# ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

**_Н.Х. Касымов_**

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 19 октября 2022 г.

**Аннотация:** *Равномерно вычислимо отделимые алгебры. Соотношения между равномерно вычислимо отделимыми эквивалентностями вида $\eta_\alpha$ и полуперечислимыми множествами. Характеризация в терминах ДИП-предложений. Применения равномерно вычислимо отделимых алгебр в Computer Science.*

С точки зрения приложений важнейший подкласс класса вычислимо отделимых алгебр образуют равномерно вычислимо отделимые алгебры.

**Определение 1**

*Нумерованная алгебра $(A, \nu)$ называется равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция $f$ трех переменных, обладающая следующим свойством: если $x \neq y \pmod{ker(\nu)}$, то $\lambda z.f(x, y, z)$ – всюду определенная вычислимая функция, являющаяся характеристической для $ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего $x$ от $y$.*

# Основные определения

Неформально, равномерность вычислимой отделимости означает наличие эффективной процедуры, "выдающей" для каждой пары $\langle x, y \rangle$ при $x \neq y \pmod{ker(\nu)}$, алгоритм разрешения $ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего $x$ от $y$.

**Пример**

*Эквивалентность негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно вычислимо отделимой с вычислимо перечислимой характеристической трансверсалью.*

**Определение 2**

*Нумерованная алгебра $(A, \nu)$ называется равномерно аппроксимируемой негативными алгебрами, если существует частичная вычислимая функция $g$ четырех переменных, обладающая следующим свойством: если $\nu x \neq \nu y$, то $\lambda uv.g(x, y, u, v)$ – характеристическая функция $\nu$-негативной конгруэнции, по модулю которой элементы $\nu x, \nu y$ различны.*

Известно, что нумерованная алгебра равномерно вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными алгебрами . При этом, важно отметить, что равномерная аппроксимируемость позволяет не просто равномерно вычислять перечислимые индексы соответствующих различающих негативных конгруэнций, но и равномерно эффективно предъявлять их характеристические индексы (т.е. алгоритмы, позволяющие различать любые различные элементы исходной алгебры).

Пусть $\alpha \subseteq \omega$. Рассмотрим следующие эквивалентности (Ю.Л. Ершов [1]):

1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup \{\langle 2x+1, 2x\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup id\ \omega$;

2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup id\ \omega$;

3) $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \setminus \alpha = \gamma_y \setminus \alpha\}$, где $\gamma$ – каноническая нумерация конечных множеств.

[1] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

# Примеры

Легко проверить, что для всякого $\alpha \subseteq \omega$ все эквивалентности $\eta^\alpha, \eta_\alpha, \eta^*_\alpha$ вычислимо отделимы. При этом, $\eta^\alpha$ равномерно вычислимо отделима при всяком $\alpha$, а равномерность $\eta_\alpha$ зависит от выбора $\alpha$. Так, например, если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то $\eta_\alpha$ не является равномерной; если $\alpha$ – гиперпростое с ретрассируемым дополнением, то $\eta_\alpha$ равномерно вычислимо отделима. Легко показать, что существуют равномерно вычислимо отделимые позитивные неразрешимые эквивалентности вида $\eta_\alpha$ для подходящих $\alpha \subseteq \omega$. Равномерность эквивалентности $\eta^*_\alpha$ также связана со свойствами $\alpha$. Напомним, что эквивалентность $\eta$ называется эффективно бесконечной, если в нее эффективно вкладывается эквивалентность $id\ \omega$, т.е. существует такая вычислимая функция $h$, что $x \neq y \Rightarrow h(x) \neq h(y) \pmod{\eta}$. Если эквивалентность с бесконечным числом смежных классов не является эффективно бесконечной, то она называется неэффективно бесконечной.

