Известия вузов. Математика
2018, №8, с. 52–60

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.М. РОМАНОВА

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КРИВЫХ НА ФАКТОР-МНОГООБРАЗИИ НЕВЫРОЖДЕННЫХ АФФИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Аннотация. На фактор-многообразии невырожденных аффинорных полей по действию группы функций, не обращающихся в нуль ни в одной точке, строится объект связности Картана. Для такой связности двумя способами находится общее семейство геодезических кривых, сначала как решение функционального дифференциального уравнения второго порядка, а затем как интегральные кривые левоинвариантных векторных полей на группе Ли.

Ключевые слова: бесконечномерные дифференцируемые многообразия, группа и алгебра Ли, линейная связность, связность Картана, геодезические линии, левоинвариантные векторные поля, однопараметрические подгруппы группы Ли.

УДК: 514.763

Введение

В статье рассматривается многообразие T_0 невырожденных тензорных полей валентности $(1, 1)$ конечного класса гладкости на компактном многообразии M. На этом многообразии T_0 действует группа функций F_0, не обращающихся в нуль ни в одной точке многообразия M. Фактор-многообразие T_0/F_0 по действию этой группы образует бесконечномерную группу Ли. На любой группе Ли можно определить связность Картана, относительно которой все левоинвариантные векторные поля ковариантно постоянны. На группах Ли существуют три связности Картана: левая, правая и средняя [1].

В статье [2] построен объект левой связности Картана на фактор-многообразии невырожденных аффинорных полей, и в [3] найдены некоторые семейства геодезических кривых в частных случаях. Данная статья является продолжением и обобщением [2] и [3].

В данной работе рассматриваются два метода нахождения общих решений уравнений геодезических кривых связности Картана на фактор-многообразии T_0/F_0. Каждый из методов уникален по своему решению в виду специфики структуры линейной связности на бесконечномерном многообразии, поэтому в работе приводятся оба способа решения. Согласно первому способу нахождение геодезических кривых локально сводится к решению соответствующего дифференциального уравнения второго порядка. Полученное уравнение в данном случае отличается особой сложностью решения. Суть второго метода решения заключается в том, что геодезические кривые, проходящие через единицу I на группе Ли T_0/F_0, являются однопараметрическими подгруппами. Однопараметрические подгруппы группы Ли можно отождествить с интегральными кривыми левоинвариантных векторных полей, проходящих через единицу I ([1], с. 99–100). Здесь $I \in T_0$ — единичное аффинорное поле.

Напомним только самые важные определения и теорему, применяемые в доказательствах утверждений из работ [2] и [3].

Поступила 12.05.2017

Определение 1 ([4], с. 64, 5.12.1)**.** Множество G называется *группой Ли класса* C^∞, если
1) G является алгебраической группой,
2) G является многообразием класса C^∞,
3) имеются операции умножения и взятия обратного элемента класса C^∞.

Определение 2 ([1], с. 101)**.** Пусть G — группа Ли, $\mathbf{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда линейная связность ∇ называется левой *связностью Картана* на группе Ли G, если $\nabla X = 0\ \forall X \in \mathbf{g}$.

Теорема 1 ([4], с. 72, 6.2.3; [5], с. 239, п. 5)**.** *Пусть F – группа Ли, T – многообразие класса C^∞ и $\rho : (g, x) \in F \times T \to gx \in T$ — действие класса C^∞ слева. Тогда если*
1) F действует на T свободно и собственно,
2) для любой точки $x \in T$ $\rho_x : g \in F \to gx \in T$ есть иммерсия,
то на фактор-множестве T/F существует и единственна структура гладкого многообразия такая, что каноническая проекция $\pi : T \to T/F$ является субмерсией и $(T, \pi, T/F, F)$ есть левое главное расслоение.

Приведем еще некоторые сведения из теории групп и алгебр Ли.

