УДК: 087.2 + 537.87 DOI: 10.26907/rwp29.2025.42-50

ПРИМЕНЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ БИХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛУКИНА И ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН (ПАМЯТИ Д.С. ЛУКИНА)

А.С. Крюковский[1,2], Е.А. Палкин[1], Д.В. Растягаев[1,2]

[1]*Российский новый университет, 105005, г. Москва, ул. Радио, 22*
E-mail: palkin@rosnou.ru
[2]*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 125009, г. Москва, ул. Моховая,7, стр. 11*
E-mail: Kryukovsky56@yandex.ru

Аннотация. Дан обзор работ, выполненных научной группой, под руководством Д.С. Лукина, посвященных изучению распространения и фокусировки радиоволн в ионосфере Земли. В основе этих работ лежат методы построения равномерных асимптотических решений волновых задач с использованием волновой теории катастроф, канонического оператора Маслова и расширенной бихарактеристической системы. Важным достоинством данных методов представляется относительная простота численной реализации. Это позволяет применять их в исследованиях, где необходимо пользоваться сложными моделями среды распространения, такой как неоднородная, магнитоактивная поглощающей ионосферная плазма.

Ключевые слова: бихарактеристическая система, фокусировка радиоволн, неоднородная ионосферная плазма, асимптотические методы, волновые катастрофы

APPLICATION OF THE EXTENDED BICHARACTERISTICS LUKIN SYSTEM AND THE WAVE CATASTROPHES THEORY IN PROBLEMS OF RADIO WAVES DIFFRACTION AND PROPAGATION (IN MEMORY OF D.S. LUKIN)

A.S. Kryukovsky, Eu.A. Palkin, D.V. Rastyagaev

Abstract. An overview of the work carried out by a scientific group led by D.S. Lukin devoted to the study of the propagation and focusing of radio waves in the Earth's ionosphere is given. These works are based on methods for uniform asymptotic solutions constructing to wave problems using the wave catastrophes theory, the canonical Maslov operator, and an extended bicharacteristic system. An important advantage of these methods is the relative simplicity of their numerical implementation. This allows them to be used in research where it is necessary to use complex models of the propagation medium, such as an inhomogeneous, magnetically active absorbing ionospheric plasma.

Keywords: bicharacteristic system, focusing of radio waves, inhomogeneous ionospheric plasma, asymptotic methods, wave catastrophes

Введение

Одним из наиболее распространенных подходов к описанию распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли является лучевая теория, основанная на применении гамильтонова формализма для построения основы используемых в ней асимптотических решений – лагранжевых многообразий бихарактеристических семейств $\Gamma:\left\{\vec{r}\left(t,\eta,\varsigma\right),\vec{k}\left(t,\eta,\varsigma\right)\right\}$, обобщенных лучевых траекторий, рассматриваемых в фазовом пространстве.

В работе [1] было показано, что точное решение уравнения эйконала для фазовой функции геометрооптического приближения сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка – канонической системе Гамильтона, где в качестве обобщенного импульса выступает волновой вектор квазиплоской волны. В качестве Гамильтониана в [1] была выбрана круговая частота волны, связанная через дисперсионное соотношение с фазовыми координатами задачи, описывающей распространение радиоволны в неоднородной диспергирующей среде. Данный подход основан на численном или аналитическом интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка (бихарактеристической системы), которая описывает траектории лучей в неоднородной магнитоактивной среде и был впервые предложен Д.С. Лукиным [1–3]. В трехмерных модельных задачах система состоит из 6 уравнений: 3 первых уравнения являются составляющими групповой скорости луча на оси координат и определяют групповую траекторию луча, а 3 других уравнения определяют изменение во времени составляющих волнового вектора, а все вместе – фазовую траекторию луча (1).