# Полуперечислимость

Если вычислимо отделимая эквивалентность не является равномерной, то назовем ее неравномерной.
Частичную функцию $\psi : \omega^n \longrightarrow \omega$ назовем квазипроектирующей, если

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \omega[\psi(x_1, \ldots, x_n) \downarrow \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}(\psi(x_1, \ldots, x_n) = x_i)].$$

Напомним некоторые классические определения.
Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется
- полурекурсивным, если существует такая вычислимая квазипроектирующая функция $f$ от двух аргументов, что $[x \in \alpha \vee y \in \alpha] \Rightarrow f(x, y) \in \alpha$;
- полуперечислимым, если существует такая частичная вычислимая функция $\psi$ от двух аргументов, что $[x \in \alpha \vee y \in \alpha] \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \{x, y\} \cap \alpha$;
- слабо полурекурсивным, если существует такая частичная вычислимая функция $\psi$ от двух аргументов, что $[(x \in \alpha \wedge y \notin \alpha) \vee (x \notin \alpha \wedge y \in \alpha)] \Rightarrow \psi(x, y) \downarrow \wedge \psi(x, y) \in \{x, y\} \cap \alpha$.

Нетрудно заметить, что определения полуперечислимости и слабой полурекурсивности эквивалентны следующим.
Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется
- полуперечислимым, если существует такая частичная вычислимая квазипроектирующая функция $\psi$ от двух аргументов, что $[x \in \alpha \vee y \in \alpha] \Rightarrow \psi(x,y)\downarrow \wedge \psi(x,y) \in \alpha$;
- слабо полурекурсивным, если существует такая частичная вычислимая квазипроектирующая функция $\psi$ от двух аргументов, что $[(x \in \alpha \wedge y \notin \alpha) \vee (x \notin \alpha \wedge y \in \alpha)] \Rightarrow \psi(x,y)\downarrow \wedge \psi(x,y) \in \alpha$.

Непосредственно их определений следует, что полурекурсивность любого множества равносильна полурекурсивности его дополнения (с использованием свойства квазипроектирумости $f$). Ясно также, что полурекурсивность $\Rightarrow$ полуперечислимость $\Rightarrow$ слабая полурекурсивность.

# Полуперечислимость

Назовем эквивалентность $\eta$ сильно равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция $g(x, y)$ такая, что для всех $x \neq y \pmod{\eta}$ значением функции $g(x, y)$ является канонический индекс $\eta$-замкнутого множества, отделяющего $x$ и $y$ (т.е. $\gamma_{g(x,y)}$ – $\eta$-замкнутое множество, отделяющее $x, y$, где $\gamma$ – каноническая нумерация конечных множеств).

Фактически по определению всякая сильно равномерная эквивалентность равномерна. Обратное неверно. Если эквивалентность имеет хотя бы два бесконечных смежных класса, то вопрос о ее сильной равномерности вообще лишен смысла. Для эквивалентностей же с не более чем одним бесконечным классом вопрос об их равномерности корректен.

Заметим, что для всякого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность $\eta^\alpha$ сильно равномерно вычислимо отделима.

**Теорема 1**

*Для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия эквивалентны:*
*(1) $\eta_\alpha$ – сильно равномерно вычислимо отделима;*
*(2) $\eta_\alpha$ – равномерно вычислимо отделима;*
*(3) $\omega \setminus \alpha$ – полуперечислимо.*

Доказательство. (1)⇒(2). Очевидно.
(2)⇒(3). Обозначим через $\beta(x, y)$ (в случае $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$) вычислимое $\eta_\alpha$-замкнутое множество, которое содержит $x$ и не содержит $y$ (если функция из определения равномерности дает характеристический индекс множества содержащего $y$, то перейдем к индексу характеристической функции для дополнения этого множества). Зафиксируем $a \in \alpha$ и определим следующую вычислимую частичную функцию $\psi$:

$$[a \in \beta(x, y) \Rightarrow \psi(x, y) = y] \wedge [a \notin \beta(x, y) \Rightarrow \psi(x, y) = x].$$

Очевидно, что если хотя бы один член пары $\langle x, y\rangle$ лежит в $\omega \setminus \alpha$, то применяя алгоритм, поддерживающий равномерность, получаем $\psi(x, y) \in (\omega \setminus \alpha)$.
(3)$\Rightarrow$(1). Пусть $\omega \setminus \alpha$ полуперечилимое множество и $\psi$ – вычислимая частичная функция, подтверждающая полуперечислимость. Построим вычислимую частичную функцию $g$ от трех аргументов следующим образом. Если $f(x, y) = x$, то $g(x, y, x) = 1 \wedge \forall z \in \omega[z \neq x \Rightarrow g(x, y, z) = 0]$. Аналогично, если $f(x, y) = y$, то $g(x, y, y) = 1 \wedge \forall z \in \omega[z \neq y \Rightarrow g(x, y, z) = 0]$. Очевидно, что функция $g$ реализует сильную равномерную отделимость множества $\omega \setminus \alpha$. Теорема доказана.

