УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.95

О ЧИСЛЕ МНОЖЕСТВ, СВОБОДНЫХ ОТ СУММ

А.А. Сапоженко

Аннотация

Дан обзор результатов исследования числа множеств, свободных от сумм. Приводятся формулировки утверждений, обсуждаются идеи и техника доказательств.

Ключевые слова: множества, свободные от сумм, абелевы группы, циклические группы.

Введение

Пусть на множестве M задана операция сложения (быть может частичная). Подмножество $A \subseteq M$ называется *свободным от сумм* (сокращенно МСС), если $a + b \notin A$ для любых $a, b \in A$. Семейство всех подмножеств, свободных от сумм в M, обозначим через $\mathcal{S}(M)$. В качестве множества M чаще всего рассматривается либо множество элементов аддитивной группы, либо множество натуральных чисел. В случае некоммутативных групп используется операция умножения и вместо МСС рассматриваются множества, свободные от произведений. Понятие множества, свободного от сумм, было, по-видимому, введено Шуром, доказавшим знаменитую теорему о том, что интервал $[1, n]$ нельзя разбить на фиксированное число попарно непересекающихся МСС, если n достаточно велико по сравнению с числом подмножеств.

Вопрос о числе МСС в отрезке $[1, n]$ и в группах стал интенсивно изучаться после опубликования в 1988 г. статьи Камерона и Эрдёша [12]. Обозначим через $[q, p]$ множество натуральных чисел x таких, что $q \le x \le p$. Семейство всех подмножеств $A \subseteq [t, n]$, свободных от сумм, обозначим через $S(t, n)$. Пусть далее $s(t, n) = |S(t, n)|$, а $s(n) = |S(1, n)|$. В упомянутой статье 1988 г. Камерон и Эрдёш [12] предположили, что $s(n) = O(2^{n/2})$. Они доказали, что $s(n/3, n) = O(2^{n/2})$ и, кроме того, что существуют константы c_0 и c_1 такие, что

$$s(n/3, n) \sim c_0 2^{\lceil n/2 \rceil} \tag{1}$$

для четных n и

$$s(n/3, n) \sim c_1 2^{\lceil n/2 \rceil} \tag{2}$$

для нечетных n. Заметим, что константы c_0 и c_1 вычислены с точностью до 0.015 К.Г. Омельяновым в [1]. Он доказал, что

$$6.07097 \le c_0 \le 6.09942, \quad 4.81030 \le c_1 \le 4.83350. \tag{3}$$

Обозначим через $N^\sigma(n)$ множество целых чисел a отрезка $[1, n]$, для которых $a \equiv \sigma(\mod 2)$, $\sigma \in \{0, 1\}$. Заметим, что нижняя оценка вида $s(n) \ge \Omega(2^{n/2})$ следует из того, что множество $N^1(n)$ всех нечетных чисел, а также множество P_n чисел отрезка $[\lfloor n/2 \rfloor + 1, n]$ свободны от сумм (вместе с их подмножествами).

Вскоре после выхода статьи [12] были получены верхние оценки, из которых вытекает асимптотика логарифма величины $s(n)$. Н. Калкин [11] в 1990 г. и Н. Алон [10] в 1991 г. независимо доказали, что[1]

$$\log s(n) \leq (n/2)(1+o(1)). \tag{4}$$

В этих статьях использовались довольно сильные средства. Н. Калкин использовал известную теорему Семереди о существовании сколь угодно длинной арифметической прогрессии во множестве чисел положительной плотности. Н. Алон использовал локальную лемму Ловаса, теорему Краскала-Катоны и др. Впоследствии неравенство (4) передоказывалось различными авторами в работах, касающихся проблемы Камерона – Эрдёша (см., например, [2, 13]). В статье Н. Алона [10] эта оценка была получена с помощью сведения задачи к оценке числа независимых множеств в графах Кэли. Там же получена верхняя оценка числа $I(G)$ независимых множеств в регулярном степени k графе G на n вершинах. Оценка имеет вид

$$I(G) \leq 2^{(n/2)(1+O(k^{-0.1}))}. \tag{5}$$

Обозначим через $SF(G)$ число МСС в группе G. В [10] показано, что для всякой абелевой группы порядка n справедливо неравенство

$$s(G) \leq 2^{(n/2)(1+o(1))}. \tag{6}$$

Неравенство (6) следует из (5) с учетом того, что всякое МСС A является независимым в графе Кэли $\mathcal{C}_B(G)$ на множестве вершин G, порожденном $B \subseteq A$. В качестве B может быть взято произвольное непустое подмножество множества A. В [10] в роли B берутся МСС мощности, не превышающей $\log |G|$. Верхняя оценка для $\log s(n)$ получается как следствие неравенства (6). В той же статье Н. Алона поставлена задача об оценке числа МСС в абелевых группах.

