

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ С УЧЕТОМ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

В.Н. Алексеев¹, М.В. Васильева¹, В.И. Васильев¹, Н.И. Сидняев²

¹*Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
г. Якутск, 677000, Россия*

²*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
г. Москва, 105005, Россия*

Аннотация

Рассмотрена математическая модель и численный метод решения свободной конвекции с учетом кристаллизации поровой влаги. Математическая модель содержит уравнения с частными производными для температуры, скорости и давления. Течение жидкости, в предположении малых скоростей движения, описывается уравнениями Стокса, где учет фазового перехода жидкости в лед реализуется с помощью метода фиктивных областей посредством введения дополнительного слагаемого, отвечающего за течение в мерзлом грунте с малым коэффициентом проницаемости. Для численного решения поставленной задачи моделирования мультифизического процесса в сложных геометрических областях используется разрывный метод конечных элементов на неструктурированных расчетных сетках. Метод фиктивных областей для задачи течения позволяет проводить расчет на фиксированной расчетной сетке. Представлены результаты численного решения двумерной задачи для трех тестовых геометрических областей.

Ключевые слова: математическое моделирование, тепломассоперенос, фазовый переход, течение и перенос, метод фиктивных областей, метод конечных элементов

Введение

Задачи тепломассопереноса с фазовым переходом имеют огромное значение для Северных регионов. Освоение значительной части территории России имеет ряд специфических особенностей, обусловленных суровыми климатическими условиями и учетом наличия толщи многолетнемерзлых горных пород. Проведение теплофизических расчетов является необходимым при строительстве зданий и инженерных сооружений на многолетнемерзлых основаниях, прокладке нефте- и газопроводов, строительстве железнодорожных путей и автодорог в условиях криолитозоны. Отметим также, что при строительстве геотехнических сооружений в сложных климатических условиях необходимо соблюдение требований экологической и промышленной безопасности. Для прогнозирования температурного состояния пород необходимы разработка новых математических моделей с учетом специфики конкретной прикладной задачи и проведение численных расчетов с использованием современных вычислительных технологий.

Процессы, происходящие в криолитозоне, отличаются мультифизичной и многомасштабной природой, для их описания необходимо строить современные математические модели тепломассопереноса с учетом сезонных фильтрационных и криогенных процессов и деформаций, а также колебаний климатических условий

и моделируемых эксплуатационных параметров. Более того, процессы тепломассообмена в криолитозоне характеризуются разномасштабной природой как моделируемых объектов, так и происходящих изменений. Разномасштабная и мультифизическая природа рассматриваемых процессов требует построения новых математических моделей, современных эффективных вычислительных алгоритмов для их численного исследования. Разработка последних должна проводиться в связке с конкретными прикладными задачами в условиях криолитозоны.

В работе рассматривается мультифизическая математическая модель свободной конвекции, течения и переноса тепла, описываемая системой дифференциальных уравнений с частными производными. Течение поровой влаги в предположении о малых скоростях течения [1, 2] описывается уравнениями Стокса. Основной особенностью рассматриваемой модели является учет кристаллизации поровой влаги. Для моделирования переноса тепла используется модель Стефана с динамически неоднородными коэффициентами теплопередачи и теплопроводности, зависящими как от текущего положения границы фазового перехода, так и от конвективного переноса тепла [3–7]. Для моделирования течения в талом и мерзлом грунтах используется метод фиктивных областей, позволяющий проводить расчет задачи без перестроения расчетной области и сетки [8, 9]. В предложенном методе в подобласти талой зоны используется классическая модель Стокса, а в динамически меняющейся области мерзлой зоны вводится искусственное слагаемое, аналогичное правой части закона Дарси с очень малым коэффициентом фильтрации. Отметим, что рассматриваемая модель аналогична модели Бринкмана, используемого при моделировании задач фильтрации на уровне пор [10, 11]. В настоящей работе рассматриваются два численных примера: 1) область с замораживающими элементами и 2) замораживание области с неоднородными непроницаемыми включениями (процессы фильтрации на уровне пор). Для их численного решения строится дискретная задача с помощью неявной разностной дискретизации по времени и последовательного решения связанной задачи течения и переноса. Для аппроксимации по пространственным переменным используется разрывный метод Галеркина как для температуры, так и для течения [12, 13]. Вычислительная реализация осуществлена с использованием свободно распространяемой конечно-элементной библиотеки FEniCS [14].

В первой части работы представлена математическая модель тепломассообмена с фазовым переходом для задач со свободной конвекцией, представляющая собой связанную систему уравнений для переноса тепла и течения жидкости с учетом гравитационных сил и изменения плотности воды от температуры. Перенос тепла описывается задачей Стефана, а течение жидкости – уравнениями Стокса с дополнительным слагаемым, учитывающим кристаллизацию поровой влаги. Во второй части работы строится конечно-элементная аппроксимация задачи и представлен вычислительный алгоритм. В третьей части представлены результаты численного решения модельных задач в двумерной постановке для нескольких геометрических областей. В конце работы приведены выводы.

1. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель переноса тепла в промерзающих грунтах. Предположим, что кристаллизация поровой влаги происходит при заданной постоянной температуре T^* на поверхности S , разделяющей область Ω на подобласти талой и мерзлой грунтов $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup S$, где

$$\Omega^+ = \{x : x \in \Omega, T(x, t) \geq T^*\}, \quad \Omega^- = \{x : x \in \Omega, T(x, t) < T^*\}.$$

Классическая модель (модель Стефана) распространения тепла в грунте описывается уравнением

$$(\alpha(\phi) + \rho^+ L \phi') \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^+ u \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda(\phi) \nabla T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

где L – удельная теплота фазового перехода, u – скорость течения, T – температура, α – коэффициент объемной теплоемкости, λ – коэффициент теплопроводности, ϕ – поглощение тепла при кристаллизации воды на границе раздела талой и мерзлой грунтов ($\phi' = d\phi/dT$)

$$\phi = \phi(T) = \begin{cases} 0, & T < T^*, \\ \frac{1}{2}, & T = T^*, \\ 1, & T > T^*. \end{cases} \quad (2)$$

Для коэффициентов теплоемкости и теплопроводности имеем соотношения $\alpha(\phi) = \alpha^- + \phi(\alpha^+ - \alpha^-)$, $\lambda(\phi) = \lambda^- + \phi(\lambda^+ - \lambda^-)$, где $\alpha^{-/+} = \rho^{-/+} c^{-/+}$, ρ^+ , c^+ и ρ^- , c^- – плотность и удельная теплоемкость талого и мерзлого грунтов соответственно.

Для аппроксимации задачи рассмотрим следующую ее модификацию. Предполагаем, что фазовый переход происходит в малом интервале температуры $[T^* - \Delta, T^* + \Delta]$ и вместо индикатора ϕ возьмем ее кусочно-линейное приближение ϕ_Δ следующего вида:

$$\phi_\Delta(T) = \begin{cases} 0, & T \leq T^* - \Delta, \\ \frac{T - T^* + \Delta}{2\Delta}, & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta, \\ 1, & T \geq T^* + \Delta, \end{cases} \quad (3)$$

$$\phi'_\Delta(T) = \begin{cases} 0, & T \leq T^* - \Delta, \\ \frac{1}{2\Delta}, & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta, \\ 0, & T \geq T^* + \Delta. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) в области Ω примет вид

$$(\alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L \phi'_\Delta) \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha^+ u \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda(\phi_\Delta) \nabla T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (4)$$

Зададим начальное условие $T(x, 0) = T_0$, $x \in \Omega$, и граничные условия $\nabla T \cdot n = 0$, $x \in \Gamma_N$, $T(x, t) = g_H$, $x \in \Gamma_H$, $T(x, t) = g_C$, $x \in \Gamma_C$, $t > 0$, где $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_H \cup \Gamma_C$.

Для определения скорости течения жидкости рассмотрим движение несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса

$$\rho(T) \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla p - Au = R(T), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega,$$

где μ – вязкость, p – давление, u – скорость, правая часть уравнения R учитывает движение жидкости за счет гравитационных сил и изменения плотности воды от температуры по формуле $R(T) = (\rho(T) - \rho_0)g$, где g – ускорение свободного падения.

Уравнение (5) дополняется начальным условием $u = u_0$ ($t = 0, x \in \Omega$) и граничным условием непротекания на $\partial\Omega$.

Для численного решения задачи течения без перестроения расчетной сетки используем метод фиктивных областей, который основывается на переходе к решению задачи в более широкой области. В данной модели для учета фазового перехода вводится дополнительное слагаемое с коэффициентом A вида

$$A(\phi) = -C \frac{(1 - \phi)^2}{\phi^3 + b},$$

где C – коэффициент для учета морфологии жидкой фазы, b – достаточно малая положительная константа для того, чтобы избежать вырождение (деления на нуль).

2. Аппроксимация задачи

Полученная система уравнений (4), (5) является связанной и нелинейной. Для аппроксимации по времени построим неявную разностную схему с шагом по времени τ , \tilde{T} и \tilde{u} – решения с предыдущего временного слоя. Для численного решения будем использовать последовательный алгоритм вида

- решаем уравнение переноса тепла

$$(\alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L \phi'_\Delta) \frac{T - \tilde{T}}{\tau} + \alpha^+ \tilde{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda(\phi_\Delta) \nabla T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

- решаем уравнение течения поровой влаги

$$\begin{aligned} \rho(T) \frac{u - \tilde{u}}{\tau} + \mu \Delta u - \nabla p + Au = R(T), \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что нелинейные коэффициенты уравнения теплопроводности брались с предыдущего временного слоя.

Для аппроксимации уравнений переноса тепла и течения воспользуемся разрывным методом Галеркина (IPDG). Пусть T^h – триангуляция вычислительной области Ω , а Γ^h – множество всех граней между элементами T^h . На ребре $E \in \Gamma^h$ между элементами K_1 и K_2 определим среднее значение и скачок функции u

$$\{u\} = \frac{u|_{K_1} + u|_{K_2}}{2}, \quad [u] = u|_{K_1} - u|_{K_2}.$$

Таким образом, для уравнения переноса тепла получим следующую вариационную постановку: найти $T \in W$ такую, что

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T^h} \int_K (\alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L \phi'_\Delta) \frac{T - \tilde{T}}{\tau} r \, dx + \sum_{K \in T^h} \int_K \tilde{u} \cdot \nabla T r \, dx + \\ + \sum_{K \in T^h} \int_K \lambda(\phi_\Delta) \nabla T \cdot \nabla r \, dx + \sum_{E \in \Gamma^h} \int_E [T^{n+1} \tilde{u} \cdot n] [r] \, ds - \\ - \sum_{E \in \Gamma^h} \int_E \{\lambda \nabla r\} \cdot [T^{n+1} n] \, ds - \sum_{E \in \Gamma^h} \int_E \{\lambda \nabla T^{n+1}\} \cdot [r n] \, ds + \\ + \sum_{E \in \Gamma^h} \int_E \{\lambda\} \frac{\gamma_T}{h} \cdot [T^{n+1} n] [r n] \, ds = 0 \quad \forall r \in W_0, \quad (8) \end{aligned}$$