Для произвольного элемента $A \in \mathbf{g}$ из алгебры Ли $\mathbf{g}$ с единицей I рассмотрим бесконечный ряд

$$I + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \cdots .$$

По отношению к произвольной мультипликативной норме $\|\cdot\|$ этот ряд абсолютно сходится ([6], лекция 2, с. 44–47):

$$\left\| \sum_n \frac{t^nA^n}{n!} \right\| \le \sum_n \left\| \frac{t^nA^n}{n!} \right\| \le \sum_n \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n = e^{|t|\|A\|}.$$

Обозначим сумму ряда через $\exp(tA) = \sum\limits_n \frac{t^nA^n}{n!}$. Она называется экспоненциальной функцией на алгебре Ли $\mathbf{g}$. Такой показательный вид имеют все однопараметрические подгруппы группы Ли G с алгеброй $\mathbf{g}$, а следовательно, и все левоинвариантные векторные поля.

Экспоненциальная функция на алгебре Ли $\mathbf{g}$ обладает свойством $\exp((t+s)A) = \exp(tA)\exp(sA)$. Для произвольных $\mathbf{g}$-значных функций $A(t)$ справедливы некоторые свойства элементарного анализа, например, свойства производной по t, но необходимо соблюдать предосторожности, связанные с некоммутативностью умножения в алгебре Ли $\mathbf{g}$ ([6], лекция 2, с. 44–47).

Если аргумент $A(t)$ зависит от некоторой переменной t, то производная обобщенной экспоненты $(\exp A(t))' \ne (\exp A(t))A'(t)$. В частном случае, когда $A(t) = A_1 g(t)$, где A_1 — постоянное векторное поле, $g(t)$ — обыкновенная функция действительного аргумента t, выполняется необходимое равенство для производной $(\exp(A_1 g(t)))' = (\exp(A_1 g(t)))A_1 g'(t)$.

1. Структура группы Ли на $\mathbf{T}_0/\mathbf{F}_0$

Введем следующие обозначения: M — m-мерное компактное многообразие класса C^q $(1 \le q < \infty)$, $T^1_1(M)$ — множество всех тензорных (аффинорных) полей валентности $(1,1)$ класса C^{q-1}, являющееся банаховым пространством с нормой

$$\|A\|_T = \sup_{r=\overline{0,q-1}} \sup_{1\le\alpha,\beta\le m} \sup_{i=\overline{1,k}} \sup_{x\in\overline{V_i}} \left| D^r (A^\alpha_\beta)_{\phi_i(x)} \right|.$$

Здесь (A^α_β) — координаты тензорного поля A относительно некоторой карты (U_i, ϕ_i, R^m) в произвольной точке $x \in M$, где $\{(U_i, \phi_i, R^m)\}_{i=\overline{1,k}}$ — конечный атлас на M, который существует в силу компактности многообразия M, $\{V_i\}_{i=\overline{1,k}}$ — покрытие M, $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ $\forall i = \overline{1,k}$.

Норма $\|\cdot\|_T$ не является мультипликативной, но она порождает мультипликативную норму вида $\|A\| = 2^{q-1}\|A\|_T$, так как для любых $A, B \in T^1_1(M)$ выполняется соответствующее неравенство

$$\|AB\| = 2^{q-1}\|AB\|_T = 2^{q-1} \sup_{r=\overline{0,q-1}} \sup_{1\le\alpha,\beta\le m} \sup_{i=\overline{1,k}} \sup_{x\in\overline{V_i}} |D^r(A^\alpha_\gamma B^\gamma_\beta)_{\phi_i(x)}| =$$

$$= 2^{q-1} \sup_{r=\overline{0,q-1}} \sup_{1\le\alpha,\beta\le m} \sup_{i=\overline{1,k}} \sup_{x\in\overline{V_i}} \left| \sum_{n=0}^{r} C^n_r D^n(A^\alpha_\gamma)_{\phi_i(x)} D^{r-n}(B^\gamma_\beta)_{\phi_i(x)} \right| \le$$

$$\le 2^{q-1} \sup_{r=\overline{0,q-1}} \sup_{1\le\alpha,\beta\le m} \sup_{i=\overline{1,k}} \sup_{x\in\overline{V_i}} \sum_{n=0}^{r} C^n_r |D^n(A^\alpha_\gamma)_{\phi_i(x)} D^{r-n}(B^\gamma_\beta)_{\phi_i(x)}| \le$$

$$\le 2^{q-1} \sup_{r=\overline{0,q-1}} \sum_{n=0}^{r} C^n_r \|A\|_T \|B\|_T \le 2^{q-1}\|A\|_T\, 2^{q-1}\|B\|_T = \|A\|\,\|B\|.$$

