

УДК 517.9

ДОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДО ТЕЛ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

E.C. Половинкин, С.В. Сиденко

Аннотация

В данной статье исследована некоторая формула, которая для произвольного ограниченного множества из гильбертова пространства указывает тело постоянной ширины того же диаметра, содержащее исходное множество. Установлен критерий единственности дополнения произвольного множества до тела постоянной ширины и предложено некоторое описание всех тел постоянной ширины, содержащих исходное множество.

Введение

Тела постоянной ширины, отличные от кругов (и шаров), возникли в математике около двух веков назад. Так, Эйлер [1] впервые рассмотрел эти множества на плоскости \mathbb{R}^2 . С тех пор плоские тела постоянной ширины принято называть *орбиформами*. Простейший пример орбиформы, отличной от круга, был построен в девятнадцатом веке немецким инженером Францем Рело (Franz Reuleaux) – правильный криволинейный треугольник, граница которого состоит из круговых дуг. Позднее из-за некоторых своих экстремальных свойств (в том числе минимальности площади) эта фигура стала основой многих механизмов (например, сверла Уаттса).

С начала двадцатого века предпринимались попытки явно построить тела постоянной ширины в трехмерном евклидовом пространстве. Простейший пример такого тела можно получить путем вращения плоского тела постоянной ширины вокруг его оси симметрии. Однако с другими примерами были большие сложности. Трудности возникли уже при построении тел постоянной ширины, содержащих правильный тетраэдр.

Задачи, связанные с исследованием тел постоянной ширины, описаны в работах Г. Минковского, А. Лебега, В. Бляшке, Т. Боннезена, В. Фенхеля и других математиков (см., например, [2–14]). Их подходы были основаны на методах дифференциальной геометрии, что не всегда было удачным, так как граница тел постоянной ширины может и не быть гладкой, как, например, в случае с треугольником Рело.

К настоящему времени доказано (см., например, [12–14]), что, по крайней мере, одно тело постоянной ширины $d > 0$, содержащее заданное ограниченное замкнутое множество (диаметра d) из \mathbb{R}^n (а также из гильбертова пространства и некоторых других банаховых пространств), существует. Однако указанные теоремы существования не давали способов описания этих тел постоянной ширины.

В работе Е.С. Половинкина [15] впервые получена формула, позволяющая для любого ограниченного замкнутого множества находить некоторое тело постоянной ширины (без увеличения диаметра), содержащего данное множество. Такие тела будем называть регулярными дополнениями исходного множества до тела постоянной ширины. Достоинством полученной формулы является ее простота. Однако указанная формула записывается через операции с множествами вида алгебраической суммы и геометрической разности Г. Минковского. Так как часто необходимо

получать аналитическое описание тела постоянной ширины (или его границы), то даже при наличии указанной формулы при попытке аналитического описания указанных тел возникают принципиальные трудности. Связано это с тем, что для нахождения опорной функции геометрической разности двух выпуклых множеств необходимо решать задачи о вычислении выпуклой оболочки разности опорных функций исходных множеств. Каждая такая задача является трудной задачей на глобальный экстремум (невыпуклой) непрерывной функции. В нашей работе [16] показано, как можно преодолеть указанные трудности на примере вычисления опорной функции регулярного дополнения правильного тетраэдра.

В данной работе, опираясь на аппарат выпуклого анализа (см., например, [17, 18]), развиваются результаты работы [19]. Так как тел постоянной ширины, содержащих заданное множество, диаметр которого равен ширине искомых тел, может быть много, то в работе получен критерий единственности различных дополнений произвольного начального множества до тел постоянной ширины. В случае неединственности дополнения предложено некоторое описание всех тел постоянной ширины, содержащих исходное множество, диаметр которых равняется диаметру исходного множества.

1. Основные понятия

В этой работе будем рассматривать замкнутые ограниченные множества из гильбертова пространства \mathcal{H} , хотя многие утверждения будут справедливыми и в рефлексивных банаховых пространствах E .

Напомним некоторые обозначения и понятия выпуклого анализа.

Опорной функцией множества $A \subset E$ называется функция вида

$$s(p, A) = \sup \{\langle p, x \rangle \mid x \in A\}, \quad p \in E^*.$$

Шириной ограниченного множества $A \subset E$ в направлении вектора $p \in E^*$, где $\|p\|_* = 1$, называется величина

$$\sup \{\langle p, x \rangle \mid x \in A\} - \inf \{\langle p, x \rangle \mid x \in A\} = s(p, A) + s(-p, A),$$

то есть она равна расстоянию между двумя опорными гиперплоскостями к множеству A , ортогональными вектору p .

