

Сибгатуллин Э.С., доктор физико-математических наук, профессор, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Сибгатуллин К.Э., кандидат технических наук, доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Новоселов О.Г., аспирант, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МАССИВОВ

Аннотация: Данная работа является развитием кинематического метода теории предельного равновесия. В рамках работы были рассмотрены изотропные тела, по-разному сопротивляющиеся растяжению и сжатию. С использованием жесткопластической модели деформируемого твердого тела, соотношений теории пластического течения и гипотез кинематического характера, получены параметрические уравнения предельной поверхности для конечного элемента в форме прямоугольной призмы. Массивные элементы конструкций предложено разбить на объемные абсолютно жесткие конечные элементы (АЖКЭ), которые имеют, в общем случае, произвольную форму и шесть степеней свободы в трехмерном пространстве. Процесс разрушения тела идет по бесконечно тонким поверхностям между соседними АЖКЭ. Задача сведена к стандартной задаче линейного программирования, которая решается с использованием симплекс-метода.

Ключевые слова: массивные тела, параметрические уравнения предельной поверхности, прочность, трехмерное напряженное состояние, предельная несущая способность.

Пространственные задачи механики деформируемого твердого тела имеют место, когда все три измерения тела (ширина, высота, длина) являются величинами одного порядка (например, при проектировании массивных фундаментов под тяжелое промышленное оборудование, при определении несущей способности грунтовых массивов и т.п.). Определение несущей способности массивных элементов конструкций, оставаясь при этом в пространствах напряжений σ_{ik} ($i, k = \overline{1,3}$) и деформаций ε_{ik} , является трудной задачей даже при использовании современной мощной вычислительной техники. В настоящей работе предложено представить массивное тело как

совокупность КЭ в виде прямоугольных призм и тетраэдров. Выведены уравнения для вычисления предельных комбинаций внутренних сил T_{ik} и моментов M_{ik} , действующих на грани этих элементов. Приведены примеры расчетов.

Вывод параметрических уравнений предельной поверхности для КЭ в форме прямоугольной призмы в пространстве T_{ik} и M_{ik} .

Параметрические уравнения предельной поверхности в пространстве T_{ik} и M_{ik} для изотропных оболочек впервые приведены в работе А.А. Ильюшина [1, с.375]. В дальнейшем этот подход был развит в работах Г.С. Шапиро [2, с.504-507], А. Савчука [3, с.153-161], И.Г. Терегулова, Э.С. Сибгатуллина, О.А. Маркина [4, с.715-720] и др. Для массивных элементов аналогичные уравнения приведены в работе Э.С. Сибгатуллина., К.Ф. Исламова [5, с.5-13].

Уравнение предельной поверхности для материала в пространстве σ_{ik} имеет вид:

$$\Phi(\vec{\sigma}) \equiv (\vec{\sigma}^T A \vec{\sigma} + 2\vec{B}^T \vec{\sigma} - 1) = 0. \quad (1)$$

Здесь $A = \|a_{ik}\|$ - симметрическая матрица ($i, k = \overline{1,6}$), $\vec{B} = \{b_1, \dots, b_6\}^T$, $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_6\}^T$; индекс Т означает транспонирование. Между одинарными и двойными индексациями здесь и далее установлены следующие зависимости: $11 \rightarrow 1$; $22 \rightarrow 2$; $33 \rightarrow 3$; $12 \rightarrow 4$; $23 \rightarrow 5$; $31 \rightarrow 6$. Критерий прочности (1) является частным случаем критерия Малмейстера [6, с.519].

Используя ассоциированный с условием (1) закон изменения скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_i$ [7, с.420], находим:

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_i} \equiv 2\lambda(\vec{A}_i \vec{\sigma} + b_i), \quad i = \overline{1,6}. \quad (2)$$

Здесь $\lambda(\dot{\epsilon}_i) \geq 0$; \vec{A}_i - i -я строка матрицы A ; b_i - i -й элемент вектора \vec{B} . Решая систему уравнений (2) относительно σ_i , находим:

$$\sigma_i = \left[\left(\frac{1}{2\lambda} \right) \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \dot{\epsilon}_k - \Delta_i \right] / \Delta. \quad (3)$$

Здесь $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ – алгебраические дополнения элемента a_{ik} матрицы A ; Δ – детерминант матрицы A ; Δ_i – детерминант, который получен при замене i -го столбца Δ на вектор \vec{B} . Подставляя (3) в (1), получаем:

$$\dot{\lambda}^2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \dot{e}_i \dot{e}_k / S_{\Delta}. \quad (4)$$

Здесь $S_{\Delta} = 4 \sum_{i=1}^6 b_i \Delta_i + \Delta$.

