

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Ишмухаметова М.Г.

МЕТОДЫ АСТРОДИНАМИКИ

Методическое пособие

Часть II

Казань - 2003

Печатается по решению Редакционно-издательского Совета
физического факультета КГУ

УДК 521.14

Ишмухаметова М.Г. – канд. физ. – мат. наук, доцент кафедры астрономии.

Методы астродинамики. Методическое пособие для студентов специальностей астрономия и астрономогеодезия. Часть 2. Казань 2003 г. 48 с.

В пособии приведены основные формулы и этапы разложения возмущающей функции для решения задач небесной механики. На примере движения ИСЗ рассмотрены и проанализированы гравитационные и негравитационные возмущающие силы и полученные в результате их действия возмущения в элементах орбит. Пособие предназначено для студентов, изучающих курсы небесная механика, космическая геодезия и геодинамика, спутниковые методы высшей геодезии.

Рецензент: Андреев В.В. – канд. физ. мат. наук, с.н.с., доцент кафедры инженерной кибернетики Казанского государственного энергетического университета.

Физический факультет Казанского государственного университета, 2003

Глава 1.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ.

При возмущенном движении небесного тела дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} x + \mu x/r^3 = F_x \\ y + \mu y/r^3 = F_y \\ z + \mu z/r^3 = F_z \end{cases} \quad (1)$$

где x, y, z – прямоугольные координаты тела, $\mu = k^2(1+m)$,

F_x, F_y, F_z – возмущающие ускорения, создаваемые возмущающей силой в общем случае (см. «Методы астродинамики. Часть 1»).

Если возмущенное движение происходит только в гравитационном поле, то правые части выражают через производные *пертурбационной функции R*:

$$\begin{cases} x + \mu x/r^3 = \partial R/\partial x \\ y + \mu y/r^3 = \partial R/\partial y \\ z + \mu z/r^3 = \partial R/\partial z \end{cases} \quad (2)$$

Оскулирующие элементы орбит при движении только в гравитационном поле вычисляют по уравнениям Лагранжа:

$$\left\{ \begin{array}{l} da/dt = 2/n a \cdot \partial R / \partial M \\ de/dt = (1 - e^2) / (n \cdot a^2 e) \cdot \partial R / \partial M - (\sqrt{1 - e^2}) / (n \cdot a^2 e) \cdot \partial R / \partial \omega \\ di/dt = \cos i / (n \cdot a^2 \sqrt{1 - e^2}) \cdot \sin i \cdot \partial R / \partial M \\ d\omega/dt = \sqrt{1 - e^2} / n \cdot a^2 e \cdot \partial R / \partial e - \cos i / (n \cdot a^2 \sqrt{1 - e^2}) \cdot \sin i \cdot \partial R / \partial i \\ d\Omega/dt = 1 / (n \cdot a^2 \sqrt{1 - e^2}) \cdot \sin i \cdot \partial R / \partial i \\ dM/dt = n - \sqrt{1 - e^2} / n \cdot a^2 e \cdot \partial R / \partial e - 2/n a \cdot \partial R / \partial a \end{array} \right. \quad (3)$$

где n – среднее движение, M – средняя аномалия. Для применения уравнений (3) пертурбационная функция должна быть выражена явным образом через элементы орбит и времени.

Пусть мы имеем Солнце S и две планеты – возмущаемую планету P_1 массой m_1 , движение которой изучаем, и возмущающую планету P_2 массой m_2 , движение которой будем считать известным. Солнце поместим в начало координат. Прямоугольные координаты планет обозначим: соответственно $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, их расстояния от Солнца соответственно r_1 , r_2 , а взаимное расстояние между планетами обозначим r . Пертурбационная функция равна:

$$R = k^2 m_2 [1/r - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)/r_2^3] \quad (4)$$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

где $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

$$1/r = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos H)^{-1/2} \quad (5)$$

$$\cos H = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) / r_1 r_2.$$

H – угол между радиусами-векторами планет r_1 и r_2 .

Положим $R = R_0 + R_1$,

$$\text{где } R_0 = k^2 m_2 r^{-1}, \quad R_1 = k^2 m_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) / r_2^3.$$

Функция R_0 называется главной частью пертурбационной функции R и соответствует прямому воздействию возмущающей планеты P_2 на возмущаемую P_1 . Функция R_1 происходит от взаимодействия возмущающей планеты P_2 и Солнца и носит название второй части пертурбационной функции.

Разложение R состоит из следующих последовательных этапов:

- 1) разложение R в ряд по степеням квадрата синуса половины взаимной наклонности орбит;
- 2) разложение в ряд по степеням эксцентриситетов;

1.1. Разложение по степеням взаимного наклона

Рассмотрим сначала наиболее простой случай движения планет, когда плоскости орбит совпадают, а эксцентриситеты равны нулю,

т.е. движение по круговым орбитам. В этом случае главная часть пертурбационной функции принимает вид:

$$1/r_0 = (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos H_0)^{-1/2} \quad (5)$$

где $H_0 = L_1 - L_2$ – разность средних долгот планет, отсчитанные от оси x , лежащей в плоскости орбиты и произвольно направленной (рис. 1).

Пусть $a_1 < a_2$, а отношение $a_1/a_2 = \alpha < 1$, тогда

$$a_2/r_0 = [1 - 2\alpha \cos H_0 + \alpha^2]^{-1/2}$$

Правую часть можно разложить в ряд по косинусам углов, кратных H_0 , который сходится для всех значений H_0

$$(a_2/r_0)^\nu = 1/2 \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu^{(k)} \cos kH_0 \quad (6)$$

Коэффициенты $b_\nu^{(k)} = b_\nu^{(-k)}$ (k меняется от $-\infty$ до $+\infty$) называются коэффициентами Лапласа и даются интегралом Фурье:

$$b_\nu^{(k)} = 1/\pi \int_0^{2\pi} (1 - 2\alpha \cos H_0 + \alpha^2)^{-\nu/2} \cos(kH_0) \cdot dH_0$$

Пусть две круговые орбиты наклонены друг к другу под углом I . Возмущающие силы зависят от взаимных наклонений орбит, а не от их наклонений относительно основной неподвижной плоскости.

Поэтому функцию R_0 раскладывают в ряд именно по взаимным наклонениям.

Пусть L_1, L_2 – средние долготы планет, отсчитываемые от точки N пересечения орбит планет P_1 и P_2 , отсчитываемые от оси x , направленную в точку N (рис. 1).

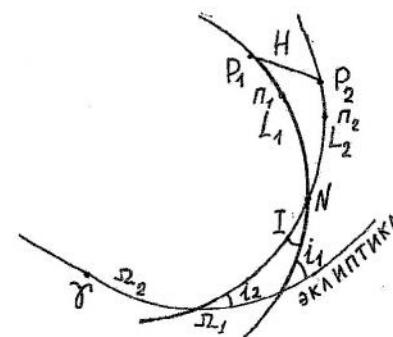


Рис. 1. Проекция орбит планет P_1 и P_2 на небесную сферу.

Тогда по формулам сферической астрономии находим:

$$\begin{aligned} \cos H &= \cos L_1 \cos L_2 + \sin L_1 \sin L_2 \cos I = \\ &= \cos(L_1 - L_2) - 2 \sin L_1 \sin L_2 \sin^2 I / 2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\cos I = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \quad (8)$$

Подставляя (7) в (5) получим

$$\begin{aligned} 1/r_0 &= (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos H_0)^{-1/2} \times \\ &\times [1 + (4a_1 a_2 \sin L_1 \sin L_2 \sin^2 I / 2) / (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos H_0)]^{-1/2} \end{aligned} \quad (9)$$

Второй множитель в (9) раскладывают по формуле бинома в абсолютно сходящийся ряд по степеням $\sin^2 I/2$. С учетом (5) получим для главной части пертурбационной функции:

$$\begin{aligned} 1/r = & 1/r_0 - 2a_1 \cdot a_2 \cdot r_0^{-3} \sin L_1 \sin L_2 \sin^2 I/2 + \\ & + 6a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot r_0^{-5} \sin^2 L_1 \sin^2 L_2 \sin^4 I/2 - \\ & - 20 \cdot a_1^3 \cdot a_2^3 \cdot r_0^{-7} \sin^3 L_1 \sin^3 L_2 \sin^6 I/2 + \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{где } r_0^{-\nu} = a_1^2 + a_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cos H_0)^{-\nu/2} = (a_2)^{\nu} (1 - 2 \cdot \alpha \cos H_0 + \alpha^2)^{-\nu/2}$$

С учетом (6) разложение (10) для R_0 примет вид:

$$\begin{aligned} a_2 \cdot r^I = & 1/2 \sum a_2 \cdot A_k \cos(kL_2 - kL_1) + \\ & + \sin^2 I/2 \sum a_2 \cdot B_k \cos[(k+1)L_2 - (k-1)L_1] + \\ & + \sin^4 I/2 \sum a_2 \cdot C_k \cos[(k+2)L_2 - (k-2)L_1] + \\ & + \sin^6 I/2 \sum a_2 \cdot D_k \cos[(k+3)L_2 - (k-3)L_1] + \\ & + \dots \dots \end{aligned} \quad (11)$$

