УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 3
С. 335–349

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.95

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.335-349

О СТРУКТУРЕ, СЛОЖНОСТИ И ГЛУБИНЕ СХЕМ В БАЗИСЕ $\{\&, \vee\}$, РЕАЛИЗУЮЩИХ СТУПЕНЧАТЫЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

С.А. Ложкин, Д.С. Кинжикеева

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

г. Москва, 119991, Россия

Аннотация

Решается задача синтеза схем из функциональных элементов (СФЭ) в базисе $\{\&, \vee\}$, реализующих ступенчатые функции алгебры логики (ФАЛ) от n, $n = 1, 2, \ldots$, булевых переменных (БП), то есть ФАЛ, обращающиеся в единицу на всех наборах единичного куба размерности n, номера которых не меньше заданного числа – порога этой ФАЛ.

Ступенчатые ФАЛ часто встречаются в теоретических и прикладных исследованиях в качестве вспомогательных ФАЛ. Так, схемная реализация n-разрядного двоичного сумматора включает в себя подсхему, реализующую ступенчатую ФАЛ от n БП с порогом $2^n/3$, глубина которой составляет основную часть глубины всего сумматора.

С точностью до изоморфизма или подобия, то есть до изоморфизма и эквивалентных преобразований на основе тождеств коммутативности и ассоциативности, описана структура СФЭ, реализующих ступенчатые ФАЛ от n БП с минимальной сложностью, равной $(n-1)$, или минимальным рангом, равным n. Установлено точное значение глубины указанных СФЭ. Исследована возможность оптимизации СФЭ, реализующих ступенчатые ФАЛ, как по сложности, так и по глубине.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, базис $\{\&, \vee\}$, ступенчатые функции алгебры логики, минимизация сложности и глубины, структура минимальных схем

Введение

Рассматривается задача синтеза схем из функциональных элементов (СФЭ) в базисе $\{\&, \vee\}$, реализующих (монотонные) функции алгебры логики (ФАЛ) специального вида. Эта задача решается для ступенчатых ФАЛ от n, $n = 1, 2, \ldots$, булевых переменных (БП), то есть ФАЛ, обращающихся в единицу на всех наборах единичного куба размерности n, номера которых не меньше заданного числа, называемого порогом данной ФАЛ. Исследуется возможность оптимизации СФЭ, реализующих ступенчатые ФАЛ, как по сложности, так и по глубине.

Ступенчатые ФАЛ достаточно часто встречаются в теоретических и прикладных исследованиях в качестве вспомогательных ФАЛ. Так, схемная реализация n-разрядного двоичного сумматора включает в себя (см., например, [1, 2]) подсхему, реализующую ступенчатую ФАЛ от n БП с порогом $2^n/3$, глубина которой составляет основную часть глубины всего сумматора. Конъюнкции ступенчатых ФАЛ и их отрицаний задают характеристические ФАЛ отрезков единичного куба и т. п.

Введем необходимые определения и обозначение (см. [3, 4])). Пусть $B = \{0, 1\}$ и B^n, где $n = 1, 2, \ldots$, – единичный n-мерный куб, то есть множество наборов длины n из 0 и 1, а $P_2(n)$ – множество ФАЛ f, $f : B^n \longrightarrow B$, от множества (входных) БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Будем рассматривать СФЭ над базисом $\text{Б}'_0 = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, 0, 1\}$, считая, как обычно, что формулы являются частным случаем СФЭ. Структура СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$, то есть СФЭ с входными БП $x_1, \ldots, x_n$ и выходами $z_1, \ldots, z_m$, а также реализуемая ею система ФАЛ F_Σ, $F_\Sigma \in (P_2(n))^m = P_2^m(n)$, определяются обычным образом. При этом под *сложностью* $L(\Sigma)$, *глубиной* $D(\Sigma)$ и *рангом* $R(\Sigma)$ СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ понимается число функциональных элементов (ФЭ) Σ, максимальная длина цепи из последовательно соединенных ФЭ Σ и число дуг, исходящих из входов Σ, соответственно.

Приведенной СФЭ (ср. [4]) называется СФЭ, в которой нет «висячих» вершин и нет «параллельных » дуг, то есть дуг с одинаковыми начальными и конечными вершинами. Приведенная СФЭ считается *строго приведенной*, если из нее нельзя выделить эквивалентную ей собственную так называемую входную подсхему, то есть подсхему, входы которой совпадают с входами исходной СФЭ.

Следуя [4], будем считать две СФЭ *изоморфными* (*подобными*), если они изоморфны как помеченные графы (соответственно получаются друг из друга с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств коммутативности и ассоциативности).

Определим сложность $L(f)$ и глубину $D(f)$ ФАЛ f как минимальную сложность и глубину реализующих f СФЭ соответственно. Для $d \geqslant D(f)$ и $l \geqslant L(f)$ введем также величины $L(f, d)$ и $D(f, l)$ равные минимальной сложности и глубине СФЭ, реализующих f с глубиной не больше, чем d, и сложностью не больше, чем l, соответственно.

Функция f, $f \in P_2(n)$, называется *ступенчатой ФАЛ с «пороговым набором»* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$, если для любого β, $\beta \in B^n$, $f(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда $\nu(\beta) \geqslant \nu(\alpha)$, где $\nu(\alpha) = \alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \cdots + \alpha_n 2^0$. При этом определим $A(\alpha) = A(f)$ как мощность множества максимальных по включению групп из подряд идущих одинаковых разрядов α – так называемых *отрезков постоянства* набора α и ФАЛ f, считая, что последний из указанных отрезков в случае $\alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$ содержит как α_{n-1}, так и α_n, а в случае $\alpha_n = 0$ – не учитывается, так как соответствует множеству фиктивных БП ФАЛ f.

Легко видеть, что для набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из B^n такого, что[1] $\alpha_n = 1$, ступенчатая ФАЛ $f = h_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ является монотонной ФАЛ для которой справедливо представление бесповторной формулой $\mathcal{F}_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ вида:

$$\mathcal{F}_\alpha = x_1 *_{\alpha_1} (x_2 *_{\alpha_2} \cdots (x_{n-1} *_{\alpha_{n-1}} x_n)), \tag{1}$$

где $x *_0 y = x \vee y$ и $x *_1 y = x \& y$. Заметим также, что формула $\mathcal{F}_\alpha$ является минимальной по сложности формулой для h_α и, следовательно, $L(h_\alpha) = (n-1)$.

Напомним, что в [1] для глубины ступенчатой ФАЛ из $P_2(n)$ с порогом $2^n/3$ или $2^{n+1}/3$, то есть, иначе, с пороговым набором из множества A_n, $A_n \subset B^n$ и $|A_n| = 2$, которое в случае четного $n = 2k$ состоит из наборов $(\underbrace{0101\ldots01}_{2k})$ и $(\underbrace{1010\ldots10}_{2k-2}11)$, а в случае нечетного $n = 2k+1$ – из наборов $(\underbrace{0101\ldots01}_{2k}1)$ и $(\underbrace{1010\ldots10}_{2k}1)$, была получена верхняя оценка $\log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + 2$. Напомним также, что указанная оценка в [2] была понижена до величины $\log_2 n + \log_2\log_2 n + O(1)$.