Примем следующие гипотезы кинематического характера:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11} &= \dot{e}_{11} + \ddot{a}_{21} \xi_2 - \ddot{a}_{31} \xi_3; & \dot{e}_{12} &= 0.5(\dot{\gamma}_{12} - \ddot{a}_{11} \xi_3 + \ddot{a}_{22} \xi_3); \\ \dot{e}_{22} &= \dot{e}_{22} - \ddot{a}_{12} \xi_3 + \ddot{a}_{32} \xi_1; & \dot{e}_{23} &= 0.5(\dot{\gamma}_{23} - \ddot{a}_{22} \xi_1 + \ddot{a}_{33} \xi_1); \\ \dot{e}_{33} &= \dot{e}_{33} + \ddot{a}_{13} \xi_2 - \ddot{a}_{23} \xi_1; & \dot{e}_{31} &= 0.5(\dot{\gamma}_{31} - \ddot{a}_{33} \xi_2 + \ddot{a}_{11} \xi_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Начало подвижной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ располагается в центрах граней рассматриваемой прямоугольной призмы, а оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 параллельны соответствующим ребрам этой призмы. Скорости обобщенных перемещений $\dot{e}_{ik}, \ddot{a}_{ik}, \dot{\gamma}_{ik}$ постоянны в пределах рассматриваемой грани призмы. В соответствии с (5) грани прямоугольной призмы перемещаются поступательно и поворачиваются относительно соответствующих осей ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а также испытывают сдвиги.

Подставив (5) в (3), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{2\dot{\lambda}\Delta} \left\{ \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \dot{e}_k + \xi_1 [\delta_{i2} \ddot{a}_{32} - \delta_{i3} \ddot{a}_{23} + 0.5\delta_{i5} (\ddot{a}_{33} - \ddot{a}_{22})] \right. \\ &\quad + \xi_2 [\delta_{i1} \ddot{a}_{21} + \delta_{i3} \ddot{a}_{13} + 0.5\delta_{i6} (\ddot{a}_{11} - \ddot{a}_{33})] \\ &\quad \left. + \xi_3 [-\delta_{i1} \ddot{a}_{31} - \delta_{i2} \ddot{a}_{12} + 0.5\delta_{i4} (\ddot{a}_{22} - \ddot{a}_{11})] \right\} - \frac{\Delta_i}{\Delta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь приняты обозначения:

$$i = \overline{1,6}; \quad \dot{e}_1 \equiv \dot{e}_{11}; \quad \dot{e}_2 \equiv \dot{e}_{22}; \quad \dot{e}_3 \equiv \dot{e}_{33}; \quad \dot{e}_4 \equiv 0.5\dot{\gamma}_{12}; \quad \dot{e}_5 \equiv 0.5\dot{\gamma}_{23}; \quad \dot{e}_6 \equiv 0.5\dot{\gamma}_{31}.$$

Подставив (5) в (4), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^2 &= \frac{1}{S_{\Delta}} \left[P_e + 2 \left(\xi_1 P_{e\ddot{a}}^{\xi_1} + \xi_2 P_{e\ddot{a}}^{\xi_2} + \xi_3 P_{e\ddot{a}}^{\xi_3} + \xi_1 \xi_2 P_{\ddot{a}}^{\xi_1 \xi_2} + \xi_2 \xi_3 P_{\ddot{a}}^{\xi_2 \xi_3} + \xi_3 \xi_1 P_{\ddot{a}}^{\xi_3 \xi_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \xi_1^2 P_{\ddot{a}}^{\xi_1} + \xi_2^2 P_{\ddot{a}}^{\xi_2} + \xi_3^2 P_{\ddot{a}}^{\xi_3} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для изотропных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, уравнение (1) можно записать в виде:

$$(\sigma_{11} + c)^2 + (\sigma_{22} + c)^2 + (\sigma_{33} + c)^2 + 3d(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 1. \quad (8)$$