Если такая мультипликативная норма $\|\cdot\|$ вводится на алгебре Ли, то будем называть ее согласованной со структурой алгебры.

Пусть $T_0 \subset T^1_1(M)$ — подмножество всех невырожденных аффинорных полей, $F(M)$ — множество всех функций класса C^{q-1} на M, являющееся банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_F = \sup_{r=\overline{0,q-1}} \sup_{i=\overline{1,k}} \sup_{x\in\overline{V_i}} \left| D^r(f\circ\phi_i^{-1})_{\phi_i(x)} \right|,$$

$F_0 \subset F(M)$ — множество функций, не обращающихся в нуль ни в одной точке.

На T_0 определим отношение эквивалентности $A \approx B \Leftrightarrow \exists f \in F_0 : A = fB$. Тогда T_0/F_0 — фактор-множество многообразия T_0 по действию группы F_0, $\pi : A \in T_0 \to [A] \in T_0/F_0$.

Имеют место следующие утверждения, доказательства которых приводятся в [2], [3].

Утверждение 1. F_0 и T_0 являются группами Ли относительно соответствующих операций умножения.

Утверждение 2. T_0/F_0 является фактор-многообразием и группой Ли относительно операции умножения, а $\pi_0 = (T_0, \pi, T_0/F_0, F_0)$ есть главное расслоение.

2. Связность Картана на группе Ли $\mathbf{T}_0/\mathbf{F}_0$

На T_0/F_0 карта в точке $[A_0]$ имеет вид $c_{A_0} = (U_{A_0}, \phi_{A_0}, H_{A_0})$ для некоторой фиксированной точки $A_0 \in T_0$, где

$$H_{A_0} = \{\widetilde{A} \in T_0 \subset T^1_1(M) \mid \mathrm{Tr}(A_0^{-1}\widetilde{A}) = 0\}, \quad U_{A_0} = \{[A] \in T_0/F_0 | \,\mathrm{Tr}(A_0^{-1}A) \ne 0\},$$

координатное отображение и обратное к нему действуют по правилам

$$\phi_{A_0} : [A] \in U_{A_0} \to \widetilde{A} = \frac{m}{\mathrm{Tr}(A_0^{-1}A)}A - A_0 \in H_{A_0}, \quad \phi^{-1}_{A_0} : \widetilde{A} \in H_{A_0} \to [\widetilde{A} + A_0] \in U_{A_0}.$$

При этом $\widetilde{A} + A_0 = \frac{m}{\mathrm{Tr}(A_0^{-1}A)}A \in T_0$ — невырожденное аффинорное поле, т. е. существует обратный элемент $(\widetilde{A} + A_0)^{-1} = \frac{\mathrm{Tr}(A_0^{-1}A)}{m}A^{-1}$.

Карты $\{c_{A_0}\}_{A_0\in T_0}$ образуют атлас на T_0/F_0. Преобразование координат при переходе от карты c_{A_0} к c_{B_0} имеет вид

$$(\phi_{B_0}\circ\phi^{-1}_{A_0})(\widetilde{A}) = \phi_{B_0}([\widetilde{A} + A_0]) = \frac{m}{\mathrm{Tr}(B_0^{-1}(\widetilde{A} + A_0))}(\widetilde{A} + A_0) - B_0.$$

