где на каждом шаге решение уточнялось методом Ньютона–Рафсона. При верификации программы были проведены численные эксперименты на тестовых задачах (растяжение и изгиб балки) при различном количестве элементов.

1.5. Критерий устойчивости. При использовании деформационного подхода под потерей устойчивости можно понимать два состояния. В первом случае под потерей устойчивости понимается состояние, при котором приращение перемещений или деформаций катастрофически быстро увеличивается при незначительном приросте нагрузки P . Во втором случае под потерей устойчивости понимается состояние, при котором на диаграмме «сила–перемещение» появляется экстремум. Нагрузку, при которой это происходит, в обоих случаях обычно называют критической.

2. Результаты

2.1. Натурные испытания. Для проведения испытаний на трехточечный изгиб, как было отмечено выше, были изготовлены тест-образцы из препрега HSE 180 REM на основе однонаправленной углеленты с прямолинейными волокнами [7], размеры поперечного сечения которых, как и при проведении численных экспериментов, в среднем были равны $H = B = 9$ мм. Были изготовлены как короткие образцы длиной 60 мм, так и длинные – 200 мм.

Первоначально были проведены испытания длинных тест-образцов, диаграммы деформирования которых представлены на рис. 6.

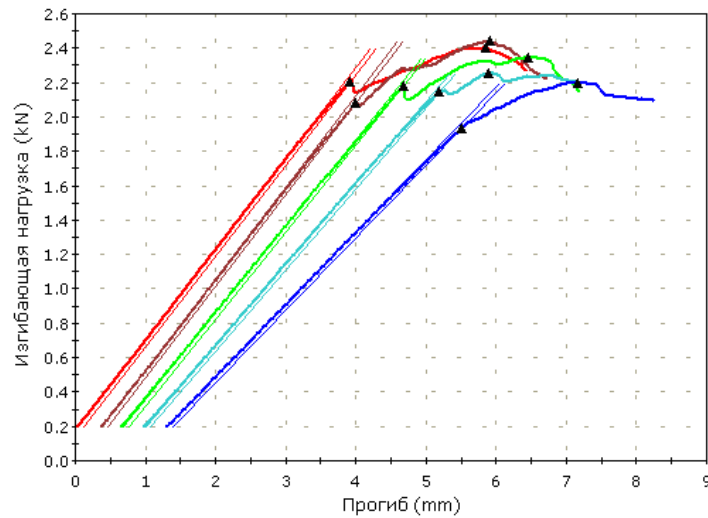


Рис. 6. Диаграммы деформирования длинных образцов при изгибе



Рис. 7. Удлиненные тест-образцы: слева – до испытаний, справа – после испытаний

Треугольниками на диаграмме показаны точки окончания линейного участка и предельные нагрузки. Результаты испытаний на трехточечный изгиб длинных образцов показали, что они разрушаются путем расслоения вдоль их осевой линии (рис. 7). Среднее значение предельной нагрузки равно $P_{\text{экс}} = 2.356$ кН [7].

Далее были проведены испытания на изгиб коротких образцов (рис. 8).

Результаты испытаний на трехточечный изгиб коротких образцов показали, что они разрушаются в окрестности нагружающего ролика посередине образца (рис. 9), в то время как длинные образцы, в отличие от коротких, разрушились путем расслоения вдоль осевой линии. Среднее значение предельной нагрузки равно $P_{\text{экс}} = 3.380$ кН [7].

2.2. Численные эксперименты. В численных расчетах использовались упругие характеристики, приведенные в работе [47], в которой получены следующие осредненные характеристики для ВКМ и связующего: $E_1 = 131$ ГПа, $E_2 = E_3 = 5.9$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{23} = 0.29$; для адгезионного слоя $E = 2.7$ ГПа, $G_{12} = 1.038$ ГПа, $\nu = 0.3$, толщина адгезионного слоя $t = 0.07$ мм.

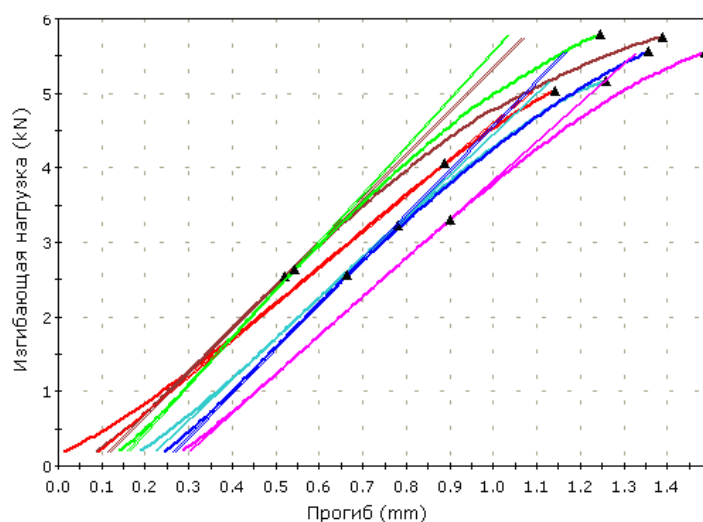


Рис. 8. Диаграммы испытаний коротких образцов на изгиб



Рис. 9. Короткие тест-образцы: слева – до испытаний, справа – после испытаний

При моделировании трехточечного изгиба образца были рассмотрены три случая: длинный образец без учета адгезионного слоя между слоями препрега, длинный и короткий образец с введением адгезионного слоя в срединной плоскости образца. Сходимость решения исследовалась как по числу итераций, так и по количеству конечных элементов. Результаты, полученные путем численных расчетов, приведены ниже.