В настоящей работе исследуются вопросы о структуре минимальных по сложности СФЭ, реализующих ступенчатую ФАЛ f, а также о возможности оптимизации реализующих ее СФЭ как по сложности, так и по глубине, то есть о поведении сложности $L(f, D)$ как функции параметра D. В ней получены следующие

[1] В дальнейшем по умолчанию данное условие будем считать выполненным.

результаты краткое изложение, которых содержится в [5]. Часть из них представляет собой обобщение и/или уточнение результатов, установленных в работах [6] и [7], которые были выполнены под руководством С.А. Ложкина.

Теорема 1. *Для ступенчатой ФАЛ f из $P_2(n)$ с пороговым набором α, $\alpha \in B^n$, формула $\mathcal{F}_\alpha$ является единственной с точностью до изоморфизма реализующей ее строго приведенной СФЭ ранга n, если $\alpha \in A_n$, и единственной с точностью до подобия реализующей ее СФЭ сложности $(n-1)$, если $\alpha \notin A_n$.*

Теорема 2. *Пусть для ступенчатой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и для всех i, $i = 1, \ldots, a$, где $a = A(f)$, длина i-го отрезка постоянства f равна k_i. Тогда*

$$D(f, n-1) = \max_{1 \le i \le a} \left\{ i + \lceil \log_2 k_i \rceil - \left\lfloor \frac{i}{a} \right\rfloor \right\} - \delta(f),$$

где $\delta(f) \in B$ и $\delta(f) = 1$, если указанный максимум достигается только при одном значении i, $1 \leqslant i < a$, и только в том случае, когда найдется l, $1 \leqslant l \leqslant a - i$, такое, что $(i + \lceil \log_2 k_i \rceil) - (j + \lceil \log_2 k_j \rceil) \geqslant l + 1$ при всех j, $j = i+1, \ldots, a$, и при этом $k_i \leqslant 2^{\lceil \log_2 k_i \rceil - 1} + \cdots + 2^{\lceil \log_2 k_i \rceil - l}$.

Теорема 3. *Для любой ступенчатой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и любого D, $D \geqslant D(f)$, выполняется неравенство*

$$L(f, D) + \frac{D}{2} \geqslant n + \frac{A(f)}{2} - \frac{3}{2}.$$

Теорема 4. *Для любой последовательности ступенчатых ФАЛ $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, где $f_n \in P_2(n)$, и любой последовательности натуральных чисел $d_1, d_2, \ldots$, где $D(f_n, n-1) \geqslant d_n \geqslant \log_2 n + \sqrt{2 \log_2 n} + 2$, справедливо асимптотическое равенство*

$$L(f_n, d_n) + \frac{d_n}{2} \sim n + \frac{A(f)}{2}.$$

Таким образом, установлено, что сложность L и глубина D ступенчатой ФАЛ в классе СФЭ являются на уровне асимптотики параметрами-антагонистами, которые связаны друг с другом по закону $L + D/2 \sim \mathrm{Const}$.

1. Структура и глубина СФЭ, реализующих ступенчатые ФАЛ с минимальным значением ранга и сложности

Будем говорить, что подстановка булевых констант $\delta_1, \ldots, \delta_r$ вместо БП $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ соответственно, где $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$, *забивает БП* x_j, где $j \in [1, n] \backslash \{i_1, \ldots, i_r\}$, *ФАЛ* f, $f \in P_2(n)$, если в результате ее выполнения получается ФАЛ, не зависящая существенно от x_j.

Заметим, что для ФАЛ $f = h_\alpha$ из $P_2(n)$ разбиение набора α на отрезки постоянства порождает разбиение множества ее (существенных) БП $X(n)$ на такие максимальные по включению подмножества БП, по каждому из которых ФАЛ f симметрична. Заметим также, что никакая подстановка констант вместо БП $x_{k+1}, \ldots, x_n$ не забивает БП x_j ФАЛ f, если $k > j$.

Как уже говорилось, формула $\mathcal{F}_\alpha$ (см. (1)), которая реализует ступенчатую ФАЛ $f = h_\alpha$ из $P_2(n)$, имеет сложность $L(\mathcal{F}_\alpha) = L(f) = n - 1$. При этом формула $\mathcal{F}_\alpha$, кроме того, является строго приведенной СФЭ ранга n.

Лемма 1. *Любая приведенная СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ ранга n, реализующая ФАЛ $f = h_\alpha$ из $P_2(n)$, где $\alpha \in A_n$, содержит формулу $\mathcal{F}_\alpha$ в качестве входной подсхемы.*

Доказательство. Индукцией по n, $n = 2,3,\ldots$, докажем, что искомая подсхема $\widehat{\Sigma}$ вида $\mathcal{F}_\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in A_n$, представляет собой начальную часть произвольной самой длинной цепи C из последовательно соединенных элементов схемы Σ.

Из отмеченных выше свойств симметричности ФАЛ f, особенностей структуры СФЭ Σ и специфики набора α следует, что различные БП x_i, $i \in [1,n-1]$, подаются без ветвления на различные элементы Σ. Из них вытекает также, что единственным, так называемым «входным» элементом Σ, то есть элементом, оба входа которого присоединены к входам схемы, является связанный с вершиной v и присоединенный к БП x_{n-1}, x_n элемент $\&$, если $\alpha_{n-1} = 1$ и элемент $\vee$, если $\alpha_{n-1} = 0$. В случае $n = 2$ данный элемент представляет собой подсхему $\widehat{\Sigma}$, что доказывает справедливость базиса индукции.

Заметим, что любая максимальная по включению элементов цепь СФЭ Σ, в частности и цепь C, начинается с вершины v, а заканчивается в выходной вершине Σ. Заметим также, что в силу максимальности цепи C по длине, то есть по числу элементов, ее вторая вершина w будет связана с элементом, один из входов которого присоединен к вершине v, а другой – к входу x_j, $1 \leqslant j \leqslant n-2$. При этом из незабиваемости БП x_i, $1 \leqslant i \leqslant n-3$, множеством БП $X' = \{x_{n-1}, x_n\}$ следует, что $j = n-2$, а из характера зависимости ФАЛ f от БП x_{n-2} и БП из X' вытекает, что элементы вершин v и w двойственны друг другу.