Диаметром множества A называется величина

$$\text{diam } A = \sup \{\|x - y\| \mid x, y \in A\}.$$

Следуя Минковскому [2, 3], напомним понятия алгебраической суммы и геометрической разности множеств.

Алгебраической суммой двух множеств A и B из E называется множество вида

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Произведением множества $A \in E$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется множество

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Геометрической разностью двух множеств A и B из E называется множество

$$A - B = \{x \in E \mid x + B \subset A\}.$$

Отметим, что между опорной функцией ограниченного множества и его диаметром существует следующее соотношение, которое нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 1. Для ограниченного множества A справедлива формула

$$\text{diam } A = \sup\{s(p, A) + s(-p, A) \mid p \in E^*, \|p\|_* = 1\} \quad (1)$$

и включение

$$A + (-A) \subset B_d(0), \quad (2)$$

где $d = \text{diam } A$, а $B_d(0) = \{x \in E \mid \|x\| \leq d\}$ обозначает замкнутый шар радиуса d с центром в точке 0.

Замкнутое ограниченное выпуклое множество $A \subset E$ называется *телом постоянной ширины* $d > 0$, если его ширина по всем направлениям $p \in E^*$ постоянна и равна числу d , то есть справедливо равенство

$$s(p, A) + s(-p, A) = d\|p\|_* \quad \forall p \neq 0. \quad (3)$$

Из определения тела постоянной ширины и леммы 1 очевидно следует

Лемма 2. Ограничено выпуклое замкнутое множество $W \subset E$ является телом постоянной ширины $d > 0$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$W + (-W) = B_d(0). \quad (4)$$

Отметим, что в силу определения геометрической разности множеств из равенства (4) следуют равенства

$$W = B_d(0) \dot{-} (-W), \quad (5)$$

$$W = B_d(0) \dot{-} (B_d(0) \dot{-} W). \quad (6)$$

Замечание 1. В дальнейшем будем рассматривать множества, принадлежащие таким рефлексивным банаховым пространствам E , в которых единичный шар $B_1(0)$ является порождающим множеством. В соответствии с работами [19, 20] последнее означает, что для всякого непустого множества X , представимого в виде пересечения некоторого семейства единичных шаров, то есть $X = \bigcap\{B_1(y) \mid y \in Y\}$, существует множество Z такое, что справедливо равенство

$$X + Z = B_1(0). \quad (7)$$

Как показано в работах [19, 20], к указанному классу пространств принадлежат пространство \mathbb{R}^n , гильбертовы пространства \mathcal{H} и некоторые другие банаховы пространства.

Отметим также, что важным следствием того, что шар $B_1(0) \subset E$ является порождающим множеством (см. [19, 20]), является то, что для любого множества $A \subset E$ такого, что $B_1(0) \dot{-} A \neq \emptyset$, справедливо равенство

$$(B_1(0) \dot{-} A) + (B_1(0) \dot{-} (B_1(0) \dot{-} A)) = B_1(0). \quad (8)$$

2. Ограничения на тела постоянной ширины

Пусть задано некоторое ограниченное множество $A \subset E$ диаметра $d > 0$. Семейство всех тел постоянной ширины, содержащих данное множество $A \subset E$ и ширина которых равняется тому же числу $d > 0$, будем обозначать через $\mathcal{W}(A)$.

Для исследования указанного семейства $\mathcal{W}(A)$ определим два множества $M_d(A)$ и $m_d(A)$ вида

$$M_d(A) = \bigcap\{B_d(x) \mid x \in A\}, \quad (9)$$

$$m_d(A) = \bigcap\{B_d(x) \mid A \subset B_d(x)\}. \quad (10)$$

Приведем некоторые свойства указанных множеств.

Лемма 3. Множества $M_d(A)$ и $m_d(A)$ удовлетворяют равенствам:

$$M_d(A) = B_d(0) \overset{*}{+} (-A), \quad (11)$$

$$m_d(A) = B_d(0) \overset{*}{+} (B_d(0) \overset{*}{+} A), \quad (12)$$

а также справедливы включения

$$A \subset m_d(A) \subset M_d(A). \quad (13)$$

Доказательство. Из равенства $\bigcap\{B_d(y) \mid y \in A\} = \{x \mid \forall y \in A, \|x - y\| \leq d\}$ следует эквивалентность следующих утверждений:

- 1) $x \in M_d(A);$
- 2) для любого $y \in A$: $(x - y) \in B_d(0);$
- 3) $x + (-A) \subset B_d(0);$
- 4) $x \in B_d(0) \overset{*}{+} (-A).$

Таким образом, равенство (11) доказано.