где γ_T – параметр штрафа, n – внешняя нормаль к грани E ,

$$W = \{r \in H^1(\Omega) : r = g_H \text{ на } \Gamma_H, r = g_C \text{ на } \Gamma_C\},$$

$$W_0 = \{r \in H^1(\Omega) : r = 0 \text{ на } \Gamma_H \cup \Gamma_C\}.$$

Для решения уравнений Стокса используем смешанный метод конечных элементов, в итоге получим следующую вариационную формулировку: найти $(u, p) \in V \times Q$ такие, что

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in T^h} \int_K \rho \frac{u - \check{u}}{\tau} v \, dx + \sum_{K \in T^h} \int_K \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \sum_{K \in T^h} \int_K p \nabla \cdot v \, dx + \\ & + \sum_{K \in T^h} \int_K A u v \, dx + \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E \{p\} [u \cdot n] \, ds - \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E [\mu u \cdot n] \{v\} \, ds - \\ & - \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E \{\mu v \cdot n\} [u] \, ds + \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E \{\mu\} \frac{\gamma u}{h} [u] [v] \, ds = \int_{\Omega} S v \, dx, \quad v \in V, \\ & \sum_{K \in T^h} \int_K \nabla \cdot u \, dx + \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E \{q\} [u \cdot n] \, ds = 0, \quad q \in Q, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$V = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 : v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}, \quad Q = L^2(\Omega).$$

Вычислительная реализация построена с использованием библиотеки FEniCS [14]. Геометрические области и расчетные сетки построены с помощью свободной программы Gmsh [15].

3. Численные результаты

Рассмотрим численное моделирование модельных двумерных задач с использованием предложенной математической модели и численного метода. Проведем численное моделирование для следующих тестовых задач:

- единичный квадрат (см. первую область на рис. 1),
- область с замораживающими элементами (см. вторую и третью области на рис. 1),
- замораживание области с неоднородными непроницаемыми включениями (процессы фильтрации на уровне пор, см. четвертую и пятую области на рис. 1).

На рис. 1 представлены результаты расчетов, проводившихся при следующих параметрах:

Геометрия 1: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, расчетная сетка содержит 4240 треугольных ячеек, 6440 граней и 2201 узел;

Геометрия 2: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с вырезанной справа областью замораживающего элемента (толщина 0.1 и высота 0.6), расчетная сетка содержит 11562 треугольные ячейки, 17479 граней и 5918 узлов;

Геометрия 3: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с вырезанной справа и слева областями замораживающих элементов (толщина 0.1 и высота 0.6), расчетная сетка содержит 11730 треугольных ячеек, 17732 грани и 6003 узла;

Геометрия 4: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с неоднородными непроницаемыми включениями (20 шт., гранулы грунта), расчетная сетка содержит 3788 треугольных ячеек, 5722 грани и 1935 узлов;

Геометрия 5: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ с неоднородными непроницаемыми включениями (30 шт., гранулы грунта), расчетная сетка содержит 8202 треугольных ячейки, 12383 грани и 4182 узла.

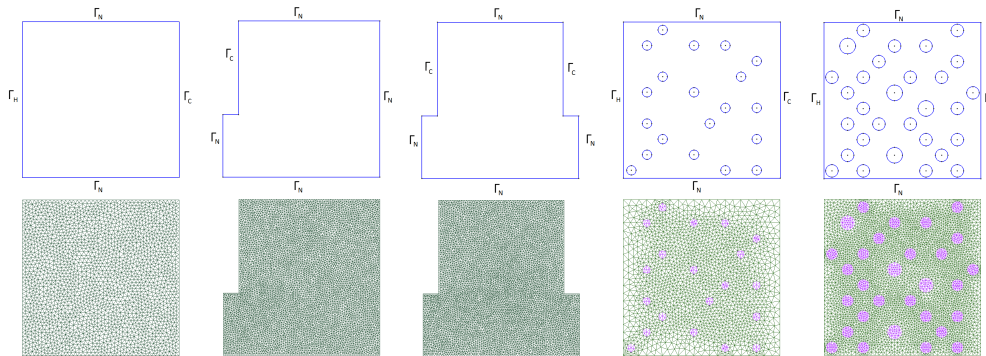


Рис. 1. Расчетная область (сверху) и расчетная сетка (снизу). Геометрии 1, 2, 3, 4 и 5 (слева направо)