Пусть, для определенности, $\alpha_{n-1} = 1$ и $\alpha_{n-2} = 0$, то есть вершины v и w являются элементами $\&$ и $\vee$ соответственно. Легко видеть, что при этом ФАЛ $x_{n-1} \cdot x_n$ и $x_{n-2} \vee x_{n-1} \cdot x_n$, реализуемые в вершинах v и w соответственно, отличаются только в том случае, когда $x_{n-2} = 1$, при котором БП x_{n-1} и x_n становятся фиктивными БП ФАЛ f. Следовательно, приведенная СФЭ Σ', которая получается из СФЭ Σ в результате перенесения начальной вершины v у всех исходящих из нее и отличных от дуги (v,w) дуг в вершину w с последующим удалением образовавшихся при этом параллельных дуг и наложением концевой вершины данных дуг на их начальную вершину, будет эквивалентна СФЭ Σ.

Рассмотрим, далее, СФЭ Σ'', которая получается из СФЭ Σ' в результате отождествления БП x_{n-1} и x_n с последующим объявлением вершины v входом x_{n-1} СФЭ Σ''. Очевидно, что Σ'' является приведенной СФЭ без параллельных дуг, которая реализует ступенчатую ФАЛ $f''(x_1,\ldots,x_{n-1}) = f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n-1}) = f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ с пороговым набором α'' из A_{n-1}.

Затем, что «суффикс» C'' цепи C, начинающийся с вершины v, будет самой длинной цепью в Σ''. Действительно, замена ребра вида (v,u), где $u \neq w$, цепью из ребер (v,w) и (w,u) при переходе от СФЭ Σ к СФЭ Σ' не изменит максимальную длину цепи, соединяющий v и u как в Σ, так и в Σ', которая не может быть меньше трех в силу приведенности этих СФЭ.

Таким образом, по индуктивному предположению в СФЭ Σ'' имеется требуемая подсхема $\widehat{\Sigma}''$, которая является «суффиксом» цепи C, начинающимся с входной вершины v и содержащим в качестве первой вершины-элемента вершину w. Следовательно, искомая СФЭ $\widehat{\Sigma}$ получается из СФЭ $\widehat{\Sigma}''$ присоединением «префикса» цепи C, который начинается с одной из входных вершин x_n или x_{n-1} и содержит в качестве единственной вершины-элемента вершину v. $\square$

Следствие 1. *В случае строгой приведенности СФЭ Σ она будет изоморфна формуле $\mathcal{F}_\alpha$.*

Заметим, что в случае $\alpha \notin A_n$ лемма 1, а также следствие из нее могут быть неверны даже тогда, когда вместо изоморфизма искомой подсхемы формуле $\mathcal{F}_\alpha$ допускается их подобие. Следующее утверждение показывает, что при рассмотрении

СФЭ минимальной сложности вместо СФЭ минимального ранга указанное обобщение леммы 1 (а также следствия из нее) будет справедливо при любом наборе α, $\alpha \in B^n$.

Лемма 2. *Любая СФЭ Σ сложности $(n-1)$, реализующая ФАЛ $f = h_\alpha$ из $P_2(n)$, подобна формуле $\mathcal{F}_\alpha$.*

Доказательство. Из равенства $L(\Sigma) = n-1$ и существенной зависимости ФАЛ f от всех своих БП следует, что Σ является формулой ранга n, то есть представляет собой двоичное дерево $\mathcal{D}$ с n листьями (входами), помеченными БП $x_1, \ldots, x_n$ и корнем (выходом), помеченным БП z_1. При этом, очевидно, вход x_i, $i \in [1,n]$, соединяется с выходом z_1 единственной цепью C_i данного дерева.

Подобие формул Σ и $\mathcal{F}_\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, означает, что для любого отрезка постоянства I вида $(\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_l)$ набора α, где $1 \leqslant k < l \leqslant n$ и для $l' = \min\{l, n-1\}$ выполняются равенства $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_{l'} = \delta$, формула Σ с помощью эквивалентных преобразований подобия может быть приведена к формуле, содержащей подформулу $x_k *_\delta \cdots *_\delta x_l$. Для этого достаточно убедиться в том, что любые две цепи C_i и C_j, где $i \in I$, $j \in I$ и $i \neq j$, вплоть до той вершины v дерева $\mathcal{D}$, в которой они встречаются, состоят только из элементов типа E_δ.

Положим, для определенности, $\delta = 0$, то есть E_δ – элемент $\vee$, и заметим, что первым элементом цепи C_i, так же как и цепи C_j, является элемент $\vee$. Действительно, если бы БП x_i входила в Σ через элемент E типа $\&$, то, подставив вместо нее константу 0, мы потеряли бы существенную зависимость реализуемой ФАЛ от тех БП, которые связаны с другим входом элемента E, что невозможно при $|I| \geqslant 2$.

Докажем теперь, что вершина v, в которой соединяются цепи C_i и C_j, тоже является элементом $\vee$. Действительно, в противном случае подстановкой подходящих констант вместо тех, отличных от x_i и x_j, БП, которые связаны с вершинами (x_i, v)-, (x_j, v)- и (v, z_1)-цепей Σ можно добиться того, что на входы элемента вершины v поступят БП x_i и x_j, а на выходе z_1 будет реализовываться ФАЛ $x_i \cdot x_j$. Это, очевидно, противоречит тому, что ФАЛ $x_i \cdot x_j$ нельзя получить из ФАЛ f ни при какой подстановке констант вместо остальных БП.

Аналогичным образом можно прийти к противоречию и в том случае, когда либо на (x_i, v)-, либо на (x_j, v)-цепи есть элемент конъюнкции. В любом из этих случаев на входе z_1 можно получить только одну из БП x_i, x_j при подходящей подстановке констант вместо остальных БП из $X(n)$, что противоречит симметричности ФАЛ f по БП x_i, x_j.

Лемма доказана. $\square$

Из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает теорема 1.

Исследуем теперь вопрос о минимально возможной глубине СФЭ, реализующей ступенчатую ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, со сложностью $(n-1)$.

Лемма 3. *Пусть f, $f \in P_2(n)$, – ступенчатая ФАЛ с пороговым набором α, i-й отрезок постоянства которого, $i = 1, \ldots, A(f) = a$, имеет длину k_i, и пусть*

$$\widehat{D}(\alpha) = \max_{1 \le i \le a} \left\{ i + \lceil \log_2 k_i \rceil - \left\lfloor \frac{i}{a} \right\rfloor \right\}, \ \check{D}(\alpha) = \max_{1 \le i \le a} \left\{ i + \left\lceil \log_2 (k_i + 1 - \left\lfloor \frac{i}{a} \right\rfloor) \right\rceil \right\} - 1. \quad (2)$$

Тогда

$$D(f, n-1) \le \widehat{D}(\alpha), \quad \check{D}(\alpha) \le D(f, n-1), \quad (3)$$

причем $D(f, n-1) = \widehat{D}(\alpha)$, если максимум $\widehat{D}(\alpha)$ в (2) достигается либо при $i = a$, либо не менее чем при двух различных значениях i.

