

УДК 535.2

## ОСОБЕННОСТИ АТОМ-ПОЛЕВОГО ПЕРЕПУТЫВАНИЯ В ДВУХФОТОННЫХ МОДЕЛЯХ ТЭВИСА – КАММИНГСА

*М.С. Русакова, Е.К. Башкиров, Е.Ю. Сочкова*

### Аннотация

В работе рассмотрены особенности атом-полевого перепутывания в различных двухфотонных моделях Тэвиса – Каммингса с позиций динамики волновой функции и динамики линейной энтропии для различных чистых начальных состояний атомов и сильного когерентного поля. Найдены выражения для времен восстановления систем в распутанные состояния. Определены начальные чистые состояния атомов, при которых в процессе эволюции происходит «распутывание» состояний подсистем.

**Ключевые слова:** атом-полевое перепутывание, линейная энтропия, время распутывания, динамика волновой функции, двухфотонная модель Тэвиса – Каммингса, рамановское взаимодействие, невырожденное двухфотонное взаимодействие, вырожденная двухфотонная модель.

---

### Введение

Одним из наиболее перспективных направлений современной квантовой оптики является исследование свойств перепутанных состояний в атомных системах и способов их генерации. Перепутанные состояния важны в таких областях, как квантовая криптография, физика квантовой информации, квантовые вычисления и связь [1]. Удобной моделью для исследования перепутывания является модель Джейнса – Каммингса (МДК), а также ее различные обобщения, учитывающие наличие второго атома (модель Тэвиса – Каммингса), многофотонное взаимодействие и т. п. Двухфотонное взаимодействие в моделях типа МДК играет важную роль благодаря высокой степени корреляции между испущенными фотонами. Для МДК с вырожденным, невырожденным двухфотонным и двухфотонным рамановским взаимодействием были исследованы динамика атомных населенностей и статистика поля, сжатие, атом-полевое перепутывание [2]. Исследование атом-полевого перепутывания в моделях типа МДК было инициировано работами Феникса и Найта [3] и Ги-Банаклоче [4], где соответственно с позиций анализа асимптотики вектора состояния системы и анализа энтропии было показано, что на половине времени восстановления осцилляций Раби атомных населенностей в системе возникает распутывание состояний атома и поля. В настоящей работе исследованы свойства атом-полевого перепутывания в двухфотонных моделях Тэвиса – Каммингса с невырожденными и вырожденными двухфотонными переходами и в модели с невырожденными переходами рамановского типа. Найдены начальные чистые состояния атомов, при которых в системе возможна эволюция с распутыванием состояний атомной и фотонной подсистем, получены аналитические выражения для моментов времени распутывания.

### 1. Рассматриваемые модели и точное решение уравнения Шредингера для вектора состояния

Рассмотрим процесс атом-полевого перепутывания для двухфотонных моделей с невырожденными, вырожденными двухфотонными и невырожденными рамановскими переходами. Взаимодействие атомов с квантовым электромагнитным полем резонатора в таких моделях соответственно описывается гамильтонианами

$$H_{AF}^{nd} = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a_1^\dagger a_2^\dagger R_j^- + a_1 a_2 R_j^+),$$

$$H_{AF}^d = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a^{+2} R_j^- + a^2 R_j^+),$$

$$H_{AF}^{\text{Raman}} = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a_1^\dagger a_2 R_j^- + a_1 a_2^\dagger R_j^+),$$

где  $a_i$  ( $a_i^\dagger$ ) – оператор уничтожения (рождения) фотона в  $i$ -й моде поля (для вырожденного случая  $a_1 = a_2 = a$ ),  $R_j^+$  ( $R_j^-$ ) – повышающий (понижающий) атомный оператор в  $j$ -м атоме,  $g_i$  – константа взаимодействия атомов с  $i$ -й модой поля. Для упрощения вычислений положили  $g_1 = g_2 = g$ .

Считая, что атомы в начальный момент времени находятся в суперпозиции состояний

$$|\Psi\rangle_{AT}(0) = \alpha|+, +\rangle + \beta|-, -\rangle + \gamma|+, -\rangle + \delta|-, +\rangle,$$

где  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ , а поле в начальный момент времени приготовлено в когерентном состоянии с весовыми коэффициентами  $C_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}}$ , для рассматриваемых невырожденных моделей мы нашли точное решение уравнения Шредингера для волновой функции системы в общем виде:

$$|\Psi\rangle(t) = \sum_{n_f} (A_{n_f}(t)|+, +\rangle + B_{n_f}(t)|-, -\rangle + C_{n_f}(t)|+, -\rangle + D_{n_f}(t)|-, +\rangle).$$

Здесь приняты обозначения  $n_f = n_1, n_2$  для невырожденных моделей,  $n_f = n$  для вырожденной модели.