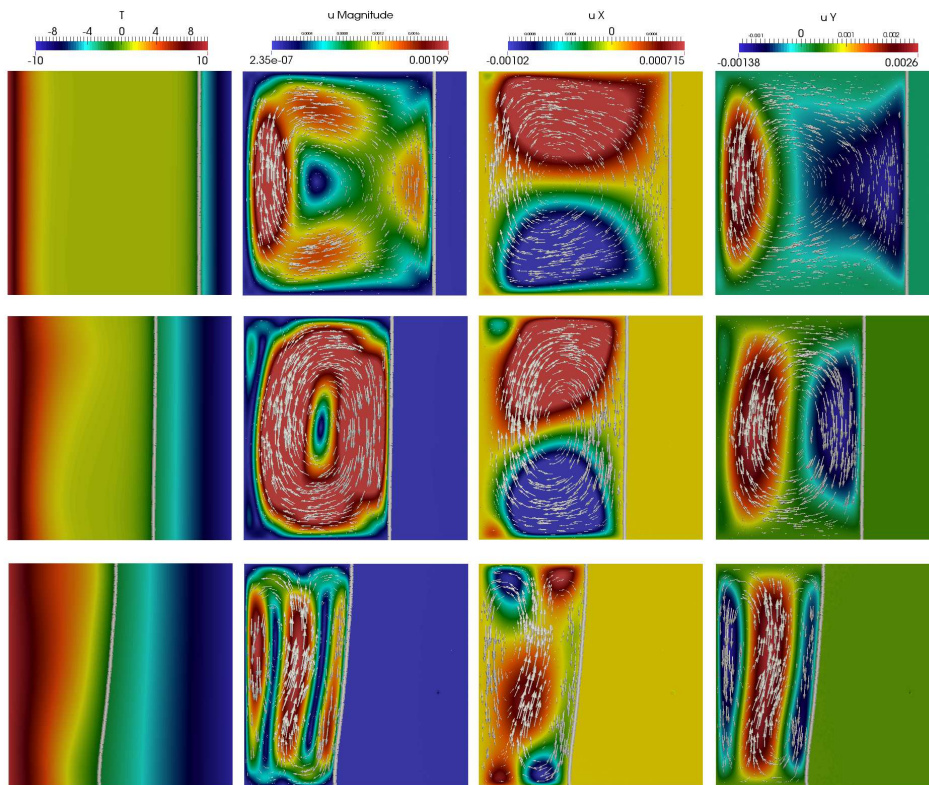


Рис. 2. Распределение температуры и поле скоростей в разные моменты времени $t = 20$, $t = 80$, $t = 200$ (сверху вниз). Геометрия 1. Первая колонка: температура T . Вторая, третья и четвертая колонки: магнитуды скорости X и Y , компоненты скорости u_x , u_y

Численное моделирование проводилось при следующих параметрах исходных данных математической модели: $\mu = 0.001$ [Па·с], $L = 335000$ [Дж/кг], $c^+ = 4202$ [Дж/кг·°С], $c^- = 2116$ [Дж/кг·°С], $\rho^+ = 999.84$ [кг/м³], $\rho^- = 916.8$ [кг/м³], $k^+ = 560$ [Вт/м·°С], $k^- = 2260$ [Вт/м·°С], $\delta = 2$ [°С], $T^* = 0$ [°С], $b = 10^{-6}$, $C = 1.0$. Проводился расчет при $t_{\max} = 200$ сек с временным шагом $\tau = 0.25$ с.

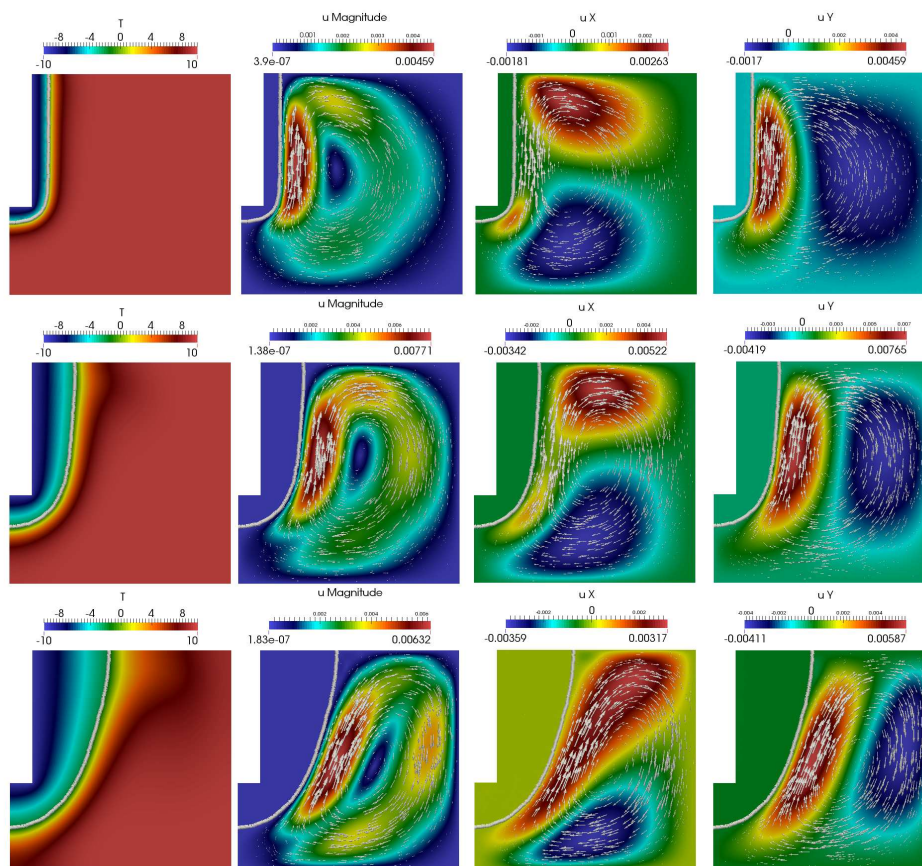


Рис. 3. Распределение температуры и поле скоростей в разные моменты времени $t = 20, t = 80, t = 200$ (сверху вниз). Геометрия 2. Первая колонка: температура T . Вторая, третья и четвертая колонки: магнитуды скорости X и Y , компоненты скорости u_m, u_X, u_Y

Начальная температура $T_0 = 1^\circ\text{C}$. Температура левой стенки поддерживается при $T_l = 10^\circ\text{C}$, и правая стенка поддерживается при температуре $T_r = -10^\circ\text{C}$ для Геометрий 1, 4, 5.