где $A_k, B_k, C_k, D_k \dots$ - функции больших полуосей орбит и $\sin^2 I/2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot A_k = & C_I^k - 1/2(C_3^{k+1} + C_3^{k-1}) \cdot \sin^2 I/2 + \\ & + 3/4 \cdot (C_5^{k+2} + 4C_5^k + C_5^{k-2}) \cdot \sin^4 I/2 - \\ & - 5/8 \cdot (C_7^{k+3} + 9C_7^{k+1} + 9C_7^{k-1} + C_7^{k-3}) \cdot \sin^6 I/2 + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

$$a_2 \cdot B_k = 1/2 \cdot C_3^k - 3/4(C_5^{k-1} + C_5^{k+1}) \cdot \sin^2 I/2 +$$

$$\begin{aligned} & + 15/16 \cdot (C_7^{k-2} + 3C_7^k + C_7^{k+2}) \cdot \sin^4 I/2 - \dots, \\ a_2 \cdot C_k = & 3/8 \cdot C_5^k - 15/16 \cdot (C_7^{k-1} + C_7^{k+1}) \cdot \sin^2 I/2 + \dots, \\ a_2 \cdot D_k = & 5/16 \cdot C_7^k - \dots \\ \text{и } C_v^k = & \alpha^{(\nu-1)/2} \cdot b_v^k. \end{aligned}$$

Разложение (12) бывает пригодно при условии, если

$$(4r_1 r_2 \sin^2 I/2) / (r_1 - r_2)^2 < 1.$$

В случае движения планет значение дроби мало, наибольшее значение относится к Плутону и Урану и равно 0,124. При изучении возмущенного движения астероидов разложение (12) часто бывает непригодным, так как I достигает больших значений, а значение $(r_1 - r_2)$ достаточно мало, и совершенно не применимо для изучения возмущенного движения комет.

Разложим второй член пертурбационной функции формулы R_I :

$$R_I = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) / r_2^3 = r_I \cos H / r_2^2$$

Для случая круговых орбит на основе (7) получим:

$$R_I = -a_1/a_2^2 \cdot [\cos(L_1 - L_2) - 2 \sin L_1 \sin L_2 \sin^2 I/2]$$

$$\text{или } a_2 \cdot R_I = -\alpha \cdot \cos(L_1 - L_2)(1 - \sin^2 I/2) - \alpha \cdot \cos(L_1 + L_2) \sin^2 I/2,$$

тогда для учета второго члена пертурбационной функции R_I

необходимо в формуле (11) заменить:

$$a_2 A_1 \rightarrow (a_2 A_1 - \alpha(1 - \sin^2 I/2))$$

$$a_2 A_{-1} \rightarrow (a_2 A_{-1} - \alpha(1 - \sin^2 I/2))$$

$$a_2 B_0 \rightarrow (a_2 B_0 - \alpha).$$

Таким образом, для случая двух круговых орбит, плоскости которых образуют не слишком большой угол, задача разложения функции R полностью решена. Вычисление коэффициентов Лапласа будет рассмотрено в следующих параграфах.

1.2 Разложение по степеням эксцентриситетов.

Для круговых орбит пертурбационная функция R (5) была разложена в виде:

$$F_0(a_1, a_2, L_1, L_2, \sin^2 I/2) \quad (13)$$

Теперь рассмотрим случай некруговых орбит и разложим в бесконечный ряд функцию вида:

$$F(r_1, r_2, W_1, W_2, \sin^2 I/2), \quad (14)$$

где $W_1 = (\Pi_1 + v_1)$, $W_2 = (\Pi_2 + v_2)$ истинные долготы планет, отсчитываемые, как и средние долготы, от оси x , направленной в точку N пересечения орбит, а Π_1, Π_2, v_1, v_2 – долготы перигелиев, отсчитываемые от точки N , и истинные аномалии планет

соответственно (рис.1). Так как эксцентриситеты больших планет можно рассматривать как малые величины, то разности $r_1 - a_1$, $r_2 - a_2$, $W_1 - L_1$, $W_2 - L_2$ есть малые приращения этих величин. Поэтому переход от разложения (13) к разложению (14) можно осуществить при помощи формулы Тейлора. Кроме того, удобнее рассматривать I/r как функцию логарифмов больших полуосей (случай круговых орбит) и расстояний, т.е.

$$F_0(\lg a_1, \lg a_2, L_1, L_2, \sin^2 I/2) \quad (15)$$

$$F(\lg r_1, \lg r_2, W_1, W_2, \sin^2 I/2), \quad (16)$$

тогда необходимо разложить функцию

$$F(\lg a_1 + \rho_1, \lg a_2 + \rho_2, L_1 + h_1, L_2 + h_2, \sin^2 I/2), \quad (17)$$

где $\rho_1 = \lg r_1 - \lg a_1$, $h_1 = W_1 - L_1$

$$\rho_2 = \lg r_2 - \lg a_2, \quad h_2 = W_2 - L_2 \quad (18)$$

Но ρ_1 и ρ_2 можно разложить в ряд по степеням эксцентриситетов e_1 и e_2 , коэффициентами которого являются косинусы кратных дуг средней аномалии M_1 и M_2 :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \lg(r_1/a_1) = e_1^2/4 + e_1^4/32 + \dots + (-e_1 + 3e_1^3/8 + \dots) \cos M_1 + \\ &\quad + (-3e_1^2/4 + 11e_1^4/24 - \dots) \cos 2M_1 + \\ &\quad + (-17e_1^3/24 + \dots) \cos 3M_1 + (-71e_1^4/96 + \dots) \cos 4M_1 + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

$$h_1 = W_1 - L_1 = v_1 - M_1 = (2 \cdot e_1 - e_1^3/4 + ...) \sin M_1 + \\ + (5 \cdot e_1/4 + ...) \sin 2M_1 + (13 \cdot e_1/12 + ...) \sin 3M_1 + \dots,$$

аналогично записутся ряды для ρ_2, h_2 . При малых значениях e ряды сходятся быстро.

Формула Тейлора для четырех переменных через основание натурального логарифма E так запишется:

$$F(\lg r_1, \lg r_2, W_1, W_2, \sin^2 I/2) = E^{\rho_1 D_1 + \rho_2 D_2 + h_1 D_{11} + h_2 D_{22}}, \\ \times F_0(\lg a_1, \lg a_2, L_1, L_2, \sin^2 I/2) \quad (20)$$

здесь введено обозначение:

$$D_1 = \partial / \partial (\lg a_1) = a_1 (\partial / \partial a_1), \quad D_2 = \partial / \partial (\lg a_2) = a_2 (\partial / \partial a_2) \\ D_{11} = \partial / \partial L_1 \quad D_{22} = \partial / \partial L_2.$$

Рассмотрим сначала разложение по степеням эксцентриситета для возмущаемой планеты, т.е. положим $e_2 = 0$, а $\rho_2 = h_2 = 0$, и выражение (20) примет вид:

$$F(\lg r_1, \lg a_2, W_1, L_2, \sin^2 I/2) = E^{\rho_1 D_1 + h_1 D_{11}}, \\ \times F_0(\lg a_1, \lg a_2, L_1, L_2, \sin^2 I/2) \quad (21)$$

Функция F_0 была уже разложена ранее в ряд (11). Если перейти в этом разложении от тригонометрической формы к экспоненциальной, вводя следующие обозначения:

$$\lambda_1 = E^{\sqrt{T} L_1}, \quad \lambda_2 = E^{\sqrt{T} L_2}, \quad \mu_1 = E^{\sqrt{T} M_1}, \quad \mu_2 = E^{\sqrt{T} M_2},$$

тогда разложение главной части пертурбационной функции по степеням эксцентриситета возмущаемой планеты запишется через операторы Ньюкома и будет иметь вид:

$$E^{\rho_1 D_1 + h_1 D_{11}} H(s_1, s_2) \lambda_1^s \cdot \lambda_2^s = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} e_1^n \cdot \sum_{p=0}^{2n} P_{n-p} H(s_1, s_2) \cos[s_1 L_1 + s_2 L_2 + (n-p) \cdot M_1] \quad (22)$$

Введем обозначение

$$P_{n-p}(s_1, s_2) = \prod_{n-p} H(s_1, s_2)$$

$$\text{Тогда } E^{\rho_1 D_1 + h_1 D_{11}} H(s_1, s_2) \lambda_1^s \cdot \lambda_2^s =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e_1^n \cdot \sum_{p=0}^{2n} P_{n-p}(s_1, s_2) \cos[s_1 L_1 + s_2 L_2 + (n-p) \cdot M_1] \quad (23)$$

Полиномы P_{n-p} носят название операторов Ньюкома. Верхний индекс в полиноме указывает на степень эксцентриситета, а нижний – на степень μ , причем $P_m(s) = P_m(-s)$. Операторы Ньюкома вычисляют по формулам:

$$P_0^0 = 1$$

$$P_1^1 = -1/2(D) + s, \quad \text{где соответственно } s_1 = -k, \quad s_2 = k$$

$$P_1^1 = -1/2(D) - s, \quad s_1 = -k+1, \quad s_2 = k+1$$

$$P_0^2 = 1/4(D^2 + D - 4s^2), \quad s_1 = -k+2, \quad s_2 = k+1$$

$$\Pi_2^2 = 1/8 [D^2 + (-4s - 3)D + 5s + 4s^2], \quad s_1 = -k+3, \quad s_2 = k+3$$

$$\Pi_2^2 = 1/8 [D^2 + (4s - 3)D - 5s + 4s^2], \quad s_1 = -k+4, \quad s_2 = k+4$$

Значения s меняются в зависимости от значений k в формуле (11).