Приведем некоторые важные примеры равномерных и неравномерных вычислимо отделимых эквивалентностей типа $\eta_\alpha$.

**Предложение 1**

*Если $\omega \setminus \alpha$ регрессивно, а $\alpha$ гиперпросто, то эквивалентность $\eta_\alpha$ является сильно равномерно вычислимо отделимой.*

Доказательство. Пусть $\psi$ – частичная вычислимая регрессивная функция для $\omega \setminus \alpha$. Рассмотрим следующую процедуру вычисления функции $f$. Для данной пары натуральных чисел $\langle x, y\rangle$ пытаемся подтвердить хотя бы один из следующих случаев с соответствующим определением значения $f$ на паре $\langle x, y\rangle$:
(1) если $x \in \alpha$, то полагаем $f(x, y) = y$;
(2) если $y \in \alpha$, то $f(x, y) = x$;
(3) если $\exists n > 0(\psi^n(x) = y)$, то $f(x, y) = y$;
(4) если $\exists n > 0(\psi^n(y) = x)$, то $f(x, y) = x$.

Какие-то случаи могут иметь место одновременно, тогда выбираем тот случай, который подтвердится раньше. Ясно, что $f$ тотальная, квазипроектирующая и $(x \in (\omega \setminus \alpha) \vee y \in (\omega \setminus \alpha)) \Rightarrow f(x,y) \in (\omega \setminus \alpha)$, т.к. для любой пары чисел из $\omega \setminus \alpha$ одно из них $\psi$-достижимо из другого и $\{\psi^n(x) | n \in \omega \wedge x \in (\omega \setminus \alpha)\} \bigcap \alpha = \emptyset$. Если $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$, то значением $f(x,y)$ является элемент из дополнения $\alpha$. Пусть, для определенности, это будет $x$. Тогда $\{x\}$ – конечное $\eta_\alpha$-замкнутое множество, отделяющее $x$ от $y$. Очевидно, что канонический индекс этого множества равномерно вычисляется по $\langle x, y \rangle$. Предложение доказано.

**Следствие (C.Jockusch)**

*Всякое регрессивное множество с гиперпростым дополнением полурекурсивно (а значит и полуперечислимо).*

Эквивалентность $\eta$ с бесконечным числом смежных классов называется эффективно (неэффективно) бесконечной, если существует (не существует) эффективное вложение *id* $\omega$ в $\eta$.

**Предложение 2**

*Если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то эквивалентность $\eta_\alpha$ неравномерна.*

Доказательство. Очевидно, что $\eta_\alpha$ неэффективно бесконечна. Допустим, что $\eta_\alpha$ – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность. Пусть $g$ – частичная вычислимая функция из определения равномерности, т.е. если $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$, то $\lambda z.g(x, y, z)$ – вычислимая функция, являющаяся характеристической для $\eta_\alpha$-замкнутого множества, отделяющего $x$ и $y$.
По условию, существует сильная таблица для $\delta_0, \delta_1, \ldots$ для $\omega \setminus \alpha$.

Зафиксируем $a \in \alpha$. Через $\beta(x,y)$ обозначим вычислимое множество, для которого при $x \neq y \pmod{\eta_\alpha}$ вычислимая функция $\lambda z.g(x,y,z)$ является характеристической и $x \in \beta(x,y) \wedge y \notin \beta(x,y)$ (как отмечалось выше, в силу симметричности свойства вычислимости отделяющие множества можно поменять местами).

Для $n \in \omega \setminus \alpha$ рассмотрим множество $\sigma_n = \{z | a \in \beta(n,z))\}$, которое, как нетрудно заметить, является вычислимо перечислимым подмножеством $\omega \setminus \alpha$ и потому $\sigma_n$ конечно. Следовательно, почти все натуральные числа при отделении их от $n$ попадают в одно из отделяющих множеств вместе с $a$, т.е. существует такое натуральное $s \in \omega$, что для всех $t \geqslant s$ имеем $\forall z \in \delta_t(a \notin \beta(n,z))$. Тем более $\exists t \in \omega \forall z \in \delta_t(a \notin \beta(n,z))$.