1. МСС в группах простого порядка

Простейшими среди абелевых групп являются циклические группы Z_p простого порядка p. В. Лев и Т. Шон [21] доказали, что

$$(p-1)2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor}(1+O(2^{-\varepsilon p})) \leq SF(Z_p) \leq 2^{p/2-\delta},$$

где ε, δ – положительные константы. Б. Грин и И. Ружа получили в [15] верхнюю оценку вида $s(Z_p) \leq 2^{p/3+o(p)}$. Тем самым была получена асимптотика для $\log |SF(Z_p)|$. Обозначим через P_α множество простых чисел вида $3k+\alpha$, $\alpha \in \{-1, 1\}$. А.А. Сапоженко получил асимптотику для $|SF(Z_p)|$. В [5] доказана следующая

Теорема 1. *Существуют абсолютные константы c_α, $\alpha \in \{-1, 1\}$, такие, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любого $p \in P_\alpha$, удовлетворяющего неравенству $p \geq N$, выполняется неравенство*

$$\left| SF(Z_p) \Big/ \left((p-1) \cdot 2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor} \right) - c_\alpha \right| < \varepsilon.$$

Это неравенство получено с помощью фактов, касающихся структуры «больших» МСС в Z_p. Положим $k * A = \{ka : a \in A\}$. Постановка задачи и первый результат относительно структуры «больших» МСС в Z_p представлены в статье [19]. Наиболее сильным утверждением в этом направлении является следующая

[1] Везде $\log m = \log_2 m$.

Теорема 2 (Ж.-М. Дезуйе и В. Лев [17]). *Для всякого свободного от сумм множества $A \subseteq Z_p$ такого, что $|A| = m \geq 0.318p$, существует k, $1 \leq k \leq (p-1)/2$, для которого*

$$kA \subseteq [m, p-m]. \tag{7}$$

Обозначим через $S_p[t]$ семейство всех $A \in SF(Z_p)$ таких, что $A \subseteq [\lfloor p/3 \rfloor + 1 - t, \lfloor 2p/3 \rfloor] + t$. Теорема 2 показывает, что каждое достаточно большое $A \in SF(Z_p)$ отображается в t-центральное с $t = \lfloor p/3 \rfloor + 1 - |A|$ «умножением» на некоторую константу. Это позволяет получить требуемые ограничения на число МСС, содержащихся в МСС, близких к максимальным в Z_p. На самом деле для доказательства теоремы 1 достаточно аналогичного утверждения, касающегося МСС размера $m \geq 0.33p$. Это неравенство получено в работе В. Льва [19]. Отметим ещё, что Ж.-М. Дезуйе и Г.А. Фрейман в [17] доказали аналогичный результат для $m \geq 0.324p$. Заметим, что как показали независимо О. Сисаск и А.Б. Дайняк[2], эти результаты перестают быть справедливыми для МСС мощности m, меньшей чем $p/4 + 2$.

Доказательство теоремы 1 основано на том, что каждое МСС содержится в некотором нерасширяемом, то есть в таком МСС, что при добавлении к нему любого элемента оно перестает быть свободным от сумм. Семейство $\mathcal{M}_p$ всех нерасширяемых МСС делится на два подсемейства $\mathcal{M}'_p$, состоящее из тех $A \in \mathcal{M}_p$, для которых $|A| \geq 0.33p$, и $\mathcal{M}''_p = \mathcal{M}_p \setminus \mathcal{M}'_p$. Б. Грин и И. Ружа [14] доказали, что $|\mathcal{M}_p| \leq 2^{o(p)}$. Поэтому $|\mathcal{M}''_p| \leq 2^{(0.33+o(1))p}$. Из результата В. Льва [19] следует, что для всякого множества $A \in \mathcal{M}'_p$ такого, что $|A| \geq 0.33p$, существует k, $1 \geq k \leq (p-1)/2$, такое, что $kA \in S_p[t]$ для $t \leq (1/3 - 0.33)p$. Простые соображения позволяют вывести отсюда асимптотическое соотношение

$$|SF(Z_p)| \sim \frac{p-1}{2}\, |S_p[t]|.$$

Таким образом, задача сводится к получению асимптотики для $|S_p[t]|$. Эта асимптотика получается с помощью оценки числа независимых множеств в графах, полученной в [7].