Теперь необходимо в разложение (23) ввести эксцентриситет возмущающей планеты, т.е умножить выражение (23) на $E^{D_2 D_2 + h_2 D_{22}}$ и мы получим формулу разложения пертурбационной функции:

$$R = \sum P_{m_1 m_2}^{n_1 n_2} e_1^{n_1} e_2^{n_2} \cos[s_1 L_1 + s_2 L_2 + m_1 M_1 + m_2 M_2] \quad (24)$$

где $\Pi_{m_1 m_2}^{n_1 n_2} H(s_1, s_2) = P_{m_1 m_2}(s_1, s_2)$, а операторы $\Pi_{m_1 m_2}^{n_1 n_2}$ образуются путем почлененного перемножения операторов $\Pi_{m_1}^{n_1}$ и $\Pi_{m_2}^{n_2}$.

Коэффициенты $P_{m_1 m_2}^{n_1 n_2}$ зависят от больших полуосей a_1, a_2 и от взаимного наклона I орбит планет. Для вычисления операторов Ньюкома можно воспользоваться уже готовыми таблицами.

1.3. Разложение пертурбационной функции

через средние аномалии.

Во многих случаях для решения задачи бывает достаточно иметь только первые члены разложения пертурбационной функции.

Приведем их здесь в качестве примера. Разложение для главной части R_0 :

$$\begin{aligned} k^2 m_2 \cdot 1/r = & k^2 m_2 (a_2)^{-1} \sum \{ [1/2 \cdot C_1^{-i} - 1/2 \sin^2(I/2) \cdot C_3^{-i-1} + \\ & + 1/8 \cdot (e_1^2 + e_2^2) (-4i^2 + D_1 + D_1^2) C_1^{-i}] \cos(iL_2 - iL_1) + \\ & + 1/2 \cdot e_1 (-2i^2 - D_1) C_1^{-i} \cos(iL_2 - iL_1 + M_1) + \\ & + 1/2 \cdot e_2 (2i^2 + I + D_1) C_1^{-i} \cos(iL_2 - iL_1 + M_2) + \\ & + 1/8 \cdot e_1^2 [-4i^2 - 5i + (4i-3)D_1 + D_1^2] C_1^{-i} \cos(iL_2 - iL_1 + 2M_1) + \\ & + 1/4 \cdot e_1 e_2 (4i^2 + 2i - D_1 - D_1^2) C_1^{-i} \cos(iL_2 - iL_1 - M_1 + M_2) + \\ & + 1/4 \cdot e_1 e_2 (-4i^2 - 2i - (4i+1)D_1 - D_1^2) C_1^{-i} \cos(iL_2 - iL_1 + M_1 + M_2) + \\ & + 1/8 \cdot e_2^2 [4i^2 + 9i + 4 + (4i+5)D_1 + D_1^2] C_1^{-i} \cos(iL_2 - iL_1 + 2M_2) + \\ & + 1/2 \cdot C_1^{-i} \cdot 1/2 \sin^2(I/2) \cos(iL_1 - L_1 + 2L_1) + \dots \} . \end{aligned}$$

Суммирование ведется по $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, а $D_1 = \partial/\partial(\lg a_1)$.

$C_v^i = \alpha^{(v-i)/2} \cdot b_v^i$, $v=1, 3, 5, 7, \dots$ - это функции отношения больших полуосей $\alpha = a_1/a_2$. Коэффициенты Лапласа b_v^i можно вычислить, например, путем разложения в ряд,

$$\begin{aligned} 1/2 \cdot b_v^i = & [\nu(\nu+2) \dots (\nu+2i-2)] / (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2i)) \times \\ & \times \alpha^i (1-\alpha^2)^{-\nu/2} [1 + p \cdot \nu/2 \cdot (\nu-2)/(2i+2) + \\ & + p^2 \cdot \nu(\nu+2)/(2 \cdot 4) \cdot (\nu-2)(\nu-4)/((2i+2)(2i+4)) + \dots] , \end{aligned}$$

который сходится при

$$|p| = \alpha^2 / (1 - \alpha^2) < 1$$

Существуют и другие способы нахождения коэффициентов Лапласа. Запишем разложение для второй части пертурбационной функции R_I :

$$\begin{aligned} k^2 m_2 r_1 \cdot r_2^{-2} \cdot \text{Cos}H = \\ = k^2 m_2 (a_2)^{-1} \alpha \{ (1 - 1/2 \cdot e_1^2 - 1/2 \cdot e_2^2 - \text{Sin}^2(I/2)) \text{Cos}(L_2 - L_1) - \\ - 3/2 \cdot e_1 \text{Cos}(L_2 - \Pi_1) + 1/2 \cdot e_1 \text{Cos}(L_2 - 2L_1 + \Pi_1) + \\ + 2 \cdot e_2 \text{Cos}(2L_2 - L_1 - \Pi_2) + \\ + 1/8 \cdot e_1^2 \text{Cos}(L_2 + L_1 - 2\Pi_1) + 3/8 \cdot e_1^2 \text{Cos}(L_2 - 3L_1 + 2\Pi_1) + \\ + e_1 \cdot e_2 \cdot \text{Cos}(2L_2 + 2L_1 - \Pi_1) - 3 \cdot e_1 e_2 \text{Cos}(2L_2 - \Pi_2 - \Pi_1) + \\ + 1/8 \cdot e_2^2 \text{Cos}(L_2 + L_1 - 2\Pi_2) + 27/8 \cdot e_2^2 \text{Cos}(3L_2 - L_1 - 2\Pi_2) + \\ + \text{Sin}^2(I/2) \text{Cos}(L_2 - L_1) + \dots \}. \end{aligned}$$

Эта часть пертурбационной функции в отличие от главной части зависит только от средних аномалий рассматриваемых планет.

1.4. Классификация возмущений.

Формулу разложения пертурбационной функции (24) кратко можно записать:

$$R = \sum C_{j_1 j_2} \cdot \text{Cos}(G) \quad (25)$$

где $C = A(a_1, a_2) e_1^{\gamma}, e_2^{\nu} (\text{Sin}^2 I/2)^{\beta}$

$$G = (j_1 M_1 + j_2 M_2 + B_{j_1 j_2})$$

Но $L_1 = M_1 + \Pi_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \quad L_2 = M_2 + \Pi_2 = n_2 t + \varepsilon_2,$

$$\varepsilon_1 = \Omega_1 + \omega_1 + M_1, \quad \varepsilon_2 = \Omega_2 + \omega_2 + M_2,$$

n_1, n_2 - средние движения планет, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - средние долготы эпохи.

Величины Π_1, Π_2 и B также зависят только от элементов орбит $i_1, i_2, \Omega_1, \Omega_2, \pi_1, \pi_2$. Поэтому G имеет общий вид:

$$G = j_1(n_1 t + \varepsilon_1) + j_2(n_2 t + \varepsilon_2) + B$$

Индексы j_1, j_2 принимают как положительные, так и отрицательные значения, а также ноль. Таким образом, при вычислении возмущений не только первого, но и второго, третьего и всех дальнейших порядков, получают лишь члены ряда вида:

$$t^p \cdot A_0(a_{01}, a_{02}) e_{01}^{\gamma}, e_{02}^{\nu} (\text{Sin}^2 I_0/2)^{\beta} \cdot [\text{Cos}(\chi \cdot t + j_1 \varepsilon_{01} + j_2 \varepsilon_{02} + B_0) / \chi^g \chi_1^g] \quad (26)$$

где $\chi = j_1 n_{01} + j_2 n_{02}, \quad \chi_1 = j_1 n_{01} + j_2 n_{02}, \dots$. Как сумма всех полученных членов, так и каждый из членов (26) называются **возмущениями** соответствующего элемента орбиты. Для оценки важности отдельных возмущений используется несколько характеристик.

Порядок возмущения p равен сумме степеней возмущающих масс m_1 и m_2 , входящих в A_0 . Чем ниже порядок, тем больше (при прочих равных условиях) влияние данного возмущения.

Степень возмущения – это сумма $(\gamma + \nu + \beta)$ показателей степеней при e_{01} , e_{02} , $\sin^2 I_0/2$. Если эти величины достаточно малы, то возрастание степени сопровождается убыванием влияния возмущения.

Степень q делителя χ имеет важное значение при близкой соизмеримости средних движений планет n_{01} и n_{02} . В этом случае делители χ , χ_1, \dots будут очень малы. Поэтому чем больше q , тем выше данное возмущение.

Ранг возмущения равен $(n - p)$.

Класс возмущения равен $(n - p/2 - q/2)$.

Ранг возмущения и класс возмущения – величины всегда положительные.