Пусть теперь $n \in \alpha$, $t$ – произвольное натуральное число и $z \in \delta_t \cap (\omega \setminus \alpha)$. Тогда $a \in \beta(n,z)$, а значит $\forall t \in \omega \exists z \in \delta_t(a \in \beta(n,z))$. Таким образом, $n \in \omega \setminus \alpha \Leftrightarrow \exists t \forall z \in \delta_t(a \notin \beta(n,z))$, т.е. $\omega \setminus \alpha$ вычислимо перечислимо. Противоречие. Предложение доказано.

## Следствие (C.Jockusch)

*Никакое иммунное не гипериммунное множество не является полуперечислимым.*

## Предложение 3

*Если $\alpha \leqslant_m \beta$ и $\eta_\beta$ равномерно вычислимо отделима, то такова же и $\eta_\alpha$ (т.е. свойство равномерности наследуемо "вниз" относительно m-сводимости).*

Доказательство. Пусть $\alpha \leqslant_m \beta$ посредством вычислимой функции $f : \forall x \in \omega[x \in \alpha \Leftrightarrow f(x) \in \beta]$. Допустим, что $\eta_\beta$ равномерно вычислимо отделима посредством вычислимой частичной функции $g_\beta$, т.е. для $x \neq y \pmod{\eta_\beta}$ функция $\lambda z.g_\beta(x, y, z)$ – характеристическая вычислимая функция $\eta_\beta$-замкнутого множества, отделяющего $x$ от $y$. Для определенности и сокращения обозначений будем считать, что $g_\beta(x, y, x) = 1$.

Тогда полагаем $[g_\beta(f(x), f(y), f(z)) = 1 \Rightarrow g_\alpha(x, y, z) = 1] \wedge [g_\beta(f(x), f(y), f(z)) = 0 \Rightarrow g_\alpha(x, y, z) = 0]$. Легко проверить, что $g_\alpha$ – вычислимая частичная функция, поддерживающая свойство равномерной вычислимой отделимости для $\eta_\alpha$. Предложение доказано.

## Следствие

*Если $\alpha$ креативно, то эквивалентность $\eta_\alpha$ не является равномерно вычислимо отделимой.*

В самом деле, если $\beta$ – простое не гиперпростое, то по предложению 2 эквивалентность $\eta_\beta$ неравномерна и, в силу m-полноты $\alpha$, имеет место сводимость $\beta \leqslant_m \alpha$. А значит, по предложению 3, эквивалентность $\eta_\alpha$ неравномерная.

# Полуперечислимость

Пусть $\langle L; \leqslant_L \rangle$ – частичный порядок. Напомним, что подмножество $L_0 \subseteq L$ этого порядка называется начальным сегментом в $\langle L; \leqslant_L \rangle$, если $\forall x \in L_0 \forall y \in (L \setminus L_0)[x \leqslant_L y]$.

Частичный порядок $\langle \omega; \leqslant_\omega \rangle$ на $\omega$ называется вычислимо перечислимым, если таковым является множество $\{\langle x, y \rangle | x \leqslant_\omega y\}$.

Мы будем пользоваться следующей характеризацией полуперечислимых множеств:

### M.Kummer, F.Stephan

*Множество $\alpha$ полуперечислимо тогда и только тогда, когда $\alpha$ является линейно упорядоченным начальным сегментом некоторого вычислимо перечислимого частичного порядка.*

### Упражнение

*Пересечение двух вычислимо отделимых эквивалентностей является вычислимо отделимым.*

## Теорема 2

*Существуют две равномерно вычислимо отделимые эквивалентности, пересечение которых является неравномерной эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть $\alpha$ – гиперпростое множество с регрессивным дополнением $\omega \setminus \alpha$. По предложению 2 эквивалентность $\eta_\alpha$ является равномерно вычислимо отделимой. Используя метод Фридберга эффективно разложим $\alpha$ на два непересекающихся вычислимо перечислимых невычислимых множества $\alpha_0$ и $\alpha_1$, объединение которых есть $\alpha$ (т.е. $\alpha = \alpha_0 \cup \alpha_1, \alpha_0 \cap \alpha_1 = \emptyset$). Рассмотрим теперь эквивалентность $\eta_{\omega\setminus\alpha_1}$. Ясно, что она негативна (т.к. $\alpha_1$ вычислимо перечислимо), т.е. равномерно вычислима отделима. Теперь возьмем пересечение $\eta_\alpha \bigcap \eta_{\omega\setminus\alpha_1}$ этих двух эквивалентностей, которое, очевидно, равно $\eta_{\alpha_0}$.