Если $A \subset B_d(x)$, то расстояние от точки x до любой точки из множества A не больше, чем d , то есть $x \in M_d(A)$. Отсюда с учетом определения множества $m_d(A)$ получаем, что $m_d(A) = \bigcap\{B_d(x) \mid x \in M_d(A)\}$, что означает равенство $m_d(A) = B_d(0) \overset{*}{+} (-M_d(A))$, откуда и из равенства (11) очевидно следует равенство (12).

Из определения геометрической разности для $B_d(0) \overset{*}{+} A$ следует включение $A + (B_d(0) \overset{*}{+} A) \subset B_d(0)$. Из последнего включения опять же по определению геометрической разности получаем включение $A \subset B_d(0) \overset{*}{+} (B_d(0) \overset{*}{+} A)$, то есть справедливо левое включение в (13).

Из включения (2), формулы (11) и определения геометрической разности следует включение $A \subset M_d(A)$. Вычитая из шара $B_d(0)$ множества $-A$ и $-M_d(A)$, в силу последнего включения и формул (11) и (12) получаем правое включение в (13). \square

Теорема 1. Пусть даны тело W постоянной ширины и множество A одного и того же диаметра d . Для справедливости включения $A \subset W$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись включения

$$m_d(A) \subset W \subset M_d(A). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $W \in \mathcal{W}(A)$. Для любой точки $y \in W$ и для любой точки $x \in A \subset W$ следует, что $\|x - y\| \leq d$, то есть $y \in B_d(x)$ для произвольного $x \in A$. Таким образом, в силу определения (9) получаем, что $y \in M_d(A)$, то есть $W \subset M_d(A)$.

Из включения $A \subset W$ следует включение $B_d(0) \overset{*}{+} A \supset B_d(0) \overset{*}{+} W$, из которого в свою очередь следует включение $B_d(0) \overset{*}{+} (B_d(0) \overset{*}{+} A) \subset B_d(0) \overset{*}{+} (B_d(0) \overset{*}{+} W)$, что в силу леммы 3 и равенства (6) влечет включение $m_d(A) \subset W$.

Пусть теперь множество постоянной ширины W удовлетворяет включению (14). Тогда из этого включения и леммы 3 (включения (13)) следует включение $A \subset W$. \square

3. Регулярное дополнение

В работе [15] (а затем и в книге [20]) доказана теорема, содержащая формулу для построения одного из тел постоянной ширины для заданного ограниченного множества A (без увеличения диаметра).

Теорема 2 [15]. *Если рефлексивное банахово пространство E таково, что в нем единичный шар является порождающим множеством, то для любого ограниченного множества $A \subset E$, диаметр которого равен $d > 0$, множество*

$$W^0(A) = \frac{1}{2}(M_d(A) + m_d(A)) \quad (15)$$

принадлежит совокупности множеств $\mathcal{W}(A)$.

В дальнейшем множество $W^0(A)$ (15) будем называть *регулярным дополнением* множества A до тела постоянной ширины того же диаметра.

Следствие 1. *Опорная функция тела $W^0(A)$ (15) имеет вид*

$$s(p, W^0(A)) = \frac{1}{2}(d\|p\|_* + \sigma(p) - \sigma(-p)), \quad (16)$$

где функция $\sigma(p)$ есть опорная функция множества $M_d(A)$, причем $\sigma(p) = \overline{\text{co}}(d\|p\|_* - s(-p, A))$, где $\overline{\text{co}} f$ означает замыкание выпуклой оболочки функции f .

Доказательство. В силу известной формулы для вычисления опорной функции геометрической разности множеств через опорные функции этих множеств (см., например, [20]) и в силу леммы 3 получаем, что $s(p, M_d(A)) = \overline{\text{co}}(d\|p\|_* - s(-p, A))$. В свою очередь в силу равенства (8) получаем равенство

$$s(p, m_d(A)) = d\|p\|_* - s(-p, M_d(A)), \quad (17)$$

которое в итоге и доказывает формулу (16). \square

Замечание 2. Таким образом, задача нахождения регулярного дополнения множества до тела постоянной ширины сведена к вычислению выпуклой оболочки разности опорных функций шара и данного множества.

