Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2019, №4, с. 85–88 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное Л.А. Аксентьевым

С.Л. БЕРБЕРЯН

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И УГЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $\mathfrak{R}^\theta$

Аннотация. Исследуется равномерная ограниченность в гиперциклических областях субгармонических функций классов $\mathfrak{R}^\theta$ и ее связь с существованием угловых пределов в точках единичной окружности.

Ключевые слова: субгармонические функции, угловой предел, классы $\mathfrak{R}^\theta$, гиперцикл, гиперциклическая область.

УДК: 517.538

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-85-88

Исследованию граничных свойств мероморфных и голоморфных функций, определенных в единичном круге, посвящены многочисленные статьи. В частности, в работе [1] рассматривался вопрос ограниченности предельных множеств нормальных голоморфных функций в углах с вершиной в точке единичной окружности. Аналогичный вопрос для более широких классов $\mathfrak{R}^\theta$ непрерывных и субгармонических функций рассматривался автором в работах [2] и [3]. В данной работе получена теорема о равномерной ограниченности в гиперциклических областях субгармонических функций классов $\mathfrak{R}^\theta$, которые содержат нормальные субгармонические функции. Кроме того, с использованием полученного результата доказывается теорема о необходимых и достаточных условиях существования угловых граничных значений у субгармонических функций классов $\mathfrak{R}^\theta$ в точках $\xi = e^{i\theta}$ и $-\xi$.

В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений. Обозначим через D и Γ соответственно единичный круг $|z| < 1$ и единичную окружность $|z| = 1$. Обозначим через $L(\xi, \varphi)$ гиперцикл, проходящий через точки $\xi = e^{i\theta}$, $-\xi$ и образующий угол φ с диаметром Λ^θ, который соединяет точки ξ и $-\xi$. Пусть $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ — область, ограниченная двумя гиперциклами $L(\xi, \varphi_1)$ и $L(\xi, \varphi_2)$. Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$ в D. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т. е. $C(f, \xi, S) = \cap\overline{f(S \cap U(\xi))}$. Пересечение берется по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R = (-\infty, +\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к

Поступила в редакцию 19.10.2018, после доработки 19.10.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1A019 и в рамках финансовой поддержки проекта развития Российско-Армянского университета.

точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $F(f)$, если $C(f, \xi, \Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi \in \Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называется множеством точек Фату для функции $f(z)$. Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции (например, [4] или [5]). В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $T = \{S(z); S(z) = e^{i\alpha}(z + a) \cdot (1 + \overline{a}z)^{-1}$, a — произвольная точка в D, α — произвольное действительное число$\}$. Придерживаясь обозначений из работы [6], скажем, что действительнозначная функция $f(z) \in \mathfrak{R}$, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi : \{f(S(z)); S(z) \in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ, где $S_n(z) \in T$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K. В статье [6] В.И. Гавриловым была сформулирована общая задача об изучении граничных свойств мероморфных функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах группы T. Была рассмотрена подгруппа $T^\theta = \{S_a^\theta(z); S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta}) \cdot (1 + aze^{-i\theta})^{-1}$, где $a \in (-1, 1)$ и θ, $0 \leqslant \theta < \pi$, фиксировано$\}$. Действительнозначную функцию $f(z)$ отнесем к классу $\mathfrak{R}^\theta$, где $0 \leqslant \theta < \pi$ фиксировано, если порождаемое ею семейство функций $\Phi^\theta = \{f(S_a^\theta(z)); S_a^\theta \in T^\theta)\}$ нормально в D в смысле Монтеля.

Справедливы следующие утверждения. В классе $\mathfrak{R}^\theta$ θ всегда фиксировано, $0 \leq \theta < \pi$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$ и предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1))$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$, где $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$), ограничены сверху числом α. Тогда предельное множество $C(f, \zeta, \overline{H(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)})$ также ограничено сверху числом α.*

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$) угловой предел α, необходимо и достаточно существования для любого сколь угодно малого положительного ε таких углов φ_ε^1, φ_ε^2, что*

1) $\pi/2 < \varphi_\varepsilon^1 < -\pi/2 + \varepsilon$, $\pi/2 - \varepsilon < \varphi_\varepsilon^2 < \pi/2$;
2) *предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^1))$, $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^2))$ ограничены сверху числом α;*
3) *существует такая кривая L_ξ с концом в точке ξ, целиком лежащая в некоторой гиперциклической области $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, что $\lim\limits_{\substack{z \to \xi, \\ z \in L_\xi}} f(z) = \alpha$.*