Пусть $X : [A] \in T_0/F_0 \to X_{[A]} \in T_{[A]}(T_0/F_0)$, $Y : [A] \in T_0/F_0 \to Y_{[A]} \in T_{[A]}(T_0/F_0)$ — векторные поля на T_0/F_0, $\widetilde{X} : \widetilde{A} \in H_{A_0} \to \widetilde{X}_{\widetilde{A}} = T(\phi_{A_0})_{[A]}(X_{\phi_{A_0}^{-1}(\widetilde{A})}) \in T_1^1(M)$, $\widetilde{Y} : \widetilde{A} \in H_{A_0} \to \widetilde{Y}_{\widetilde{A}} = T(\phi_{A_0})_{[A]}(Y_{\phi_{A_0}^{-1}(\widetilde{A})}) \in T_1^1(M)$ — локальные представления этих векторных полей в карте c_{A_0}.

Алгебру Ли группы Ли можно отождествить с пространством всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли, т. е. таких векторных полей, что $X_{[A]} = T(L_{[A]})_{[I]}(X_{[I]})$, где $L_{[A]} : [B] \in T_0/F_0 \to L_{[A]}([B]) = [AB] \in T_0/F_0$ — левый сдвиг на группе Ли T_0/F_0, а $I \in T_0$ — тождественный аффинор.

То же самое в картах c_{B_0} и $c_{A_0B_0}$ будет иметь вид $\widetilde{X}_{\widetilde{A}} = D(\widetilde{L}_{\widetilde{A}})_{\widetilde{I}}(\widetilde{X}_{\widetilde{I}})$,

$$\widetilde{L}_{\widetilde{A}} = \phi_{A_0B_0} \circ L_{[A]} \circ \phi_{B_0}^{-1} : \widetilde{B} \in H_{B_0} \to [B] = [\widetilde{B} + B_0] \in U_{B_0} \to \\ \to [AB] \in U_{A_0B_0} \to \widetilde{AB} = \frac{m}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}AB)}AB - A_0B_0 \in H_{A_0B_0},$$

где

$$A = \frac{\mathrm{Tr}(A_0^{-1}A)}{m}(\widetilde{A} + A_0), \quad B = \frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1}B)}{m}(\widetilde{B} + B_0).$$

Итак,

$$\widetilde{L}_{\widetilde{A}}(\widetilde{B}) = \frac{m}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)(\widetilde{B} + B_0))}(\widetilde{A} + A_0)(\widetilde{B} + B_0) - A_0B_0.$$

Тогда производная от сдвига равна

$$D(\widetilde{L}_{\widetilde{A}})_{\widetilde{B}}(\widetilde{C}) = \frac{m(\widetilde{A} + A_0)}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)(\widetilde{B} + B_0))}\left[\widetilde{C} - \frac{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)\widetilde{C})}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)(\widetilde{B} + B_0))}(\widetilde{B} + B_0)\right].$$

Отсюда при $\widetilde{B} = \widetilde{I}$ и $I = \frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1})}{m}(\widetilde{I} + B_0)$ получаем

$$\widetilde{X}_{\widetilde{A}} = D(\widetilde{L}_{\widetilde{A}})_{\widetilde{I}}(\widetilde{X}_{\widetilde{I}}) = \\ = \frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1})}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0))}(\widetilde{A} + A_0)\left[\widetilde{X}_{\widetilde{I}} - \frac{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)\widetilde{X}_{\widetilde{I}})}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0))}I\right]. \quad (1)$$

Связность Картана будет определяться формулой

$$\Gamma_{\widetilde{A}}(\widetilde{X}_{\widetilde{A}}, \widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = -D\widetilde{X}_{\widetilde{A}}(\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}).$$

Найдем производную

$$D\widetilde{X}_{\widetilde{A}}(\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = \Bigg(- \frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1})\,\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}})}{(\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)))^2}(\widetilde{A} + A_0) + \\ + \frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1})}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0))}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}\Bigg)\left[\widetilde{X}_{\widetilde{I}} - \frac{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)\widetilde{X}_{\widetilde{I}})}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0))}I\right] + \\ + \frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1})}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0))}(\widetilde{A} + A_0)\Bigg[- \frac{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}\widetilde{X}_{\widetilde{I}})}{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0))} + \\ + \frac{\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)\widetilde{X}_{\widetilde{I}})}{(\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A} + A_0)))^2}\,\mathrm{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}})\Bigg].$$