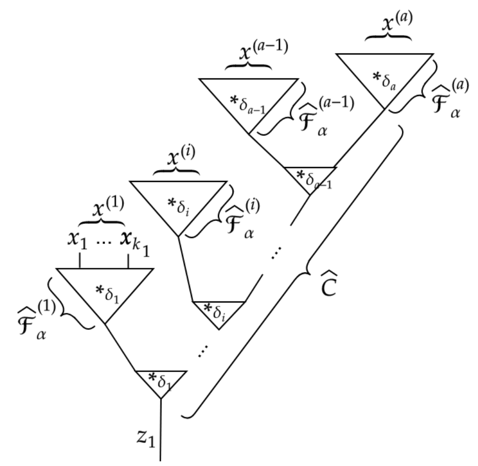

Рис. 1. Пример схемы Σ, соответствующей формуле $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(a)})$, где $\alpha^{(i)}$, $i = 1, \dots, a$, – i-й отрезок постоянства длины k_i и типа $\delta_i = \delta \oplus i (\bmod 2)$ набора α, а $x^{(i)}$– набор БП, связанный с этим отрезком постоянства.

Верхняя оценка (3) достигается на формуле $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$, которая подобна формуле $\mathcal{F}_\alpha$ и имеет вид

$$\widehat{\mathcal{F}}_\alpha = \widehat{\mathcal{F}}^{(1)}_\alpha(x^{(1)}) *_{\delta_1} \bigl(\widehat{\mathcal{F}}^{(2)}_\alpha(x^{(2)}) *_{\delta_2} \cdots \bigl(\widehat{\mathcal{F}}^{(i)}_\alpha(x^{(i)}) *_{\delta_i} \bigl(\cdots \widehat{\mathcal{F}}^{(a-1)}_\alpha(x^{(a-1)}) *_{\delta_{a-1}} \widehat{\mathcal{F}}^{(a)}_\alpha(x^{(a)})\bigr)\bigr) \cdots \bigr),$$

где $\widehat{\mathcal{F}}^{(i)}_\alpha(x^{(i)})$, $i = 1, \dots, a$, – квазиполное двоичное дерево глубины $r_i = \lceil \log_2 k_i \rceil$ из элементов типа $*_{\delta_i}$ от БП $x^{(i)}$. Заметим, что формулу $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$ можно получить в результате построения цепи $\widehat{C}$ из $(a-1)$ последовательно соединенных элементов типа $\delta_1, \dots, \delta_{a-1}$ и последующего присоединения к входам этой цепи формул $\widehat{\mathcal{F}}^{(1)}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}^{(a)}$ в соответствующем порядке (см. рис. 1).

Для доказательства второго неравенства (3) возьмем произвольную формулу $\mathcal{F}$, которая реализует ФАЛ f со сложностью $(n-1)$, и напомним, что согласно лемме 2 она будет подобна формуле $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$.

Отсюда следует, что $\mathcal{F}$ можно представить как результат выделения в ней цепи C, которая начинается в выходе z_1 и получается из цепи $\widehat{C}$ путем замены ее i-го элемента, $i = 1, \dots, a-1$, цепочкой из d_i, $d_i \geqslant 1$, элементов типа $(*_i)$ с последующим присоединением к свободному входу ее j-го, считая от конца цепи, элемента, где $j = 1, \dots, d_i$, формулы $\mathcal{F}^{(i)}_j$ из элементов типа $(*_i)$ так, чтобы входы всех этих подформул составили набор $x^{(i)}$ (см. рис. 2).

Построенная при этом для каждого i, $i = 1, \dots, (a-1)$, формула $\mathcal{F}^{(i)}(x^{(i)}, u_i)$ с выходом z_i представляет собой «подразбиение» формулы $\widehat{\mathcal{F}}^{(i)}(x^{(i)}) *_i u_i$, а формула $\mathcal{F}^{(a)}(x^{(a)})$, которая является подформулой формулы $\mathcal{F}$, «вырастающей» из вершины u_{a-1}, подобна формуле $\widehat{\mathcal{F}}^{(a)}$. Будем говорить также, что сама формула $\mathcal{F}$ является *подразбиением* формулы $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$ с *кратностями* $d_1, \dots, d_{a-1}$.

Заметим, что формула $\mathcal{F}^{(i)}$ имеет $k_i + 1 - \lfloor i/a \rfloor$ входов, а ее выход находится на «расстоянии» $d_1 + \dots + d_{i-1} \geqslant i - 1$ от выхода z_1 формулы $\mathcal{F}$. Следовательно, при любом i, $i = 1, \dots, a$, выполняются неравенства

$$D(\mathcal{F}) \geqslant i - 1 + D(\widetilde{\mathcal{F}}^{(i)}) \geqslant i - 1 + \bigl\lceil \log_2(k_i + 1 - \bigl\lceil \frac{i}{a} \bigr\rceil) \bigr\rceil,$$

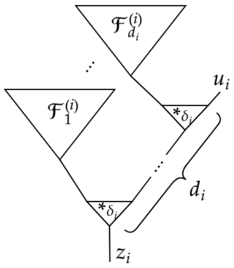

Рис. 2. Подразбиение $\mathcal{F}^{(i)}$ формулы $\widehat{\mathcal{F}}^{(i)} *_i u_i$

из которого следует нижняя оценка (3). Очевидно, что нижняя и верхняя оценки в (3) отличаются не больше, чем на единицу, и что они совпадают, если максимальное значение $\widehat{D}(\alpha)$ достигается при $i = a$, так как оно в данном случае будет равно соответствующему значению из нижней оценки (3). Заметим также, что при этом у любой формулы $\mathcal{F}$, реализующей ФАЛ f с глубиной $\widehat{D}(\alpha)$ и сложностью $(n-1)$, все кратности d_i, $i = 1, \ldots, (a-1)$, связанные с подразбиением ею формулы $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$, равны 1.

Осталось убедиться в том, что равенство $\widehat{D}(\alpha) = D(f, n-1)$ имеет место и в том случае, когда максимальное значение $\widehat{D}(\alpha)$ (см. (2)) достигается как при $i = i'$, так и при $i = i''$, то есть

$$\widehat{D}(\alpha) = i' + \lceil \log_2(k_{i'}) \rceil = i'' + \lceil \log_2(k_{i''}) \rceil,$$

где $1 \leqslant i' < i'' \leqslant (a-1)$.

Отметим, что при этом у любой формулы $\mathcal{F}$, реализующей ФАЛ f со сложностью $(n-1)$ и глубиной $D(\mathcal{F}) < \widehat{D}(\alpha)$, все кратности $d_1, \ldots, d_{i''-1}$ равны 1, так как в противном случае для глубины формулы $\mathcal{F}$ выполнялось бы неравенство

$$D(\mathcal{F}) \geqslant d_1 + \cdots + d_{i''-1} + \lceil \log_2(k_{i''} + 1) \rceil \geqslant i'' + \lceil \log_2(k_{i''}) \rceil = \widehat{D}(\alpha).$$

С другой стороны, в данном случае, очевидно, выполняется неравенство

$$D(\mathcal{F}) \geqslant d_1 + \cdots + d_{i'} + \lceil \log_2(k_{i'}) \rceil = \widehat{D}(\alpha).$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть в условиях леммы* 3 *максимум* $\widehat{D}(\alpha)$ *в* (2) *достигается при единственном значении* $i = i_0$, $1 \leqslant i_0 < a$.