Коэффициенты в выражении для волновой функции для модели с невырожденными двухфотонными переходами рассчитываются как

$$A_{n_1 n_2}(t) = \frac{2\alpha}{\Omega_1^2} C_{n_1} C_{n_2} ((n_1 + 2)(n_2 + 2) + (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cos \Omega_1 t) -$$

$$- \frac{4\beta}{\Omega_1^2} C_{n_1+2} C_{n_2+2} \sin^2 \frac{\Omega_1 t}{2} \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 2)} -$$

$$- \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega_1} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_1 t \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)},$$

$$B_{n_1 n_2}(t) = -\frac{4\alpha}{\Omega_2^2} C_{n_1-2} C_{n_2-2} \sin^2 \frac{\Omega_2 t}{2} \sqrt{n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)} +$$

$$+ \frac{2\beta}{\Omega_2^2} C_{n_1-1} C_{n_2-1} ((n_1 - 1)(n_2 - 1) + n_1 n_2 \cos \Omega_2 t) -$$

$$- \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega_2} C_{n_1} C_{n_2} \sin \Omega_2 t \sqrt{n_1 n_2},$$

$$\begin{aligned}
C_{n_1 n_2}(t) = & -\frac{i\alpha}{\Omega_3} C_{n_1-1} C_{n_2-1} \sin \Omega_3 t \sqrt{n_1 n_2} - \\
& -\frac{i\beta}{\Omega_3} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_3 t \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} + \\
& + \frac{1}{2} C_{n_1} C_{n_2} ((\gamma - \delta) + (\gamma + \delta) \cos \Omega_3 t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{n_1 n_2}(t) = & -\frac{i\alpha}{\Omega_3} C_{n_1-1} C_{n_2-1} \sin \Omega_3 t \sqrt{n_1 n_2} - \\
& -\frac{i\beta}{\Omega_3} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_3 t \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} + \\
& + \frac{1}{2} C_{n_1} C_{n_2} ((\delta - \gamma) + (\gamma + \delta) \cos \Omega_3 t),
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Omega_1(n_1, n_2) = \sqrt{2} \sqrt{(n_1+1)(n_2+1) + (n_1+2)(n_2+2)} = \\
= \Omega_2(n_1+2, n_2+2) = \Omega_3(n_1+1, n_2+1).
\end{aligned}$$

Для модели с вырожденными двухфотонными переходами решение имеет вид

$$\begin{aligned}
A_n(t) = & \frac{2\alpha}{\Omega^2} C_n ((n+3)(n+4) + (n+1)(n+2) \cos \Omega t) - \\
& - \frac{4\beta}{\Omega^2} C_{n+4} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \\
& - \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega} C_{n+2} \sin \Omega t \sqrt{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n(t) = & -\frac{i\beta}{\Omega} C_{n+4} \sin \Omega t \sqrt{(n+3)(n+4)} + C_{n+2} \left( \gamma \cos^2 \frac{\Omega t}{2} - \delta \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \right) - \\
& - \frac{i\alpha}{\Omega} C_n \sin \Omega t \sqrt{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_n(t) = & -\frac{i\alpha}{\Omega} C_n \sin \Omega t \sqrt{(n+1)(n+2)} - \frac{i\beta}{\Omega} C_{n+4} \sin \Omega t \sqrt{(n+3)(n+4)} + \\
& + C_{n+2} \left( \delta \cos^2 \frac{\Omega t}{2} - \gamma \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_n(t) = & -\frac{4\alpha}{\Omega^2} C_n \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{i(\gamma + \delta)}{\Omega} C_{n+2} \sin \Omega t + \\
& + \frac{2\beta}{\Omega^2} C_{n+4} ((n+1)(n+2) + (n+3)(n+4) \cos \Omega t).
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения  $\Omega = \sqrt{(n+1)(n+2) + (n+3)(n+4)}$ . Для двухатомной модели с невырожденным рамановским взаимодействием коэффициенты не приведены ввиду их громоздкого вида.

## 2. Эволюция вектора состояния в случае сильного начального когерентного поля

Пусть поле в начальный момент времени приготовлено в когерентном состоянии со средним числом фотонов в моде  $\bar{n} \gg 1$ . В работе далее будет показано, что если атомы приготовлены в некоторой суперпозиции чистых состояний, а поле – в когерентном большой интенсивности, то волновая функция полной системы в некоторые моменты времени может быть факторизована.