Отметим, что в силу теоремы 2 показано, что семейство $\mathcal{W}(A)$ тел постоянной ширины, содержащих заданное ограниченное множество A диаметра d , не пусто, причем любое тело $W \in \mathcal{W}(A)$ содержит $m_d(A)$ и содержится в $M_d(A)$. Покажем, что данные оценки улучшить нельзя, то есть $M_d(A)$ – наименьшее по включению множество, содержащее произвольное тело $W \in \mathcal{W}(A)$, а $m_d(A)$ – наибольшее по включению множество, содержащееся в произвольном теле $W \in \mathcal{W}(A)$.

Теорема 3. *Справедливы следующие соотношения*

$$M_d(A) = \bigcup\{W \mid W \in \mathcal{W}(A)\}, \quad (18)$$

$$m_d(A) = \bigcap\{W \mid W \in \mathcal{W}(A)\}. \quad (19)$$

Доказательство. Из соотношения (9) для произвольной точки $y \in M_d(A)$ и любой точки $x \in A$ имеем $\|x - y\| \leq d$, то есть диаметр множества $A \bigcup \{y\}$ будет не больше, чем d . Поэтому множество $W^0(A \bigcup \{y\})$ будет принадлежать семейству

$\mathcal{W}(A)$ и содержать произвольно выбранную точку из $M_d(A)$. Обратное включение следует из теоремы 1. Таким образом, первое соотношение доказано.

Пусть теперь точка $y \notin m_d(A)$. Тогда в силу соотношения (10) существует такой шар $B_d(z)$, который содержит множество A , но не содержит точку y . Тогда множество $W^0(A \cup \{z\})$ принадлежит семейству $\mathcal{W}(A)$, но не содержит точку y . Обратное же включение следует из теоремы 1. Таким образом, второе соотношение доказано. \square

Анализируя доказательство последней теоремы, получаем, что если для каждой граничной точки $y \in \partial M_d(A)$ определим множество $A \cup \{y\}$, то получим, что $\text{diam}(A \cup \{y\}) = \text{diam} A = d$. В силу этого, если определим множество $W_y = W^0(A \cup \{y\})$, то очевидно справедливо включение $W_y \in \mathcal{W}(A)$. В результате этого определим семейство тел постоянной ширины вида

$$\mathcal{V}(A) = \{W \mid W = \sum_{i=1}^m \lambda_i W_{y_i}, \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, y_i \in \partial M_d(A), m \in \mathbb{N}\}. \quad (20)$$

Очевидно, что справедливо включение $\mathcal{V}(A) \subset \mathcal{W}(A)$, причем каждое тело $W \in \mathcal{V}(A)$ с помощью формул (15) и (20) может быть описано конструктивно.

Следствие 2. Семейство $\mathcal{V}(A)$ тел постоянной ширины, содержащих множество A , является существенным подмножеством семейства $\mathcal{W}(A)$ в том смысле, что справедливы равенства

$$M_d(A) = \bigcup \{W \mid W \in \mathcal{V}(A)\}, \quad (21)$$

$$m_d(A) = \bigcap \{W \mid W \in \mathcal{V}(A)\}. \quad (22)$$

4. Единственность дополнения

Исходя из полученных результатов, приведем критерий единственности дополнения данного множества до тела постоянной ширины.

Теорема 4. Дополнение множества A диаметра d до тела постоянной ширины единствено тогда и только тогда, когда справедливо равенство $M_d(A) = m_d(A)$.

Доказательство. Предположим, что множество $M_d(A) \setminus m_d(A)$ не пусто. Возьмем произвольную точку $y \in M_d(A) \setminus W^0(A)$ (такая точка, очевидно, существует, так как в противном случае получили бы равенство $M_d(A) = m_d(A)$). Тогда существуют два тела $W_1 = W^0(A \cup \{y\})$ и $W^0(A)$ семейства $\mathcal{W}(A)$ такие, что $y \in W_1$ и $y \notin W^0(A)$. Таким образом, в этом случае дополнение не единствено.

Так как для любого $W \in \mathcal{W}(A)$ справедливо включение (14) из теоремы 1, то в случае равенства $M_d(A) = m_d(A)$ получаем равенство $m_d(A) = W = M_d(A)$. Таким образом, дополнение единственно. \square

На практике, однако, проверка равенства двух множеств довольно затруднительна. Поэтому приведем равносильный критерий, более удобный для использования.

Следствие 3. Дополнение множества A диаметра d до тела постоянной ширины единствено тогда и только тогда, когда

$$\text{diam } M_d(A) = d. \quad (23)$$

Доказательство. Пусть дополнение единственно. Тогда по теореме 1 и по теореме 4 справедливо равенство $m_d(A) = W^0(A) = M_d(A)$, откуда $\text{diam } M_d(A) = d$.