Тогда

$$D(f, n-1) = \widehat{D}(\alpha) - \delta(\alpha), \tag{4}$$

где $\delta(\alpha) \in B$ *и* $\delta(\alpha) = 1$ *тогда и только тогда, когда найдется* l, $1 \leqslant l \leqslant a - i_0$, *такое, что*

$$(i_0 + \lceil \log_2(k_{i_0}) \rceil) - (j + \lceil \log_2(k_j) \rceil) \geqslant l + 1 \tag{5}$$

при всех j, $j = i_0 + 1, \ldots, a$, *и при этом выполняется неравенство*

$$k_{i_0} \geqslant 2^{\lceil \log_2(k_{i_0}) \rceil - 1} + \cdots + 2^{\lceil \log_2(k_{i_0}) \rceil - l}. \tag{6}$$

Доказательство. Убедимся в том, что при выполнении условий леммы (5) и (6) верхняя оценка $D(f, n-1) = \widehat{D}(\alpha) - 1$ достигается на формуле $\widetilde{\mathcal{F}}$, которая получается подразбиением формулы $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$ с кратностями $d_{i_0} = l$ и $d_i = 1$ при $i \neq i_0$, $1 \leqslant i \leqslant a - 1$ (см. доказательство леммы 3).

При этом с учетом (6) отрезок БП $x^{(i_0)}$ разбивается на l отрезков $I_1, \ldots, I_l$ длины не более чем $2^{\lceil \log_2(k_{i_0}) \rceil - 1}, \ldots, 2^{\lceil \log_2(k_{i_0}) \rceil - l}$ соответственно, а в качестве формулы $\widetilde{\mathcal{F}}_j^{(i_0)}$, $j = 1, \ldots, l$, берется квазиполное двоичное дерево с $|I_j|$ с листьями и глубиной не более чем $\lceil \log_2(k_{i_0}) \rceil - j$.

Заметим, что глубина формулы $\widetilde{\mathcal{F}}_{i_0}^{(i_0)}$, которая заменит подформулу $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha^{(i_0)} *_{i_0} u_{i_0}$ формулы $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$, будет не больше, чем $\lceil \log_2(k_{i_0}) \rceil$, а глубина той подформулы формулы $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$, которая «вырастает» из входа u_{i_0} подформулы $\widetilde{\mathcal{F}}_{i_0}^{(i_0)}$, в силу (5) будет не больше, чем $\widehat{D}(\alpha) - 1 - i_0 - l$. Таким образом, глубина формулы $\widetilde{\mathcal{F}}$ будет не больше, чем $\widehat{D}(\alpha) - 1$.

Заметим также, что описанные выше построения являются единственно возможным способом получения (в условиях леммы) искомой формулы $\widetilde{\mathcal{F}}$ сложности $(n-1)$ и глубины $\widehat{D}(\alpha)-1$ из формулы $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$, а условия (5) и (6) представляют собой не только достаточные, но и необходимые условия его существования.

Лемма доказана. $\square$

Из леммы 3 и 4 вытекает теорема 2.

2. Нижние и верхние оценки сложности реализации ступенчатых ФАЛ при ограниченной глубине

Докажем сначала (см. теорему 3), что для любой ступенчатой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и любого D, $D \geqslant D(f)$, выполняется неравенство

$$L(f, D) + \frac{D}{2} \geqslant n + \frac{A(f)}{2} - 1. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ реализует с глубиной $D(\Sigma)$, где $D(\Sigma) \leqslant D$, ступенчатую ФАЛ f с пороговым набором α, $\alpha \in B^n$, разбитым на отрезки постоянства $I_1, \ldots, I_a$, где $a = A(f)$.

Пусть, далее, X_j, $j = 1, \ldots, a$, – множество тех БП из $X(n)$, которые связаны с отрезком I_j, а β_j – тип этого отрезка, $\widehat{X}$ – максимальное по включению множество тех БП из $X(n)$, которые входят в СФЭ Σ не менее чем по двум дугам, $X' = X_{j_1} \bigcup \cdots \bigcup X_{j_r}$, где $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant a$, – объединение всех тех множеств X_j, для которых $X_j \bigcap \widehat{X} \neq \emptyset$, и пусть $X'' = X(n) \setminus X'$. Выделим в каждом множестве X_j, $1 \leqslant j \leqslant a$, которое входит в X'', одну БП, обозначим множество всех этих БП через $\widetilde{X}''$ и положим $n'' = |\widetilde{X}''|$.

Рассмотрим ступенчатую ФАЛ $\widetilde{f}''$ от БП $\widetilde{X}''$, которая получается в результате подстановки вместо всех БП из множества $X_j \setminus \widetilde{X}''$ константы β_j, где $j = 1, \ldots, a$, а также СФЭ $\widetilde{\Sigma}''$, получающуюся при данной подстановке констант из СФЭ Σ с последующим применением тождеств вида $0 \cdot x = 0$, $1 \vee x = 1$, $1 \cdot x = 0 \vee x = x$ до тех пор, пока это возможно, и переходом к приведенной СФЭ.

Отметим, что для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant a$, в результате подстановки константы β_j вместо всех БП из $X_j \setminus \widetilde{X}''$ и применения указанных тождеств из СФЭ Σ будет удалено не менее чем $|X_j|+1$ (соответственно $|X_j|-1$) элементов, если X_j входит в X' (соответственно входит в X''). Легко видеть также, что при данной подстановке константы β_j, учитывая тот факт, что $\widetilde{f}'' = h_{\alpha''}$, где $\alpha'' \in A_{n''}$, и принимая во внимание лемму 1, альтернирование реализуемой ступенчатой ФАЛ уменьшится не больше, чем на 2, если X_j входит в X', и не изменится, если X_j входит в X''.

Следовательно,

$$n'' - 1 = L(\widetilde{\Sigma}'') \leqslant L(\Sigma) - (n - n'') - r,$$

$$D(\Sigma) \geqslant D(\widetilde{\Sigma}'') = n'' - 1 = A(\widetilde{f}'') - 1 \geqslant A(f) - 2r - 1.$$

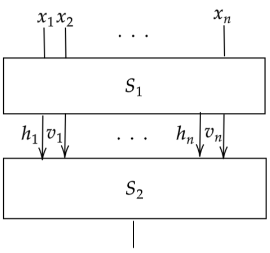

Рис. 3. Схема Σ_n

Соединяя полученные соотношения, приходим к цепочке неравенств

$$L(\Sigma) + \frac{D(\Sigma)}{2} \geqslant n - 1 + r + \frac{A(f)}{2} - r - \frac{1}{2} \geqslant n + \frac{A(f)}{2} - \frac{3}{2},$$

из которой вытекает неравенство (7) теоремы 3.