Распишем множитель в первом и последнем слагаемых, применяя формулу (1):

$$\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}\times$$
$$\times \operatorname{Tr}\left((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0)\left[\widetilde{Y}_{\widetilde{I}} - \frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0)\widetilde{Y}_{\widetilde{I}})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}I\right]\right) =$$
$$= \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}[\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0)\widetilde{Y}_{\widetilde{I}}) - \operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0)\widetilde{Y}_{\widetilde{I}})] = 0.$$

Тогда

$$D\widetilde{X}_{\widetilde{A}}(\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = \widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}} - \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}\frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}\widetilde{X}_{\widetilde{I}})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}(\widetilde{A}+A_0).$$

Рассмотрим последнее слагаемое в этом выражении. Выразим $\widetilde{X}_{\widetilde{I}}$ через $\widetilde{X}_{\widetilde{A}}$ из формулы (1):

$$\widetilde{X}_{\widetilde{I}} = \frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}} + \frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0)\widetilde{X}_{\widetilde{I}})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}I,$$

получим

$$\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}\widetilde{X}_{\widetilde{I}}) = \frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}}).$$

Следовательно,

$$D\widetilde{X}_{\widetilde{A}}(\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = \widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}} - (\widetilde{A}+A_0)\frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))}.$$

Значит, объект связности Картана в карте c_{A_0} имеет вид

$$\Gamma_{\widetilde{A}}(\widetilde{X}_{\widetilde{A}},\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = -D\widetilde{X}_{\widetilde{A}}(\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = (\widetilde{A}+A_0)\frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(\widetilde{A}+A_0))} - \widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}}.$$

Итак, справедливо

Утверждение 3. Фактор-многообразие невырожденных аффинорных полей по действию группы обратимых функций есть группа Ли и, следовательно, относительно связности Картана является пространством линейной связности, допускающим абсолютный параллелизм.

3. Геодезические кривые связности Картана на $\mathbf{T}_0/\mathbf{F}_0$ как решение дифференциального уравнения второго порядка

Для упрощения дальнейших вычислений и не теряя общности (в силу произвольности аффинорного поля), положим $B_0 = I$, где I — единичное аффинорное поле. В силу гладкости операции левого сдвига затем можно сместиться в любую точку B_0. Тогда в карте $c_{A_0} = (U_{A_0}, \phi_{A_0}, H_{A_0})$ объект связности Картана примет вид

$$\Gamma_{\widetilde{A}}(\widetilde{X}_{\widetilde{A}},\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}) = (\widetilde{A}+A_0)\frac{\operatorname{Tr}(A_0^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}})}{\operatorname{Tr}(A_0^{-1}(\widetilde{A}+A_0))} - \widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}} =$$
$$= \frac{1}{m}(\widetilde{A}+A_0)\operatorname{Tr}(A_0^{-1}\widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}}) - \widetilde{Y}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}+A_0)^{-1}\widetilde{X}_{\widetilde{A}} \quad (2)$$

в силу того, что $\widetilde{A} \in H_{A_0}$, т. е. $\operatorname{Tr}(A_0^{-1}\widetilde{A}) = 0$. Здесь $m = \dim M$.

Относительно карты c_{A_0} геодезические кривые $s = s(t)$ с каноническим параметром t, где $s : t \to s(t) \in H_{A_0} \subset T_1^1(M)$, определяются уравнением

$$s''(t) + \Gamma_{s(t)}(s'(t), s'(t)) = 0. \tag{3}$$

Для связности Картана (2) имеем

$$\Gamma_s(s', s') = (s + A_0)\frac{\mathrm{Tr}(A_0^{-1}s'(s + A_0)^{-1}s')}{m} - s'(s + A_0)^{-1}s',$$

причем $\mathrm{Tr}(A_0^{-1}s) = 0$, так как $s(t) \in H_{A_0}$ $\forall t \in R$.