2.3. Длинный образец без учета адгезионного слоя. Результаты моделирования трехточечного изгиба длинного образца без учета адгезионного слоя показали, что механизм разрушения ВКМ представляет собой излом посередине, расслоения не происходит. Предельная экспериментальная нагрузка оказалась меньше критической, поэтому считалось, что разрушение происходит от излома. Расчетная предельная нагрузка в этом случае равна $P_{кр} = 3$ кН, а предельная нагрузка в натурном испытании – $P_{экс} = 2.356$ кН, что дает завышение на 21%. На рис. 10, а показана зависимость нагрузки от максимального угла сдвига, который возникает в окрестности центрального сечения образца $x = 0$.

На рис. 10, б для правой части образца (ввиду симметрии) показано поле уровня напряженности по критерию Цая – Ву перед разрушением для правой части балки (ввиду симметрии). Из рисунка видно, что наиболее нагруженная часть ВКМ находится посередине под нагружающим роликом, при этом значение уровня напряженности не достигает значения 1.

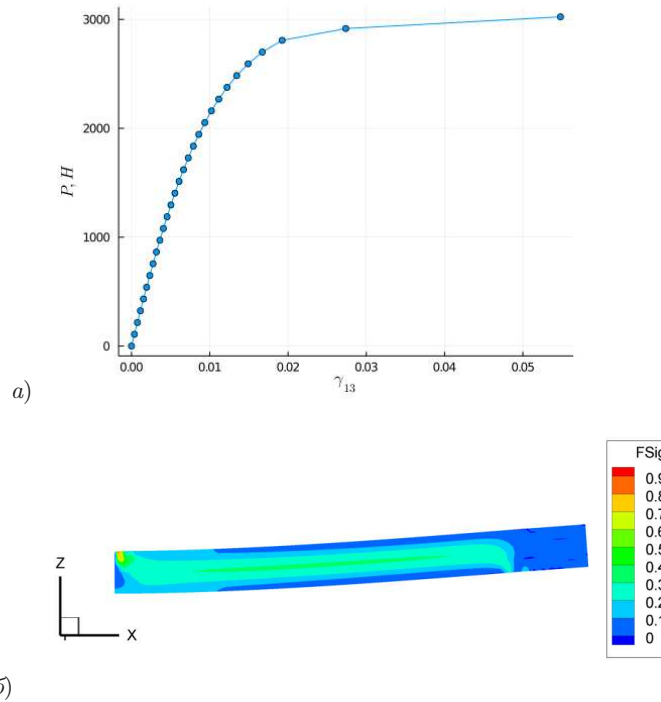


Рис. 10. Длинная балка без учета адгезионного слоя: *a)* зависимость предельной нагрузки от угла сдвига в окрестности нагружающего ролика; *б)* уровень напряженности по критерию Цая – Ву в предельном состоянии (правая половина тест-образца)

Таким образом, разрушение происходит изломом, и эта модель не описывает механизм расслоения балки, которое наблюдается в эксперименте. Было сделано предположение о том, что причиной такого разрушения является структура тест-образца: композитная балка представляет собой слоистый материал, изготовленный из монослоев препрега, между которыми всегда образуются адгезионные слои, отождествляемые со связующим ВКМ. Поэтому разрушение происходит в адгезионном слое путем сдвига монослоев относительно друг друга. Так как максимальные касательные напряжения возникают в среднем слое, то и разрушение должно происходить по этому адгезионному слою. Поэтому в дальнейшем образец моделировался как трехслойный с жесткими внешними слоями ВКМ с осредненными характеристиками и со средним адгезионным слоем с характеристиками связующего.

2.4. Длинный образец с учетом адгезионного слоя. На рис. 11 приведена схема нагружения образца с учетом адгезионного слоя между монослоями. Определялись значение уровня напряженности по критерию Цая – Ву, а также нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости фаз рассматриваемого композита.

На рис. 12, 13 представлены результаты расчета для длинного образца с адгезионным слоем.

Анализ результатов расчетов показал, что образец теряет несущую способность из-за потери устойчивости сдвигом в адгезионном слое (рис. 12, *a*), поскольку появление больших перемещений при малых возмущениях по определению является потерей устойчивости конструкции. При этом показатель уровня напряженности по критерию Цая – Ву не достигает предельного значения $f = 1$ на этом шаге на-