Теорема доказана. □

Перейдем теперь к получению верхних оценок сложности реализации ступенчатых ФАЛ схемами с ограниченной глубиной.

Пусть $\alpha_{i_1} = 0, \alpha_{i_2} = 0, \ldots, \alpha_{i_s} = 0$ – это все нулевые компоненты набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $1 \le i_1 < \cdots < i_s \le n$ и $0 \le s < n$. Обозначим для удобства $I(\alpha) = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, а если $\alpha' = (\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m)$, где $1 \le k < m \le n$, то полагаем $I(\alpha') = I(\alpha) \cap \{k, k+1, \ldots, m\}$. Тогда ступенчатую функцию $h_\alpha^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных с пороговым набором α при любом r, $1 \leqslant r < n$, по свойствам ступенчатых функций можно разложить следующим образом:

$$h_\alpha^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = h_{\alpha'}^{(r)}(x_1, \ldots, x_r) \& ((x_{i_1} \vee \cdots \vee x_{i_t}) \vee h_{\alpha''}^{(n-r)}(x_{r+1}, \ldots, x_n)), \tag{8}$$

где $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\alpha'' = (\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $\{i_1, \ldots, i_t\} = I(\alpha')$, $1 \le t \le r < n$.

Лемма 5. *Для любой последовательности ступенчатых функций $\{h_{\alpha^{(n)}}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\}$, где $\alpha^{(n)} \in B^n$ и $n = 1, 2, \ldots$, существует последовательность реализующих их схем $\{\Sigma_n\}$, такая что*

$$L(\Sigma_n) \lesssim n + \frac{A(\alpha^{(n)})}{2}, \tag{9}$$

$$D(\Sigma_n) \le \log_2 n + 2\sqrt{2\log_2 n} + 3. \tag{10}$$

Доказательство. Положим $\alpha^{(n)} = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и пусть, для определенности, число нулевых отрезков пространства в наборе α не больше, чем число единичных отрезков постоянства в нем. Построим СФЭ Σ_n в базисе Б $= \{\&, \vee\}$, которая реализует функцию $h_\alpha^{(n)}$ со сложностью и глубиной, удовлетворяющими (9) и (10) соответственно.

Выберем параметр τ и разобьем набор α на $\left\lceil \frac{n}{\tau} \right\rceil$ частей: $\beta_1, \ldots, \beta_{\lceil \frac{n}{\tau} \rceil}$, первые $\left\lfloor \frac{n}{\tau} \right\rfloor$ из которых имеют длину τ, а длина последней части $\beta_{\lceil \frac{n}{\tau} \rceil}$ равна остатку от деления $\frac{n}{\tau}$, если он не равен нулю.

Схема Σ_n состоит из двух блоков: S_1 и S_2 (см. рис. 3). При этом блок S_1 имеет глубину не больше, чем $\tau - 1$, и реализует $2\left\lceil \frac{n}{\tau} \right\rceil$ функций вида:

$$h_j = h_{\beta_j}^{(\tau)}(x_{(j-1)\tau+1}, \ldots, x_{j\tau})$$

$$v_j = \bigvee_{\substack{i\in I(\beta_j),\\ 1\le j\le\lceil\frac{n}{\tau}\rceil}} x_i,$$

где $j = 1,\dots,\lceil n/\tau\rceil$ и считается, что $v_j = 0$, если $I(\beta_j) = \varnothing$.

Пусть в наборе β_j всего k_j нулей и s_j нулевых отрезков постоянства, где $j = 1,\dots,\lceil n/\tau\rceil$. Тогда мы сначала строим элементарные дизъюнкции (ЭД) из аргументов, соответствующих этим отрезкам, на что потребуется $(k_j - s_j)$ элементов дизъюнкции, а затем собираем их в ЭД v_j, на что уходит еще $(s_j - 1)$ элементов. Теперь соберем h_j, пользуясь уже готовыми s_j дизъюнкциями, согласно представлению (1), на что уйдет не более $(\tau - k_j + s_j - 1)$ функциональных элементов. Итого на каждую пару функций h_j и v_j потребуется не более чем $(\tau + s_j - 1)$, элементов.

Тогда

$$D(S_1) \le \tau - 1; \quad L(S_1) \le n + (s_1 + \dots + s_{\lceil\frac{n}{\tau}\rceil}) - \left\lceil\frac{n}{\tau}\right\rceil.$$

Поскольку при разбиении набора α могло быть разделено на две части не более $\left(\left\lceil\frac{n}{\tau}\right\rceil - 1\right)$ нулевых отрезков пространства, то

$$(s_1 + \dots + s_{\lceil\frac{n}{\tau}\rceil}) - \left(\left\lceil\frac{n}{\tau}\right\rceil - 1\right) \le \left\lfloor\frac{A(f)}{2}\right\rfloor,$$

и, следовательно,

$$L(S_1) \le n + \left\lfloor\frac{A(f)}{2}\right\rfloor.$$

Из (8) по индукции, следует разложение

$$h_\alpha^{(n)}(x) = h_{\beta_1}^{(\lceil\frac{n}{\tau}\rceil)}(x_1,\dots,x_\tau)\,\&\,(\bigvee_{i\in I(\beta_1)} x_i) \vee (\dots \vee h_{\beta_j}^{(\lceil\frac{n}{\tau}\rceil)}(x_{(j-1)\tau+1},\dots,x_{j\tau})\,\&$$
$$\&\,(\bigvee_{i\in I(\beta_{j-1})} x_i) \vee (\dots \&\,(\bigvee_{i\in I(\beta_{\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1})} x_i) \vee h_{\beta_{\lceil\frac{n}{\tau}\rceil}}^{(\lceil\frac{n}{\tau}\rceil)}(x_{(\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1)\tau+1},\dots,x_n))\cdots)),$$

Если сравнить это разложение с (1) и (8), то можно заметить, что

$$h_\alpha^{(n)}(x) = h_{(1010\dots101)}^{(2\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1)}\Big(h_{\beta_1}^{(\lceil\frac{n}{\tau}\rceil)}(x_1,\dots,x_r), \bigvee_{i\in I(\beta_1)} x_i,\dots,h_{\beta_j}^{(\lceil\frac{n}{\tau}\rceil)}(x_{(j-1)\tau+1},\dots,x_{j\tau}),$$
$$\bigvee_{i\in I(\beta_{j-1})} x_i,\dots,\bigvee_{i\in I(\beta_{\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1})} x_i, h_{\beta_{\lceil\frac{n}{\tau}\rceil}}^{(\lceil\frac{n}{\tau}\rceil)}(x_{(\lceil\frac{n}{\tau})\rceil-1)\tau+1},\dots,x_n)\Big). \quad (11)$$

Блок S_2 реализует как раз функцию $h_{(1010\dots101)}^{(2\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1)}$, на входы которой подаются, согласно (11), функции, реализованные в блоке S_1.