Важное значение имеет показатель степени p при времени t .

Периодические возмущения.

Если $p=0$, то возмущение называется периодическим и имеет вид:

$$A_0(a_{01}, a_{02})e_{01}^\gamma, e_{02}^\nu (\sin^2 I_0/2)^\beta \cdot [\cos(\chi \cdot t + E)/\chi]$$

причем $j_1 n_{01} + j_2 n_{02} \neq 0$.

В зависимости от величины $2\pi/\chi$ возмущения делятся на долгопериодические и короткопериодические. Для долгопериодических возмущений период во много раз превосходит периоды $2\pi/n_{01}$, $2\pi/n_{02}$ рассматриваемых планет. Долгопериодический член может иметь заметную амплитуду лишь в том случае, когда j_1, j_2 имеют небольшие по абсолютной величине значения.

Для короткопериодических возмущений все три периода $2\pi/\chi$, $2\pi/n_{01}$, $2\pi/n_{02}$ являются величинами одного порядка.

Вековые возмущения.

Если $p \geq 1$, а $\chi = 0$ возмущение называется вековым и имеет вид:

$$t \cdot A_0(a_{01}, a_{02})e_{01}^\gamma, e_{02}^\nu (\sin^2 I_0/2)^\beta \cdot \cos(j_1 \cdot e_{01} + j_2 e_{02} + B_0),$$

при $j_1 n_{01} + j_2 n_{02} = 0$. Причем, если средние движения планет n_{01}, n_{02} несоизмеримы, то это равенство возможно лишь тогда, когда $j_1 = j_2 = 0$. В этом случае большие полуоси и средние движения не имеют вековых возмущений первого порядка.

Вековые возмущения второго порядка имеют все элементы орбиты в периодических членах, членах Пуассона (члены типа $t \cdot \cos G$), в членах, где время встречается во второй степени, кроме большой

полуси. В членах третьего порядка имеются вековые члены, пропорциональные третьей степени времени.

Рассмотренная выше форма разложения пертурбационной функции пригодна лишь в том случае, когда взаимный наклон орбит планет достаточно мал (п. 1.1). Однако в любом случае в основе всегда является разложение величины:

$$a_I r_0^{-1} = (1 + \alpha^2 + 2\alpha\sigma)^{-1/2}$$

$$\sigma = \cos^2(I/2) \cos(L_2 - L_1) + \sin^2(I/2) \cos(L_2 + L_1).$$

Для изучения возмущенного движения малых тел используют другие формы разложения этой величины (численные, полуаналитические), пригодные при всех значениях взаимной наклонности орбит.

1.5. Пример вычисления пертурбационных функций при движении непрятягивающего спутника в поле тяготения планеты.

Пусть спутник С нулевой массы (рис. 2) движется в поле тяготения планеты, внешняя поверхность которой имеет форму уровняенного эллипсоида вращения. Сжатие планеты и ее угловую скорость можно считать малыми величинами.

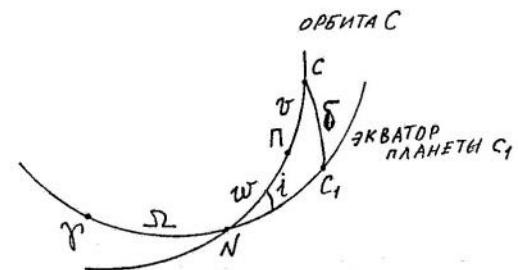


Рис. 2. Проекция орбиты спутника на небесную сферу планеты.

Потенциал планеты на внешнюю точку до первой степени сжатия имеет вид:

$$U = \mu/r + 1/3 \times J \times \mu r_e^2 / r^3 \times (1 - 3\sin^2 \delta), \quad (27)$$

где r – радиус-вектор спутника, r_e – средний экваториальный радиус планеты, δ – склонение спутника, J – параметр, характеризующий фигуру планеты. Первое слагаемое соответствует невозмущенному движению спутника по кеплеровой орбите. Второе слагаемое представляет пертурбационную функцию:

$$R = 1/3 \times J \times \mu r_e^2 / r^3 \times (1 - 3\sin^2 \delta). \quad (28)$$

Из сферического треугольника CNC_1 получим:

$$\sin \delta = \sin i \cdot \sin(\nu + \omega).$$

Тогда после некоторых преобразований (28) запишется:

$$R = 1/6 \times J \times \mu r_e^2 / a^3 \times [(2 - 3 \sin^2 i) \times (a/r)^3 + \quad (29)$$

$$+ 3 \sin^2 i \cdot \cos 2\omega \times (a/r)^3 \times \cos 2\nu - 3 \sin^2 i \cdot \sin 2\omega \times (a/r)^3 \times \sin 2\nu]$$

a – большая полуось орбиты спутника.

Для величин $(a/r)^3$, $(a/r)^3 \times \sin 2\nu$, $(a/r)^3 \times \cos 2\nu$ можно применить разложения в ряды для координат эллиптического движения и по аргументам кратным средней аномалии M . Если подставить эти разложения в (29) получим выражение для R с точностью, например, до шестых степеней эксцентриситета:

$$\begin{aligned} R = & 1/3 \times J \times \mu r_e^2 / a^3 \times (1 - 3/2 \times \sin^2 i) \times \\ & \times [1 + 3e^2/2 + 15e^4/8 + 35e^6/16 + 3(e+9e^3/8 + 87e^5/64) \times \cos M + \\ & + 9/2 \times (e^2 + 7e^4/9 + 47e^6/48) \times \cos 2M + \\ & + 53/8 \times (e^3 + 393e^5/848) \times \cos 3M + \\ & + 77/8 \times (e^4 + 129e^6/770) \times \cos 4M + \\ & + 1773e^5/128 \times \cos 5M + 31673e^6/160 \times \cos 6M] + \\ & + 1/2 \times J \times \mu r_e^2 / a^3 \times \sin^2 i \times [1/48(e^3 + 11e^5/16) \times \cos(M - 2\omega) + \\ & + 1/24 \times (e^4 + 7e^6/10) \times \cos(2M - 2\omega) + \\ & + 81e^5/1280 \times \cos(3M - 2\omega) + \\ & + 4e^6/45) \times (\cos 4M - 2\omega) - \\ & - 1/2 \times (e - e^3/8 + 5e^5/192) \times \cos(M + 2\omega) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (1 - 5e^2/2 + 13e^4/16 - 35e^6/288) \times \cos(2M + 2\omega) + \\ & + 7/2 \times (e - 123e^3/56 + 489e^5/448) \times \cos(3M + 2\omega) + \\ & + 7/2 \times (e^2 - 115e^4/51 + 601e^6/408) \times \cos(4M + 2\omega) + \\ & + 845/48 (e^3 - 6505e^5/2704) \times \cos(5M + 2\omega) + \\ & + 533/16 (e^4 - 13827e^6/5330) \times \cos(6M + 2\omega) + \\ & + 228347e^5/3840 \times \cos(7M + 2\omega) + \\ & + 73369e^6/720) \times \cos(8M + 2\omega)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Мы получили разложение пертурбационной функции в ряд Фурье:

$$R = \sum A_{jk} \cos(jM + k\omega)$$

где k , j – целые числа, коэффициенты A_{jk} зависят от элементов орбиты a , i , e (переменных величин) и малого параметра J .

Следующий этап – это получение производных функции R в явном виде по элементам орбит a , e , i , Ω , ω , M . Обозначим:

$$M_0 = \varepsilon - \pi, \quad \omega = \pi - \Omega, \quad \lambda = \sin i, \quad \alpha = r_e/a$$

Тогда $\partial R / \partial \varepsilon = \partial R / \partial M_0$

$$\partial R / \partial \pi = \partial R / \partial M_0 + \partial R / \partial \omega$$

$$\partial R / \partial \Omega = - \partial R / \partial \omega$$

$$\partial R / \partial e = \partial R / \partial \varepsilon$$

$$\partial R / \partial i = (\sqrt{1 - \lambda^2}) \partial R / \partial \lambda$$

$$\partial R / \partial a = 3/a \times \partial R / \partial a$$

$$+ e/2 \times \sin(M + 2\omega) - 7e/2 \times \sin(3M + 2\omega) + 17e^2 \times \sin(4M + 2\omega)],$$