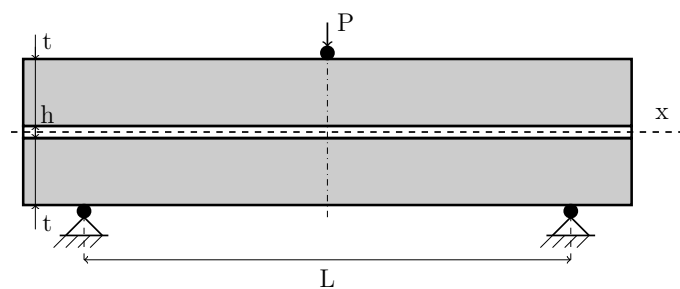


Рис. 11. Схема тест-образца с адгезионным слоем

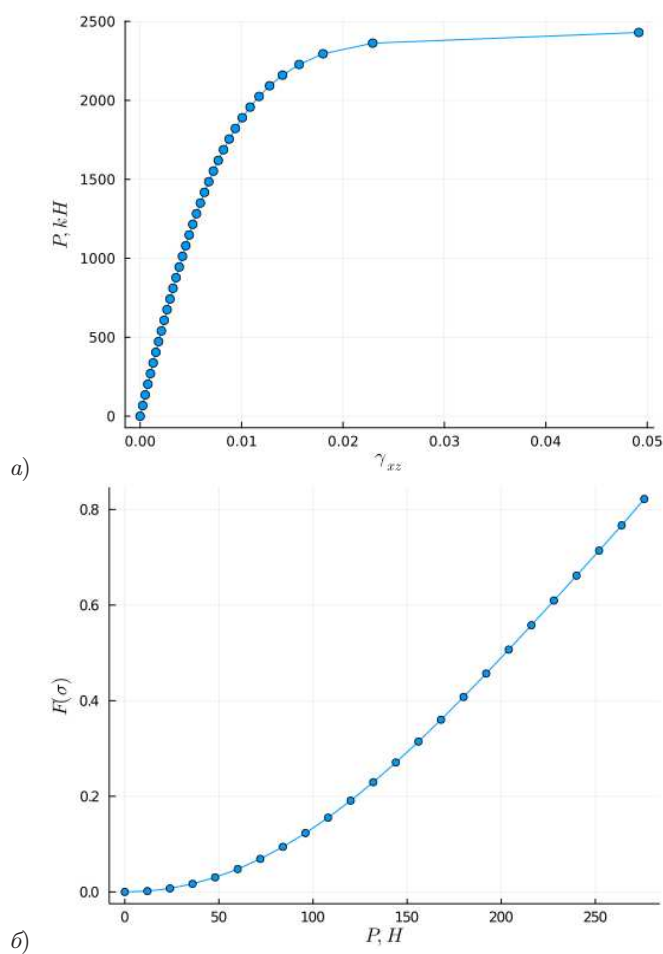


Рис. 12. Диаграммы, построенные по результатам численных расчетов длинных тест-образцов: а) зависимость нагрузки от сдвига адгезионного слоя; б) максимальное значение показателя уровня напряженности по критерию Цая – Ву в зависимости от нагрузки

гружения (рис. 12, б). Максимальное значение показателя уровня напряженности по критерию Цая – Ву в зависимости от нагрузки возникает на расстоянии $c/2$ от центральной точки на поверхности балки. Расчетная предельная нагрузка оказалась равной $P_{кр} = 2.484$ кН, а предельная нагрузка в натурном испытании равна $P_{экс} = 2.356$ кН, разница составляет 5%.

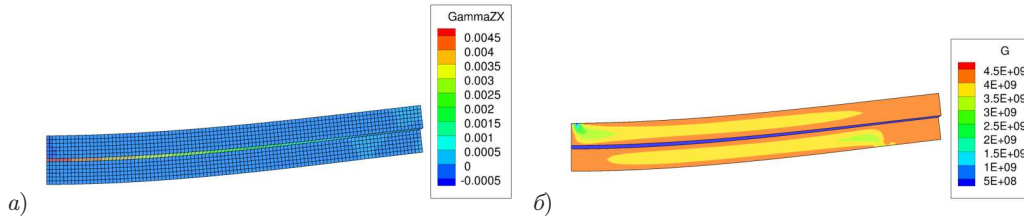


Рис. 13. НДС длинных тест-образцов: а) картина деформирования в предельном состоянии (правая половина тест-образца); б) распределение модуля сдвига в предельном состоянии (правая половина тест-образца)

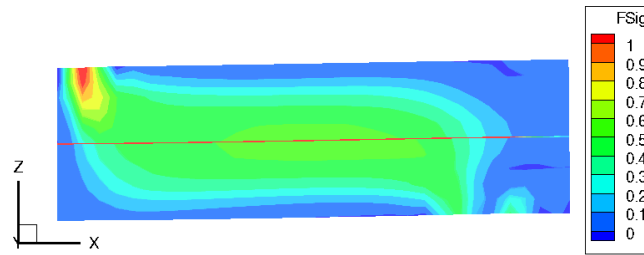


Рис. 14. Распределение показателя уровня напряженности по критерию Цая – Ву в предельном состоянии (правая сторона тест-образца)

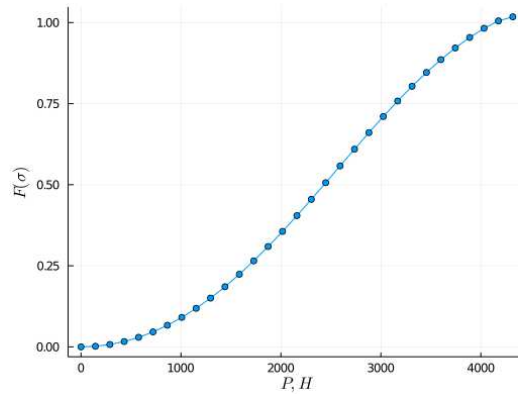


Рис. 15. Максимальное значение показателя уровня напряженности около нагружающего ролика по критерию Цая – Ву в зависимости от нагрузки

2.5. Короткие образцы с учетом адгезионного слоя. Аналогичным образом проведен анализ короткого тест-образца с адгезионным слоем. В отличие от длинного тест-образца, его потеря несущей способности происходит не из-за потери устойчивости, а из-за достижения показателя уровня напряженности по критерию Цая – Ву предельного значения $f = 1$ (рис. 14, 15). Отметим интересный факт: максимальное значение этого показателя достигается не в середине, а на небольшом расстоянии от центрального сечения $c/2$ тест-образца (рис. 14).

Отметим также хорошую корреляцию между численными и экспериментальными результатами: расчетная предельная нагрузка $P_{кр} = 3.2$ кН, а предельная нагрузка в натурном испытании равна $P_{экс} = 3.38$ кН, отличие составляет 5%.