Пусть теперь $\text{diam } M_d(A) = d$. Тогда по формуле (1) из леммы 1 получаем для любого $p \in E^*$ неравенство

$$s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) \leq d\|p\|_*$$

В свою очередь, как было показано в теореме 1, справедливо включение $M_d(A) \supseteq W^0(A)$, откуда для любого $p \in E^*$ получаем обратное неравенство

$$s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) \geq s(p, W^0(A)) + s(-p, W^0(A)) = d\|p\|_*$$

В итоге, для любого $p \in E^*$ получаем равенство, которое в силу леммы 2 означает, что $M_d(A) \in \mathcal{W}(A)$. Отсюда и из равенства (17) для любого $p \in E^*$ следует равенство $s(p, m_d(A)) + s(-p, m_d(A)) = d\|p\|_*$, то есть $m_d(A) \in \mathcal{W}(A)$. Итак, $m_d(A) \subset M_d(A)$ и $m_d(A), M_d(A) \in \mathcal{W}(A)$, это возможно лишь при выполнении равенства $m_d(A) = M_d(A)$, то есть по теореме 4 дополнение данного множества до тела постоянной ширины единствено. \square

Замечание 3. Дополнение правильного треугольника в \mathbb{R}^2 до тела постоянной ширины единствено, так как очевидно равенство $M_d(A) = m_d(A)$. Однако дополнение правильного тетраэдра в \mathbb{R}^3 до тела постоянной ширины уже не единствено.

В самом деле рассмотрим правильный тетраэдр A из \mathbb{R}^3 с вершинами в точках $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 1)$, $v_3 = (1, -1, -1)$ и $v_4 = (-1, 1, -1)$. Нетрудно убедиться в том, что диаметр d данного тетраэдра равен $2\sqrt{2}$, а две точки $x_1 = (0, 0, \sqrt{6}-1)$ и $x_2 = (0, 0, 1-\sqrt{6})$ принадлежат множеству $M_d(A)$, то есть принаследуют каждому из шаров $B_d(v_i)$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Однако $\|x_1-x_2\| = 2\sqrt{6}-2 > d$, то есть критерий единственности (23) не выполнен. При этом тела постоянной ширины $W^0(A \cup \{x_1\})$ и $W^0(A \cup \{x_2\})$ содержат тетраэдр A и различны.

5. Общее описание тел постоянной ширины

Попробуем описать все множества семейства $\mathcal{W}(A)$.

Назовем вектор $p \in E^*$ *вектором единственности* для множества $A \subset E$, если для него выполнено равенство

$$s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) = d\|p\|_* \quad (24)$$

Конус $\mathcal{R}(A)$, составленный из всех таких векторов, будем называть *конусом единственности* для множества A .

Конус $\mathcal{R}^c(A)$, дополнительный к конусу единственности, будем называть *конусом неединственности*. Конус $\mathcal{R}^c(A)$, очевидно, состоит из таких векторов $p \in E^*$, для которых справедливо неравенство

$$s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) > d\|p\|_* \quad (25)$$

В силу следствия 3 семейство $\mathcal{W}(A)$ состоит более чем из одного тела постоянной ширины тогда и только тогда, когда конус $\mathcal{R}^c(A)$ не пуст.

Теорема 5. *Любому телу W из семейства $\mathcal{W}(A)$ можно сопоставить функцию $\alpha : E^* \rightarrow [0, 1]$, которая удовлетворяет соотношению*

$$s(p, W) = \alpha(p)s(p, M_d(A)) + (1 - \alpha(p))s(p, m_d(A)) \quad \forall p \in E^* \quad (26)$$

При этом функция α на $\mathcal{R}^c(A)$ непрерывна, положительно однородна с показателем однородности 0, то есть

$$\alpha(\lambda p) = \alpha(p) \quad \text{для всех } \lambda > 0, \quad (27)$$

и для нее справедливо равенство

$$\alpha(p) + \alpha(-p) = 1 \quad \forall p \in \mathcal{R}^c(A). \quad (28)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 для каждого вектора $p \in E^*$ получаем неравенства $s(p, m_d(A)) \leq s(p, W) \leq s(p, M_d(A))$, то есть можно выбрать такое значение $\alpha(p) \in [0, 1]$, что будет выполняться соотношение (26). При этом в случае, когда опорные функции множеств $m_d(A)$ и $M_d(A)$ на этом векторе p совпадают (то есть $p \in \mathcal{R}(A)$), то выбираем значение функции $\alpha(p) \in [0, 1]$ произвольно.