Кроме того, для удобства обозначим:

$$R = -2/3 \times J \times \mu r_e^2 / r^3 \times R_l$$

Запишем производные R_l по элементам, ограничиваясь квадратами эксцентриситета орбиты:

$$\begin{aligned} \partial R_l / \partial e &= -3/2 \times (1 - 3\lambda^2/2) \times [e + (1 + 27e^2/8) \times \cos M + \\ &+ 3e \cos 2M + 53e^2/8 \times \cos 3M] + \\ &+ 3\lambda^2/8 \times [-e^2/8 \times \cos(M - 2\omega) + (1 - 3e^2/8) \times \cos(2M + 2\omega) + \\ &+ 10e \times \cos(2M + 2\omega) - 7(1 - 369e^2/56) \times \\ &\times \cos(3M + 2\omega) - 34e \times \cos(4M + 2\omega) - 845e^2/8) \times \cos(5M + 2\omega)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial R_l / \partial \lambda &= 3\lambda/2 \times [(1 + 3e^2/2 + 3e \times \cos M + 9e^2/2 \times \cos 2M + \\ &+ e/2 \times \cos(M + 2\omega) - (1 - 5e^2/2) \times \cos(2M + 2\omega) - \\ &- 7e/2 \times \cos(3M + 2\omega) - 17e^2/2 \times \cos(4M + 2\omega)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial R_l / \partial \varepsilon &= 3/2 \times (1 - 3\lambda^2/2) \times [e \times \sin M + 3e^2 \times \sin 2M] + \\ &+ 3\lambda^2/4 \times [-e/2 \times \sin(M + 2\omega) + 2(1 - 5e^2) \times \sin(2M + 2\omega) + \\ &+ 21e/2 \times \sin(3M + 2\omega) + 34e^2 \times \sin(4M + 2\omega)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial R_l / \partial \Omega &= 3\lambda^2/4 \times [e \times \sin(M + 2\omega) - 2 \times (1 - 5e^2/2) \times \sin(2M + 2\omega) - \\ &- 7e \times \sin(3M + 2\omega) - 17e^2 \times \sin(4M + 2\omega)], \end{aligned}$$

$$\partial R_l / \partial \pi = -3/2 \times (1 - 3\lambda^2/2) \times [e \times \sin M + 3e^2 \times \sin 2M +$$

$$\partial R_l / \partial a = 0.$$

Разлагая коэффициенты правых частей в уравнениях Лагранжа по степеням эксцентриситета (п. 1.2), подставляя производные пертурбационной функции по элементам и интегрируя, получим для возмущений первого порядка уравнения вида:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a + c_1 & \Omega &= \Omega_0 + \Delta \Omega + c_4 \\ e &= e_0 + \Delta e + c_2 & \pi &= \pi_0 + \Delta \pi + c_5 \\ i &= i_0 + \Delta i + c_3 & \varepsilon &= \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon + c_6 \end{aligned} \quad (31)$$

Возмущения Δa , Δe , ΔI , $\Delta \Omega$, $\Delta \pi$, $\Delta \varepsilon$ опять запишем с точностью до вторых степеней эксцентриситета включительно:

$$\begin{aligned} \Delta a / a &= 2J \times (r_e/a)^2 (1 - 3/2 \sin^2 i) \times [e \cdot \cos M + 3e^2/2 \cdot \cos 2M] + \\ &+ J \times (r_e/a)^2 \sin^2 i \times [-e/2 \cdot \cos(M + 2\omega) + \\ &+ (1 - 5e^2/2) \cos(2M + 2\omega) + \\ &+ 7e/2 \cdot \cos(3M + 2\omega) - 17e^2/2 \cdot \cos(4M + 2\omega)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta e &= J \times (r_e/a)^2 (1 - 3/2 \sin^2 i) \times [(1 + e^2/8) \cos M + \\ &+ 3e/2 \cdot \cos 2M + 53e^2/24 \cdot \cos 3M] + \\ &+ J/2 \times (r_e/a)^2 \cdot \sin^2 i \times [1/2(1 - e^2/8) \cdot \cos(M + 2\omega) + \\ &+ e^2/16 \cdot \cos(M - 2\omega) - e/2 \cdot \cos(2M + 2\omega) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 7/6 \cdot (1 - 235e^2/56) \cdot \cos(3M+2\omega) + 17e/4 \cdot \cos(4M+2\omega) + \\
& + 169e^2/16 \cdot \cos(5M+2\omega)], \\
\Delta i = & J/2 \times (r_e/a)^2 \cdot \sin i \cdot \cos i \times [- e \cdot \cos(M+2\omega) + \\
& + (1 - 2e^2) \cdot \cos(2M+2\omega) + \\
& + 7e/3 \cdot \cos(3M-2\omega) + 17e^2/4 \cdot \cos(4M+2\omega)], \\
\Delta \Omega = & J \times (r_e/a)^2 \cdot \cos i \times [(1+2e^2)n \cdot t + 3e \cdot \sin M + \\
& + 9e^2/4 \cdot \sin 2M + e/2 \cdot \sin(M+2\omega) - \\
& - 1/2(1-2e^2) \cdot \sin(2M+2\omega) - \\
& - 7e/6 \cdot \sin(3M+2\omega) + 17e^2/8 \cdot \sin(4M+2\omega)], \\
e \cdot \Delta \pi = & -J \times (r_e/a)^2 (\cos i - \cos^2 i) \times [e \cdot n \cdot t + 3e^2 \cdot \sin M + e^2/2 \cdot \sin(M+2\omega) - \\
& - e/2 \cdot \sin(2M+2\omega) - 7e^2/6 \cdot \sin(3M+2\omega)] + \\
& + J \times (r_e/a)^2 (1 - 3/2 \cdot \sin^2 i) \times [e \cdot n \cdot t + (1+23e^2/8) \cdot \sin M + \\
& + 3e/2 \cdot \sin 2M + 53e^2/24 \cdot \sin 3M] - \\
& - J/4 \times (r_e/a)^2 \cdot \sin^2 i \times [(1-7e^2/8) \cdot \sin(M+2\omega) - \\
& - e^2/8 \cdot \sin(M-2\omega) + 5e \cdot \sin(M+2\omega) - \\
& - 7/3(1 - 397e^2/56) \cdot \sin(3M+2\omega)] - \\
& - 17e/2 \cdot \sin(4M+2\omega) - 169e^2/8 \cdot \sin(5M+2\omega)], \\
\Delta \varepsilon = & 2J \times (r_e/a)^2 (1 - 3/2 \cdot \sin^2 i) \times [(1+7e^2/4)n \cdot t + \\
& + 13e/4 \cdot \sin M + 21e^2/8 \cdot \sin 2M]
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& + 3J \times (r_e/a)^2 \cdot \sin^2 i \times [-13e/24 \cdot \sin(M+2\omega) + \\
& + 1/2(1-35e^2/12) \cdot \sin(2M+2\omega) + \\
& - 91e/72 \cdot \sin(3M+2\omega) + 119e^2/48 \cdot \sin(4M+2\omega) - \\
& - J \times (r_e/a)^2 \cdot (\cos i - \cos^2 i) \times [(1+2e^2)n \cdot t + \\
& + 3e \cdot \sin M + 9e^2/4 \cdot \sin 2M + \\
& + e/2 \cdot \sin(M+2\omega) - 1/2(1-2e^2) \cdot \sin(2M+2\omega) - \\
& - 7e/6 \cdot \sin(3M+2\omega) - 17e^2/8 \cdot \sin(4M+2\omega)]
\end{aligned}$$

Шесть постоянных интегрирования $a_0 + c_1, e_0 + c_2, i_0 + c_3, \Omega_0 + c_4, \pi_0 + c_5, \varepsilon_0 + c_6$ могут быть определены различными способами. Очевидно, что при $t = t_0$ возмущения

$$\Delta a_I = \Delta e_I = \Delta i_I = \Delta \Omega_I = \Delta \pi_I = \Delta \varepsilon_I = 0$$

Элементы орбиты $a, e, i, \Omega, \pi, \varepsilon$ называются оскулирующими элементами на момент t , а постоянные интегрирования $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \pi_0, \varepsilon_0$ - оскулирующими элементами для эпохи оскуляции $t = t_0$.

Если положить в (31) $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, то

$$\begin{aligned}
a &= a_0 + \Delta a, & \Omega &= \Omega_0 + \Delta \Omega, \\
e &= e_0 + \Delta e, & \pi &= \pi_0 + \Delta \pi, \\
i &= i_0 + \Delta i, & \varepsilon &= \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon.
\end{aligned}$$

В этом случае элементы a , e , i , Ω , π , ε называются оскулирующими элементами орбиты на момент t , а постоянные интегрирования a_0 , e_0 , i_0 , Ω_0 , π_0 , ε_0 называются средними элементами орбиты. Полученные выражения (32) для возмущенных оскулирующих элементов орбиты спутника позволяют вычислить возмущенные гелио- и геоцентрические координаты спутника на любой момент t по известным формулам небесной механики (см. «Методы астродинамики. Часть 1»).

Глава 2.