3. Обсуждение результатов

Исходя из анализа результатов расчетов для заданных размеров и механических характеристик композита, из которого изготовлены тест-образцы, выявлено, что в длинных образцах разрушение происходит по причине потери устойчивости по чисто сдвиговой форме в результате сдвига адгезионного слоя в центральном продольном сечении образца. Такой вид разрушения выявлен путем анализа диаграммы «нагрузка–сдвиг» (рис. 12, *a*), согласно которой график выходит на асимптоту и в этот момент численный счет перестает сходиться, то есть можно сказать, что достигается критическая нагрузка. Поскольку при этом показатель напряженности по критерию Цая–Ву меньше единицы, то появление больших перемещений при малых возмущениях по определению представляет собой потерю устойчивости конструкции.

Кроме того, была исследована зависимость критической и предельной нагрузок от длины образца и ширины контактного давления c , которая зависит от диаметра роликов. Из рис. 16 видно, что при малых значениях ширины контактного давления потеря несущей способности образца происходит по причине потери устойчивости сдвигом адгезионного слоя при любых исследованных длинах. При значении $c = 2.5$ мм уже появляются ситуации, когда несущая способность теряется по причине потери прочности. Это происходит при длинах $L < 90$ мм. Как видно из рис. 16, при $c = 3$ мм образец разрушается под нагружающим роликом. Таким образом, можно сделать вывод, что для оценки прочности образцов при трехточечном изгибе диаметры нагружающих роликов должны быть достаточно большими.

Заключение

Исходя из анализа результатов натуральных испытаний тест-образцов из препрега HSE 180 REM на основе однонаправленной углеленты с прямолинейными волокнами было выявлено, что короткие образцы при испытаниях на трехточечный изгиб разрушаются по причине излома в центральной части образца, а длинные образцы – в результате расслоения в плоскости xOy . На основе анализа результатов испытаний была предложена гипотеза о том, что в действительности в композитном материале в процессе технологического процесса его изготовления между монослоями формируется чисто адгезионный слой, который разрушается из-за больших касательных напряжений.

Было проведено численное моделирование процесса трехточечного изгиба тест-образцов различной длины, изготовленных из композитного однонаправленного материала. Результаты численных исследований показали, что в адгезионном слое сильно возрастают деформации сдвига, что вызывает значительный сдвиг монослоев друг относительно друга. Как показывает анализ численных результатов, диаграмма «нагрузка–сдвиг» выходит на асимптоту, что объясняется потерей устойчивости образца по сдвиговой форме, и, как следствие, приводит к расслоению слоистого композита образца (результаты натуральных экспериментов также подтверждают этот механизм разрушения). Следует отметить, что показатель уровня напряженности по критерию Цая–Ву при этом не достигает предельного значения во всех ее точках. Отличие расчетной предельной нагрузки от экспериментальной составляет 5%.

Показано, что без учета адгезионного слоя образец теряет несущую способность раньше, чем теряет устойчивость сдвигом. Это приводит к отличию предельной нагрузки от эксперимента на 21%. При численном анализе коротких образцов также выявлено, что даже с учетом адгезионного слоя все же реализуется механизм разрушения по критерию Цая–Ву, потери устойчивости сдвигом не происходит.