Легко проверить, что функция $h_{(1010\dots1011)}^{(2\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1)}$ является двойственной к функции $h_{(0101\dots101)}^{(2\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1)}$, и поэтому они имеют одинаковые значения сложности и глубины в базисах Б $= \{\&,\vee\}$, Б$_0 = \{\&,\vee,-\}$. Для получения оценок сложности и глубины этих функций мы воспользуемся результатом для параллельного сумматора [1], где установлено, что, при глубине сумматора, асимптотически равной $\log_2 n$, его сложность может быть линейной. Это означает, что такие же оценки верны и для функции $h_{(0101\dots101)}^{(2\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1)}$, так как она является частью сумматора. Следовательно, существует последовательность схем из функциональных элементов Σ'_m, реализующих функции $h_{(0101\dots101)}^{(2m-1)}$ при $m = 1, 2, \dots$, такая, что

$$D(\Sigma'_m) \le \log_2 m + \sqrt{2\log_2 m} + 4, \quad L(\Sigma'_m) \leqslant C\cdot m, \qquad (12)$$

где C – некоторая константа.

Построим схему S_2 для $h^{(2\lceil\frac{n}{\tau}\rceil-1)}_{(1010\ldots101)}$ как двойственную к Σ'_m, где $m = 2\lceil n/\tau\rceil - 1$, в конструкции В.М. Храпченко [1]. Тогда для S_2 в силу (12), будут справедливы неравенства

$$D(S_2) = D(\Sigma'_m) \le \log_2\left(\frac{2n}{\tau}+1\right) + \sqrt{2\log_2\left(\frac{2n}{\tau}+1\right)} + 4,$$

$$L(S_2) = L(\Sigma'_m) \lesssim 2C\cdot\frac{n}{\tau},$$

отсюда следует, что

$$D(\Sigma_n) = D(S_1) + D(S_2) \le \tau - 1 + D(\Sigma'_m),$$

$$L(\Sigma_n) = L(S_1) + L(S_2) \lesssim n + \frac{A(f)}{2} + 2C\cdot\frac{n}{\tau}.$$

Для $n \geqslant 3$ выберем $\tau = \lceil\log_2\log_2 n\rceil$. Легко показать, что $\log_2 x \le \sqrt{2x}$ для всех $x \geqslant 1$, и поэтому $\tau \leqslant (\sqrt{2\log_2 n})$.

Тогда

$$D(\Sigma_n) \le \sqrt{2\log_2 n} + \log_2 n - \log_2\log_2\log_2 n +$$
$$+ \sqrt{2\log_2 n - 2\log_2\log_2\log_2 n} + 4 \le \log_2 n + 2\sqrt{2\log_2 n} + 4,$$

$$L(\Sigma_n) \lesssim n + \frac{A(f)}{2} + 2C\cdot\frac{n}{\log_2\log_2 n} \sim n + \frac{A(f)}{2}.$$

Итак,

$$D(\Sigma_n) \le \log_2 n + 2\sqrt{2\log_2 n} + 4, \quad L(\Sigma_n) \lesssim n + \frac{A(f)}{2},$$

что и требовалось доказать. Заметим, что в нашей схеме основная сложность приходится на блок S_1, а глубина – на блок S_2.

Лемма доказана. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы 4, то есть докажем, что для любой последовательности ступенчатых ФАЛ $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, где $f_n \in P_2(n)$, и любой последовательности натуральных чисел $d_1, d_2, \ldots$, где $D(f_n, n-1) \geqslant d_n \geqslant \log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + 2$, справедливо асимптотическое равенство

$$L(f_n, d_n) \sim n + \frac{A(f)}{2} - \frac{d_n}{2}.$$

Доказательство. Требуемая нижняя оценка для $L(f_n, d_n)$ вытекает из теоремы 3.

Для получения аналогичной верхней оценки построим СФЭ Σ_n в стандартном базисе, которая, имея необходимые значения глубины и сложности, реализует ступенчатую функцию $f_n = h^{(n)}_{\alpha^{(n)}}(x_1, \ldots, x_n)$ с пороговым набором $\alpha^{(n)} = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Разобьем набор α на две части длины p и $(n-p)$ и реализуем ФАЛ f_n в соответствии с равенством

$$h^{(n)}_{\alpha^{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = h^{(p+1)}_{(\alpha',1)}(x', h^{(n-p)}_{(\alpha'')}(x'')),$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_p)$, $x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$ и $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\alpha'' = (\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)$. Функцию $h^{(p+1)}_{(\alpha',1)}$ реализуем схемой S_1 с минимальной сложностью p и минимально

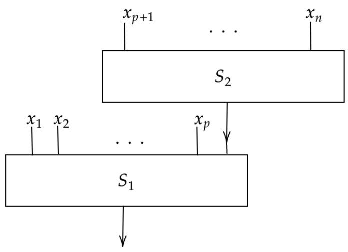

Рис. 4. Схема Σ_n

возможной при этом глубиной в соответствии с теоремой 2, а функцию $h^{(n-p)}_{(\alpha'')}$ – по лемме 5 с асимптотически наилучшей глубиной $\log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + 3$ схемой S_2. Искомая СФЭ Σ_n получается соединением схем S_1 и S_2 так, как показано на рис. 4.

Оценим сложность схемы Σ_n. Обозначим $\beta = (\alpha', 1)$ и заметим, что

$$|A(\beta) + A(\alpha'') - A(\alpha)| \leq 1.$$

Сложность подсхемы S_2, реализующей функцию $h^{(n-p)}_{(\alpha'')}$, по лемме 5 удовлетворяет следующему асимптотическому неравенству:

$$L(S_2) \lesssim n - p + \frac{A(\alpha)}{2}.$$

Таким образом, сложность схемы Σ_n удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$L(\Sigma_n) \lesssim p + (n-p) + \frac{A(\alpha)}{2} = n + \frac{A(\alpha)}{2}.$$

Далее оценим глубину схемы Σ_n. По теореме 2 глубину ее подсхемы S_1 можно оценить следующим образом:

$$D(S_1) = D'(\beta) = D(h^{(p)}_{(\alpha',1)}, p) = \max_{1\leq i\leq A(\beta)} \left\{ i + \lceil \log_2 k_i \rceil \ - \left\lfloor \frac{i}{A(\beta)} \right\rfloor \right\}, \qquad (13)$$

где $A(\beta)$ – число отрезков постоянства набора β, а k_i – мощность множества разрядов набора β, входящий в i-й отрезок постоянства, $i = \overline{1, A(\beta)}$.