ВОЗМУЩЕНИЯ В ДВИЖЕНИИ ИСЗ

Уравнения Лагранжа (3) применимы для изучения возмущенного движения, когда возмущающие силы имеют гравитационный характер, а возмущающая функция является пертурбационной функцией. Однако возмущающие силы могут иметь и негравитационный характер, например, несферическая структура центрального притягивающего тела, атмосферное торможение и световое давление. Поэтому в общем случае для нахождения оскулирующих элементов орбиты ИСЗ применяют уравнения Ньютона (33), в которые вместо пертурбационной функции R

входят составляющие возмущающего ускорения S , T , W (см. «Методы астродинамики. Часть 1»).

$$\left\{ \begin{array}{l} dp/dt = \sqrt{p/\mu} \cdot 2r \cdot T \\ de/dt = \sqrt{p/\mu} [\sin v + \cos(v+e)r/p] \cdot T \\ di/dt = \sqrt{p/\mu} r/p \cdot \cos(v+\omega) \cdot W \\ dM/dt - n = \sqrt{p/\mu} [\sqrt{(1-e^2)/e} \cdot (\cos v + 2e \cdot r/p) - \\ \quad - \sqrt{(1-e^2)/e} \cdot (1+r/p) \cdot \sin v] \cdot S \\ d\Omega/dt = \sqrt{p/\mu} [\sin(v+\omega)/\sin i \cdot r/p] \cdot T \\ d\omega/dt = \sqrt{p/\mu} [-\cos v/e + \sin v/e \cdot (1+r/p) - \\ \quad - r/p \cdot \sin(v+\omega) \cdot \operatorname{ctg} i] \cdot W \end{array} \right. \quad (33)$$

Если движение происходит лишь в силовом поле, то в этом случае в уравнениях (33) имеем:

$$S = \partial R / \partial r, \quad T = 1/r \cdot \partial R / \partial \omega, \quad W = 1/r \sin u \cdot \partial R / \partial i, \quad (34)$$

где u – аргумент широты орбиты. Так как при малых эксцентриситетах правые части $d\omega/dt$, dM/dt в данных уравнениях могут стать очень большими, то элементы орбиты ω и e выражают через компоненты вектора Лапласа:

$$K = e \cdot \sin \omega, \quad Q = e \cdot \cos \omega$$

и вводят обозначение $F = 1 + e \cos v = 1 + K \sin u + Q \cos u$,

где K – проекция вектора Лапласа, выраженного в долях μ , на линию апсид, Q – проекция на прямую, перпендикулярную линии апсид и лежащую в плоскости орбиты. Кроме того, вместо средней anomalyи M в качестве шестого элемента орбиты используют аргумент широты i . С учетом этого уравнения (33) запишутся в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Omega/dt = \sqrt{p/\mu} \cdot \sin u \cdot \csc i \cdot F^{-1} \cdot W \\ di/dt = \sqrt{p/\mu} \cdot \cos u \cdot F^{-1} \cdot W \\ dp/dt = \sqrt{p/\mu} \cdot 2p \cdot F^{-1} \cdot T \\ dK/dt = -\cos u \cdot \sqrt{p/\mu} \cdot S + [(K + \sin u) \cdot F^{-1} + \sin u] \cdot \sqrt{p/\mu} \cdot T - \\ \quad - \operatorname{Ctg} i \cdot \sin u \cdot Q \cdot F^{-1} \cdot \sqrt{p/\mu} \cdot W \\ dQ/dt = \sin u \cdot \sqrt{p/\mu} \cdot S + [(Q + \cos u) \cdot F^{-1} + \cos u] \cdot \sqrt{p/\mu} \cdot T + \\ \quad + \operatorname{Ctg} i \cdot \sin u \cdot K \cdot F^{-1} \cdot \sqrt{p/\mu} \cdot W, \\ du/dt = \sqrt{\mu/r^2} [1 - (\dot{r}^2 \cdot \sin u \cdot \operatorname{Ctg} i / \mu p) \cdot W]. \end{array} \right. \quad (34)$$

Уравнения Лагранжа (3) и Ньютона (33) в конечном виде не интегрируются. Для их решения применяют приближенные методы интегрирования (см. «Методы астродинамики. Часть 1.»). Чтобы выполнить приближенное интегрирование, необходимо выразить возмущающую функцию (R или S, T, W) в явном виде через

элементы орбиты, а затем проинтегрировать правые части уравнений.

2.1. Возмущения в движении ИСЗ под действием зональной части геопотенциала.

При построении точной теории движения близких спутников Земли нельзя ограничиваться приближенным выражением для потенциала Земли, как это было сделано в формуле (27) п.1.5. Необходимо использовать формулу разложения внешнего геопотенциала Земли U по сферическим функциям:

$$U = \mu/r \cdot [1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (r_e/r)^n (C_{nk} \cdot \cos k\lambda + S_{nk} \cdot \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \delta)] \quad (35)$$

где r_e – средний экваториальный радиус Земли, r – геоцентрический радиус-вектор ИСЗ, δ, λ – геоцентрические склонение и долгота ИСЗ, C_{nk}, S_{nk} – безразмерные числовые параметры, характеризующие внешнее гравитационное поле Земли. Начало координат находится в центре масс Земли, оси координат совпадают с осями инерции, угол δ отсчитывается от экваториальной плоскости Земли, угол λ – от начального меридиана. $P_{nk}(\sin \delta)$ – присоединенная функция Лежандра степени n порядка k , где $P_{n0}(\sin \delta)$ – многочлен Лежандра

при $\kappa=0$. Присоединенная функция Лежандра в общем виде определяется формулой:

$$P_{nk}(x) = (1-x^2)^{k/2} \cdot [(d^k \cdot P_{n0}(x))/dx^k]$$

Многочлены Лежандра определяются формулой Родрига:

$$P_{n0}(x) = 1/2^n n! \cdot [(d^n/dx^n) \cdot (x^2 - 1)^n]$$

в частности

$$P_{00}(x) = 1, \quad P_{10}(x) = x,$$

$$P_{20}(x) = 1/2(3x^2 - 1), \quad P_{30}(x) = 1/2(5x^3 - 3x)$$

$$P_{40}(x) = 1/8(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_{50}(x) = 1/8(63x^5 - 70x^3 + 15x) \dots$$

Для каждого целого положительного n существует система $2n+1$ линейно независимых сферических функций степени n . В качестве такой системы выбирают функции:

$$P_{n0}(\sin \delta) - \text{зональные сферические функции}, \quad (36)$$

$$\cos k\lambda \cdot P_{nk}(\sin \delta), \quad \sin k\lambda \cdot P_{nk}(\sin \delta) - \text{тессеральные}, \quad (37)$$

$$\cos n\lambda \cdot P_{nk}(\sin \delta), \quad \sin n\lambda \cdot P_{nk}(\sin \delta) - \text{секториальные}. \quad (38)$$

Зональные сферические функции (36) не зависят от долготы λ . Функции (37) и (38), зависящие от долготы ИСЗ, называются также долготной частью геопотенциала. Внешний геопотенциал с учетом зональных гармоник запишется (для $k=0$):

$$U_3 = \mu/r \cdot [1 + \sum_{n=2}^{\infty} (r_e/r)^n \cdot C_{n0} \cdot P_{n0}(\sin \delta)] \quad (39)$$

Параметры C_{n0} имеют следующий смысл:

1) $C_{20} = -2/3 \cdot (\alpha - v^2 r_e^3 / 2\mu)$ - характеризует полярное сжатие

Земли α , v – угловая скорость вращения Земли,

2) C_{30} - характеризует асимметрию северного и южного полушарий,

Таким образом, все четные параметры характеризуют фигуру земного сфериода, а нечетные параметры – асимметрию полушарий Земли. Первое слагаемое в (39) определяет невозмущенное кеплерово движение ИСЗ, второе слагаемое обусловлено возмущающей зональной частью геопотенциала:

$$R_3 = \mu \cdot [1 + \sum_{n=2}^{\infty} (r_e^n/r^{n+1}) \cdot C_{n0} \cdot P_{n0}(\sin \delta)] \quad (40)$$

а, например, возмущения первого порядка под действием только полярного сжатия Земли обусловлены функцией:

$$R_c = \mu \cdot r_e^2/r^3 \cdot C_{20} \cdot P_{20}(\sin \delta) \quad (41)$$

Выразим (41) через элементы орбиты ИСЗ. По формулам сферической астрономии (рис. 3, стр. 36)

$$\sin \delta = \sin i \cdot \sin u,$$

Из уравнения движения выражим r :

$$r = p / (1 + K \cdot \sin u + Q \cdot \cos u)$$

$$P_{20}(\sin \delta) = 1/2 \cdot (3 \cdot \sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1)$$

$$R_e = \mu \cdot r_e^2 / p^3 \cdot 3/2 \cdot C_{20} \cdot (1 + Q \cdot \cos u + K \cdot \sin u)^3 \cdot (\sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1/3)$$

Это выражение необходимо подставить в уравнения Лагранжа или Ньютона и проинтегрировать.

Приведем формулы для определения возмущений первого порядка, вызываемые полярным сжатием Земли:

$$\Delta \Omega = 3/2 \cdot C_{20} \cdot (r_e/p)^2 \cdot \cos[(u - u_0) - 1/2(\sin 2u - \sin 2u_0) + \dots],$$

$$\Delta i = -3/4 \cdot C_{20} \cdot (r_e/p)^2 \cdot \sin i \cdot \cos i \cdot (\cos 2u - \cos 2u_0),$$

$$\Delta p = -3/2 \cdot C_{20} \cdot (r_e/p)^2 \cdot \sin^2 i \cdot (\cos 2u - \cos 2u_0),$$

$$\begin{aligned} \Delta e = & -C_{20} \cdot (r_e/p)^2 \cdot [(1 - 3/2 \cdot \sin^2 i) \cdot \cos M + \sin^2 i \cdot \cos(M + 2\omega) + \\ & + 7/12 \cdot \sin^2 i \cdot \cos(3M + 2\omega)], \end{aligned}$$

$$\Delta \omega = -3/2 \cdot C_{20} \cdot (r_e/p)^2 \cdot (5 \cos^2 i - 1)(u - u_0), \quad (42)$$

$$\Delta M = -3/4 \cdot C_{20} \cdot (r_e/p)^2 \cdot (3 \cos^2 i - 1)(u - u_0) / \sqrt{1 - e^2}.$$

Зональная часть геопотенциала вызывает вековые возмущения первого порядка в долготе восходящего узла $\Delta \Omega$, в долготе перигонта $\Delta \omega$ и в средней аномалии ΔM , в большой полуоси вековых возмущений нет. Все вековые возмущения стремятся к

максимальному значению при $i \rightarrow 0$. Вековые возмущения в Ω равны нулю при $i = 90^\circ$, в ω при $i = 63,4^\circ$ (так называемый критический наклон), в M при $i = 54,7^\circ$. Обычно учитывают и возмущения второго порядка от C_{20} . Эти возмущения обладают свойствами, аналогичными свойствами возмущений первого порядка, но по своей величине они в 1000 раз меньше.