2. МСС в абелевых группах

В 2001 г. В. Лев, Т. Лучак и Т. Шон [20] получили асимптотику числа МСС в абелевых группах четного порядка.

Теорема 3. *Существует абсолютная константа δ такая, что число множеств, свободных от сумм, в абелевой группе G порядка n равно*

$$\left(2^{\nu(G)} - 1\right) 2^{n/2} + O\left(2^{(1/2-\delta)n}\right),$$

где $\nu(G)$ – число компонент четного порядка в каноническом разложении группы G в прямую сумму циклических подгрупп.

Из доказательства следует, что величина δ имеет порядок 10^{-8}. А.А. Сапоженко независимо доказал в [4] следующие неравенства.

Теорема 4. *Для достаточно больших четных n для любой абелевой группы G порядка n с числом подгрупп индекса 2, равным t, справедливы неравенства*

$$t \cdot 2^{n/2} - 2^{(n/4)(1+o(1))} \leq |SF(G)| \leq t \cdot 2^{n/2} + 2^{n(1/2-c)}, \tag{8}$$

где $c > 0.017$.

[2] Личное сообщение.

Эти две теоремы устанавливают асимптотику величины $|SF(G)|$ для абелевых групп четного порядка. Т. Петросян [3] доказал аналог теоремы 8 для некоммутативных групп. В [20] доказана следующая

Лемма 1. *Для всякого графа* $\Gamma = (V, E)$ *со средней степенью вершины* $\overline{d}(\Gamma) \geq (1-\lambda)|V|$ *существует* $\Gamma = (V', E')$ *такой, что*
i) $|V'| \geq (1-\sqrt{\lambda})|V|$*;*
ii) $d(\Gamma) > (1-2\sqrt{\lambda})|V|$*, где* $d(\Gamma)$ *– минимальная степень вершины в графе* Γ*.*

Лемма играет существенную роль в доказательстве и представляет самостоятельный интерес. Другим важным для доказательства утверждением в [20] является

Лемма 2. *Для всякого* $A \subseteq G$*, любого* $p \in (0,1)$ *и любого целого* $K \geq 0$ *такого, что* $p^2K \geq 6\ln n$*, существует подмножество* $R \subseteq A$*, обладающее следующими свойствами:*
i) $|R| \leq 2p|A|$*;*
ii) $D_K(A) \subseteq R - R$*.*

Основная идея доказательства теорем 3 и 4 состоит в том, чтобы показать, что почти все МСС в $FS(G)$ являются подмножествами смежных классов по подгруппам индекса 2 группы G. Такие МСС назовем *хорошими*, а все остальные – *плохими*. В обеих обсуждаемых статьях доказывается, что плохих МСС «мало». Пусть $\varepsilon > 0$. При достаточно больших n для плохих МСС малой мощности справедливо неравенство

$$|\{A \in SF(G)\colon |A| \leq (1-\varepsilon)n/4\}| = O(2^{(1/2-\varepsilon^2/7)n}).$$

Остается доказать, что плохих МСС большой мощности «мало». Для этого в обеих статьях используется следующая теорема М. Кнезера [18]. Положим $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Теорема 5. *Пусть* A *и* B *непустые подмножества абелевой группы* G *такие, что* $|A+B| \leq |A|+|B|-1$*. Тогда существует подгруппа* H *группы* G *такая, что*

$$A + B + H = A + B \quad \text{и} \quad |A + B| \geq |A + H| + |B + H| - |H|. \tag{9}$$

Теорема Кнезера накладывает ограничения на структуру множества $A + B$ в случае, когда $|A+B| \leq |A|+|B|-1$. С использованием этой теоремы получается оценка числа плохих МСС.

В статье [4] также используется теорема Кнезера, но верхняя оценка числа плохих МСС проводится с помощью следующих трех теорем, дающих верхние оценки числа независимых множеств в регулярных графах [8].

Теорема 6. *Пусть* Γ *–* n*-вершинный регулярный граф степени* k*. Тогда при достаточно больших* n *и* k

$$|\mathcal{I}(\Gamma)| \leq 2^{(n/2)\left(1+O\left(\sqrt{(\log k)/k}\right)\right)}. \tag{10}$$

Эта теорема улучшает остаточный член в неравенстве Алона (5).