# Полуперечислимость

Покажем, что $\eta_{\alpha_0}$ – неравномерная эквивалентность.
Прежде всего, отметим два свойства конструкции Фридберга:
(a) множества $\alpha_0$ и $\alpha_1$ вычислимо неотделимы;
(b) если $\beta$ – вычислимо перечислимое расширение $\alpha_0$, не пересекающееся с $\alpha_1$ (вычислимо перечислимое расширение $\alpha_1$, не пересекающееся с $\alpha_0$), то $\beta \setminus \alpha$ вычислимо перечислимо.
Предположим, что $\eta_{\alpha_0}$ – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность. Тогда, по теореме 1, множество $\omega \setminus \alpha_0$ является полуперечислимым. В силу характеризации полуперечислмых множеств (приведенной перед формулировкой настоящей теоремы) существует такой вычислимо перечислимый частичный порядок $\langle \omega; \leqslant_\omega \rangle$, для которого множество $\omega \setminus \alpha_0$ является линейно упорядоченным начальным сегментом, т.е.

$$\forall x \in (\omega \setminus \alpha_0) \forall y \in \alpha_0 [x \leqslant_\omega y]$$

и $\langle \omega \setminus \alpha_0; \leqslant_\omega \rangle$ – линейно упорядоченное множество.

# Полуперечислимость

Будем говорить, что число $x \in (\omega \setminus \alpha)$ покрывается числом $y \in \alpha_1$, если $x \leqslant_\omega y$. Заметим, что любое множество чисел из $\omega \setminus \alpha$, покрываемых подходящими числами из $\alpha_1$ конечно. Допустим противное. Тогда множество $\{x | \exists y \in \alpha_1 [x \leqslant_\omega y]\}$ является вычислимо перечислимым расширением (назовем его $\beta$) множества $\alpha_1$ за счет бесконечного числа элементов из $\omega \setminus \alpha$, т.е. $\beta \setminus \alpha_1$ бесконечно, причем $\beta \bigcap \alpha_0 = \emptyset$. В силу указанного выше свойства (b) конструкции Фридберга $\beta \setminus \alpha_1$ вычислимо перечислимое подмножество гипериммунного множества $\omega \setminus \alpha$ и потому должно быть конечным. Противоречие.
Таким образом, почти все (за исключением конечного числа) элементы из $\omega \setminus \alpha$ являются верхними гранями относительно $\leqslant_\omega$ для множества $\alpha_1$. Следовательно, упорядочение начального сегмента $\alpha_1 \bigcup (\omega \setminus \alpha)$ имеет вид $\alpha_1 + (\omega \setminus \alpha)$ (за вычетом конечного множества элементов из $\omega \setminus \alpha$, которые могут покрываться элементами $\alpha_0$).

Поэтому можно считать, что множество чисел из $\omega \setminus \alpha$, покрываемых числами из $\alpha_1$ пустое. Аналогичные рассуждения показывают, что порядок $\leqslant_\omega$ на $\omega \setminus \alpha$ изоморфен ординалу $\omega$.

Для реализации наших целей достаточно существования хотя бы одного числа из $\omega \setminus \alpha$, которое не покрывается никаким числом из $\omega \setminus \alpha_1$. Выберем, для определенности, $\leqslant_\omega$-наименьшее число из $\omega \setminus \alpha$, являющееся верхней гранью для $\alpha_1$.

Пусть это будет $m \in (\omega \setminus \alpha)$. Рассмотрим два множества: $\alpha_1^* = \{x | x \leqslant_\omega m\}$ и $\alpha_0^* = \{x | m \leqslant_\omega \wedge x \neq m\}$. Согласно определению начального сегмента имеем

$\alpha_0 \subseteq \alpha_0^*, \alpha_1 \subseteq \alpha_1^*, \alpha_0^* \bigcap \alpha_1^* = \emptyset, \alpha_0^* \bigcup \alpha_1^* = \omega$. Ясно также, что как $\alpha_0^*$, так и $\alpha_1^*$ вычислимо перечислимы. Но тогда $\alpha_0$ и $\alpha_1$ вычислимо отделимы, что противоречит свойству (b) конструкции Фридберга.