Здесь напряжения отнесены к σ_0 , имеющей размерность напряжений. С учетом (8) имеем:

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= 27d^3 \quad (i = \overline{1,3}); \delta_{ii} = 9d^2 \quad (i = \overline{4,6}); \delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k); \Delta = 27d^3; \\ \Delta_i &= 27cd^3 \quad (i = \overline{1,3}); \Delta_i = 9cd^2 \quad (i = \overline{4,6}); S_\Delta = (144c^2 + 27)d^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда в (7) имеем:

$$\begin{aligned} P_e &= 27d^3(\dot{e}_{11}^2 + \dot{e}_{22}^2 + \dot{e}_{33}^2) + 2.25d^2(\dot{\gamma}_{12}^2 + \dot{\gamma}_{23}^2 + \dot{\gamma}_{31}^2); \dots ; \\ P_{\xi_3}^{\xi_3} &= 27d^3(\ddot{\alpha}_{31}^2 + \ddot{\alpha}_{12}^2) + 2.25d^2(\ddot{\alpha}_{11} - \ddot{\alpha}_{22})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

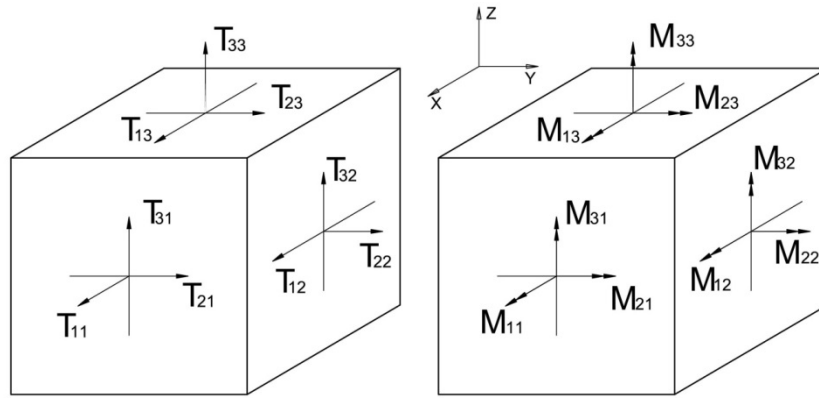


Рис. 1. ВСФ действующие на грани призмы

Внутренние силы и моменты, действующие на грани прямоугольной призмы, определяем по следующим формулам [8, с.472]:

$$T_{11} = \int_{A_1} \sigma_{11} dA; \dots; M_{23} = - \int_{A_3} \sigma_{33} \xi_1 dA. \quad (11)$$

Здесь T_{ii} – нормальные силы, $T_{ik} (i \neq k)$ – касательные силы ($i, k = \overline{1,3}$), M_{ii} – «крутящие» моменты, $M_{ik} (i \neq k)$ – «изгибающие» моменты (Рис.1); $A_1 = l_2 \cdot l_3$, $A_2 = l_1 \cdot l_3$, $A_3 = l_1 \cdot l_2$ – площади граней призмы. Внутренние элементарные силы $\sigma_{ik} dA$ приводятся к центрам площадей соответствующих граней.

Подставив (6) в (11) при учете (9), получаем:

$$T_{11} = 0,5(I_{11}\dot{e}_{11} + I_{31}\ddot{\alpha}_{21} - I_{41}\ddot{\alpha}_{31} - 2cA_1); \dots ; \quad (12)$$

$$M_{33} = \frac{1}{6d} [I_{23}\dot{e}_{23} - I_{33}\dot{e}_{31} + 0.5J_{66}(\dot{a}_{33} - \dot{a}_{22}) - 0.5J_{33}(\dot{a}_{11} - \dot{a}_{33})].$$