Тогда уравнение семейства геодезических кривых (3) примет вид

$$s'' + (s + A_0)\frac{\mathrm{Tr}(A_0^{-1}s'(s + A_0)^{-1}s')}{m} - s'(s + A_0)^{-1}s' = 0. \tag{4}$$

Будем искать решение дифференциального уравнения (4) в виде $s(t) = A_0V(t)$, где $V : t \in R \to V(t) \in H_I$, причем $\mathrm{Tr}\,V(t) = 0$ $\forall t \in R$. Тогда уравнение (4) приведется к виду

$$V'' + (I + V)\frac{\mathrm{Tr}(V'(I + V)^{-1}V')}{m} - V'(I + V)^{-1}V' = 0. \tag{5}$$

Умножая обе части (5) на $(I + V)^{-1}$, получим

$$(I + V)^{-1}V'' + I\frac{\mathrm{Tr}(V'(I + V)^{-1}V')}{m} - ((I + V)^{-1}V')^2 = 0. \tag{6}$$

Понизим порядок дифференциального уравнения (6), введя замену $Z(t) = (I+V(t))^{-1}V'(t) \in H_I$ $\forall t \in R$. Дифференцируя по t эту замену $Z' = (I + V)^{-1}V'' - ((I + V)^{-1}V')^2$, приходим к уравнению

$$Z' + I\frac{\mathrm{Tr}(V'(I + V)^{-1}V')}{m} = 0. \tag{7}$$

Исходя из (7), аффинорное поле Z' можно представить как $Z'(t) = p'(t)I$, где

$$p'(t) = -\frac{1}{m}\,\mathrm{Tr}(V'(t)(I + V(t))^{-1}V'(t))$$

— некоторая неизвестная функция действительного аргумента. Решением дифференциального уравнения $Z'(t) = p'(t)I$ является $Z(t) = p(t)I + A_1$, где $p(t)$ — первообразная функции $p'(t)$, A_1 — произвольное аффинорное поле.

Восстанавливая замену $Z = (I + V)^{-1}V'$, получим дифференциальное уравнение $(I + V)^{-1}V' = p(t)I + A_1$. Решением этого уравнения, переписанного в форме $V' = (I+V)(Ip(t)+A_1)$, является

$$V(t) = A_2e^{P(t)}\exp(A_1t) - I, \tag{8}$$

где $P(t)$ — первообразная функции $p(t)$, A_1, A_2 — произвольные аффинорные поля.

Здесь $e^{P(t)}$ — обычная экспоненциальная функция со сложным действительным аргументом $P(t)$, $\exp(A_1t)$ — обобщенное экспоненциальное отображение, применяемое к аффинорным полям. Такая экспонента существует, так как сходится соответствующий ряд относительно мультипликативной нормы $\|\cdot\|$ в пространстве аффинорных полей $T_1^1(M)$, которая является согласованной со структурой алгебры Ли группы Ли T_0/F_0.

Так как след $\mathrm{Tr}\,V = 0$, то $e^{P(t)} = \frac{m}{\mathrm{Tr}(A_2\exp(A_1(t))}$.

Теперь докажем, что (8) удовлетворяет дифференциальному уравнению (7). Достаточно показать, что для функции $P(t) = \ln \frac{m}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))}$, определяемой как первообразная функции $p(t)$, выполняется условие

$$P''(t) = -\frac{\mathrm{Tr}(V'(I+V)^{-1}V')}{m}.$$

Поскольку $V'(t) = (I + V(t))(P'(t)I + A_1)$, то

$$-\frac{\mathrm{Tr}(V'(I+V)^{-1}V')}{m} = -\frac{\mathrm{Tr}((I+V)(P'I + A_1)^2)}{m} =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))} \mathrm{Tr}(A_2(\exp(A_1 t))(P'^2 I + 2P'A_1 + A_1^2)) =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))}((P'(t))^2 \mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t)) + 2P'(t) \mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1) +$$

$$+ \mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1^2)) = -(P'(t))^2 - 2P'(t)\frac{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1)}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))} - \frac{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1^2)}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))}.$$