В силу леммы 2 получаем равенство $d\|p\|_* = s(p, W) + s(-p, W)$. Подставляя в него выражение (26), получаем

$$\begin{aligned} d\|p\|_* &= \alpha(p)s(p, M_d(A)) + (1 - \alpha(p))s(p, m_d(A)) + \\ &\quad + \alpha(-p)s(-p, M_d(A)) + (1 - \alpha(-p))s(-p, m_d(A)), \end{aligned}$$

откуда и в силу равенства (17) получаем равенство

$$(\alpha(p) + \alpha(-p) - 1)(s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) - d\|p\|_*) = 0.$$

То есть для любого вектора $p \in \mathcal{R}^c(A)$ должно выполняться равенство (28).

Непрерывность функции α на $\mathcal{R}^c(A)$ следует из того, что опорная функция ограниченного множества непрерывна, и для любого вектора $p \in \mathcal{R}^c(A)$ из выражения (26) и равенства (17) получаем формулу

$$\alpha(p) = \frac{s(p, W) + s(-p, M_d(A)) - d\|p\|_*}{s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) - d\|p\|_*}, \quad (29)$$

то есть $\alpha(p)$ есть отношение двух непрерывных функций, причем (в силу неравенства (25)) знаменатель на $\mathcal{R}^c(A)$ не равен нулю.

Из этой же формулы следует и положительная однородность функции $\alpha(p)$ на $\mathcal{R}^c(A)$ с показателем однородности 0.

Таким образом, каждому телу W из семейства $\mathcal{W}(A)$ соответствует некая скалярная функция. Например, регулярному дополнению $W^0(A)$ соответствует функция $\alpha(p) \equiv 1/2$. \square

Обратное соответствие, увы, совсем не очевидно. Условия непрерывности, постоянства суммы значений на противоположных аргументах и положительной однородности с показателем 0 произвольной функции не являются достаточными условиями того, что этой функции соответствует некоторое тело постоянной ширины. Придется воспользоваться еще одним условием.

Следствие 4. Пусть задано замкнутое ограниченное множество $A \subset E$ диаметра d . Пусть дана функция $\alpha : E^* \rightarrow [0, 1]$, непрерывная и положительно однородная с показателем 0 на $\mathcal{R}^c(A)$, удовлетворяющая равенству (28) и такая, что функция

$$s(p) = \alpha(p)s(p, M_d(A)) + (1 - \alpha(p))s(p, m_d(A)) \quad (30)$$

удовлетворяет неравенству

$$s(p_1 + p_2) \leq s(p_1) + s(p_2) \quad \text{для всех } p_1 \text{ и } p_2. \quad (31)$$

Тогда функция s является опорной функцией некоторого тела постоянной ширины из семейства $\mathcal{W}(A)$.

Множество всех функций α , удовлетворяющих условиям следствия 4, обозначим через $\mathcal{A}(A)$.

Отметим очевидное свойство.

Следствие 5. *Множество $\mathcal{A}(A)$ выпукло.*

Представляет интерес нахождение явных формул для вычисления конуса единственности $\mathcal{R}(A)$ исходного множества A диаметра d .

Для этого для любой точки a через $D_A(a)$ обозначим множество всех точек из A , удаленных от точки a на расстояние, равное диаметру d множества A , то есть

$$D_A(a) = \{x \in A \mid \|x - a\| = \text{diam } A\} = A \cap \partial B_d(a).$$

Через $\text{cone } X$ будем обозначать выпуклую коническую оболочку множества X :

$$\text{cone } X = \{\lambda a \mid a \in \text{co } X, \lambda \geq 0\},$$

где через $\text{co } X$ обозначена выпуклая оболочка множества X .

Лемма 4. *Справедливо включение*

$$\mathcal{R}(A) \supset \bigcup \{\text{cone}(D_A(a) - a) \cup \text{cone}(a - D_A(a)) \mid a \in A, D_A(a) \neq \emptyset\}. \quad (32)$$

Доказательство. Пусть для точки $a \in A$ существует точка $b(a) \in D_A(a)$, то есть $b(a) \in A$ и $\|a - b(a)\| = d$. Рассмотрим вектор $p_a = (b(a) - a)/\|b(a) - a\|$. Тогда отсюда и в силу леммы 1 получаем

$$s(p_a, A) + s(-p_a, A) \geq \langle p_a, b_a - a \rangle = \|b(a) - a\| = d \geq s(p_a, A) + s(-p_a, A).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$s(p_a, A) + s(-p_a, A) = d. \quad (33)$$

Отсюда и в силу включения $A \subset M_d(A)$ и формулы (11) (по лемме 3) получаем

$$s(p_a, A) \leq s(p_a, M_d(A)) = s(p_a, B_d(0) \stackrel{*}{+} (-A)) \leq d - s(-p_a, A),$$

откуда в силу (33) получаем равенство $s(p_a, A) = s(p_a, M_d(A))$. Аналогично получаем равенство $s(-p_a, A) = s(-p_a, M_d(A))$. Из последних равенств и равенств (24), (33) получаем, что $p_a \in \mathcal{R}(A)$.