Следовательно, $\omega \setminus \alpha_0$ не является полуперечислимым множеством и по теореме 1 эквивалентность $\eta_{\alpha_0}$ не является равномерной. Теорема доказана.

**Замечание.** Очевидно, что любое вычислимо перечислимое множество, так же как и его дополнение слабо полурекурсивно. Поэтому слабо полурекурсивно $\omega \setminus \alpha_0$. Но это множество не является полуперечислимым (хотя полуперечислимо его дополнение). Таким образом, теорема 2 дает также пример слабо полурекурсивного, но не полуперечислимого множества $\omega \setminus \alpha_0$. Отметим также, что $\eta_\alpha$ является сильно равномерно отделимой эквивалентностью с полурекурсивным $\alpha$ (и $\omega \setminus \alpha$). Но $\alpha_1$, будучи полуперечислимым, не является полурекурсивным.

**Следствие**

*Существует нумерованная алгебра, множество равномерно вычислимо отделимых конгруэнций которой не является ни нижней, ни верхней полурешеткой.*

Таковой будет, например, алгебра пустой сигнатуры над множеством натуральных чисел $\omega$. Множество равномерно вычислимо отделимых конгруэнций этой алгебры не является верхней полурешеткой.

В силу теоремы 2 это множество не является также и нижней полурешеткой.
Легко заметить, что существуют как равномерно вычислимо отделимые эквивалентности, которые не являются эффективно отделимыми, так и эффективно отделимые, не являющиеся равномерно вычислимо отделимыми. Известно, что множество равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей не является верхней полурешеткой, т.к. любая позитивная эквивалентность с бесконечными смежными классами есть точная верхняя грань двух разрешимых (а значит и равномерно вычислимо отделимых) эквивалентностей (А.С.Морозов, не опубликовано). Однако, позитивные эквивалентности лежат в классе эффективно отделимых.
В связи с этим возникает вопрос о существовании пары равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей, точная верхняя грань которых не является эффективно отделимой. Приведем наиболее сильный вариант ответа на этот вопрос.

**Предложение 4**

*Множество равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей не замкнуто в множестве отделимых эквивалентностей относительно операции взятия точной верхней грани.*

Доказательство. Известно, что существует такое полурекурсивное $\alpha$, что как $\alpha$, так и $\omega \setminus \alpha$ не являются вычислимо перечислимыми. Пусть $\alpha$ – такое множество. Тогда $\alpha$ полуперечислимо и по теореме 1 эквивалентность $\eta_{\omega\setminus\alpha}$ – равномерно вычислимо отделима. Аналогично, $\eta_\alpha$ также равномерная. Очевидно, что $\eta_\alpha \vee \eta_{\omega\setminus\alpha} = \alpha^2 \bigcup (\omega \setminus \alpha)^2$ и эта верхняя грань не является отделимой. Предложение доказано.

**Следствие**

*Существуют две равномерно вычислимо отделимые эквивалентности, точная верхняя грань которых не является эффективно отделимой.*

# Примеры

Очень просто строятся примеры вычислимо отделимых эффективно бесконечных эквивалентностей с иммунными трансверсалями. В самом деле, пусть $\omega \setminus \alpha$ имммунно и не гипериммунно, т.е. обладает сильной таблицей $\gamma_{h(n)}, n \in \omega$, где $\gamma$ – каноническая нумерация конечных множеств, $h$ – тотальная вычислимая функция и $\forall n(\gamma_{h(n)} \cap (\omega \setminus \alpha) \neq \emptyset) \wedge (m \neq n \Rightarrow \gamma_{h(m)} \cap \gamma_{h(n)} = \emptyset)$. Тогда для $\eta^*_\alpha$ имеет место иммунность $tr(\eta^*_\alpha)$, но $\eta^*_\alpha$ эффективно бесконечна, т.к. $m \neq n \Rightarrow h(m) \neq h(n) \pmod{\eta^*_\alpha}$. С другой стороны, известно, что для равномерно вычислимо отделимой эквивалентности $\eta$ ее неэффективная бесконечность равносильна иммунности $tr(\eta)$. Заметим, что для любой эквивалентности из того, что она неэффективно бесконечна следует иммунность ее трансверсали, но вообще говоря не наоборот). Таким образом, если $\alpha$ – простое не гиперпростое, то $\eta^*_\alpha$ не является равномерно вычислимо отделимой. Характеристической функцией негативной эквивалентности $\eta$ назовем такую частичную вычислимую функцию $f$ двух переменных, что $x \neq y \pmod{\eta} \Rightarrow f(x,y) = 1$ и $f(x,y)$ не определена для $x = y \pmod{\eta}$.