Дифференцируя соотношение $P(t) = \ln \frac{m}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))}$, имеем

$$P'(t) = -\frac{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1)}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))},$$

$$P''(t) = \frac{(\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1))^2}{(\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t)))^2} - \frac{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1^2)}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))}.$$

Продолжая вычисления, получим

$$-\frac{\mathrm{Tr}(V'(I+V)^{-1}V')}{m} = -\frac{(\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1))^2}{(\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t)))^2} +$$

$$+ 2\frac{(\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1))^2}{(\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t)))^2} - \frac{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t) A_1^2)}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))} = P''(t),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$V(t) = \frac{m}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))} A_2 \exp(A_1 t) - I$$

и решение уравнения (4) относительно карты c_{A_0} $\forall A_1, A_2 \in T_1^1(M)$ имеет вид

$$s(t) = A_0\left(\frac{m}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))} A_2 \exp(A_1 t) - I\right).$$

В случае, когда $B_0 \in T_0$ — произвольный невырожденный аффинор, решение будем искать виде $s(t) = A_0 B_0 V(t)$, причем $\mathrm{Tr}\, V(t) = 0, s(t) \in H_{A_0 B_0}$ $\forall t \in R$.

Проведя аналогичные выкладки, получим

$$V(t) = A_2 e^{P(t)} \exp(A_1 t) - B_0^{-1},$$

где $e^{P(t)} = \frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1})}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))}$.

Итак, относительно карты $c_{A_0 B_0}$ получено самое общее решение уравнения геодезических кривых связности Картана на фактор-многообразии невырожденных аффинорных полей:

$$s(t) = A_0\left(\frac{\mathrm{Tr}(B_0^{-1})}{\mathrm{Tr}(A_2 \exp(A_1 t))} B_0 A_2 \exp(A_1 t) - I\right). \tag{9}$$

4. Геодезические как интегральные кривые левоинвариантных векторных полей на $\mathbf{T}_0/\mathbf{F}_0$

Пусть X — левоинвариантное векторное поле на T_0/F_0, $\widetilde{X}_{\widetilde{A}}$ — локальное представление векторного поля X в карте $c_{A_0} = (U_{A_0}, \phi_{A_0}, H_{A_0})$ при $\widetilde{A} \in H_{A_0}$, $s : t \in R \to s(t) \in H_{A_0} \subset T_1^1(M)$ — гладкая кривая на T_0/F_0 в карте c_{A_0}. Напомним, что она является интегральной кривой векторного поля X, если $s'(t) = \widetilde{X}_{s(t)}$ $\forall t \in R$ ([6], лекция 2, с. 33).

Согласно левоинвариатности векторного поля X в координатах имеем $\widetilde{X}_{s(t)} = D(\widetilde{L}_{s(t)})_{\widetilde{I}}(\widetilde{X}_{\widetilde{I}})$. Для краткости переобозначим $\widetilde{X}_I = B_1$. Тогда $s'(t) = D(\widetilde{L}_{s(t)})_{\widetilde{I}}(B_1)$.

Применяя формулу (1), получим

$$s' = \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(s + A_0))}(s + A_0)\left[B_1 - \frac{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(s + A_0)B_1)}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(s + A_0))}I\right]. \tag{10}$$

Найдем из последнего дифференциального уравнения неизвестную функцию $s = s(t)$. Напомним, что она $\forall t \in R$ должна обладать свойствами $s(t) \in H_{A_0}$, т.е. $\operatorname{Tr}(A_0^{-1}s(t)) = 0$, и $s'(t) \in H_{A_0B_0}$, т.е. $\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}s'(t)) = 0$.

Обозначим $S(t) = s(t) + A_0$. Из (10) имеем $S'(t) = S(t)(f(t)B_1 + f_1(t)I)$, где

$$f(t) = \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}S(t))}, \quad f_1(t) = -\frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}S(t)B_1)}{(\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}S(t)))^2}.$$

Решением уравнения (10) является $S(t) = B_2e^{F_2(t)}\exp(B_1F(t))$, где $B_2 \in T_1^1(M)$, $F(t)$, $F_1(t)$ — первообразные для функций $f(t)$, $f_1(t)$ соответственно.