Начальная температура $T_0 = 10^\circ\text{C}$. Температура замораживающего элемента $T_f = -10^\circ\text{C}$ для Геометрий 2, 3.

Нелинейная зависимость плотности воды от температуры описывается эмпирической формулой

$$\begin{aligned} \rho^+(T) = & 999.840281167 + \\ & + 0.00673268037314 \cdot T - 0.00894484552601 \cdot T^2 + \\ & + 8.78462866500 \cdot 10^{-5} \cdot T^3 + 6.62139792627 \cdot 10^{-7} \cdot T^4 \end{aligned}$$

Численные результаты представлены на рис. 2–6. Белой линией обозначена граница температуры фазового перехода.

На рис. 2 приведено распределение температуры и поле скоростей для единичной области (Геометрия 1). На левой стенке поддерживается температура $T_l = 10^\circ\text{C}$, на правой стенке $T_r = -10^\circ\text{C}$. С течением времени область с правой

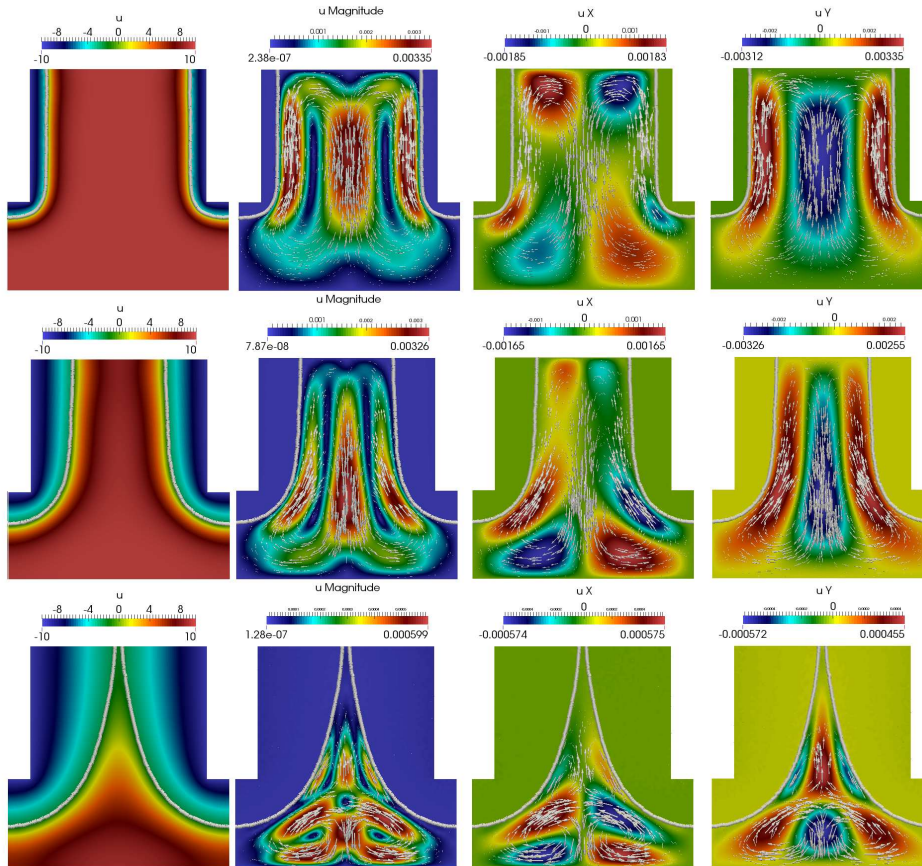


Рис. 4. Распределение температуры и поле скоростей в разные моменты времени $t = 20$, $t = 80$, $t = 200$ (сверху вниз). Геометрия 3. Первая колонка: температура T . Вторая, третья и четвертая колонки: магнитуды скорости X и Y , компоненты скорости u_m , u_X , u_Y

стороны начинает замерзать, а с левой – нагреваться. Движение жидкости возникает за счет действия гравитации и изменения температуры. В области мерзлой зоны видно, что движение жидкости отсутствует.

На рис. 3, 4 изображены распределения температуры и поля скоростей для областей с замораживающими элементами. На границе вырезанной справа области замораживающего элемента для Геометрии 2 и на границе, вырезанной справа и слева областей замораживающего элемента для Геометрии 3 поддерживается температура $T_f = -10^\circ\text{C}$. На рис. 3 движение жидкости начинает возникать справа от границы фазового перехода. На рис. 4 при $t = 200$ замерзает вся верхняя область и две границы фазового перехода пересекаются между собой.

На рис. 5, 6 показаны распределения температуры и поля скоростей для областей с непроницаемыми включениями. Кружки представляют собой гранулы грунта, в Геометрии 4 содержится 20 включений одинакового размера, а в Геометрии 5 содержится 30 гранул грунта с разными размерами. Так же, как и для первой тестовой задачи, на левых и правых стенках подаются температуры $T_l = 10^\circ\text{C}$ и $T_r = -10^\circ\text{C}$. Результаты температуры немного похожи на результат температуры для первой геометрической модели. Здесь коэффициенты теплопро-