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega},\qquad \frac{d\vec{k}}{dt}=\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{r}}\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}. \tag{1}$$

В (1) $\vec{k}$ – волновой вектор (k в масштабах характерных размеров ионосферных неоднородностейd является большим параметром задачи, необходимым для построения асимптотических решений), t – групповое время, ω – круговая частота излучения, ε – эффективная диэлектрическая проницаемость среды распространения, определенная для заданной частоты, $\vec{r}$ – координаты точки наблюдения, c – скорость света. Система (1) дополняется начальными данными, связанными с условиями излучения волны.

Для более эффективного расчета характеристик многообразия Γ в [4] была предложена расширенная бихарактеристическая система, включающая ОДУ для частных производных фазовых переменных по координатам лагранжевых многообразий (t,η,ς):

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}_\eta}{dt}&=\left(\vec{r}_\eta\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right)+\left(\vec{k}_\eta\frac{\partial}{\partial\vec{k}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right),\\
\frac{d\vec{r}_\varsigma}{dt}&=\left(\vec{r}_\varsigma\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right)+\left(\vec{k}_\varsigma\frac{\partial}{\partial\vec{k}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right),\\
\frac{d\vec{k}_\eta}{dt}&=\left(\vec{r}_\eta\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right)+\left(\vec{k}_\eta\frac{\partial}{\partial\vec{k}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right),\\
\frac{d\vec{k}_\varsigma}{dt}&=\left(\vec{r}_\varsigma\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right)+\left(\vec{k}_\varsigma\frac{\partial}{\partial\vec{k}}\right)\left(\left(2c^2\vec{k}-\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\vec{k}}\right)\Big/\frac{\partial\omega^2\varepsilon}{\partial\omega}\right).
\end{aligned}\tag{2}$$

С помощью бихарактеристической системы (1), (2) при известной модели ионосферы и магнитного поля Земли определяются максимальные и минимальные применимые частоты, зоны радиосвязи и радиомолчания, рассчитываются ионограммы вертикального и наклонного зондирования и групповые задержки. Метод бихарактеристик активно применялся при решении задач возвратно наклонного зондирования [5, 6], для исследования ионосферного и магнитосферного распространения волн ОНЧ-диапазона [7, 8], связи со спутниками и другими космическими объектами [9]. Моделирование методом бихарактеристик допплеровского сдвига частоты позволило исследовать волнообразные возмущения ионосферной плазмы [10, 11] и особенности экспериментов по радиопросвечиванию атмосфер планет [9, 12].

Следующим шагом в развитии теоретических основ данного подхода явилась разработка волновой теории катастроф (ВТК), решающей важную проблему описания структуры волновых полей в областях фокусировки [13–16]. Эти области в терминах лучевого подхода соответствуют каустикам и их особенностям, и классические геометрооптических формы асимптотических решений оказываются здесь несостоятельными. Методы ВТК основываются на решениях системы ОДУ (1), (2), поскольку в явном виде используют особенности структуры лагранжевых многообразий фазовых траекторий. Каустические особенности (катастрофы) возникают и имеют решающее значение для многих радиофизических эффектов [17–26]. В представленном материале кратко изложены основы ВТК, использующей метод бихарактеристик, и приведены результаты математического моделирования для некоторых задач ионосферного распространения радиоволн.

Бихарактеристики, лучи и каустики

Рассмотрим лучевые методы исследования распространения радиоволн на основе расширенной системы бихарактеристик (1), (2). Общую картину распространения радиоволны в неоднородной ионосфере можно представить, определив из (1) семейство лучевых траекторий в конфигурационном пространстве для выбранной модели эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon\left(\vec{r},\vec{k}\right)$. При этом модель может учитывать и анизотропию, связанную с магнитным полем Земли, и эффект отклоняющего поглощения в неоднородной ионосферной плазме. Пример структуры лучевого семейства в проекции на плоскость распространения в заданном направлении представлен на рисунке 1 [32].