Найдем асимптотическую эволюцию векторов состояния рассматриваемых моделей Тэвиса–Каммингса. Полуклассические гамильтонианы взаимодействия данных коллективных двухфотонных моделей имеют вид:

$$\begin{aligned} H_{SC}^{nd} &= \hbar g (v_1^* v_2^* R_1^- + v_1 v_2 R_1^+ + v_1^* v_2^* R_2^- + v_1 v_2 R_2^+), \\ H_{SC}^d &= \hbar g (v^{*2} R_1^- + v^2 R_1^+ + v^{*2} R_2^- + v^2 R_2^+), \\ H_{SC}^{\text{Raman}} &= \hbar g (v_1^* v_2 R_1^- + v_1 v_2^* R_1^+ + v_1^* \Upsilon_2 R_2^- + v_1 v_2^* R_2^+). \end{aligned}$$

Собственные значения полуклассического гамильтониана для рассматриваемых моделей есть

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{2} [e^{2i\varphi}|+, +\rangle + |-, -\rangle + e^{i\varphi}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)], \\ |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2} [e^{2i\varphi}|+, +\rangle + |-, -\rangle - e^{i\varphi}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)], \\ |\Phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-e^{2i\varphi}|+, +\rangle + |-, -\rangle], \quad |\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+, -\rangle - |-, +\rangle]. \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  для модели с невырожденными двухфотонными переходами,  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  для модели с невырожденными рамановскими переходами (индексы 1 и 2 относятся к начальной фазе поля в соответствующей моде). Для вырожденной двухфотонной модели  $\varphi = 2\tilde{\varphi}$ , где  $\tilde{\varphi}$  – начальная фаза поля.

Если атомы в начальный момент времени приготовлены в одном из собственных состояний полуклассического гамильтониана, а поле – в когерентном состоянии большой интенсивности, то волновая функция системы в любые моменты времени может быть представлена произведением волновых функций подсистем. Особый интерес представляют суперпозиции состояний  $|\Phi_1\rangle$  и  $|\Phi_2\rangle$  вида

$$|\Phi_S\rangle = e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle - |\Phi_2\rangle), \quad |\Phi_B\rangle = e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle).$$

Если атомы в начальный момент времени приготовлены в одном из приведенных выше суперпозиционных состояний, а поле – в когерентном состоянии большой интенсивности, то для всех рассматриваемых моделей в системе возникает распутывание в определенные моменты времени  $t_{\text{dis}}$ . Из анализа динамики волновой функции систем можно определить аналитические выражения для моментов времени распутывания:

$$\begin{aligned} t_{\text{dis}}^{nd} &= \frac{\pi\sqrt{k}(2m+1)}{2g(k+1)} = \frac{T_R^{(1)}(2m+1)}{4(k+1)} = \frac{\tilde{T}_R^{(1)}(2m+1)}{2(k+1)}, \\ t_{\text{dis}}^{d(1)} &= (4m+1)\frac{T_R}{8}, \quad t_{\text{dis}}^{d(2)} = (4m+3)\frac{T_R}{8}, \quad t_{\text{dis}}^{d(3)} = T_R m, \end{aligned}$$

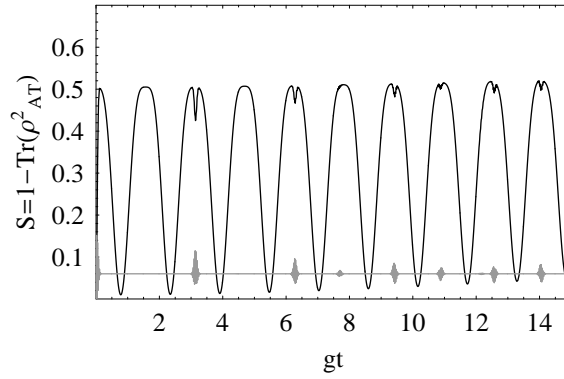


Рис. 1. Эволюция линейной энтропии (черная кривая) и вероятности обнаружить оба атома в возбужденном состоянии (серая кривая) для двухатомной модели с невырожденными двухфотонными переходами для начального атомного состояния  $|\Phi_S\rangle$  и  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$  ( $k = 1$ )

$$t_{\text{dis}}^{\text{Raman}} = \frac{\pi\sqrt{k}}{2g(k-1)} = \frac{T_R^{(1)}}{2(k-1)},$$

где  $T_R(\tilde{T}_R)$  – период основных (вспомогательных) осцилляций Раби атомных населенностей,  $k = \bar{n}_1/\bar{n}_2$  для невырожденных моделей,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Стоит отметить, что распутывание для выбранных начальных состояний подсистем в указанные моменты времени для модели с невырожденными рамановскими переходами происходит только для  $k > 1$ . Для модели с вырожденными двухфотонными переходами в моменты времени  $t_{\text{dis}}^{d(3)} = T_R m$  распутывание возникает для любых чистых начальных атомных состояний.