# Приложения

Bergstra and Tucker доказали, что всякая вычислимо представимая конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, обладающее эквациональной спецификацией. Другими словами, всякая конечно порожденная алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, являющееся инициальной системой подходящего конечно-базируемого многообразия алгебр.

Идеи использования эквациональных спецификаций также восходят к вышеупомянутым авторам. Однако, выразительных возможностей языка исходной сигнатуры может оказаться недостаточно для эквационального описания. Примеров такого рода (как просматриваемый стек и т.д.) было много. Рассмотрим очень простой пример. Пусть $A = \langle \omega; 0, s, f \rangle$ – алгебра на множестве натуральных чисел $\omega$, 0 – константа для нуля, $s$ – функция следования ($s(x) = x + 1$) и $f$ – функция квадрата числа ($f(x) = x^2$).

Учитывая существенно большую скорость роста $f$ относительно $s$ нетрудно показать, что ни для какого конечного множества тождеств $E$ в сигнатуре $\Sigma = \langle 0, s, f \rangle$, фактор-алгебра $T_\Sigma / \equiv_E$ (где $T_\Sigma$ – алгебра замкнутых термов сигнатуры $\Sigma$, а $\equiv_E$ – конгруэнция, порожденная на множестве $_\Sigma$ тождествами $E$) не является изоморфной алгебре $A$. Обогатим сигнатуру $\Sigma$ до $\Sigma^* = \Sigma \cup \{d, h\}$, добавив символы унарной $d$ и бинарной $h$ функций, которые интерпретируем в $A$ как функцию удвоения $d(x) = 2x$ и сложения соответственно. Очевидно, что следующее множество из 6 тождеств верно в $A$: $E^* = \{d(0) = 0, ds(x) = ssd(x), h(x, 0) = x, h(x, s(y)) = sh(x, y), f(x) = 0, fs(x) = s(h(f(x), d(x))$. Заметим, что эти тождества по существу являются примитивно рекурсивными определениями упомянутых функций. Тогда $\Sigma$-обеднение алгебры $T_{\Sigma^*} / \equiv_{E^*}$ изомофно $A$ и $A$ не является инициальной алгеброй ни каком конечно базируемом многообразии в своей сигнатуре (докажите!).

# Приложения

Отметим также важнейший, с точки зрения приложений в теоретической информатике, факт. Для любого конечного множества тождеств инициальная алгебра строится единообразным эффективным "некреативно-механическим" способом, т.к., если два слова равны в инициальной алгебре (т.е. являются логическими следствиями определяющей системы тождеств), то этот факт рано или поздно обязательно подтвердится. Однако, даже если инициальная алгебра вычислима (т.е. проблема равенства слов в ней алгоритмически разрешима), то по системе тождеств не всегда можно построить алгоритм, определяющий различные слова по модулю конгруэнции, индуцированной тождествами. Т.е. алгоритм, конечно же, может и существовать, но автоматически сгенерировать его из синтаксического материала, содержащегося в тождествах, нельзя, что соответствует невозможности равномерно эффективного перехода от перечислимых индексов вычислимых множеств к их характеристическим индексам.

# Приложения

Таким образом, метод эквационального специфицирования моделей данных оказался достаточно универсальным. Очевидно, что всякая инициальная алгебра любой эквациональной спецификации имеет позитивное представление (перечислимую проблему равенства слов, т.е термов), но вычислимым представлением может и не обладать. Добавление новых операций к сигнатуре может только сузить класс алгоритмических представлений, но никак не расширить. Это поставило следующую принципиальную проблему:
"Всякая ли конечно порожденная позитивно представимая алгебра имеет обогащение, являющееся инициальной алгеброй некоторого конечно базируемого многообразия?"
Отрицательное решение данной проблемы предполагало нахождение таких свойств алгебр, которые, с одной стороны, "мешают" им быть инициальными в конечно базируемых многообразиях, а с другой стороны – эти свойства должны быть инвариантными относительно их позитивных представлений.