Если известны скорости обобщенных перемещений $\dot{e}_{11}, \dots, \dot{a}_{33}$, то, используя (12), можно вычислить соответствующие силы T_{11}, \dots, M_{33} , которые соответствуют тому, что во всех точках граней КЭ в виде прямоугольной призмы удовлетворяется предельное условие (8) в (12) $I_{ik}, J_{ik}, \tilde{S}_{ik}$:

$$I_{11} = \int_{A_1} \frac{dA}{\lambda}; \quad ; I_{22} = \int_{A_2} \frac{\xi_1 dA}{\lambda}; \dots ; J_{22} = \int_{A_2} \frac{\xi_1^2 dA}{\lambda}; J_{23} = \int_{A_3} \frac{\xi_1 \xi_2 dA}{\lambda}; \dots ; \tilde{S}_3 = \int_{A_3} \xi_2 dA. \quad (13)$$

Отметим, что, согласно (7), λ зависит от $\dot{e}_{11}, \dots, \dot{a}_{33}$.

Реализована программа для ЭВМ, позволяющая определять T_{11}, \dots, M_{33} , согласно (12), для различных комбинаций $\dot{e}_{11}, \dots, \dot{a}_{33}$. Ниже приведены некоторые результаты, полученные с использованием этой программы.

На рис.2 приведены некоторые сечения координатными плоскостями предельной поверхности в пространстве внутренних сил и моментов для случая, когда $c = 0, d=3$.

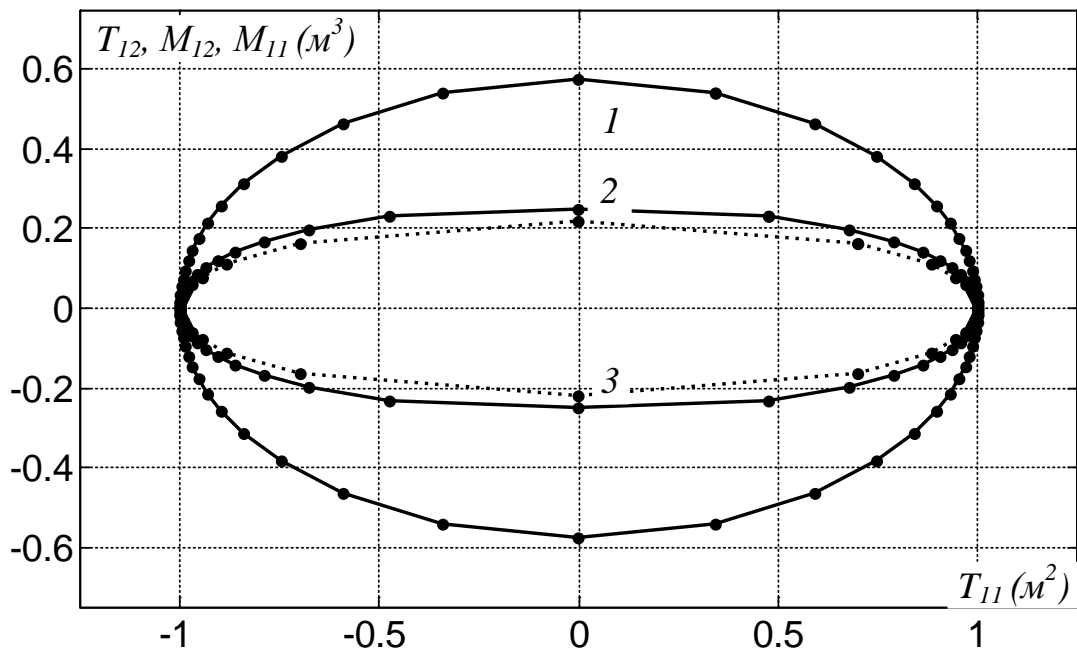


Рис. 2. Кривая 1 – предельная кривая в осях M_{31} и T_{31} , кривая 2 – предельная кривая в осях T_{31} и M_{33}

Опыт показывает, что тела часто разрушаются квазихрупко, по определенным тонким поверхностям, области между которыми не разрушаются

и не претерпевают заметных пластических деформаций. При расчетах на прочность с использованием компьютеров необходимо предварительная дискретизация таких тел. Это часто осуществляют с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Метод АЖКЭ и обобщенных шарниров разрушения для общего случая деформирования пластин и оболочек разработан, в частности, авторами работ [9, с.512-516], для общего случая деформирования стержневых систем – авторами работы [10, с.64-73]. Определение коэффициента запаса прочности по несущей способности осуществлено в работе [11, с.24-27]. Тела, у которых все три измерения (длина, ширина, высота) – величины одного порядка, называются массивными [8, с.472]. Пусть такое тело нагружено внешними поверхностными p_i и объемными γ_j силами:

$$p_i = \mu p_i^0 + p_i^1, \quad \gamma_j = \mu \gamma_j^0 + \gamma_j^1. \quad (14)$$