### 3. Динамика линейной энтропии для различных начальных состояний атомов и поля

Выводы о характере динамики перепутывания, сделанные на основании анализа вектора состояния системы, могут быть подтверждены при рассмотрении эволюции линейной атомной энтропии. Для рассматриваемых моделей линейная энтропия редуцированной атомной матрицы плотности имеет вид

$$\begin{aligned} S = 1 - \text{Tr}(\rho_{AT}^2) = & \\ = & \left[ \left( \sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} A_{n_f}^* \right)^2 + \left( \sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} B_{n_f}^* \right)^2 + \left( \sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} C_{n_f}^* \right)^2 + \left( \sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} D_{n_f}^* \right)^2 + \right. \\ & + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} B_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} A_{n_f}^* + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} D_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} C_{n_f}^* + \\ & + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} C_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} A_{n_f}^* + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} A_{n_f} D_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} A_{n_f}^* + \\ & \left. + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} C_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} C_{n_f} B_{n_f}^* + 2 \sum_{n_f=0}^{\infty} B_{n_f} D_{n_f}^* \sum_{n_f=0}^{\infty} D_{n_f} B_{n_f}^* \right], \end{aligned}$$

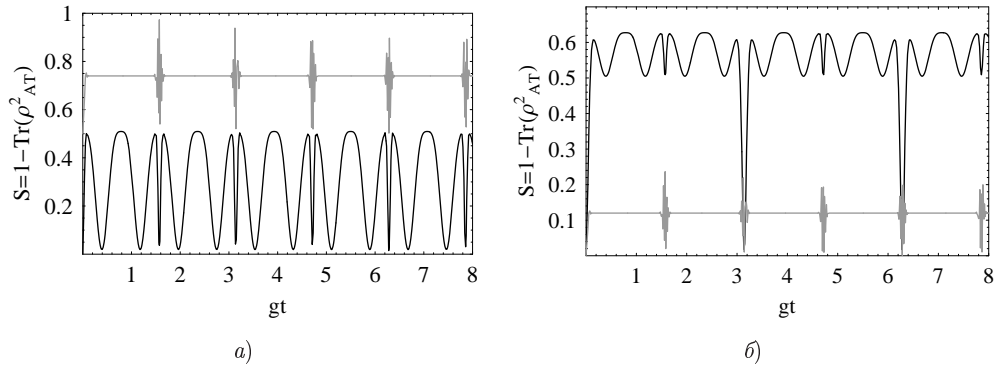


Рис. 2. Эволюция линейной энтропии (черная кривая) и вероятности обнаружить оба атома в возбужденном состоянии (серая кривая) для двухатомной модели с вырожденными двухфотонными переходами для начального атомного состояния: а)  $|\Phi_S\rangle$ ; б)  $|+,-\rangle$  и  $\bar{n} = 50$

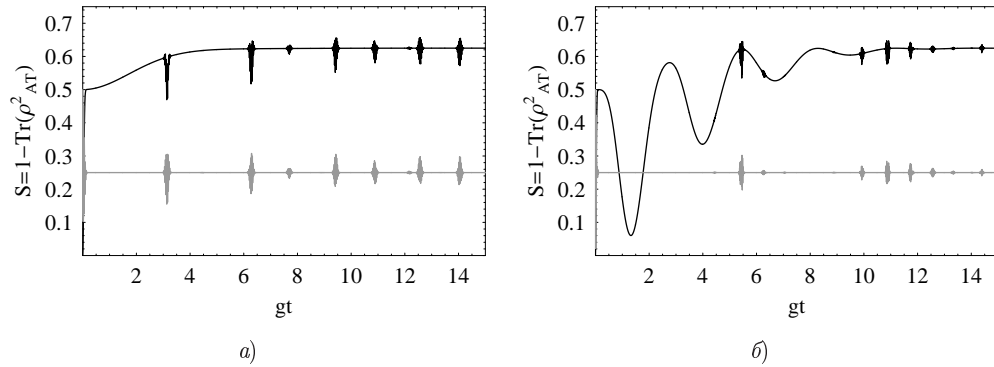


Рис. 3. Эволюция линейной энтропии (черная кривая) и вероятности обнаружить оба атома в возбужденном состоянии (серая кривая) для двухатомной модели с вырожденными двухфотонными переходами для начального атомного состояния  $|\Phi_S\rangle$  и (а)  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$  ( $k = 1$ ); (б)  $\bar{n}_1 = 150$ ,  $\bar{n}_2 = 50$  ( $k = 3$ )