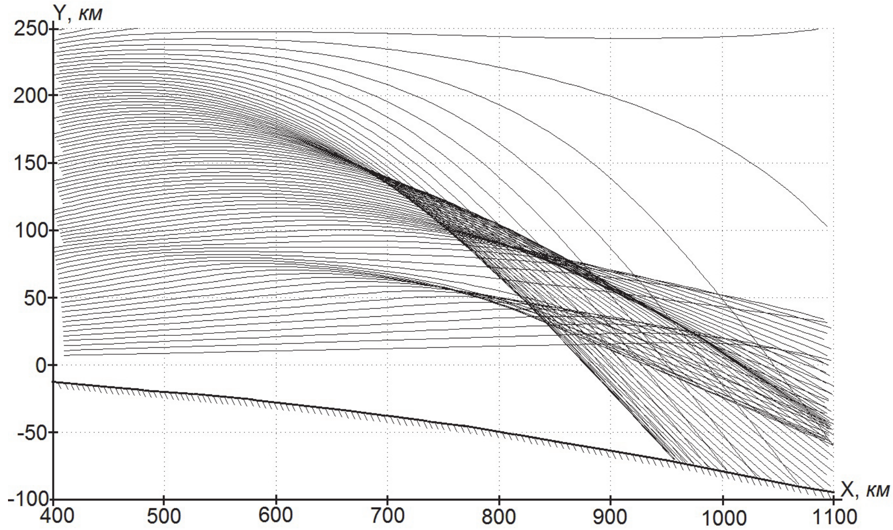
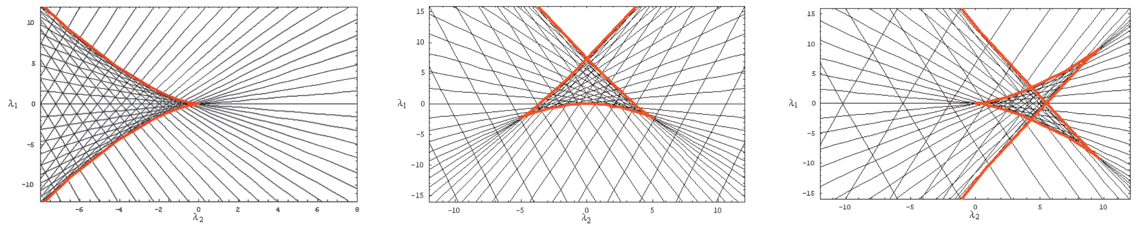


Рис. 1. Лучевая структура распространения радиоволны в неоднородной ионосфере

Помимо общей структуры пространственного распределения волнового поля из данных расчетов можно выделить геометрию каустик – особенностей проекции многообразия Γ на конфигурационное пространство. Эти особенности, учитывая специфику ионосферных неоднородностей, имеющих наиболее выраженные вариации по высоте, проявляются как огибающие любого двухмерного семейства, параметром которого является угол выхода луча из точки излучения, относительно вертикали (часто используется для упрощения численных расчетов). Однако для корректного асимптотического описания поля в неособых областях и в области каустик требуется задать геометрию многообразия Γ с высокой точностью. Для этой цели требуется определить решения системы (2), то есть построить касательное расслоение Γ. Каустики и их особенности тогда находятся из условия равенства нулю якобиана J_r:

$$J_r = \det\left\|\frac{\partial\vec{r}\left(\varsigma,\eta,t\right)}{\partial\left(\varsigma,\eta,t\right)}\right\| = 0\,. \qquad (3)$$

Геометрия каустик и их особенностей позволяет идентифицировать их с эталонными каустиками волновых катастроф [16, 27] в соответствии с классификацией особенностей дифференцируемых отображений [28–31]. Пример эталонных каустических структур, которые могут быть выявлены и в рисунке 1, представлен на рисунке 2. Здесь приведены характерные сечения каустик (цветные линии) и линейчатые «лучевые» многообразия некоторых основных каспоидных катастроф: $\mathbf{A_3}$ («каустическое остриё», cusp) – а; $\mathbf{A_4}$ («ласточкин хвост», вариант плоскостного сечения) – б, $\mathbf{A_5}$ («бабочка», вариант плоскостного сечения) –в.