Здесь $p_i^0, p_i^1, \gamma_j^0, \gamma_j^1$ являются функциями только пространственных координат, μ – монотонно возрастающий параметр. Способ закрепления тела исключает возможность его перемещений и поворотов как целиком жесткого тела. Необходимо определить предельное значение μ_0 параметра внешнего нагружения, когда рассматриваемый массивный элемент теряет свойство геометрической неизменяемости. В рассматриваемом случае, когда разрушение массивного тела происходит по отдельным «бесконечно» тонким обобщенным поверхностям разрушения (ОПР) между соседними АЖКЭ, основное энергетическое уравнение [7, с.420] можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^m \int_{S_k} N dS = \mu \left(\int_{S_0} p_i^0 v_i dS + \int_{V_0} \gamma_j^0 v_j dV \right) + \int_{S_1} p_i^1 v_i dS + \int_{V_1} \gamma_j^1 v_j dV. \quad (15)$$

Здесь S_k – площадь k -й поверхности, по которой идет разрушение; m – число таких поверхностей; S_0, S_1 – площади на поверхности тела, где действуют силы $\mu p_i^0, p_i^1$, соответственно; V_0, V_1 – объемы в составе тела, где действуют силы $\mu \gamma_j^0$ и γ_j^1 , соответственно; N – мощность внутренних силовых факторов (ВСФ), приходящаяся на единицу площади; v_i, v_j – компоненты векторов скоростей

движения точек тела, где приложены силы p_i, γ_j , соответственно. На рис. 3 изображены два соседних АЖКЭ $P_1B_1\dots B_n$ и $P_2B_1\dots B_n$, контактирующие между собой через ОНР $B_1B_2\dots B_n$. Согласно теореме Шаля [12, с. 468], движение каждого из АЖКЭ в трехмерном пространстве можно рассматривать как составленный из поступательного движения вместе с его полюсом и движения около полюса как неподвижного. Скорость диссипации внутренней энергии в произвольной точке B_i ОНР (рис. 3) определяется формулой

$$N(B_i) = \vec{R}_*(B_i) \cdot \Delta\vec{v}(P_1P_2) + \vec{M}_*(B_i) \cdot \Delta\vec{\omega}(P_1P_2). \quad (16)$$

Здесь \vec{R}_*, \vec{M}_* - главный вектор и главный момент внутренних распределенных сил, приведенных в точку B_i , соответственно; они отнесены к единице площади;

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v}(P_1P_2) &= \vec{v}(P_2) + \vec{\omega}(P_2) \times \overline{P_2B_1} - \vec{v}(P_1) - \vec{\omega}(P_1) \times \overline{P_1B_1}; \\ \Delta\vec{\omega}(P_1P_2) &= \vec{\omega}(P_2) - \vec{\omega}(P_1); \end{aligned} \quad (17)$$

$\vec{v}(P_1), \vec{v}(P_2)$ - скорости движения полюсов P_1 и P_2 (рис. 3), соответственно; $\vec{\omega}(P_1), \vec{\omega}(P_2)$ - мгновенные угловые скорости вращения соответствующих АЖКЭ около полюсов P_1 и P_2 , соответственно.

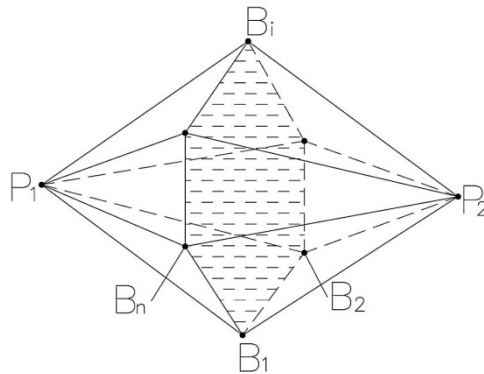


Рис. 3. Соседние АЖКЭ $P_1B_1\dots B_n$ и $P_2B_1\dots B_n$.