Для получения утверждений приведенных теорем рассмотрены леммы.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$ и $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$). Если предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1)$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$ ограничены сверху значением α при фиксированных значениях $\varphi_1, \varphi_2 \in (\pi/2, \pi/2)$, то предельное множество $C(f, \xi, \overline{H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)})$ также ограничено сверху значением α.*

Схема доказательства. Доказательство леммы проводится методом от противного и при этом существенно используется свойство неевклидовой геометрии единичного круга об инвариантности гиперциклов $L(\xi, \varphi)$ при отображениях подгруппы $T^\theta = \{S_a^\theta(z); S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta}) \cdot (1 + aze^{-i\theta})^{-1}$, где $a \in (-1, 1)$ и θ, $0 \leqslant \theta < \pi$, фиксировано$\}$. Кроме того, придерживаемся построения компакта K, впервые приведенного в работе [7].

Замечание 1. Анализируя доказательство леммы 1, видим, что утверждение остается справедливым для гармонических функции класса $\mathfrak{R}^\theta$ в случае условия ограниченности снизу.

Следствие 1. Если гармоническая в D функция $f(z)$ из класса $\mathfrak{R}^\theta$ и для $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$) предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1))$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$ ограничены сверху (или снизу) значением α при фиксированных значениях $\varphi_1, \varphi_2 \in (\pi/2, \pi/2)$, то предельное множество $C(f, \zeta, \overline{H(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)})$ также ограничено сверху(или снизу) значением α.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция класса $\mathfrak{R}^\theta$ и для $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$) существуют такие гиперциклы $L(\xi, \varphi_1)$ и $L(\xi, \varphi_2)$, что предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1))$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$ ограничены сверху значением α. Если существует кривая L_ξ, целиком лежащая в некоторой гиперциклической области $H(\zeta, \varphi_1', \varphi_2') \subset H(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ с концом в точке ξ такая, что*

$$\lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in L_\xi}} f(z) = \alpha, \ \text{то} \quad \lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in H(\xi,\varphi_1',\varphi_2')}} f(z) = \alpha.$$

Схема доказательства. Из условий леммы 2 и утверждения леммы 1 следует, что предельное множество $C(f, \xi, \overline{H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)})$ ограничено сверху числом α. Придерживаясь того же построения компакта K, что и в лемме 1, и воспользовавшись принципом максимума для субгармонических функций, получим утверждение леммы 2.

Утверждение теоремы 1 непосредственно следует из утверждения леммы 1.

Схема доказательства теоремы 2. Необходимость условий в теореме 2 очевидна. Перейдем к доказательству достаточности условий. Для произвольной последовательности $\{z_n\} \to \xi$ выберем такую гиперциклическую область $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, чтобы $z_n \in H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ и эта область содержала также кривую L_ξ, для которой $\lim\limits_{\substack{z\to\xi \\ z\in L_\xi}} f(z) = \alpha$.

В силу условий теоремы 2 можно выбрать такие углы φ_ε^1, φ_ε^2, что предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^1))$, $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^2))$ ограничены сверху числом α и гиперциклическая область $H(\zeta, \varphi_\varepsilon^1, \varphi_\varepsilon^2)$ содержит гиперциклическую область $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$. Тем самым выполнены условия леммы 2 и согласно утверждению этой леммы $\lim\limits_{\substack{z\to\xi \\ z\in H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)}} f(z) = \alpha$. В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$. В силу произвольности взятой последовательности $\{z_n\}$ отсюда следует существование у функции $f(z)$ углового предела, равного α в точке ζ. Утверждение теоремы 2 доказано.

Следствие 2. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке $\xi = e^{i\theta}$ угловой предел α, необходимо и достаточно существования для любого сколь угодно малого положительного ε таких углов φ_ε^1, φ_ε^2, что $\pi/2 < \varphi_\varepsilon^1 < \pi/2 + \varepsilon$, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \varphi_\varepsilon^2 < \pi/2$ и $\lim\limits_{\substack{z\in L(\xi,\varphi_\varepsilon^1) \\ z\to\xi}} f(z) = \lim\limits_{\substack{z\in L(\xi,\varphi_\varepsilon^2) \\ z\to\xi}} f(z) = \alpha$.