Теорема 7. *Для любого* n*-вершинного регулярного графа* Γ *степени* k *и числа* β *такого, что* $0 < \beta < 1$*, пусть* $I_\beta(\Gamma)$ *– число независимых множеств* A *графа* Γ *таких, что* $\big||A| - n/4\big| \geq \beta n/4$*. Тогда при достаточно больших* n *и* k

$$I_\beta(\Gamma) \leq 2^{(n/2)\left(1-\beta^2/(2\ln 2)+O\left(\sqrt{(\log k)/k}\right)\right)}. \tag{11}$$

Теорема 8. *Пусть $G = (V; E)$ – n-вершинный регулярный граф степени k – является δ-расширителем для некоторого $0 \le \delta < 1$. Тогда при достаточно больших n и k выполняется неравенство*

$$|\mathcal{I}(G)| \le 2^{(n/2)\left(1-\delta/7+O\left(\sqrt{(\log k)/k}\right)\right)}. \tag{12}$$

Результаты последних трех теорем были усилены и обобщены на почти регулярные графы [6]. Эти три теоремы используются следующим образом при оценке числа плохих МСС. Пусть K – произвольная подгруппа индекса 2 группы G, $K' = G \setminus K$ и $A \subseteq G$ – плохое МСС. По определению $A \cap K' \ne \varnothing$. Пусть $\mathcal{C}_B(K')$ – граф Кэли, порожденный множеством $B = A \cap K$ на множестве K'. Ясно, что $B \in SF(K)$, а $A \setminus B$ – независимое множество в графе $\mathcal{C}_B(K')$. Отсюда

$$|SF(G)| \le \sum_{B \in SF(K)} I(\mathcal{C}_B(K')). \tag{13}$$

Далее рассматриваются случаи в зависимости от размера множеств B, $C = A \cap K'$ и $B + B$. Если $|B|$ мало, используется то обстоятельство, что число всех подмножеств $B \subseteq K$ малой мощности мало, а для числа множеств C используется теорема 6. Если $|B|$ не слишком мало, но все же $\big|B| \le (n/4)(1-\beta)$, то для оценки числа МСС B используется неравенство (11) и теорема 6 для оценки числа множеств C. Если $\big|B| > (n/4)(1-\beta)$, используются теорема Кнезера и теорема 8.

Бен Грин и Имре Ружа в [14] получили асимптотику логарифма числа МСС в абелевых группах с заданным размером максимального по мощности МСС. Ими доказана следующая

Теорема 9. *Пусть размер максимального по мощности МСС в абелевой группе G равен $\mu(G)n$. Тогда*

$$|SF(Z_p)| = 2^{(\mu(G)+o(1))n}. \tag{14}$$

В [14] абелевы группы разбиты на три класса следующим образом.

Определение. Если $|G|$ делится на простое число p вида $p \equiv 2 (mod\, 3)$, то G относится к *типу* I. Если $|G|$ не делится на простое число p вида $p \equiv 2 (mod\, 3)$, но $|G|$ делится на 3, то G относится к *типу* II. В остальных случаях G относится к *типу* III.

Далее определяется величина $\nu(G)$, принимающая значения из отрезка $[2/7, 1/2]$.

Если G – абелева группа типа I, то $\nu(G) = 1/3 + 1/p$, где p – наименьший простой делитель величины $|G|$ вида $p \equiv 2 (mod\, 3)$.

Если G – абелева группа типа II, то $\nu(G) = 1/3$.

Если G – абелева группа типа III, то $\nu(G) = 1/3 - 1/3m$, где m – наибольший порядок элемента группы G.

В [14] доказаны следующие утверждения.

Теорема 10. *Для всякой абелевой группы G*

$$\mu(G) = \nu(G). \tag{15}$$

Теорема 11. *Для всякой абелевой группы G типа I*

$$|SF(G)| = Wt_p 2^{\mu(G)n}(1 + o_p(1)), \tag{16}$$

где t_p *– число элементов порядка* p *в группе* G, *а* p *– наименьший простой делитель вида* $p \equiv 2(mod\,3)$ *числа* $|G|$. *При этом* $W = 1$ *при* $p = 2$ *и* $W = 1/2$ *в противном случае. Через* $o_p(1)$ *обозначается функция, стремящаяся к 0 при* $n \to \infty$ *и зависящая от* p.

Теорема 11 обобщает теоремы 3 и 4 на случай абелевых групп типа I.