Равенство (16) имеет место, когда обобщение силы и скорости обобщенных перемещений связаны ассоциированным законом деформирования.

$$\Delta\vec{v} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{R}_*}, \quad \Delta\vec{\omega} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{M}_*}. \quad (18)$$

Здесь $\dot{\lambda}(\Delta\vec{v}, \Delta\vec{\omega}) \geq 0$ - скалярный множитель; $\Phi(\vec{R}_*, \vec{M}_*) = 0$ - уравнение предельной поверхности (поверхности прочности) в пространстве обобщенных сил. В соответствии с принципом максимума Мизеса имеем (рис. 3):

$$N(B_i) \geq \vec{R} \cdot \Delta\vec{v}(P_1 P_2) + \vec{M} \cdot \Delta\vec{\omega}(P_1 P_2). \quad (19)$$

Здесь \vec{R}, \vec{M} – любая комбинация обобщённых сил, удовлетворяющая уравнению предельной поверхности $\Phi(\vec{R}, \vec{M}) = 0$, но необязательно связанная ассоциированным законом деформирования с комбинацией $\Delta\vec{v}(P_1 P_2), \Delta\vec{\omega}(P_1 P_2)$. Рассматриваем объемный элемент тела, имеющий единичные размеры, отнесенный к неподвижной системе координат XYZ. Внутренние силы, действующие на грани этого элемента, приводятся в центры соответствующих граней. Главные векторы и главные моменты этих сил разлагаются по осям X, Y, Z. В итоге получаем векторы сосредоточенных сил \vec{R} и сосредоточенных моментов \vec{M} :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \{T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}, T_{33}\}^T; \\ \vec{M} &= \{M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}\}^T. \end{aligned} \quad (20)$$

Представим задачу в виде задачи линейного программирования (ЛП), которая решается с использованием симплекс-метода. Для этого вместо (16) необходимо использовать систему ограничений вида (19), где различные комбинации \vec{R} и \vec{M} соответствуют вершинам выпуклого предельного многогранника, аппроксимирующего предельную поверхность $\Phi(\vec{R}, \vec{M}) = 0$. Внешние силы, приложенные в пределах отдельных АЖКЭ, можно привести к полюсам соответствующих АЖКЭ. Задача линейного программирования:

Найти $\min \mu^+$, где

$$\mu^+ = \sum_{k=1}^m \frac{S_k}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} N_i(B_i) - \sum_{j=1}^{n_2} (\vec{F}_j^1 \vec{v}_j + \vec{M}_j^1 \vec{\omega}_j), \quad (21)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n_1} (\vec{F}_j^0 \vec{v}_j + \vec{M}_j^0 \vec{\omega}_j) = 1, \quad (22); \quad \{N_i(B_i) \geq [\vec{R} \cdot \Delta\vec{v}(P_1 P_2) + \vec{M} \cdot \Delta\vec{\omega}(P_1 P_2)]_1\}. \quad (23)$$

Здесь $i = \overline{1, n_k}$; $k = \overline{1, m}$; $l = \overline{1, n_3}$; m – число ОПР; S_k – площадь k -й ОПР; n_k – число точек на k -й ОПР, в которых определяется $N_i(B_i)$; n_1 – число АЖКЭ, к которым приложены внешние активные силы, зависящие от μ ; n_2 – число

АЖКЭ, к которым приложены силы, не зависящие от μ ; n_3 – число вершин предельного многогранника в пространстве ВСФ; $\vec{F}_j^0, \vec{F}_j^1, \vec{M}_j^0, \vec{M}_j^1$ – силы и моменты, полученные в результате приведения внешних сил, действующих на j -й АЖКЭ, к его полюсу; $\vec{v}_j, \vec{\omega}_j$ – скорости перемещения полюса j -го АЖКЭ и его поворота вокруг своего полюса, соответственно; $\Delta\vec{v}, \Delta\vec{\omega}$ определяются в каждой точке B_i . Число ограничений вида (23) равно произведению числа всех точек B_i на число вершин предельного многоугольника. Соотношения (21), (22), (23) переписаны нами в проекциях на оси неподвижной системы координат XYZ . $N_i \geq 0$ являются несвободными переменными задачи ЛП, $v_j \geq 0, \omega_j \geq 0$ – свободными переменными. Составлена программа для ЭВМ в среде Matlab. Ниже приведены некоторые результаты расчетов, полученные с использованием этой программы.