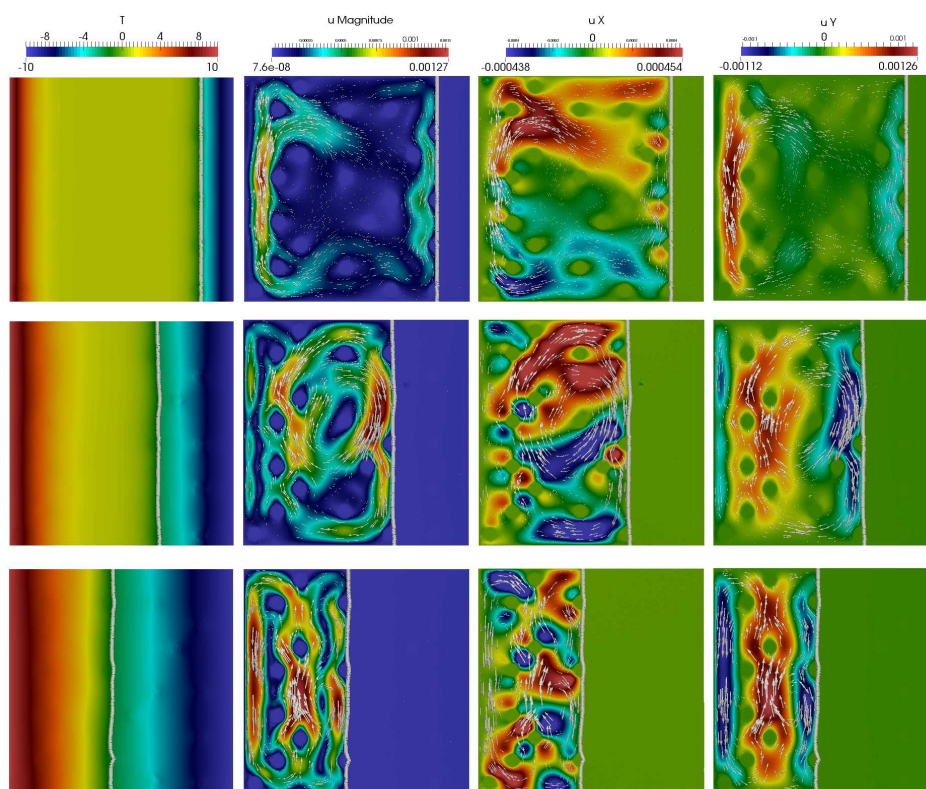


Рис. 5. Распределение температуры и поле скоростей в разные моменты времени $t = 20, t = 80, t = 200$ (сверху вниз). Геометрия 4. Первая колонка: температура T . Вторая, третья и четвертая колонки: магнитуды скорости X и Y , компоненты скорости u_x, u_y

водности вне кружков и внутри кружков разные. Кружки для скорости являются препятствием, в них течения нет. С течением времени область начинает замерзать и в ней движение поровой влаги отсутствует.

Заключение

В работе рассмотрены двумерные задачи свободной конвекции с фазовым переходом в неоднородной области. Для численного решения построены схемы аппроксимации на основе последовательного решения и разрывного метода Галеркина. Представлены результаты численного решения задач с фазовым переходом с учетом гравитации в двумерной постановке для нескольких тестовых геометрических областей.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00230).

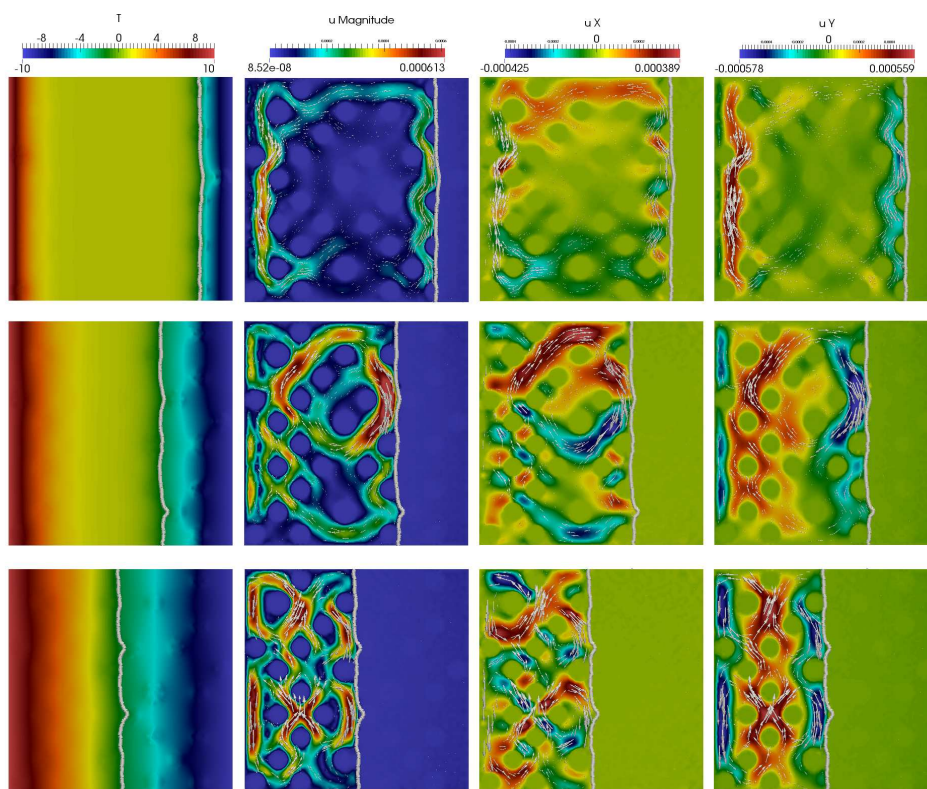


Рис. 6. Распределение температуры и поле скоростей в разные моменты времени $t = 20$, $t = 80$, $t = 200$ (сверху вниз). Геометрия 5. Первая колонка: температура T . Вторая, третья и четвертая колонки: магнитуды скорости X и Y , компоненты скорости u_x , u_y