а б в

Рис. 2. Лучевая и каустическая структуры простых катастроф каспоидного типа

Основными целями такого анализа лучевой структуры являются: пространственное выделение областей фокусировки (каустик), определение их типа с целью дальнейшей детализации структуры волнового поля в рамках ВТК, определение решений расширенной бихарактеристической системы (1), (2) для построения равномерных асимптотических формул для описания волнового поля.

Неравномерные и равномерные асимптотики

Для определения пространственного (или пространственно-временного) распределения волнового поля в рамках лучевого подхода обычно используют геометрооптическое (ГО) описание амплитуды волны $U(\vec{r})$ (или $U(\vec{r},t)$):

$$U_{ГО}(\vec{r}) \cong \sum_{j=1}^{N} A(\vec{r}_j(\varsigma,\eta,t)) \exp\left\{ i\left[\Phi(\vec{r}_j(\varsigma,\eta,t)) - M_j \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \tag{4}$$

Суммирование в (4) ведётся по всем траекториям в конфигурационном пространстве попадающих в точку наблюдения $\vec{r}\left(\varsigma,\eta,t\right)$. Амплитудная и фазовая функции при этом заданы формулами:

$$A(\vec{r}_j(\varsigma,\eta,t)) = A_0 \ell \exp(-\gamma) \sqrt{\left| \frac{J_{r0}}{J_r} \right|} \left(\vec{r}_j(\varsigma,\eta,t) \right), \qquad \Phi(\vec{r}_j(\varsigma,\eta,t)) = \int_0^{\vec{r}_j(\varsigma,\eta,t)} \vec{k}\, d\vec{x}\,, \tag{5}$$

где A_0 - нормировочный множитель и J_{r0} - значение якобиана из (3), определенное в начальной точке лучевой траектории (обычно связанной с источником излучения), ℓ, γ, соответственно, поляризационный множитель и множитель, учитывающий поглощение волны, M_j - индекс Маслова – Арнольда для *j*-ой траектории.

Асимптотическое представление волнового поля (4), (5) является неравномерным по координатному пространству, так как на каустиках выполнено условие (3) и формула (5) в окрестности таких точек несостоятельна. Для устранения этого недостатка ГО приближения решение (4) в окрестности каустик следует заменить на асимптотическое представление в интегральной форме. Для рассматриваемого подхода, использующего решения системы (1), (2), логичным является построение такого решения в форме канонического оператора В.П. Маслова (КОМ) [33–35]:

$$U(\vec{r}) \cong \sum_j \hat{\mathrm{K}}\varphi \Big|_{W_j}, \tag{6}$$

$$\hat{\mathrm{K}}\varphi\Big|_{W_j} = \tilde{F}^{k}_{\vec{k}_I \to \vec{r}_I} \left[\exp\left(i\Phi_I\left(\left(\vec{k}_I, \vec{r}_{\bar{I}} \right)(\varsigma,\eta,t) \right) \right) A_I\left(\left(\vec{k}_I, \vec{r}_{\bar{I}} \right)(\varsigma,\eta,t) \right) \right]_{W_j} \exp\left(-i\frac{\pi}{2} M \,\Big|_{W_j} \right).$$

Здесь искомая функция $U(\vec{r})$ представлена суммой локальных канонических операторов (локальных полей) в точке наблюдения, накрываемой картами W_j, канонического атласа многообразия $\Gamma: \left\{ \vec{r}\left(t,\eta,\varsigma\right), \vec{k}\left(t,\eta,\varsigma\right) \right\}$. На каждой такой карте амплитудная функция

$A_I\left(\left(\vec{k}_I,\vec{r}_{\bar{I}}\right)(\varsigma,\eta,t)\right)$ имеет вид (5), где вместо якобиана J_r из (3) используется якобиан смешанных переменных (координаты – волновые векторы), причем он выбирается из условия:

$$J_I=\det\left\|\frac{\partial\left(\vec{k}_I\vec{r}_{\bar{I}}(\varsigma,\eta,t)\right)}{\partial(\varsigma,\eta,t)}\right\|\neq 0\,. \tag{7}$$