Таким образом, все векторы из множеств $D_A(a) - a$ и $a - D_A(a)$ (если для выбранного $a \in A$ они не пусты) принадлежат конусу $\mathcal{R}(A)$. Кроме того, все векторы из выпуклых оболочек каждого из этих множеств также будут принадлежать конусу $\mathcal{R}(A)$, так как частью поверхности множества $M_d(A)$, принадлежащей конусу $a + \text{cone}(D_A(a) - a)$, будет часть сферы с центром в точке a и радиусом d , равным диаметру множества A . \square

6. Решение проблемы Данцера

Для задачи дополнения множества из \mathbb{R}^n до тела постоянной ширины в работе [21] сформулирована следующая проблема Л. Данцера.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое гладкое тело. Существует ли гладкое выпуклое тело постоянной ширины $d = \text{diam } A$, содержащее заданное тело A ?

Прежде всего, покажем, что регулярное дополнение $W^0(A)$ дает положительное решение этой проблемы. Для этого нам еще потребуется следующий результат М.В. Балашова (см. [20, § 4.5]):

Теорема 6. *Пусть дано замкнутое выпуклое гладкое тело A из гильбертова пространства \mathcal{H} (состоящее более чем из одной точки), и пусть $B_d(0) \overset{*}{-} A \neq \emptyset$. Тогда множество $m_d(A)$ является гладким телом.*

Кроме этого очевидно справедлива следующая лемма (доказательство см. [20, § 4.5])

Лемма 5. *Пусть даны выпуклые замкнутые ограниченные множества $A, B \subset \mathcal{H}$, причем множество A является гладким телом. Тогда множество $A+B$ также будет гладким телом.*

Опираясь на формулу (15) из теоремы 2, а также на приведенные выше теорему 6 и лемму 5 получаем, что регулярное дополнение положительно решает проблему Л. Данцера, то есть оно сохраняет гладкость тела.

Но в связи с этим возникает и другая проблема.

Влечет ли гладкость тела A гладкость любого тела из семейства $\mathcal{W}(A)$?

Покажем, что это не так. Для этого приведем пример в \mathbb{R}^2 , дающий отрицательный ответ на последний вопрос.

Возьмем на плоскости \mathbb{R}^2 множество вершин A, B, D, C, E правильного пятиугольника со стороной длины a и диаметром $d = 2a \sin(2\pi)/5 = a(\sqrt{5}-1)/2$. Пусть для простоты сторона AB параллельна оси $0y$, а точка C находится справа от AB . Проведем через две несмежные вершины указанного пятиугольника D, E эллипс с длинами полуосей $d/2$ и $\varepsilon > 0$, где число ε удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon + a < d. \quad (34)$$

Вместо пятиугольника будем рассматривать новое множество, состоящее из этого эллипса и точек A, B, C .

Заметим, что диаметр нового множества увеличился, так как эллипс очевидно пересекает окружности радиуса d с центрами в точках A и B . Для исправления этого слегка сдвинем эллипс влево по оси Ox на некоторое расстояние $\delta > 0$ так, чтобы эллипс оказался внутри окружностей радиуса d с центрами в точках A и B и касался их.

Отметим, что величина δ будет меньше, чем число ε , так как сдвиг эллипса влево по оси Ox на ε разместит этот эллипс целиком в одной с точками A и B полуплоскости относительно выброшенной диагонали пятиугольника DE , то есть окажется строго внутри указанных ранее окружностей.

Покажем, что теперь диаметр полученного множества, состоящего из эллипса и трех точек A, B, C , равен d .

Действительно, с одной стороны, $|AC| = |BC| = d$, поэтому диаметр не меньше, чем d . С другой стороны, эллипс лежит внутри окружностей радиуса d с центрами в вершинах A и B , поэтому максимум расстояния от точек A и B до точек эллипса в точности равен d . Наконец, точка C удалена от эллипса на расстояние, не превосходящее $\varepsilon + a$, что в силу (34) строго меньше d . Таким образом, диаметр полученного множества равен d .