где  $n_f = n_1, n_2$  для невырожденных моделей и  $n_f = n$  для вырожденной. Значение линейной энтропии  $S = 0$  соответствует распутанному состоянию,  $S = 3/4$  – максимальному перепутыванию атомов с полем.

На рис. 1–3 представлена эволюция линейной энтропии для рассматриваемых моделей в случае когерентного начального состояния поля большой интенсивности и различных чистых начальных атомных состояний. Для наглядности на графиках серым цветом приведена вероятность обнаружить оба атома в возбужденном состоянии.

Для двухатомной модели с невырожденными двухфотонными переходами линейная энтропия стремится к нулю в моменты времени, описываемые выражением для  $t_{\text{dis}}^{nd}$ , что соответствует наличию распутывания состояний в системе (см. рис. 1). Для коллективной модели с вырожденными двухфотонными переходами распутывание наблюдается для любых начальных чистых атомных состояний в моменты времени  $t_{\text{dis}}^{d(3)}$  (рис. 2, б), а для чистых атомных состояний  $|\Phi_S\rangle$  и  $|\Phi_B\rangle$  график линейной энтропии демонстрирует наличие трех серий распутываний, соответствующих временам  $t_{\text{dis}}^{d(1)}$ ,  $t_{\text{dis}}^{d(2)}$  и  $t_{\text{dis}}^{d(3)}$  (рис. 2, а).

В модели Тэвиса – Каммингса с невырожденным рамановским взаимодействием линейная энтропия не обращается в нуль в случае, когда поле в начальный момент времени приготовлено в когерентном состоянии с равным большим числом фотонов в обеих модах и любых чистых начальных состояний атомов, то есть система после начала эволюции всегда находится в сильно перепутанном состоянии (см. рис. 3, *a*). Если же атомы приготовлены в одном из состояний  $|\Phi_S\rangle$  или  $|\Phi_B\rangle$ , то в моменты времени  $t_{\text{dis}}^{\text{Raman}}$  линейная энтропия стремится к нулю, то есть состояния атомов и поля «распутываются» (рис. 3, *b*).

### Summary

*M.S. Rusakova, E.K. Bashkirov, E.Yu. Sochkova.* About Atom-Field Entanglement in Two-Photon Tavis–Cummings Models.

The characteristic properties of atom-field entanglement in various two-photon Tavis–Cummings models are considered both in terms of wave function dynamics and linear entropy dynamics for several initial pure atomic states and a strong coherent field. The expressions for disentanglement times are found for each model. The initial pure atomic states, which are necessary for the disentanglement of subsystem states, are determined.

**Key words:** atom-field entanglement, linear entropy, disentanglement time, wave function dynamics, two-photon Tavis–Cummings model, Raman interaction, nondegenerate two-photon interaction, degenerate two-photon model.

### Литература

1. *Баумейстер Д., Экерт Ф., Цайлингер А.* Физика квантовой информации. – М.: Постмаркет, 2002. – 376 с.
2. *Dell’Anno F., De Siena S., Illuminati F.* Multiphoton quantum optics and quantum state engineering // *Phys. Rep.* – 2006. – V. 428 – P. 53–168.
3. *Phoenix S.J.D., Knight P.L.* Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes–Cummings model // *Phys. Rev. A.* – 1991. – V. 44, No 9. – P. 6023–6029.
4. *Gea-Banacloche J.* Atom- and field-state evolution in the Jaynes–Cummings model for large initial fields // *Phys. Rev. A.* – 1991. – V. 44, No 9. – P. 5913–5931.

Поступила в редакцию  
04.12.09

**Русакова Маргарита Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры информатики и вычислительной математики Самарского государственного университета.

E-mail: *ruta@ssu.samara.ru*

**Башкиров Евгений Константинович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.

E-mail: *bash@ssu.samara.ru*

**Сочкова Екатерина Юрьевна** – аспирант кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.