Характеристики КОМ в (6) и входящие в него функции $\Phi_I\left(\vec{k}_I,\vec{r}_{\bar{I}}\right)$ и $A_I\left(\vec{k}_I,\vec{r}_{\bar{I}}\right)$ строятся на многообразии Γ в смешанной, системе канонических переменных в соответствии с методом КОМ, $\tilde{F}^k_{\vec{k}_I\to\vec{r}_I}$ – обратное преобразование Фурье с большим параметром ka, по указанным переменным карты. Численная реализация алгоритма построения решения (6) на основе расширенной бихарактеристической системы (1), (2) рассмотрена в [36]. Асимптотическое решение в форме интеграла от быстро осциллирующей функции вида (6) можно построить и в рамках иных методов (см., например, [37]).

Дальнейший анализ решения (6) возможен в двух направлениях: можно, используя численные методы, реализовать прямой расчет канонических операторов (6) и получить пространственную (пространственно-временную) структуру исследуемого поля (пример такого расчета из [32] приведен на рисунке 3), а можно построить равномерные асимптотики интегрального решения (6), проведя более глубокое исследование решения с позиции ВТК [14 – 16, 27].

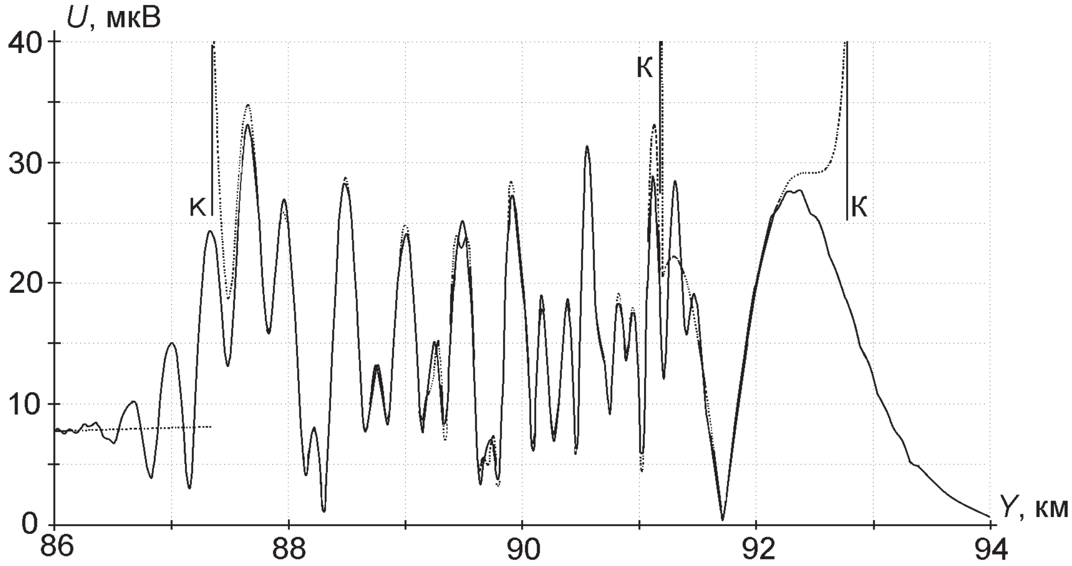
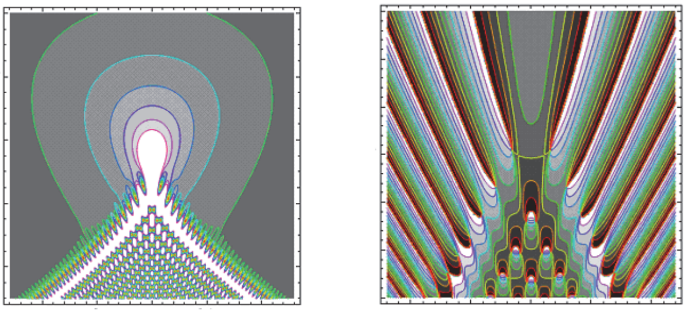