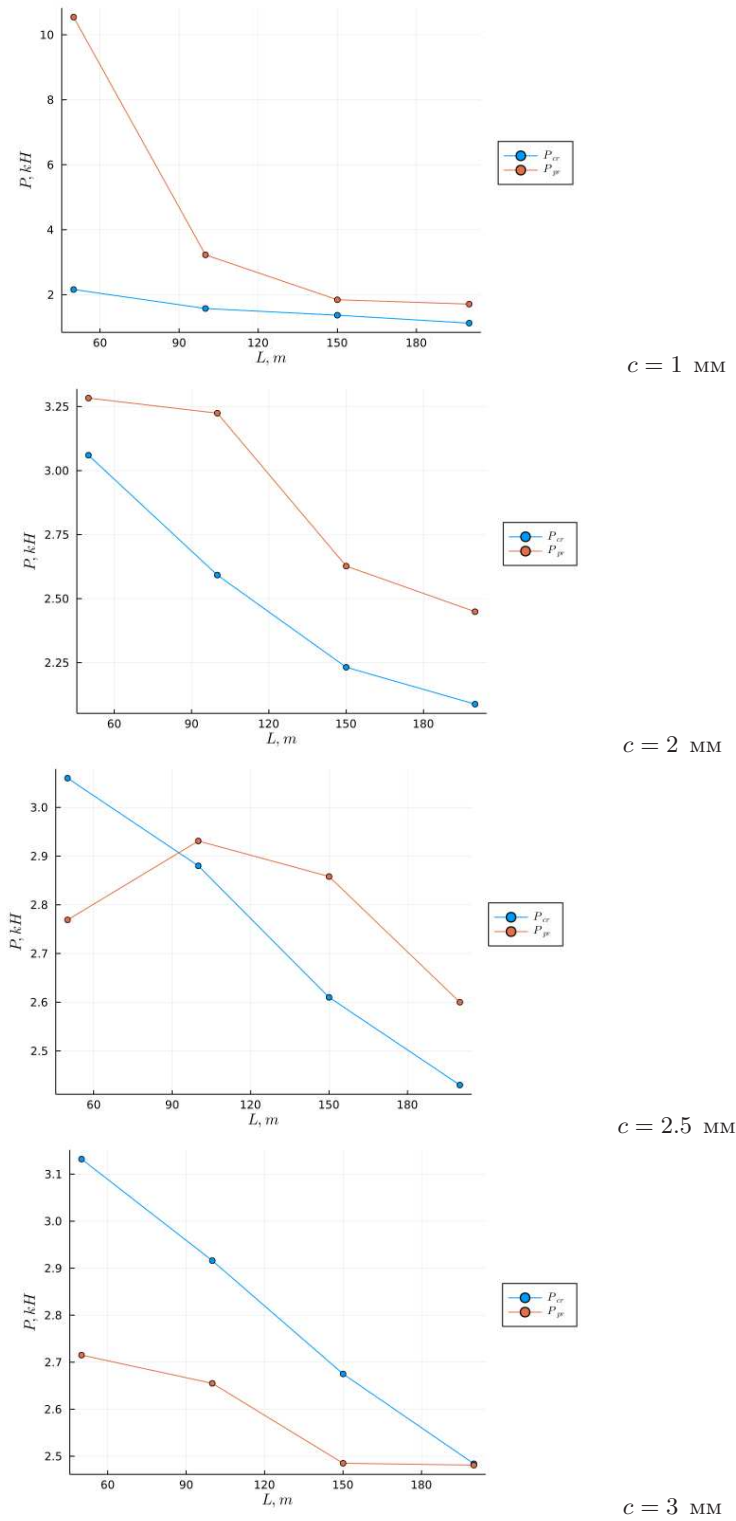


Рис. 16. Зависимости критических и предельных нагрузок от длины L образца и ширины контактного давления c

Проведенные численные расчеты при разных геометрических характеристиках рассматриваемой модели с целью оценки их влияния на предельную и критическую нагрузки показали, что при оценке прочности образцов путем трехточечного изгиба диаметры нагружающих роликов должны быть достаточно большими.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (ПРИОРИТЕТ-2030, разд. 1), Российского научного фонда (проект № 19-79-10018, разд. 2-3).

Литература

1. *Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Холмогоров С.А.* О специфике работы композитного несущего слоя трёхслойной пластины при локальном нагружении // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2020. – № 4. – С. 152–164. – doi: 10.15593/perm.mech/2020.4.13.
2. *Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A.* Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge // Shell Structures: Theory and Applications. – London: CRC Press, 2018. – V. 4. – P. 267–270. – doi: 10.1201/9781315166605-59.
3. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 10. – P. 57–60. – doi: 10.3103/S1066369X15100072.
4. *Thomsen O.T.* Theoretical and experimental investigation local bending effects in sandwich plates // Compos. Struct. – 1995. – V. 30, No 1. – P. 85–101. – doi: 10.1016/0263-8223(94)00029-8.
5. *Thomsen O.T., Rits W., Eaton D.C.G., Dupont O., Queekers P.* Ply drop-off effects in CFRP/honeycomb sandwich panels – experimental results // Compos. Sci. Technol. – 1996. – V. 56, No 4. – P. 423–431, 433–437. – doi: 10.1016/0266-3538(96)00007-3.
6. *Vahterova Y.A., Min Y.N.* Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials // Turk. J. Comput. Math. Educ. – 2021. – V. 12, No 2. – P. 2703–2708. – doi: 10.17762/turcomat.v12i2.2295.
7. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // Z. Angew. Math. Mech. – 2019. – V. 99, No 1. – Art. e201800063, P. 1–25. – doi: 10.1002/zamm.201800063.
8. *Petras A., Sutcliffe M.P.F.* Failure mode maps for honeycomb sandwich panels // Compos. Struct. – 2019. – V. 44, No 4. – P. 237–252. – doi: 10.1016/S0263-8223(98)00123-8.
9. *Rupp P., Elsner P., Weidenmann K.A.* Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process // J. Sandwich Struct. Mater. – 2019. – V. 8, No 21. – P. 2654–2679. – doi: 10.1177/1099636217722052.
10. *Shi H., Liu W., Fang H.* Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending // Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf. – 2018. – V. 109. – P. 564–577. – doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.
11. *Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R.* Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams // Compos. Struct. – 2003. – V. 60, No 2. – P. 219–229. – doi: 10.1016/S0263-8223(02)00293-3.

12. *Banghai J., Zhibin L., Fangyun L.* Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending // *Compos. Struct.* – 2015. – V. 133. – P. 739–745. – doi: 10.1016/j.compstruct.2015.07.056.
13. *Fathi A., Woff-Fabris F., Altstadt V., Gatzi R.* An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: influence of core type and contour finishing options // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 2013. – V. 15, No. 5. – P. 487–508. – doi: 10.1177/1099636213487004.
14. *Crupi V., Epasto G., Guglielmino E.* Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: honeycomb vs. foam // *Mar. Struct.* – 2013. – V. 30. – P. 74–96. – doi: 10.1016/j.marstruc.2012.11.002.
15. *Shi H., Liu W., Fang H.* Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending // *Compos.: Part A.* – 2018. – V. 109. – P. 564–577. – doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.
16. *Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F.* Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 2020. – V. 22, No 6. – P. 2049–2074. – doi: 10.1177/1099636218792729.
17. *Piovar S., Kormanikova E.* Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models // *Adv. Mater. Res.* – 2014. – V. 969. – P. 316–319. – doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316.
18. *Russo A., Zuccarello B.* Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels // *Compos. Struct.* – 2007. – V. 81, No 4. – P. 575–586. – doi: 10.1016/j.compstruct.2006.10.007.
19. *Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я.* Методы статических испытаний армированных пластиков. – М.: Химия, 1975. – 262 с.
20. *Carbajal N., Mujika F.* Determination of compressive strength of unidirectional composites by three-point bending tests // *Polym. Test.* – 2009. – V. 28, No 2. – P. 150–156. – doi: 10.1016/j.polymertesting.2008.11.003.
21. *Carbajal N., Mujika F.* Determination of longitudinal compressive strength of long fiber composites by three-point bending of $[0_m/90n/0_p]$ cross-ply laminated strips // *Polym. Test.* – 2009. – V. 28, No 6. – P. 618–626. – doi: 10.1016/j.polymertesting.2009.05.005.
22. *Dufort L., Drapier S., Grediac M.* Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three-point bending // *Compos. Struct.* – 2001. – V. 52, No 2. – P. 233–246. – doi: 10.1016/S0263-8223(00)00171-9.
23. *Beldica C.E., Hilton H.H.* Nonlinear viscoelastic beam bending with piezoelectric control – analytical and computational simulations // *Compos. Struct.* – 2001. – V. 51, No 2. – P. 195–203. – doi: 10.1016/S0263-8223(00)00139-2.
24. *Работнов Ю.Н., Шестериков С.А.* Устойчивость стержней и пластинок в состоянии ползучести // *Приклад. матем. и механика.* – 1957. – Т. 21, № 3. – С. 406–412.
25. *Шестериков С.А.* О критерии устойчивости при ползучести // *Прикл. матем. и механика.* – 1959. – Т. 23, № 6. – С. 1101–1106.
26. *Кузнецов А.П., Куршин Л.М.* Решение некоторых задач устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести по теории упрочнения // *Прикл. механика и техн. физика.* – 1960. – № 4. – С. 84–89.
27. *Шестериков С.А.* Выпучивание при ползучести с учетом мгновенных пластических деформаций // *Прикл. механика и техн. физика.* – 1963. – № 2. – С. 124–129.