По лемме 5 глубина подсхемы S_2 удовлетворяет неравенству

$$D(S_2) \leq \log_2(n-p) + 2\sqrt{2\log_2(n-p)} + 3 = D''(n-p).$$

Покажем, что можно подобрать p так, что

$$D(S_1) + D(S_2) = D(\Sigma_n) = d_n. \qquad (14)$$

Действительно, при увеличении p на единицу значение $D(\Sigma_n)$ убывает не более чем на единицу и при изменении p от 0 до n глубина $D(\Sigma_n)$ изменяется от $D'(\beta) \geqslant d_n$ до $D''(n-p) \leqslant d_n$. Поэтому можно выбрать нужное значение параметра p, удовлетворяющее (14).

Тогда при $D(\Sigma_n) = d_n$ выполняется неравенство

$$L(\Sigma_n) + \frac{1}{2}d_n \lesssim n + \frac{A(\alpha'')}{2} + \frac{1}{2}(D(S_1) + D(S_2)).$$

Так как в оценке (13) $i \leq A(\beta)$, то

$$L(\Sigma_n) + \frac{1}{2}d_n \lesssim n + \frac{A(\alpha'')}{2} + \frac{1}{2}D(S_2) + \frac{A(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\lceil \log_2(n-p) \rceil.$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$L(\Sigma_n) + \frac{1}{2}d_n \lesssim n + \frac{A(\alpha)}{2}.$$

Учитывая, что $L(\Sigma_n) \leq L(f_n, d_n)$, получим

$$L(f_n, d_n) + \frac{1}{2}d_n \lesssim n + \frac{A(\alpha)}{2}.$$

Следовательно, теорема 4 доказана. □

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики и РФФИ (проект № 18-01-00800).

Литература

1. *Храпченко В.М.* Об асимптотической оценке времени сложения параллельного сумматора // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1967. – Вып. 19. – С. 107–122.
2. *Гринчук М.И.* Уточнение верхней оценки глубины сумматора и компаратора // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, № 2. – С. 12–22.
3. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 138 с.
4. *Ложкин С.А.* Лекции по основам кибернетики. – М.: Изд. отд. фак. ВМиК МГУ, 2004. – 253 с.
5. *Ложкин С.А., Кинжикеева Д.С.* О структуре, сложности и глубине схем в базисе $\&, \vee$, реализующих ступенчатые функции алгебры логики // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы заочного семинара XIX Междунар. конф. / Под ред. Ю.И. Журавлева. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2020. – С. 72–75.
6. *Кинжикеева Д.С.* Методы синтеза схем из некоторых классов, реализующих функции ступенчатого типа, оценки их сложности и глубины: Магистерская дис. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. Фак. вычисл. матем. и кибернетики. Каф. матем. кибернетики, 2020. – 27 с.
7. *Власкин В.М.* О сложности и глубине схем, реализующих ступенчатые функции: Дипл. работа. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. Фак. вычисл. матем. и кибернетики. Каф. матем. кибернетики, 1995. – 13 с.

Поступила в редакцию
11.08.2020

Ложкин Сергей Андреевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия
E-mail: *lozhkin@cs.msu.ru*

Кинжикеева Дина Сергеевна, аспирант кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия

E-mail: *kinzhikeyeva@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 3, pp. 335–349

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.335-349

On the Structure, Complexity, and Depth of the Circuits over the Basis $\{\&, \vee\}$ Realizing Step Boolean Functions

*S.A. Lozhkin**, *D.S. Kinzhikeyeva***

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia
E-mail: **lozhkin@cs.msu.ru*, ***kinzhikeyeva@yandex.ru*

Received August 11, 2020

Abstract

The step Boolean function is a function of the algebra of logic of n Boolean variables, $n = 1, 2, \ldots$, reducing to 1 on all of the sets of an n-dimensional unit cube, the ordinal numbers of which are not lower than the given set. In this paper, the problem of synthesis of circuits over the basis $\{\&, \vee\}$ realizing step Boolean functions was considered. The optimized structure of the given circuits was studied with regard to complexity and depth. Step functions often appear in theoretical and applied tasks as an auxiliary subfunctions. For instance, an n-bit adder contains such a subfunction.

Keywords: Boolean circuits, basis $\{\&, \vee\}$, step Boolean functions, complexity and depth minimization, structure of minimal circuits

Acknowledgments. The study was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics and the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00800).

Figure Captions

Fig. 1. Example of circuit Σ corresponding to the formula $\widehat{\mathcal{F}}_\alpha$.

Fig. 2. Subdivision $\mathcal{F}^{(i)}$ of the formula $\widehat{\mathcal{F}}^{(i)} *_i u_i$.

Fig. 3. Circuit Σ_n.

Fig. 4. Circuit Σ_n.

References

1. Khrapchenko V.M. Asymptotic estimation of addition time of a parallel adder. *Probl. Kibern.*, 1967, no. 19, pp. 107–122. (In Russian)
2. Grinchuk M.I. Sharpening an upper bound on the adder and comparator depths. *J. Appl. Ind. Math.*, vol. 3, no. 1, pp. 61–67. doi: 10.1134/S1990478909010086.
3. Lupanov O.B. *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* [Asymptotic Estimates of Complexity of Control Systems]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1989. 138 p. (In Russian)
4. Lozhkin S.A. *Lektsii po osnovam kibernetiki* [Lectures on Principles of Cybernetics]. Moscow, Izd. Otd. Fak. VMiK MGU, 2004. 253 p. (In Russian)
5. Lozhkin S.A., Kinzhikeyeva D.S. On the structure, complexity, and depth of the circuits over the basis $\{\&, \vee\}$ realizing step Boolean functions. *Problemy teoreticheskoi kibernetiki: Materialy zaochnogo seminara XIX Mezhdunar. konf.* [Problems of Theoretical Cybernetics: Proc. Virtual Semin. XIX Int. Conf.]. Zhuravlev Yu.I. (Ed.). Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2020, pp. 72–75. (In Russian)
6. Kinzhikeyeva D.S. Methods for synthesis of circuits from certain classes realizing step functions, estimates of their complexity and depth. *Master's Thesis.* Moscow, Mosk. Gos. Univ. im. M.V. Lomonosova, Fak. Vychisl. Mat. Kibern., Kafedra Mat. Kibern., 2020. 27 p. (In Russian)
7. Vlaskin V.M. On the complexity and depth of circuits realizing step functions. *Graduation Thesis.* Moscow, Mosk. Gos. Univ. im. M.V. Lomonosova, Fak. Vychisl. Mat. Kibern., Kafedra Mat. Kibern., 1995. 13 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Ложкин С.А., Кинжикеева Д.С.* О структуре, сложности и глубине схем в базисе $\{\&, \vee\}$, реализующих ступенчатые функции алгебры логики // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 335–349. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.335-349.

***For citation*:** Lozhkin S.A., Kinzhikeyeva D.S. On the structure, complexity, and depth of the circuits over the basis $\{\&, \vee\}$ realizing step Boolean functions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 335–349. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.335-349. (In Russian)