Рис. 3. Пространственное распределение амплитуды волнового поля в окрестности сложной каустики **A₄** в ионосфере (вертикальное сечение, соответствует рис.1, X=870 км; символом «к» указаны геометрические координаты каустик, в структуре особенности)

В рамках метода ВТК определяются множества особых точек (каустические множества), соответствующих условию (3), и определяется тип каустической особенности. Тип особенности однозначно задает набор специальных функций волновых катастроф (СВК), через которые (и их производные) можно выразить асимптотическое решение, равномерное по пространству или пространству-времени. Примеры распределения амплитуд СВК, представляющих главные члены асимптотических разложений решений в таких областях и потому отражающих пространственное распределение амплитуды волнового поля, дан на рисунке 4. Здесь изображена амплитудно-фазовая структура СВК, соответствующая каустическому острию (катастрофа **A_3**). Данная функция (функция Т. Пирси) имеет интегральное представление:

$$\mathrm{I}^{A_3}\left(\vec{\lambda}\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\left(\xi^4+\lambda_1\xi+\lambda_2\xi^2\right)\right]\mathrm{d}\,\vec{\xi}\,. \tag{8}$$



а б

Рис. 4. Линии уровня амплитуды – а; и линии уровня фазы СВК (8) для особенности **A₃**

Чтобы получить формулы для равномерного описания волнового поля для конкретной геометрии каустик, следует представить асимптотическое решение задачи в виде разложения по СВК [16, 38–41]:

$$U(\vec{r})\cong\exp\left[ik\Theta(\vec{r})\right]\times\left[l_1\,\mathrm{I}^{\Sigma}(\vec{S})+\sum_{j=2}^{N}l_j\frac{\partial\,\mathrm{I}^{\Sigma}\left(\vec{S}\right)}{\partial\,S_{j-1}}\right],\quad \vec{S}=\left(\vec{\lambda},\vec{a}\right) \tag{9}$$

и связать аргументы СВК $\vec{S}$, фазовую функцию $\Theta(\vec{r})$, коэффициенты асимптотических разложений l_j с пространственными координатами и параметрами используемой модели ионосферы.

Волновая теория катастроф в задачах моделирования структур волновых полей в областях фокусировки

Согласно ВТК равномерная асимптотическое представление волнового поля в области каустики типа Σ имеет вид (9), где:

$$\mathrm{I}^{\Sigma}\left(\vec{\lambda},\vec{a}\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[iF_{\Sigma}\left(\vec{\xi},\vec{a},\vec{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}\,\vec{\xi} \tag{10}$$

специальная функция волновой катастрофы типа Σ – СВК [4, 27, 32], для которой F_{Σ} – универсальная деформация [28–31]. Коэффициенты l_j представимы асимптотическими рядами (по обратным степеням большого параметра):

$$l_j=\sum_{n=0}^{+\infty}l_j^{(n)}(k,\vec{r})=k^{\sigma_j}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{k^n}\tilde{l}_j^{(n)}(\vec{r})\,. \tag{11}$$

Зависимость величин, входящих в (9), (10) и (11) от пространственных координат можно получить, решив уравнения связи универсальной деформации с фазовой функцией Φ_I в (6), или Φ (4), и уравнения связи амплитудной функции в (6), или (4) с амплитудными коэффициентами в (9), (11). Методы решений этих уравнений, использующие информацию из расширенной бихарактеристической системы (1), (2), представлены в [15–16, 27, 32. 38–41].