2.2. Возмущения в движении ИСЗ под действием

долготной части геопотенциала.

В соответствии с формулой (35) возмущающая функция в движении ИСЗ от долготной части геопотенциала ($\kappa \neq 0$) имеет вид:

$$R_\lambda = \mu/r \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (r_e/r)^n (C_{nk} \cdot \cos k\lambda + S_{nk} \cdot \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \delta) \quad (43)$$

Члены с $1 \leq k < n$ – это тессеральные гармоники, члены с $k=n$ – секториальные гармоники. Для получения возмущений необходимо величины $\cos k\lambda \cdot P_{nk}(\sin \delta)$ и $\sin k\lambda \cdot P_{nk}(\sin \delta)$ выразить через элементы орбиты. Из сферических треугольников (рис. 3) имеем:

$$\sin \delta = \sin i \cdot \sin u$$

$$\cos \delta \cdot \cos \lambda = \cos u \cdot \cos[\Omega - v(t-t_0)] - \sin u \cdot \sin[\Omega - v(t-t_0)] \cdot \cos i \quad (44)$$

$$\cos \delta \sin \lambda = \cos u \cdot \sin[\Omega - \nu(t-t_0)] + \sin u \cdot \cos[\Omega - \nu(t-t_0)] \cos i$$

Кроме того, следует применить рекуррентную формулу для вычисления присоединенных функций Лежандра:

$$(n-k+1) \cdot P_{n+1,k}(\sin \delta) = (2n+1) \cdot \sin \delta \cdot P_{nk}(\sin \delta) - (n+k) \cdot P_{n-1,k}(\sin \delta)$$

причем $P_{21}(\sin \delta) = -3 \sin \delta \cdot \cos \delta$

$$P_{22}(\sin \delta) = 3 \cos^2 \delta \quad (45)$$

$$P_{23}(\sin \delta) = -3/2 \cdot \cos \delta \cdot (5 \sin^2 \delta - 1)$$

.....

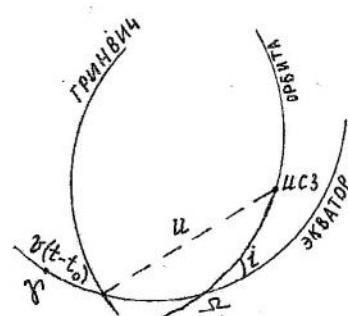


Рис. 3. Проекция орбиты ИСЗ на небесную сферу.

Если подставить (43) с учетом (44) и (45) в уравнения Лагранжа и проинтегрировать^{тп} в первом приближении получим возмущения любого из элементов орбит $\dot{\vartheta}$ в виде:

$$\Delta \dot{\vartheta} = \sum A(\vartheta) / (\alpha v + \beta n + \gamma) \cdot \begin{cases} \sin(\alpha v + \beta n + \gamma) \cdot t \\ \cos(\alpha v + \beta n + \gamma) \cdot t \end{cases} \quad (46)$$

Где $A(\vartheta)$ – коэффициенты, зависящие от начальных значений элементов орбиты, n – среднее движение ИСЗ, γ – функция от элементов i, e, ω орбиты, $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ – целые числа.

Вследствие того, что время t входит явно в тригонометрические функции (44), долготная часть геопотенциала вековых возмущений в движении ИСЗ не вызывает. Однако, когда знаменатель в (46)

$$\alpha v + \beta n + \gamma \rightarrow 0,$$

наступает условие резонанса. В этом случае члены имеют очень большую амплитуду, период и называются резонансными. У спутников, период обращения которых целое число раз укладывается в период обращения Земли вокруг оси (или наоборот), т.е. соизмерим с периодом вращения Земли, резонансные возмущения от соответствующих долготных гармоник потенциала проявляются наиболее ярко. С помощью изучения резонансных возмущений в движении ИСЗ в космической геодезии уточняют долготные коэффициенты геопотенциала.

2.3. Лунно-солнечные возмущения в движении ИСЗ.

В данном случае мы имеем дело с задачей 4-х тел: Земля – ИСЗ – Луна – Солнце. Для близких ИСЗ лунно-солнечные возмущения не слишком велики, поэтому при изучении возмущений первого порядка задачу 4-х тел можно разделить на две ограниченные задачи 3-х тел: Земля – ИСЗ – Луна и Земля – ИСЗ – Солнце. Обычно возмущения от Луны и Солнца вычисляют отдельно, а затем их суммируют. Аналитическое решение этих задач одинаковое. Пертурбационная функция имеет вид:

$$R_{n,c} = \mu_l (1/\Delta - r/r_1^2 \cdot \cos H) = \mu_l (1/\Delta - (xx_1 + yy_1 + zz_1)/r_1^3) \quad (47)$$

где величины с индексом «1» относятся к возмущающему телу (либо к Луне, либо к Солнцу), r – геоцентрический радиус-вектор ИСЗ, r_1 – геоцентрический радиус-вектор возмущающего тела, Δ – расстояние между ИСЗ и возмущающим телом, H – угол между r и r_1 , μ_l – гравитационный параметр возмущающего тела.

Значение $r < r_1$, поэтому выражение (47) можно разложить в сходящийся ряд по полиномам Лежандра, причем первый член μ_l/r_1 можно сразу отбросить, так как он зависит от координат

возмущающего тела и при дифференцировании по элементам орбит в уравнениях Лагранжа пропадает. Таким образом, получим:

$$R_{n,c} = \mu_l \sum_{k=2}^{\infty} r^k / r_1^{k+1} \cdot P_k (\cos H) \quad (48)$$

Выразим через элементы орбиты радиус-векторы и угол H :

$$r = a(1-e^2)/(1+e\cos V)$$

$$r_1 = a_1(1-e_1^2)/(1+e_1\cos V_1)$$

$$\cos H = (xx_1 + yy_1 + zz_1)/r_1^3$$

V – истинная аномалия ИСЗ.

Выражая прямоугольные координаты по известным формулам небесной механике x/r , y/r , z/r получим:

$$\begin{aligned} \cos H = & 1/2 \cdot \sin i \cdot \sin i_1 \cdot \cos(u - u_1) - \\ & + \cos^2 i / 2 \cdot \cos^2 i_1 / 2 \cdot \cos(u - u_1 + \Omega + \Omega_1) + \\ & + \sin^2 i / 2 \cdot \sin^2 i_1 / 2 \cdot \cos(u - u_1 + \Omega + \Omega_1) + \\ & + \cos^2 i / 2 \cdot \sin^2 i_1 / 2 \cdot \cos(u - u_1 + \Omega + \Omega_1) + \\ & + \sin^2 i / 2 \cdot \cos^2 i_1 / 2 \cdot \cos(u - u_1 + \Omega + \Omega_1) \end{aligned}$$

Полиномы Лежандра $P_k (\cos H)$ вычисляются также как в п.2.2. За малый параметр в (48) можно принять $\sigma = \mu_l(a/a_1)^2$. При таком выборе параметра получаем, что для ИСЗ с высотой порядка 1000 – 2000 км над поверхностью Земли $\sigma_c = 10^{-6}$, а $\sigma_n = 10^{-4}$. Для учета

возмущений от Луны в формуле (48) берут 4 члена суммы, а для учета солнечных возмущений достаточно 2 членов. Возмущения первого порядка от Луны и Солнца получают в виде суммы вековых, долгопериодических и короткопериодических членов. Приведем выражения наиболее существенных возмущений (т.е. пропорциональных e^0) в зависимости от аргумента широты ИСЗ:

$$\Delta\Omega = -3/4 \cdot m_L/m \cdot (a/a_L)^3 \cos i \cdot (u - u_0) + \dots,$$

$$\Delta\omega = 3/8 \cdot m_L/m \cdot (a/a_L)^3 \{[5 \cos 2\omega - 1] + 5(1 - \cos 2\omega) \cos^2 i\} (u - u_0) + \dots,$$

$$\Delta M_0 = -1/8 \cdot m_L/m \cdot (a/a_L)^3 \{[7/8 \cdot (3 \cos^2 i - 1) + 15/8 \cdot \cos 2\omega \sin^2 i]\} (u - u_0) + \dots$$

Вековые возмущения в эксцентриситете орбиты пропорциональны e^1 , т.е. имеют порядок эксцентриситета, вековые возмущения в наклоне орбиты ИСЗ пропорциональны e^2 . Долгопериодические члены имеют период обращения возмущающего тела: от Луны – 27 суток, от Солнца - 365 суток.