Литература

1. Chung E.T., Leung W.T., Vasilyeva M., Wang Y. Multiscale model reduction for transport and flow problems in perforated domains // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – V. 330, No 2. – P. 519–535. – doi: 10.1016/j.cam.2017.08.017.
2. Алексеев В.Н., Васильева М.В., Степанов С.П. Итерационные методы решения для задачи течения и переноса в перфорированных областях // Вестн. Сев.-Вост. фед. ун-та им. МК Аммосова. – 2016. – № 5. – С. 67–79.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 784 с.
4. Васильев В.И., Сидняев Н.И., Федотов А.А., Ильина Ю.С., Васильева М.В., Степанов С.П. Моделирование распределения нестационарных температурных полей в криолитозоне при проектировании геотехнических сооружений. – М.: Курс. 2017. – 624 с.
5. Вабищевич П.Н., Васильева М.В., Павлова Н.В. Численное моделирование термостабилизации фильтрующих грунтов // Матем. моделирование. – 2014. – Т. 26, № 9. – С. 111–125.
6. Вабищевич П.Н., Васильева М.В., Горнов В.Ф., Павлова Н.В. Математическое моделирование искусственного замораживания грунтов // Вычисл. технологии. – 2014. – Т. 19, № 4. – С. 19–31.

7. *Pavlova N.V., Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V.* Mathematical modeling of thermal stabilization of vertical wells on high performance computing systems // Lirkov I., Margenov S., Wasniewski J. (Eds.) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2013. Lecture Notes in Computer Science, V. 8353. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2013. – P. 636–643. – doi: 10.1007/978-3-662-43880-0_73.
8. *Belhamadia Y., Kane A.S., Fortin A.* A mixed finite element formulation for solving phase change problems with convection // Proc. 20th Annual Conf. of the CFD Society of Canada. – 2012. – URL: http://www.sinmec.ufsc.br/dihlmann/MALISKA/proceedings_cfd_society_of_canada_conference_may_2012/papers/Belhamadia_Kane_Fortin.pdf/.
9. *Вабичевич П.Н.* Метод фиктивных областей в задачах математической физики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 156 с.
10. *Iliev O., Lakdawala Z., Starikovicius V.* On a numerical subgrid upscaling algorithm for Stokes–Brinkman equations // Comput. Math. Appl. – 2013. – V. 65, No 3. – P. 435–448. – doi: 10.1016/j.camwa.2012.05.011.
11. *Iliev O.P., Lazarov R.D., Willems J.* Discontinuous Galerkin subgrid finite element method for heterogeneous Brinkman’s equations // Lirkov I., Margenov S., Wasniewski J. (Eds.) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2009. Lecture Notes in Computer Science, V. 5910. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. – P. 14–25. – doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_2.
12. *Stepanov S., Vasilyeva M., Vasil’ev V.I.* Generalized multiscale discontinuous Galerkin method for solving the heat problem with phase change // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – V. 340 – P. 645–652. – doi: 10.1016/j.cam.2017.12.004.
13. *Chung E.T., Efendiev Y., Vasilyeva M., Wang Y.* A multiscale discontinuous Galerkin method in perforated domains // Proc. Inst. Math. Mech. – Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb., 2016. – V. 42, No 2. – P. 212–229.
14. *Logg A., Mardal K.A., Wells G.* Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. – XIII, 731 p. – doi: 10.1007/978-3-642-23099-8
15. *Geuzaine C., Remacle J.F.* Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2009. – V. 79, No 11. – P. 1309–1331. – doi: 10.1002/nme.2579.

Поступила в редакцию
10.06.19

Алексеев Валентин Николаевич, аспирант кафедры «Вычислительные технологии»

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия
E-mail: alekseev.valen@mail.ru

Васильева Мария Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительные технологии»

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия
E-mail: vasilyevadotmdotv@gmail.com

Васильев Василий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительные технологии»

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия
E-mail: vasvasil@mail.ru

Сидняев Николай Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика»

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, г. Москва, 105005, Россия

E-mail: *sidnyaev@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 3, pp. 327–340

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.327-340

Numerical Simulation of Natural Convection in a Freezing Soil

V.N. Alekseev^{a}, M.V. Vasilyeva^{a**}, V.I. Vasilyev^{a***}, N.I. Sidnyaev^{b****}*

^a*M.K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677000 Russia*

^b*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

E-mail: * *alekseev.valen@mail.ru*, ** *vasilyevadotmdotv@gmail.com*,

*** *vasvasil@mail.ru*, **** *sidnyaev@yandex.ru*

Received June 10, 2019

Abstract

A mathematical model and a numerical method for solving the natural convection and crystallization of pore moisture were considered. The mathematical model contains partial differential equations for temperature, velocity, and pressure. The fluid flow, under the assumption of low velocities, was described by the Stokes equations, where the phase transition of the liquid into ice was taken into account using the fictitious domain method by introducing an additional term responsible for the flow in frozen ground with a low permeability coefficient. The discontinuous finite element method on unstructured computational meshes was used for the numerical solution of the problem of modeling a multiphysical process in complex geometric domains. The fictitious domain method for the flow problem enables to carry out calculations on a fixed computational grid. The results of the numerical solution of the two-dimensional problem for three test geometric domains were presented.

Keywords: mathematical modeling, heat and mass transfer, phase transition, flow and transport, fictitious domain method, finite element method

Acknowledgments. The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00230).

Figure Captions

Fig. 1. The computational domain (top) and the computational grid (bottom). Geometries 1, 2, 3, 4, and 5 (from left to right).