28. *Терегулов И.Г.* Устойчивость пластин и оболочек при неустановившейся ползучести // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – Вып. 3. – С. 237–243.
29. *Pian T.H.H.* Creep buckling of curved beam under lateral loading // Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. – N. Y.: Pergamon Press 1958. – P. 649–654.
30. *Dumansky A.M., Liu Hao* Analysis of anisotropy of time-dependent and nonlinear properties of unidirectional CFRP // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2019. – V. 683. – Art. 012093, P. 1–7. – doi: 10.1088/1757-899X/683/1/012093.
31. *Meng M., Le H.R., Rizvi M.J., Grove S.M.* 3D FEA modeling of laminated composites in bending and their failure mechanisms // Compos. Struct. – 2015. – V. 119. – P. 693–708. – doi: 10.1016/j.compstruct.2014.09.048.
32. *Образцов И.Ф., Васильев В.В.* Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1982. – № 3. – С. 390–393.
33. *Xie M., Adams D.F.* A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing // Compos. Sci. Technol. – 1995. – V. 54, No 1. – P. 11–21. – doi: 10.1016/0266-3538(95)00035-6.
34. *Lee M.S., Seo H.Y., Kang C.G.* Comparative study on mechanical properties of CR 340/CFRP composites through three point bending test by using theoretical and experimental methods // Int. J. Precis. Eng. Manuf.-Green Technol. – 2016. – V. 3, No 4. – P. 359–365. – doi: 10.1007/s40684-016-0045-z.
35. *Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Каюмов Р.А.* Экспериментальные исследования механизмов формирования остаточных деформаций волокнистых композитов слоистой структуры при циклическом нагружении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 473–492.
36. *Mujika F., Pujana J., Olave M.* On the determination of out-of-plane elastic properties of honeycomb sandwich panels // Polym. Test. – 2011. – V. 30, No 2. – P. 222–228. – doi: 10.1016/j.polymertesting.2010.12.005.
37. *Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A.* Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40, No 4. – P. 439–447. – doi: 10.1134/S1995080219040061.
38. *Гриневич А.В., Яковлев Н.О., Славин А.В.* Критерии разрушения полимерных композиционных материалов (обзор) // Труды ВИАМ. – 2019. – № 7. – doi: 10.18577/2307-6046-2019-0-7-92-111.
39. *Narayananaswami R., Adelman H.M.* Evaluation of the Tensor Polynomial and Hoffman strength theories for composite materials // J. Compos. Mater. – 1977. – V. 11, No 4. – P. 366–377. – doi: 10.1177/002199837701100401.
40. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
41. *Bonet J., Wood D.* Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. – Cambridge Univ. Press, 2008. – xx, 318 p. – doi: 10.1017/CBO9780511755446.
42. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. – Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2000. – V. 2: Solid Mechanics. – 316 p.
43. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань: ДАС, 2001. – 301 с.
44. *Riks E.* An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // Int. J. Solids Struct. – 1979. – V. 15, No 7. – P. 529–551. – doi: 10.1016/0020-7683(79)90081-7.

45. *Crisfield M.A.* Non-linear finite element analysis of solids and structures: Essentials. – N. Y.: John Wiley & Sons, 1991. – 362 p.
46. *Crisfield M.A.* A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through” // *Comput. Struct.* – 1981. – V. 13, No 1–3. – P. 55–62. – doi: 10.1016/0045-7949(81)90108-5.
47. *Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.* Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 112–132.

Поступила в редакцию
25.04.2022

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: vpajmushin@mail.ru

Каюмов Рашид Абдулхакович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики; ведущий научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: Kayumov@rambler.ru

Шакирзянов Фарид Рашитович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики; доцент кафедры теоретической механики

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: faritbox@mail.ru

Холмогоров Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности конструкций; научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: hkazan@yandex.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 221–243

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.221-243

**About the Causes of the Bearing Capacity Loss
of a Composite Beam under Three-Point Bending**

V.N. Paimushin^{a,b}, R.A. Kayumov^{c,b**}, F.R. Shakirzyanov^{c,b***},
S.A. Kholmogorov^{a,b****}*

^a*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia*

^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^c*Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia*

E-mail: *vpajmushin@mail.ru, **Kayumov@rambler.ru,

faritbox@mail.ru, *hkazan@yandex.ru

Received April 25, 2022

Abstract

This article considers the results of an experimental and numerical study of the three-point bending problems of a composite specimen (beam). The numerical analysis of the beam behavior, in a physically and geometrically nonlinear statement of the problem, assumed that the beam is made by layering a unidirectional carbon fiber along the specimen axis. The Tsai–Wu criterion was used to determine the ultimate load at which the composite phases of the specimen lose their strength. The comparative analysis of the specimen behavior at different values of the beam thickness and the diameter of the loading roller was carried out. The results obtained show that the failure of the short specimens occurs as the material loses its strength under the loading roller (in the middle), and the long specimens become delaminated along the adhesive layer. This effect is explained by the loss of stability of the adhesive layer in a non-classical transverse shear mode. Our study demonstrates that the roller diameter has practically no effect on the value of the ultimate load, while the load at which the layer buckles on the front surface of the specimen is very sensitive to changes in its value. A good correlation of the numerical results with the experimental data was revealed.