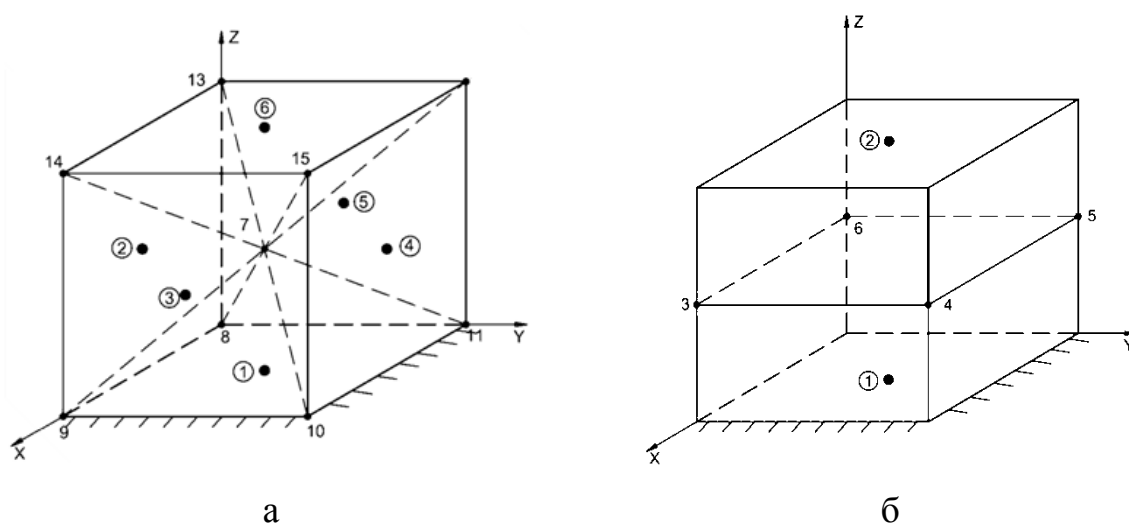


Рис. 4. Куб с размерами $1 \times 1 \times 1$ (м) из однородного изотропного материала

На рис. 4а изображен куб с размерами $1 \times 1 \times 1$ (м) из однородного изотропного материала. На верхнюю грань куба действует равномерное давление с интенсивностью $p = \mu p^0$. Нижняя грань куба жестко закреплена. Необходимо определить предельное значение μ_0 параметра внешней нагрузки. На рис. 4а куб разбит на 6 одинаковых АЖКЭ в форме пирамид; полюса АЖКЭ совпадают с центрами соответствующих граней куба, их номера указаны в кружечках. От 7 до 15 пронумерованы так называемые «сложные точки разрушения»; например, в точке №7 сходятся 12 ОПР, соответственно там

будут 12 так называемых «простых точек разрушения», в каждой из которых должны выполняться ограничения вида (23). По условиям задачи АЖКЭ №1 неподвижен. Вершины предельного многоугольника в пространстве ВСФ (20) имеют следующие координаты: $T_{ij} = \bar{\tau}1$ (МН/м²), $M_{ij} = \bar{\tau}1$ (МНм/м²), $i, j = \overline{1,3}$. Для варианта дискретизации на рис. 4а получены следующие результаты решения рассматриваемой задачи: $\mu^+ = 1.414\text{МН} \cdot \text{м/с}$; $v_z(2) = v_z(3) = v_z(4) = v_z(5) = v_z(6) = -1$ м/с; остальные компоненты \vec{v} и $\vec{\omega}$ для всех АЖКЭ равны нулю. Скорость диссипации внутренней энергии N имеет постоянное значение, равное $1\text{МН}/(\text{м} \cdot \text{с})$, на четырех ОПР 7-8-9, 7-9-10, 7-10-11, 7-11-8, т.е. процесс разрушения идет по этим плоскостям. На рис. 4б рассматриваемый куб разбит только на 2 АЖКЭ плоскостью, параллельной координатной плоскости ОХУ. Остальные условия задачи – прежние. Для этого варианта дискретизации куба получены следующие результаты: $\mu^+ = 1\text{МН} \cdot \text{м/с}$; $v_z(2) = -1$, остальные составляющие \vec{v} и $\vec{\omega}$ для всех АЖКЭ равны нулю; скорость диссипации $N = 1\text{МН}/(\text{м} \cdot \text{с})$ на ОПР 3-4-5-6. Процесс разрушения идет по этой плоскости в результате исчерпания прочности материала куба на сжатие.