Так как $0 = \operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}s) = \operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}(S - A_0)) = \operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}S) - \operatorname{Tr}(B_0^{-1})$, то взяв след от полученного решения, имеем $e^{F_1(t)}\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}B_2\exp(B_1F(t))) = \operatorname{Tr}(B_0^{-1})$. Отсюда

$$e^{F_1(t)} = \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B))^{-1}B_2\exp(B_1F(t))}.$$

Таким образом,

$$S(t) = \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}B_2\exp(B_1F(t)))}B_2\exp(B_1F(t)).$$

Определим, что из себя представляет функция $F(t)$. Продифференцируем $f(t)$:

$$f'(t) = -\frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}S'(t))}{(\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}S(t)))^2} = 0,$$

так как $\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}S'(t)) = \operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}s'(t)) = 0$. Следовательно, $f(t) = \mathrm{const} = c_1$ и тогда ее первообразная $F(t) = c_1t + c_2$, где $c_1, c_2 \in R$. Имеем решение

$$S(t) = \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}((A_0B_0)^{-1}B_2\exp(B_1c_1t))}B_2\exp(B_1(c_2 + c_1t)).$$

Можно переобозначить постоянные $A_1 = B_1c_1$, $A_2 = (A_0B_0)^{-1}B_2\exp(B_1c_2)$. В новых обозначениях решение примет вид

$$S(t) = \frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}(A_2\exp(A_1t))}A_0B_0A_2\exp(A_1t)$$

и решение дифференциального уравнения (10) найдено:

$$s(t) = S(t) - A_0 = A_0\left[\frac{\operatorname{Tr}(B_0^{-1})}{\operatorname{Tr}(A_2\exp(A_1t))}B_0A_2\exp(A_1t) - I\right]. \tag{11}$$

Итак, найдены геодезические как интегральные кривые левоинвариантного векторного поля, проходящие через единицу I на фактор-многообразии T_0/F_0. Они имеют вид (11), что полностью совпадает с решением (9), полученным первым способом.

Литература

[1] Постников М.М. *Риманова геометрия. Семестр* V (Факториал, М., 1998).

[2] Романова Е.М. *Многообразие невырожденных аффинорных полей*, Изв. вузов. Матем., № 7, 39–45 (2008).

[3] Романова Е.М. *Связность Картана и ее геодезические на многообразии невырожденных аффинорных полей*, Изв. вузов. Матем., № 5, 68–72 (2009).

[4] Бурбаки Н. *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов* (Мир, М., 1975).

[5] Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли*, гл. III (Мир, М., 1976).

[6] Постников М.М. *Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии. Семестр* V (Наука, М., 1982).

Елена Михайловна Романова

Институт управления, экономики и финансов,
Казанский федеральный университет,
ул. Бутлерова, д. 4, г. Казань, 420012, Россия,

`e-mail:` romanova1elena@rambler.ru

E.M. Romanova

On geodesic curves on quotient manifold of nondegenerate affinor fields

Abstract. We consider the quotient manifold of the manifold of nondegenerate affinor fields on a compact manifold with respect to the action of the group of nowhere vanishing functions. This manifold is endowed with a structure of infinite-dimensional Lie group. On this Lie group, we construct an object of linear connection with respect to which all left-invariant vector fields are covariantly constant (the Cartan connection). We also find the geodesics of the Cartan connection.

Keywords: infinite-dimensional differentiable manifold, Lie group, Lie algebra, linear connection, Cartan connection, left-invariant vector field, one-parameter subgroups of the Lie group, geodesic.

Elena Mikhailovna Romanova

Institute of Management, Economics and Finances,
Kazan Federal University,
4 Butlerov str., Kazan, 420012 Russia,

`e-mail:` romanova1elena@rambler.ru