3. Гипотеза Камерона – Эрдёша

Гипотеза Камерона – Эрдёша о числе МСС в отрезке $[1, n]$ была доказана независимо Б. Грином [13] и А.А. Сапоженко [7] в 2003 г. Напомним, что гипотеза состояла в том, что для числа $s(n)$ МСС, содержащихся в отрезке $[1, n]$, справедливо равенство $s(n) = O(2^{n/2})$.

Теорема 12. *Существуют положительные константы* c_0' *и* c_1' *такие, что* $s(n) \sim c_0' 2^{\lceil n/2 \rceil}$ *для четных* n *и* $s(n) \sim c_1' 2^{\lceil n/2 \rceil}$ *для нечетных* n.

Заметим, что существует связь между константами c_0 и c_1 из (1) и (2) и константами c_0' и c_1' из формулировки теоремы 12. Именно, справедливы равенства

$$c_0' = c_0 + 1, \quad c_1' = c_1 + 1. \tag{17}$$

Напомним, что для c_0 и c_1 справедливы неравенства (3). Пусть, как и прежде, $N^1(n)$ – множество всех нечетных чисел, а P_n – множество чисел отрезка $[\lfloor n/2 \rfloor + 1, n]$. Равенства (17) следуют из того, что, как доказано в [7] и [13], справедливо асимптотическое равенство

$$s(n) \sim 2^{|N^1(n)|} + 2^{|P_n|}. \tag{18}$$

Отсюда и из (1), (2) вытекает теорема 12, а значит, и равенства (17), поскольку $|N^1(n)| = 2^{\lceil n/2 \rceil}$.

Идея доказательства теоремы 12 в [7] основана на понятии системы контейнеров. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – два семейства подмножеств множества X. Семейство $\mathcal{B}$ назовем *системой контейнеров* для $\mathcal{A}$, если для всякого $A \in \mathcal{A}$ существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $A \subseteq B$. Если $\mathcal{B}$ является системой контейнеров для $\mathcal{A}$, то, очевидно,

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} 2^{|B|}. \tag{19}$$

Например, семейство максимальных по включению МСС отрезка $[1, n]$ является системой контейнеров для семейства $\mathcal{S}([1, n])$ всех МСС отрезка $[1, n]$. В рассматриваемом случае имеется два «больших» контейнера – это множество $N^1(n)$ нечетных чисел отрезка $[1, n]$ и отрезок $[n/3, n]$. МСС, содержащиеся в этих двух «больших» контейнерах, назовем «стандартными», а остальные – «нестандартными». Теперь теорема 12 равносильна утверждению о том, что для семейства S_n нестандартных МСС отрезка $[1, n]$ справедливо соотношение

$$|S_n| = o(2^{n/2}). \tag{20}$$

Для доказательства соотношения (20) в [7] строится так называемая *правильная* система контейнеров для семейства S_n.

Будем использовать обозначение $B_{i,p}$ для множества $B \cap [i, p]$, и пусть $B_{i,p}^\sigma = B_{i,p} \cap N^\sigma(n)$. Систему $\mathcal{B}$ контейнеров для S_n будем называть *правильной*, если выполнены следующие условия:

1) для достаточно больших n и любого $B \in \mathcal{B}$

$$|B| \leq n(1/2 + o(1));$$

2) для достаточно больших n

$$|\mathcal{B}| \leq 2^{o(n)};$$

3) для любых i и достаточно больших p

$$||B_{i,p}| - p/2| = o(p);$$

4) для любых $\sigma \in \{0, 1\}$, i и достаточно больших p

$$||B^{\sigma}_{i,p}| - p/4| = o(p).$$

Заметим, что асимптотика величины $\log s(n)$ вытекает из (19) и существования правильной системы контейнеров для семейства нестандартных МСС. Более того, достаточно, чтобы выполнялись условия 1) и 2). Для доказательства асимптотики величины $s(n)$, наряду с условием существования правильной системы контейнеров, используется еще следующая теорема

Теорема 13 (Г.А. Фрейман [9]). *Если множество K целых чисел таково, что $|K + K| \leq 2|K| - 1 + b$, где $0 \leq b \leq |K| - 3$, то K содержится в арифметической прогрессии длины $|K| + b$.*

Теорема Фреймана позволяет учесть взаимодействие фрагментов правильной системы контейнеров и показать, что, грубо говоря, в каждом из контейнеров оказывается существенной доля элементов, не принадлежащих нестандартному множеству.

Тройкой Шура называется неупорядоченный набор чисел a, b, c, если эти числа, взятые в некотором порядке, удовлетворят уравнению $x + y = z$. Идея «системы контейнеров» использовалась и в статье Б. Грина [13] в следующем виде.