Как видно из приведенных результатов решения рассматриваемого примера, дискретизация куба согласно рис. 2а дает значение μ^+ , завышенное на 41,4% (кинематический метод дает верхнюю оценку разрушающей нагрузки), а дискретизация согласно 2б позволяет получить точное значение $\mu^+ = \mu_0 = 1\text{МН} \cdot \text{м/с}$. При дискретизации не нужно стремиться к разбиению конструкции на большое число АЖКЭ, а нужно постараться, при минимально необходимом количестве АЖКЭ, «уловить» истинную картину разрушения.

Нами были исследованы и другие варианты нагружения рассматриваемого куба (например, различные сочетания вертикальной и горизонтальной нагрузок). Полученные результаты (которые здесь не приведены) также соответствуют, на наш взгляд, действительной картине разрушения.

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. М. -Л.: Гостеортехиздат, 1948. –375 с.
2. Шапиро Г.С. О поверхностях текучести для идеально пластических оболочек // Проблемы механики сплошной среды. - М., 1961. - С.504-507.
3. Савчук А. О теории пластических оболочек и пластин // Механика. Период. сб. перевод. иностр. статей. – 1961. – №3. - С. 153-161.
4. Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С., Маркин О.А. Предельное состояние многослойных композитных оболочек // Механика композитных материалов. - 1988. - №4. - С.715-720.
5. Сибгатуллин, Э.С., Исламов К.Ф. Оценка прочности массивных элементов конструкций // Проектирование и исследование технической систем: межвузовский научный сборник ИНЭКА. - Набережные Челны, 2009. – №13. – С. 5-13.
6. Малмейстер А.К. Геометрия теорий прочности // Механика полимеров. - 1966. - №4. – С. 519-534.
7. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
8. Терегулов И.Г. Соппротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1984. – 472 с.
9. Сибгатуллин Э.С. Определение несущей способности металлокерамической сферической оболочки / Э.С. Сибгатуллин, К.Ф. Исламов // Фундаментальные исследования. – 2015. - №9. – Ч.3. – С. 512-516.
10. Сибгатуллин К.Э. Оценка предельной грузоподъёмности несущей системы самосвала КАМАЗ 65115 / К.Э. Сибгатуллин, Э.С. Сибгатуллин, В.Г. Шibaков // Перспективы науки. – 2010. - №11(13). – С. 64-73.
11. Сибгатуллин Э.С. Определение коэффициента запаса прочности объемных конечных элементов при трехосном напряженном состоянии / Э.С. Сибгатуллин, О.Г. Новоселов, К.Э. Сибгатуллин // Казань: Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – № 2. – С. 24-27.
12. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть I / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1972. – 468 с.

Sibgatullin E.S. doctor of physical and mathematical Sciences, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.

Sibgatullin K. E. candidate of technical Sciences, assistant professor, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.

Novoselov O.G. graduate student, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.

METHOD OF DETERMINING CARRIED CAPACITY OF MASSIVES

Annotation. This paper is the development of the kinematic method of the theory of limiting equilibrium. In the framework of this paper we have considered isotropic bodies that resist tension and compression in different ways. Using the rigid-plastic model of a deformable solid, the relations between the theory of plastic flow and the hypotheses of a kinematic nature, parametric equations of the limiting surface for a finite element in the form of a rectangular prism are obtained. Massive elements of structures are proposed to be divided into three-dimensional rigid finite elements (ARFE), which have, in general, an arbitrary shape and six degrees of freedom in three-dimensional space. The process of destruction of the body method. goes along infinitely thin surfaces between neighboring ARFE. The problem is reduced to the standard problem of linear programming, which is solved using the simplex

Key words: massive bodies, parametric equations of the limiting surface, strength, three-dimensional stress state, limiting load-bearing capacity.