Keywords: composite, geometric nonlinearity, physical nonlinearity, buckling, strength, adhesive layer, specimen

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030, section 1) and the Russian Science Foundation (project no. 19-79-10018, sections 2–3).

Figure Captions

Fig. 1. Cross-section of the ELUR-P composite.

Fig. 2. The scheme of loading the specimen for three-point bending.

Fig. 3. Experimental dependence of the secant modulus on shear deformations $G_{xz}^s = G_{xz}^s(\gamma_{xz})$.

Fig. 4. The scheme of external loading.

- Fig. 5. Initial and deformed states of a continuous medium.
- Fig. 6. The deformation diagrams of the long specimens under three-point bending.
- Fig. 7. Long specimens: on the left – before tests, on the right – after tests.
- Fig. 8. The deformation diagrams of the short specimens under three-point bending.
- Fig. 9. Short specimens: on the left – before tests, on the right – after tests.
- Fig. 10. Long beam without considering the adhesive layer: *a*) dependence of the ultimate load on the shear angle near the loading roller; *b*) stress level under the ultimate load according to the Tsai–Wu criterion (the right half of the specimen).
- Fig. 11. The scheme of a specimen with adhesive layer.
- Fig. 12. The diagrams based on the results of the numerical calculations for the long specimens: *a*) dependence of the load on the adhesive layer shear; *b*) maximum stress value according to the Tsai–Wu criterion depending on the load strength.
- Fig. 13. Stress-strain state of the long specimens: *a*) deformation under the ultimate load (the right half of the specimen); *b*) shear modulus distribution under the ultimate load (the right half of the specimen).
- Fig. 14. Distribution of the stress level according to the Tsai–Wu criterion under the ultimate load (the right half of the specimen).
- Fig. 15. Maximum stress value near the loading roller according to the Tsai–Wu criterion depending on the load strength.
- Fig. 16. Dependence of critical and ultimate loads on the specimen length L and the contact pressure width c .

References

1. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Kholmogorov S.A. On the specifics of behavior of the sandwich plate composite facing layers under local loading. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2020, no. 4, pp. 152–164. doi: 10.15593/perm.mech/2020.4.13
2. Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A. Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 4. London, CRC Press, 2018, pp. 267–270. doi: 10.1201/9781315166605-59.
3. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. doi: 10.3103/S1066369X15100072.
4. Thomsen O.T. Theoretical and experimental investigation local bending effects in sandwich plates. *Compos. Struct.*, 1995, vol. 30, no. 1, pp. 85–101. doi: 10.1016/0263-8223(94)00029-8.
5. Thomsen O.T., Rits W., Eaton D.C.G., Dupont O., Queekers P. Ply drop-off effects in CFRP/honeycomb sandwich panels – experimental results. *Compos. Sci. Technol.*, 1996, vol. 56, no. 4, pp. 423–431, 433–437. doi: 10.1016/0266-3538(96)00007-3.
6. Vahterova Y.A., Min Y.N. Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials. *Turk. J. Comput. Math. Educ.*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 2703–2708. doi: 10.17762/turcomat.v12i2.2295.
7. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2019, vol. 99, no. 1, art. e201800063, pp. 1–25. doi: 10.1002/zamm.201800063.

8. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels. *Compos. Struct.*, 2019, vol. 44, no. 4, pp. 237–252. doi: 10.1016/S0263-8223(98)00123-8.
9. Rupp P., Elsner P., Weidenmann K.A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2019, vol. 8, no. 21, pp. 2654–2679. doi: 10.1177/1099636217722052.
10. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending. *Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf.*, 2018, vol. 109, pp. 564–577. doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.
11. Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R. Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams. *Compos. Struct.*, 2003, vol. 60, no. 2, pp. 219–229. doi: 10.1016/S0263-8223(02)00293-3.
12. Banghai J., Zhibin L., Fangyun L. Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 133, pp. 739–745. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.07.056.
13. Fathi A., Woff-Fabris F., Altstadt V., Gatzl R. An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: Influence of core type and contour finishing options. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2013, vol. 15, no. 5, pp. 487–508. doi: 10.1177/1099636213487004.
14. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam. *Mar. Struct.*, 2013, vol. 30, pp. 74–96. doi: 10.1016/j.marstruc.2012.11.002.
15. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending. *Compos.: Part A*, 2018, vol. 109, pp. 564–577. doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.
16. Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F. Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2020, vol. 22, no. 6, pp. 2049–2074. doi: 10.1177/1099636218792729.
17. Piovar S., Kormanikova E. Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models. *Adv. Mater. Res.*, 2014, vol. 969, pp. 316–319. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316.
18. Russo A., Zuccarello B. Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels. *Compos. Struct.*, 2007, vol. 81, no. 4, pp. 575–586. doi: 10.1016/j.compstruct.2006.10.007.
19. Tarnopol'skii Yu.M., Kintsis T.Ya. *Metody statisticheskikh ispytaniy armirovannykh plastikov* [Methods of Static Testing of Reinforced Plastics]. Moscow, Khimiya, 1975. 262 p. (In Russian)
20. Carbajal N., Mujika F. Determination of compressive strength of unidirectional composites by three-point bending tests. *Polym. Test.*, 2009, vol. 28, no. 2, pp. 150–156. doi: 10.1016/j.polymertesting.2008.11.003.
21. Carbajal N., Mujika F. Determination of longitudinal compressive strength of long fiber composites by three-point bending of $[0_m/9_0n/0_p]$ cross-ply laminated strips. *Polym. Test.*, 2009, vol. 28, no. 6, pp. 618–626. doi: 10.1016/j.polymertesting.2009.05.005.
22. Dufort L., Drapier S., Grediac M. Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three-point bending. *Compos. Struct.*, 2001, vol. 52, no. 2, pp. 233–246. doi: 10.1016/S0263-8223(00)00171-9.