Утверждения теоремы 2 и следствия 2 для субгармонических функций класса $\mathfrak{R}$ в случае, когда вместо гиперциклов рассматривались хорды, известны [8], однако для получения аналогичных результатов для более широких классов $\mathfrak{R}^\theta$ пришлось видоизменить методы доказательств.

Замечание 2. Условие существования углов φ_1^ε, φ_2^ε при любом $\varepsilon > 0$, для которых $\lim\limits_{\substack{z\in L(\xi,\varphi_1^\varepsilon) \\ z\to\xi}} f(z) = \lim\limits_{\substack{z\in L(\xi,\varphi_2^\varepsilon) \\ z\to\xi}} f(z) = \alpha$, существенно, так как Дж. Миком [7] приведен пример субгармонической функции класса $\mathfrak{N}$, для которого $\lim\limits_{\substack{z\in H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)\\ z\to\xi}} f(z)=\alpha$, в любой фиксированной гиперциклической области $H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, однако даже в этом случае в точке $\xi=1$ углового предела не существует.

Если в условиях теоремы 2 вместо гиперциклов $L(\xi,\varphi)$ рассмотреть хорды $h(\xi,\varphi)$, составляющие с радиусом в точке ξ углы φ, где $\pi/2<\varphi<\pi/2$, то можно убедиться, что эти условия являются необходимыми, но недостаточными для существования угловых пределов даже у ограниченных субгармонических функций. Рассмотрим субгармоническую функцию $u(z)$, построенную М. Цудзи [9]. Эта функция обладает следующими свойствами: $-1\leqslant u(z)\leqslant 0$, имеет всюду на Γ, кроме множества E, $\operatorname{mes}E=0$, пределы по хордам $h(\xi,\varphi)$ $\lim\limits_{\substack{z\to\xi\in\Gamma\setminus E\\ z\in h(\xi,\varphi)}} u(z)=0$ для почти всех $\varphi\in(\pi/2,\pi/2)$. Однако в каждой такой точке $\zeta\in\Gamma\setminus E$ функция $u(z)$ не имеет углового предела, так как в любой гиперциклической области $H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ существует такая последовательность точек $\{z_n\}\to\zeta$, что $\lim\limits_{n\to\infty}u(z_n)=-1$.

Литература

[1] Bagemihl F. *Some boundary properties of normal functions bounded on nontangential arcs*, Arch. Math. **14** (6), 399–406 (1963).

[2] Берберян С.Л. *О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга*, Изв. АН Арм. ССР **15** (4), 395–402 (1980).

[3] Берберян С.Л. *Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций*, Изв. вузов. Матем., № 3, 22–28 (1986).

[4] Lappan P. *Some results on harmonic normal functions*, Math. Zeitschr. **90** (1), 155–159 (1965).

[5] Rung D.C. *Asymptotic values of normal subharmonic functions*, Math. Zeitschr. **84** (1), 9–15 (1964).

[6] Гаврилов В.И. *Нормальные функции и почти периодические функции*, ДАН СССР **240** (4), 768–770 (1978).

[7] Meek J. *Of Fatous points of normal subharmonic functions*, Mathematica Japonica **22** (3), 309–314 (1977).

[8] Berberyan S.L. *On angular boundary values of subharmonic functions from the class N*, Mathem. Montisingri **XX-XXI**, 5–14 (2007–2008).

[9] Tsuji M. *Littlewoods theorem on subharmonic functions in a unit circle*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **5** (7), 3–16 (1956).

Самвел Левонович Берберян,

Российско-Армянский (Славянский) университет,
ул. Овсепа Эмина, д. 123, г. Ереван, 0051, Армения,

`e-mail:` samvel357@mail.ru

S.L. Berberyan

On boundedness and angular boundary values of subharmonic functions of classes $\mathfrak{N}^\theta$

Abstract. In this paper we study the uniform boundedness in hypercyclic domains of subharmonic functions of classes $\mathfrak{N}^\theta$ and its relation to existence of angular limits at points of the unit circumference.

Keywords: subharmonic functions, angular limit, $\mathfrak{N}^\theta$ classes, hypercycle, hypercycle domain.

Samvel Levonovich Berberyan,

Russian–Armenian (Slavonic) University,
123 Ovsep Emin str., Yerevan, 0051 Armenia,

`e-mail:` samvel357@mail.ru