Пусть A' и B' – точки касания эллипса и окружностей радиуса d с центрами в вершинах A и B соответственно. Тогда $|AA'| = |BB'| = d$. Кроме того, $|AC| = |BC| = d$. По лемме 4 получаем, что в конус единственности данного множества будут входить векторы из конусов $\text{cone}\{A' - A, C - A\}$, $\text{cone}\{B' - B, C - B\}$, $\text{cone}\{A - C, B - C\}$, а также вектора из конусов, противоположных этим трем конусам.

Это означает, что конус $\text{cone}\{A' - A, B' - B\}$ является подмножеством конуса единственности. То есть на этом конусе опорные точки границы любого тела W

постоянной ширины d , описанного вокруг эллипса и вершин A , B и C , будут состоять из дуг окружностей $A'C$ и $B'C$, то есть граница W не будет гладкой.

Осталось заметить, что W содержит в себе эллипс – множество с гладкой границей и того же диаметра d . Таким образом показали, что вокруг эллипса можно описать негладкое тело постоянной ширины того же диаметра, что и сам эллипс. Это и завершает построение примера.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00787) и Минобразования РФ (проект по программе «Университеты России»).

Summary

E.S. Polovinkin, S.V. Sidenko. The addition of subsets to constant width bodies.

We research a well-known existence problem of constant width bodies which contain the given bounded set. We have got a formula for such bodies and a criteria of uniqueness for constant width body which contain a given bounded set.

Литература

1. Euler L. De curvis triangularibus // Acta Acad. Sci. Imp. Petrop. – 1778. – Bd. 2. – S. 3–30.
2. Minkowski H. Geometrie der Zahlen. – Leipzig – Berlin: Teubner, 1910.
3. Minkowski H. Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs // Gesammeite Abhandlungen. – Leipzig – Berlin: Teubner, 1911. – Bd. 2. – S. 131–229.
4. Minkowski H. О телах постоянной ширины // Матем. сб. – 1905. – Т. 25. – С. 505–508. = Gesammeite Abhandlungen. Leipzig – Berlin: Teubner, 1911. – Bd. 2. – S. 277–279.
5. Blaschke W., Hessenberg G. Lehsätze über konvexe Körper // Jber. Deutsch. Math. – Verein., 1917. – Bd. 26. – S. 215–220.
6. Pál J. Über ein elementares Variationproblem // Math.-Fys. Medd. – Danske Vid. Selsk., 1920–1921. – Bd. 3, H. 2. – S. 1–35.
7. Lebesgue H. Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations // J. Math. Pures Appl. – 1921. – Т. 4, F. 8. – P. 67–96.
8. Reinhardt K. Extremale Polygone gegbenen Durchmessers. // Jber. Deutsch. Math. – Verein., 1922. – Bd. 31. – S. 251–270.
9. Kritikos N. Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln // Math. Ann. – 1927. – Bd. 96. – S. 583–586.
10. Jessen B. Über Konvexe Punktmenge konstanter Breite // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 378–380.
11. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. – М.: ФАЗИС, 2002. = Bonnesen T., Fenchel W. Theorie der konvexen Körper. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1934.
12. Eggleston H.G. Sets of constant width in finite dimentional Banach spaces // Israel J. Math. – 1965. – No 3. – P. 163–172.
13. Chakerian G.D., Groemer H. Convex bodies of constant width // Convexity and its Applications / Ed. by P.M. Gruber, J.M. Wills. – Basel – Boston – Stuttgart: Birkhauser, 1983.

14. *Карасев Р.Н.* О характеристизации порождающих множеств // Моделирование и анализ информационных систем. – Ярославль: ЯрГУ, 2001. – Т. 8, № 2. – С. 3–9.
15. *Половинкин Е.С.* О телах постоянной ширины // Докл. РАН. – 2004. – Т. 397, № 3. – С. 313–315.
16. *Половинкин Е.С., Сиденко С.В.* Дополнение тетраэдра до тела постоянной ширины // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики и их приложения в задачах физики: Междунед. сб. ст. – М.: МФТИ 2005. – С. 184–198.
17. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
18. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
19. *Половинкин Е.С.* О сильно выпуклых множествах и сильно выпуклых функциях // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. – М.: Изд-во ВИНИТИ, 1999. – Т. 61. – С. 66–138.
20. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 436 с.
21. *Данцер Л., Грюмбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли и ее применения. – М.: Мир, 1968. – 159 с.

Поступила в редакцию
30.05.06

Половинкин Евгений Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета).

E-mail: *polovinkin@mail.mipt.ru*

Сиденко Сергей Владимирович – выпускник факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института (государственного университета).