Fig. 2. The temperature distribution and the velocity field at different points in time $t = 20, 80, 200$ (from top to bottom). *Geometry 1*. First column: temperature, T . Second, third, and fourth columns: velocity magnitude, X and Y velocity components, u_m , u_X , u_Y .

Fig. 3. The temperature distribution and the velocity field at different points in time $t = 20, 80, 200$ (from top to bottom). *Geometry 2*. First column: temperature, T . Second, third, and fourth columns: velocity magnitude, X and Y velocity components, u_m, u_X, u_Y .

Fig. 4. The temperature distribution and the velocity field at different points in time $t = 20, 80, 200$ (from top to bottom). *Geometry 3*. First column: temperature, T . Second, third, and fourth columns: velocity magnitude, X and Y velocity components, u_m, u_X, u_Y .

Fig. 5. The temperature distribution and the velocity field at different points in time $t = 20, 80, 200$ (from top to bottom). *Geometry 4*. First column: temperature, T . Second, third, and fourth columns: velocity magnitude, X and Y velocity components, u_m, u_X, u_Y .

Fig. 6. The temperature distribution and the velocity field at different points in time $t = 20, 80, 200$ (from top to bottom). *Geometry 5*. First column: temperature, T . Second, third, and fourth columns: velocity magnitude, X and Y velocity components, u_m, u_X, u_Y .

References

1. Chung E.T., Leung W.T., Vasilyeva M., Wang Y. Multiscale model reduction for transport and flow problems in perforated domains. *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, vol. 330, no. 2, pp. 519–535. doi: 10.1016/j.cam.2017.08.017.
2. Alekseev V.N., Vasilyeva M.V., Stepanov S.P. Iterative methods for solving the problem of transfer and flow in perforated domains. *Vestn. Sev.-Vost. Fed. Univ. im. M.K. Ammosova*, 2016, no. 5, pp. 67–79. (In Russian)
3. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, LIBROKOM, 2009. (In Russian)
4. Vasilyev V.I., Sidnyaev N.I., Fedotov A.A., Il'ina Yu.S., Vasilyeva M.V., Stepanov S.P. *Modelirovanie raspredeleniya nestatsionarnykh temperaturnykh polei v kriolitozone pri proektirovaniĭ geotekhnicheskikh sooruzhenii* [Modeling the Distribution of Non-Stationary Temperature Fields in the Permafrost Zone in the Design of Geotechnical Facilities]. Moscow, Kurs, 2017. 624 p. (In Russian)
5. Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V., Pavlova N.V. Numerical simulation of thermal stabilization of filter soils. *Math. Models Comput. Simul.*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 154–164. doi: 10.1134/S2070048215020106.
6. Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V., Gornov V.F., Pavlova N.V. Mathematical modeling of the artificial freezing of soils. *Vychisl. Tekhnol.*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 19–31. (In Russian)
7. Pavlova N.V., Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V. Mathematical modeling of thermal stabilization of vertical wells on high performance computing systems. In: Lirkov I., Margenov S., Wasniewski J. (Eds.) *Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2013. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 8353. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013, pp. 636–643. doi: 10.1007/978-3-662-43880-0_73.
8. Belhamadia Y., Kane A. S., Fortin A. A mixed finite element formulation for solving phase change problems with convection. *Proc. 20th Annu. Conf. of the CFD Society of Canada*, 2012. Available at: http://www.sinmec.ufsc.br/dihlmann/MALISKA/proceedings_cfd_society_of_canada_conference_may_2012/papers/Belhamadia_Kane_Fortin.pdf/.
9. Vabishchevich P.N. *Metod fiktivnykh oblastei v zadachakh matematicheskoi fiziki* [Fictitious Domain Method in Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1991. 156 p. (In Russian)
10. Iliev O., Lakdawala Z., Starikovicius V. On a numerical subgrid upscaling algorithm for Stokes-Brinkman equations. *Comput. Math. Appl.*, 2013, vol. 65, no. 3, pp. 435–448. doi: 10.1016/j.camwa.2012.05.011.

11. Iliev O.P., Lazarov R.D., Willems J. Discontinuous Galerkin subgrid finite element method for heterogeneous Brinkman's equations. In: Lirkov I., Margenov S., Wasniewski J. (Eds.) *Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2009. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 5910. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009, pp. 14–25. doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_2.
12. Stepanov S., Vasilyeva M., Vasil'ev V.I. Generalized multiscale discontinuous Galerkin method for solving the heat problem with phase change. *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, vol. 340, pp. 645–652. doi: 10.1016/j.cam.2017.12.004.
13. Chung E.T., Efendiev Y., Vasilyeva M., Wang Y. A multiscale discontinuous Galerkin method in perforated domains. *Proc. Inst. Math. Mech. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2016, vol. 42, no. 2, pp. 212–229.
14. Logg A., Mardal K.A., Wells G. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2012. XIII, 731 p. doi: 10.1007/978-3-642-23099-8.
15. Geuzaine C., Remacle J.F. Gmsh: A 3D finite element mesh generator with builtin preand postprocessing facilities. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2009, vol. 79, no. 11, pp. 1309–1331. doi: 10.1002/nme.2579.

Для цитирования: Алексеев В.Н., Васильева М.В., Васильев В.И., Сидняев Н.И. Численное моделирование свободной конвекции с учетом фазового перехода // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 327–340. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.327-340.

For citation: Alekseev V.N., Vasilyeva M.V., Vasilyev V.I., Sidnyaev N.I. Numerical simulation of natural convection in a freezing soil. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 327–340. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.327-340. (In Russian)