2.4. Возмущения в движении ИСЗ под действием

сопротивления атмосферы.

Учет атмосферного торможения в движении ИСЗ – наиболее трудный вопрос астрономии вследствие недостатка знаний о

процессах, происходящих в верхней атмосфере. Поэтому учесть эти возмущения можно пока лишь приближенно.

Будем рассматривать орбиту ИСЗ близкой к круговой, атмосферу сферической, эффектом вращения атмосферы пренебрегаем. Найдем возмущающую функцию. Из аэродинамики известно, что сила сопротивления среды, действующая на движущееся в этой среде тело, равна:

$$F = 1/2 \cdot \rho \cdot V \cdot S' \cdot C_d \quad (49)$$

где V – скорость движения тела относительно среды (орбитальная скорость ИСЗ), S' – площадь поперечного сечения тела, ρ – плотность среды (плотность атмосферы), $C_d \approx 2,2$ – аэродинамический коэффициент, зависящий от длины пробега молекул среды на данной высоте. Так как для орбиты близкой к круговой сила сопротивления F направлена в сторону, противоположную направлению поперечной (трансверсальной) составляющей возмущаемого ускорения, то для спутника массой m имеем:

$$S = 0, \quad T = 1,1/m \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S', \quad W = 0$$

Поэтому в уравнениях Ньютона (34) (для негравитационных возмущений уравнения Лагранжа неприменимы) правые части и члены, зависящие от S, W обратятся в нуль. В уравнения для

остальных элементов орбиты подставляем составляющую T , причем S' , t для данного спутника заранее известные величины, а орбитальная скорость спутника определяется из интеграла энергии:

$$V^2 = 2\mu/r - \mu/a$$

Интегрируя уравнения Ньютона, получаем, что атмосферные возмущения в узле и наклоне орбиты отсутствуют $\Delta\Omega=0$, $\Delta i=0$ (так как $S = 0$, $W = 0$). В элементах ω и M_0 имеются только периодические возмущения. Наиболее существенные атмосферные возмущения имеют большая полуось и эксцентриситет:

$$\Delta a = -2/3 \cdot k/n \cdot a(t - t_0),$$

$$\begin{aligned} \Delta e = & -2/3 \cdot k/n \cdot \sum [(\xi/2)^{2n}/(n+1)!(n+2)!] + \\ & + \sum (\xi/2)^{2n}/((n+1)!)^2 - e \sum (\xi/2)^{2n}/(n+1)!(n+2)! \end{aligned}$$

где $\xi = ae/H$, H - высота спутника над поверхностью Земли,

$$k = 3n^2 a \rho_0 \cdot S/m \cdot (2\pi\xi)^{-1/2} (1+2e+3e^2/2+(1-6e)/8\xi+9/128\xi^2)$$

ρ_0 - плотность атмосферы на высоте перигея орбиты.

Таким образом, вследствие сопротивления атмосферы возмущения имеют большая полуось и эксцентриситет: радиус орбиты уменьшается и орбита округляется. Для ИСЗ на высоте 300 км имеем $\Delta a \approx -2,3$ км/сутки, $\Delta e \approx -0,0003 \cdot t$ (t в сутках).

2.5. Возмущения в движении ИСЗ под действием светового давления.

Давление суммарного излучения Солнца может заметно влиять на орбиту ИСЗ. Сила светового давления, действующая на спутник, может быть записана так:

$$F_c = S' \cdot S_c (1+k) \cdot (\rho/\Delta)^2 \cdot \cos^2 \alpha / c \quad (50)$$

где $S_c = 1,3 \cdot 10^{-6} - 1,34 \cdot 10^{-6}$ эрг/см².сек – солнечная постоянная (мощность солнечной радиации на 1 см² земной поверхности), k – коэффициент отражения, ρ – среднее расстояние от Земли до Солнца, Δ – расстояние от ИСЗ до Солнца, α – угол падения солнечных лучей на поверхность спутника (для сферического ИСЗ $k=0$), c – скорость света. Возмущающее ускорение на основании второго закона Ньютона будет:

$$W_c = S' \cdot S_c (1+k) \cdot (\rho/\Delta)^2 \cdot \cos^2 \alpha / m \cdot c.$$

Взаимное расстояние можно представить (п.2.3) в виде:

$$1/\Delta = 1/\rho \cdot \sum (r/\rho)^n \cdot P_n (\cos H)$$

$$\text{т.е. } \rho/\Delta \approx 1 + r \cdot \cos H/\rho + \dots,$$

r – радиус-вектор орбиты ИСЗ, H – угол между r и ρ .

Из сферического треугольника Солнце - полюс эклиптики – ИСЗ

можно найти: $\lambda_{\odot} = \cos \beta \cdot \cos(\lambda - \lambda_{\odot})$,

β, λ – эклиптические широта и долгота ИСЗ, λ_{\odot} – средняя эклиптическая долгота Солнца. От эклиптических β, λ надо перейти к экваториальным α, δ по известным формулам сферической астрономии, а затем выразить их через элементы орбиты (см. «Методы астродинамики. Часть 1»). Тем самым мы получим возмущаемое ускорение через элементы орбиты. При интегрировании уравнений Ньютона возможны два случая пределов интегрирования: 1) ИСЗ все время освещен Солнцем, 2) ИСЗ периодически входит в тень Земли. Угловое расстояние спутника от Солнца H_{\odot} можно вычислить по формуле:

$$\cos H_{\odot} = \sin \delta \cdot \sin \delta_{\odot} + \cos \delta \cdot \cos \delta_{\odot} \cdot \cos(\alpha - \alpha_{\odot}), \quad (51)$$

тогда при $180^\circ - H_{\odot} \geq \xi$ – спутник внутри тени,

$180^\circ - H_{\odot} < \xi$ – спутник вне тени,

$\cos \xi = + \sqrt{1 - (R/r_T)^2}$, где R – средний радиус Земли, r_T – геоцентрический радиус-вектор ИСЗ в момент пересечения

границы тени. В обоих случаях возмущения в любом из элементов орбиты $\dot{\omega}$ могут быть представлены в виде:

$$\Delta \dot{\omega} = \frac{S'/m \cdot \sum A(\vartheta)}{\omega} \cdot \left\{ \frac{\cos, \sin(\omega + \Omega + \lambda_{\odot})}{\omega - \Omega - \lambda_{\odot}} \right\}. \quad (52)$$

Если отбросить короткопериодические возмущения из-за их малости, получим, что возмущений первого порядка в большой полуоси нет. В остальных же элементах имеются долгопериодические возмущения, величины же ω, Ω – это скорости изменения долгот перигея и узла под действием второй зональной гармоники геопотенциала. Существенным является то обстоятельство, что возмущения от светового давления пропорциональны отношению S'/m (52), которое называют «отношение поверхность-масса». Отсюда следует, чем меньше это отношение, тем меньше возмущения. Поэтому для уменьшения влияния светового давления спутники должны быть не слишком больших размеров и достаточно тяжелые.

Явный вид выражений возмущений в элементах орбиты, например в (52) и (46), довольно громоздок, поэтому они приведены в общем виде с целью проведения качественного анализа их изменений. В полном виде формулы возмущений приведены в «Справочном

руководстве по небесной механике и астродинамике» под
редакцией Г.Н.Дубошина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. М., «Наука», 1965, 340 с.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1978, 456 с.
3. Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., «Наука», 1971, 820 с.
4. Кондратьева Е.Д., Ишмухаметова М.Г. Методы астродинамики. Методическое пособие. Часть 1. Казань, КГУ, 2002, 40 с.
5. Плахов Ю.В. Применение теории возмущений в космической геодезии. М., «Недра», 1983, 200 с.
6. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968, 800 с.
7. Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., «Наука», 1965, 368 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Разложение пертурбационной функции.....	3
1.1. Разложение по степеням взаимного наклона	5
1.2. Разложение по степеням эксцентрикитетов	10
1.3. Разложение пертурбационной функции через..... средние аномалии	14
1.4. Классификация возмущений	16
1.5. Пример вычисления пертурбационный функции	
при движении непритягивающего спутника в поле ... тяготения планеты.....	20
2. Возмущения в движении ИСЗ.....	28
2.1. Возмущения в движении ИСЗ под действием	
зональной части геопотенциала.....	31
2.2. Возмущения в движении ИСЗ под действием	
долготной части геопотенциала.....	35
2.3. Лунно-солнечные возмущения в движении ИСЗ.....	38
2.4. Возмущения в движении ИСЗ под действием	
сопротивления атмосферы.....	40
2.5. Возмущения в движении ИСЗ под действием	
светового давления.....	43
Литература.....	47

Отпечатано полиграфическим комплексом физического факультета

Заказ № 1-22-09/03

бумага офсетная, тираж 50 экз.

г. Казань, ул. Кремлевская, дом 16-А, к. 010, тел. (8412) 36-90-16