Таким образом, в рамках ВТК построение асимптотического решения всегда сопряжено с анализом лучевой структуры каустики. Это позволяет ответить на многие практические вопросы не проводя расчеты пространственной структуры волнового поля. При этом уровень детализации решения задачи может быть ограничен не только решениями системы (1), (2), но и анализом вариаций аргументов СВК, то есть анализом эталонной модели катастрофы в привязке к исследуемой ситуации, или исследованию перестройки решения при вариации параметров модели радиофизических характеристик ионосферы.

Заключение

Представленный доклад представляет ретроспективный обзор основных разработок школы Д.С. Лукина, связанных с исследованием волновых процессов в задачах распространения радиоволн в околоземном пространстве. Помимо решения конкретных прикладных задач итогом этих исследований явилась комплексная теория описания волновых полей в областях сложной фокусировки, реализованная в комплексе универсальных численных алгоритмов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-22-00096).

Список литературы

1. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // Космические исследования. – 1967. – Т. 5. – Вып. 4. – С. 593–600.
2. Казанцев А.Н., Лукин Д.С. Механизм распространения радиоволн излучаемых ИСЗ. // Космические исследования. – 1966. – Т.4. – № 2. – С. 221–237.
3. Казанцев А.Н., Лукин Д.С. Исследование ионосферного распространения радиоволн // Радиотехника и электроника. – 1967. – Т.12. – № 11. – С. 1891–1910.
4. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14. – № 9. – С.1673–1677.
5. Дубровский К.М., Ипатов Е.Б., Палкин Е.А. Исследование влияния пространственной фокусировки коротких радиоволн на структуру амплитудных профилей сигналов ВНЗ // Распространение и дифракция волн. – М.: МФТИ, 1988. – С. 123–128.
6. Дубровский К.М., Ипатов Е.Б., Палкин Е.А., Школьников В.А. Численное моделирование влияния крупномасштабных ионосферных неоднородностей на структуру сигналов ВНЗ // Распространение и дифракция в неоднородных средах. – М.: МФТИ, 1989. – С. 24–29.
7. Пресняков В.Б., Савченко П.П. Численный расчет уровня сигнала на поверхности земли ОНЧ-излучателя, расположенного в ионосфере // Дифракция и распространение электромагнитных волн. – М.: МФТИ, 1984. – С. 98–100.
8. Савченко П.П., Слижевский О.В. Исследование влияния областей повышенной ионизации в ионосфере на распространение свистящих атмосфериков // Распространение и дифракция и электромагнитных волн. – М.: МФТИ, 1993. – С. 98–103.
9. Лукин Д.С., Мальцев А.В., Спиридонов Ю.Г. Пакет прикладных программ для решения прямых и обратных задач распространения радиоволн в околопланетной плазме // Дифракция и распространение электромагнитных волн. – М.: МФТИ, 1984. – С. 77–83.
10. Лукин Д.С., Заец П.Г., Макальский С.А., Чешев Ю.А., Школьников В.А., Палкин Е.А. Доплеровский метод экспериментального исследования квазиволновых процессов в ионосфере // Радиофизические методы обработки сигналов. – М.: МФТИ, 1981. – С. 49–52.
11. Гузминов П.П., Заец П.Г., Лукин Д.С. Палкин Е.А., Чешев Ю.В. Исследование ионосферы амплитудно-доплеровским методом. Постановка эксперимента, методика обработки данных на ЭВМ // Распространение и дифракция в неоднородных средах. – М.: МФТИ, 1989. – С. 15–23.
12. Лукин Д.С., Мартьянов А.С., Спиридонов Ю.Г., Школьников В.А. Образование каустик при радиопросвечивании ионосферы Венеры // Труды МФТИ, сер. «Общая и молекулярная физика». – М. МФТИ, 1979. – Вып. II. – С. 114–116.
13. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Применение канонического оператора Маслова для численного решения задач дифракции и распространения волн в неоднородных средах // Теоретическое и экспериментальное исследование распространения декаметровых радиоволн. – М.: ИЗМИР АН СССР, 1976. – С. 149–167.
14. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспоидных каустик // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т. 41. – № 1. – С. 59–65.

15. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Построение равномерной геометрической теории дифракции методами краевых и угловых катастроф // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 9. – С. 1044–1060.
16. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Волновые катастрофы – фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн // Радиотехника и электроника. – 2006. – Т. 51. – № 10. – С. 1155–1192.
17. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – № 10. – С. 1001–1009.
18. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2010. – Т.15. – № 8. – С. 5–11.
19. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – М.: Наука. – 2012. – Т.57. – № 9. – С. 1028–1034.
20. Ипатов Е.Б., Глушнев С.А., Чивилев В.И., Палкин Е.А. Моделирование дисперсионных эффектов радиосигналов в неоднородной ионосфере Земли // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т.48. – № 12. – С.1436–1442.
21. Ипатов Е.Б., Палкин Е.А., Чивилев В.И., Ипатов Д.Е. Численное моделирование характеристик радиосигналов в локально возмущенной неоднородной анизотропной ионосфере Земли // Труды МФТИ, 2012. – Т. 4. – № 2. – С. 47–53.
22. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Исследование влияния локальных неоднородностей ионосферной плазмы на распространение коротких радиоволн // Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – М.: РосНОУ, 2010. – Вып. 3. – С. 17–25.
23. Ипатов Е.Б., Палкин Е.А., Чивилев В.И., Ипатов Д.Е. Моделирование характеристик радиосигналов на ионосферных трассах // Нелинейный мир. – 2013. – Т.11. – № 1. – С. 3–15.
24. Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Bova Yu.I. Simulation of the Field in the Vicinity of Caustics of Ordinary and Extraordinary Waves during Ionospheric Propagation // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2020. – V. 65. – No 12. – P. 1364–1373.
25. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии. // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2010. – Т.15. – № 8. – С. 5–11.
26. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Михалёва Е.В., Растягаев Д.В. Влияние перемещающихся ионосферных возмущений на доплеровское смещение частоты // Физические основы приборостроения. –2023.– Т. 12. – № 3 (49). – С. 64–75.
27. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли // Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 59. – № 12. – С. 1180–1187.
28. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis / tr. from French by D. H. Fowler. Benajamin-Addison-Welsey: New York. – 1975. – 345 p.
29. Арнольд В.И. Особенности гладких отображений // УМН. – 1968. – Т. 23. – Вып. 1. – С. 3–44.
30. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Часть I. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
31. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Часть II. Монодромия и асимптотики интегралов. – М.: Наука, 1984. – 335 с.
32. Растягаев Д.В., Палкин Е.А., Лукин Д.С., Крюковский А.С., Ипатов Е.Б. Дифракционно-лучевая теория на базе метода бихарактеристик, основных, краевых и угловых спецфункций волновых катастроф и ее приложения // Распространение радиоволн: труды XXVII Всероссийской открытой научной конференции // Калининград: Изд. БФУ им. И. Канта, 2021. – С. 99–110.

33. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: МГУ. – 1965. – 553 с.
34. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
35. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. – М.: Наука,1976. – 352 с.
36. Ipatov E.B., Lukin D.S. and Palkin E.A. Maslov canonical operator in problems of numerical simulation of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media // Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling. VNU Sciencepress BV. – 1990. – V. 5. – № 6. – P. 465–488.
37. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Сопоставление интегральных асимптотических методов // Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн. 7-15.02.1993. – М.: МФТИ, 1993. – С. 3–35.
38. Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Rastyagaev D.V. Construction of Uniform Asymptotic Solutions of Wave-Type Differential Equations by Methods of Catastrophe Theory // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2009. – V. 16. – No. 2. – P. 232–245.
39. Kryukovsky A.S., Lukin D.S., Palkin E.A. Uniform Asymptotics for Evaluating Oscillatory Edge Integrals by Methods of Catastrophe Theory // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1987. – V. 2. – No 4. – P. 279–312.
40. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт / ИРЭ АН СССР. – 1984. – № 41 (413). – 75 с.
41. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань: Каз. авиационный ин-т, 1988. – 199 с.