Теорема 14. *Существует семейство $\mathcal{F}$, обладающее следующими свойствами:*
i) Каждый член семейства $\mathcal{F}$ имеет не более $o(N^2)$ троек Шура;
ii) Всякое МСС A содержится в некотором $F \in \mathcal{F}$;
iii) $|\mathcal{F}| \leq 2^{o(N)}$.

Семейство $\mathcal{F}$ из теоремы 14 называется в [13] *грануляцией.*

Работа поддержана РФФИ (проект № 07-01-00444).

Summary

A.A. Sapozhenko. On the Number of Sum-free Sets.

A survey of results concerning the number of sum-free sets is presented. Statements, ideas of proofs, and techniques are discussed.

Key words: sum-free sets, Abelian groups, cyclic groups.

Литература

1. *Омельянов К.Г.* Оценки констант Камерона – Эрдёша // Дискр. матем. – 2006. – Т. 18, Вып. 2. – С. 55–70.

2. *Омельянов К.Г., Сапоженко А.А.* О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел // Дискр. матем. – 2002. – Т. 14, Вып. 3. – С. 4–7.

3. *Петросян Т.Г.* О числе множеств, свободных от произведений, в группах четного порядка // Дискр. матем. – 2005. – Т. 17, Вып. 1. – С. 89–101.

4. *Сапоженко А.А.* Асимптотика числа множеств, свободных от сумм, в абелевых группах четного порядка // Докл. РАН. – 2002. – Т. 383, № 4. – С. 454–457.

5. *Сапоженко А.А.* Асимптотика числа множеств, свободных от сумм, в группах простого порядка // Докл. РАН. – 2009. – Т. 424, № 6. – С. 1–2.

6. *Сапоженко А.А.* Верхняя оценка числа независимых множеств в графах // Докл. РАН. – 2007. – Т. 373, № 4. – С. 467–470.

7. *Сапоженко А.А.* Гипотеза Камерона – Эрдёша // Докл. РАН. – 2003. – Т. 393, № 6. – С. 749–752.

8. *Сапоженко А.А.* О числе независимых множеств в расширителях // Дискр. матем. – 2001. – Т. 13, Вып. 1. – С. 56–62.

9. *Фрейман Г.А.* Сложение конечных множеств // Изв. вузов. Матем. – 1959. – № 6 (13). – С. 202–213.

10. *Alon N.* Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of Abelian groups // Israel J. Math. – 1991. – V. 73. – P. 247–256.

11. *Calkin N.* On the number of sum-free set // Bull. London Math. Soc. – 1990. – V. 22, No 2. – P. 141–144.

12. *Cameron P.J, Erdős P.* On the number of sets of integers with various properties // Number theory (Banff, AB, 1988), 61–79, de Gruyter, Berlin, 1990.

13. *Green B.J.* The Cameron-Erdős conjecture // Bull. London Math. Soc. – 2004. – V. 36, No 6. – P. 769–778.

14. *Green B., Ruzsa I.Z.* Sum-free sets in Abelian groups // Israel J. Math. – 2005. – V. 147. – P. 157–189.

15. *Green B., Ruzsa I.Z.* Counting sumsets and sum-free sets modulo a prime // Studia Sci. Math. Hungarica. – 2004. – V. 41, No 3. – P. 285–293.

16. *Deshouillers J.-M., Lev V.F.* Refined bound for sum-free sets in groups of prime order // Bull. London Math. Soc. – 2008. – V. 40, No 5. – P. 863–875.

17. *Deshouillers J.-M., Freiman G.A.* On sum-free sets modulo p // Functiones et Approximatio. – 2006. – V. 35. – P. 51–59.

18. *Kneser M.* Ein Satz über abelschen Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen // Math. Zeit. – 1955. – Bd. 61. – S. 429–434.

19. *Lev V.F.* Large sum-free sets in Z/pZ // Israel J. Math. – 2006. – V. 154. – P. 221–234.

20. *Lev V.F. Łuczak T., Schoen T.* Sum-free sets in Abelian groups // Israel J. Math. – 2001. – V. 125. – P. 347–367.

21. *Lev V.F., Schoen T.* Cameron-Erdős modulo a prime // Finite Fields Appl. – 2002. – V. 8, No 1. – P. 108–119.

Поступила в редакцию
24.03.09

Сапоженко Александр Антонович – доктор физико-математических наук, профессор факультета ВМК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *sapozhenko@mail.ru*