23. Beldica C.E., Hilton H.H. Nonlinear viscoelastic beam bending with piezoelectric control – analytical and computational simulations. *Compos. Struct.*, 2001, vol. 51, no. 2, pp. 195–203. doi: 10.1016/S0263-8223(00)00139-2.
24. Rabotnov Yu.N., Shesterikov S.A. Creep stability of columns and plates. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 6, no. 1, pp. 27–34. doi: 10.1016/0022-5096(57)90044-3.
25. Shesterikov S.A. Criterion of stability of columns in creep. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1959, vol. 23, no. 6, pp. 1101–1106. (In Russian)
26. Kuznetsov A.P., Kurshin L.M. Using the hardening theory to solve some problems with the stability of plates and shells in creep. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1960, no. 4, pp. 84–89. (In Russian)
27. Shesterikov S.A. Buckling under creep considering instantaneous plastic deformations. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1963, no. 2, pp. 124–129. (In Russian)
28. Teregulov I.G. Stability of plates and shells subject to unsteady creep. In: *Issledovaniya po teorii platin i obolochek* [Studies on the Theory of Plates and Shells]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1965, no. 3, pp. 237–243. (In Russian)
29. Pian T.H.H. Creep buckling of curved beam under lateral loading. *Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.* New York, Pergamon Press, 1958, pp. 649–654.
30. Dumansky A.M., Liu Hao Analysis of anisotropy of time-dependent and nonlinear properties of unidirectional CFRP. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 683, art. 012093, pp. 1–7. doi: 10.1088/1757-899X/683/1/012093.
31. Meng M., Le H.R., Rizvi M.J., Grove S.M. 3D FEA modeling of laminated composites in bending and their failure mechanisms. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 119, pp. 693–708. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.09.048.
32. Obratsov I.F., Vasil'ev V.V. Nonlinear phenomenological models of the deformation of fibrous composite materials. *Mech. Compos. Mater.*, 1982, vol. 18, no. 3, pp. 259–262. doi: 10.1007/BF00604300.
33. Xie M., Adams D.F. A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing. *Compos. Sci. Technol.*, 1995, vol. 54, no. 1, pp. 11–21. doi: 10.1016/0266-3538(95)00035-6.
34. Lee M.S., Seo H.Y., Kang C.G. Comparative study on mechanical properties of CR 340/CFRP composites through three point bending test by using theoretical and experimental methods. *Int. J. Precis. Eng. Manuf.-Green Technol.*, 2016, vol. 3, no. 4, pp. 359–365. doi: 10.1007/s40684-016-0045-z.
35. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Kaymov R.A. Experimental investigation of residual strain formation mechanisms in composite laminates under cycling loading. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 473–492. (In Russian)
36. Mujika F., Pujana J., Olave M. On the determination of out-of-plane elastic properties of honeycomb sandwich panels. *Polym. Test.*, 2011, vol. 30, no. 2, pp. 222–228. doi: 10.1016/j.polymertesting.2010.12.005.
37. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439–447. doi: 10.1134/S1995080219040061.
38. Grinevich A.V., Yakovlev N.O., Slavin A.V. Criteria of the failure of polymer matrix composites (review). *Tr. VIAM*, 2019, no. 7. doi: 10.18577/2307-6046-2019-0-7-92-111.
39. Narayanaswami R., Adelman H.M. Evaluation of the Tensor Polynomial and Hoffman strength theories for composite materials. *J. Compos. Mater.*, 1977, vol. 11, no. 4, pp. 366–377. doi: 10.1177/002199837701100401.

40. Washizu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational Methods in Elasticity and Plasticity]. Moscow, Mir, 1987. 542 p. (In Russian)
41. Bonet J., Wood D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge Univ. Press, 2008. xx, 318 p. doi: 10.1017/CBO9780511755446.
42. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method*. Vol. 2: Solid mechanics. Oxford, UK, Butterworth-Heinemann, 2000. 316 p.
43. Golovanov A.I., Bereznoi D.V. *Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tverdykh tel* [Finite-Element Method in Mechanics of Deformable Solids]. Kazan, DAS, 2001. 301 p. (In Russian)
44. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids Struct.*, 1979, vol. 15, no. 7, pp. 529–551. doi: 10.1016/0020-7683(79)90081-7.
45. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Essentials*. New York, John Wiley & Sons, 1991. 362 p.
46. Crisfield M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Comput. Struct.*, 1981, vol. 13, nos. 1–3, pp. 55–62. doi: 10.1016/0045-7949(81)90108-5.
47. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russian)

Для цитирования: Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Холмогоров С.А. О причинах потери несущей способности композитного тест-образца при трехточечном изгибе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 2–3. – С. 221–243. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.221-243.

For citation: Paimushin V.N., Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Kholmogorov S.A. About the causes of the bearing capacity loss of a composite beam under three-point bending. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 221–243. doi: 10.26907/2541-7746.2022.2-3.221-243. (In Russian)