Пусть $(A,\nu)$ – неэффективно бесконечная алгебра. Легко заметить, что гипериммунность характеристической трансверсали ее ядра $tr(ker(\nu))$ влечет неэффективную бесконечность $\nu$, которой, в свою очередь, достаточно для иммунности $tr(ker(\nu))$. Можно показать, что обратные включения не имеют места.

Стандартной нумерацией назовем такую нумерацию алгебры, которая сводится к любой другой. Такие нумерации существуют, например, для конечно-порожденных алгебр конечных сигнатур. Поэтому, говоря об алгоритмическом свойстве алгебры безотносительно нумерации, имеется в виду именно стандартная нумерация, являющаяся наименьшей в (классе эквивалентных относительно упомянутой выше алгоритмической сводимости) нумераций. Имеют место следующщие утверждения.

### О стандартных нумерациях

*Стандартная нумерация конечно порожденной финитно аппроксимируемой алгебры является вычислимо отделимой.*

## О неэффективно бесконечных алгебрах

*Неэффективно бесконечная конечно порожденная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема.*

## О неэффективно бесконечных позитивных алгебрах

*Существует конечно порожденная алгебра, стандартная нумерация которой вычислимо отделима, неэффективно бесконечна и позитивна.*

## Следствие

*Существует конечно порожденная позитивная алгебра, всякое позитивно представимое обогащение которой является финитно аппроксимируемым.*

Это следствие дает пример приложения теории вычислимо отделимых алгебр к теоретической информатике, т.к. оно решает проблему существовании неявных эквациональных спецификаций для абстрактных структур данных.

# Примеры построения равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей и алгебр

Укажем один естественный способ построения достаточно широкого класса равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей.
Пусть $\alpha$ – произвольное множество с бесконечным не гипериммунным дополнением и $f$ – вычислимая функция, определяющая сильную таблицу для $\omega \wr \alpha$, т.е. для $i \neq j$ верно

$$\gamma_{f(i)} \cap \gamma_{f(j)} = \emptyset; \gamma_{f(k) \cap (\omega \setminus \alpha) \neq \emptyset}$$

для любого $k \in \omega$. Можно считать, что $\bigcup_{i \in \omega} \gamma_{f(i)} = \omega$, а $\gamma_{f(0)}$ одноэлементно. Стандартным образом построим вычислимое конечно-ветвящееся дерево $\langle \omega; \leqslant \rangle$ по шагам.
Шаг 0. $\leqslant_0 = id\gamma_{f(0)}, \omega_0 = \gamma_{f(0)}$.
Шаг n+1. Пусть числа $x_0, \ldots, x_s$ – все максимальные элементы в $\langle \omega_n; \leqslant_n \rangle$, а $i_n$ – наименьшее среди таких $i$, что $\gamma_{f(i)} \cap \omega_n = \emptyset$.

# Примеры построения равномерно вычислимо отделимых эквивалентностей и алгебр

Полагаем

$$\omega_{n+1} = \omega_n \cup \gamma_{f(i_n)} \cup \cdots \cup \gamma_{f(i_n+s)},$$

а в качестве $\leqslant_{n+1}$ возьмем рефлексивное и транзитивное замыкание множества

$$\leqslant_n \cup \bigcup_{0\leqslant j\leqslant s} \{\langle x_j, z\rangle | z \in \gamma_{f(i_n+j)}\}.$$

Тогда $\bigcup_{n\geqslant 0} \omega_n = \omega$ и $\leqslant = \bigcup_{n\geqslant 0} \leqslant_n$ задает искомый порядок.
Определим эквивалентность $\eta(\alpha, f)$:

$$\langle x, y\rangle \in \eta(\alpha, f) \Leftrightarrow x = y \vee \exists z \in \alpha(z \leqslant x \wedge z \leqslant y).$$

Непосредственно из построения вытекает, что $\eta(\alpha, f)$ – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность, причем она позитивна и неэффективно бесконечна, если $\alpha$ – простое не гиперпростое.

## Замечание о конечно порожденных алгебрах

*Пусть $\alpha$ – произвольное множество с иммунным дополнением. Тогда:*

*1. если $\omega \setminus \alpha$ не гипериммунно, то $\eta_\alpha$ не является равномерно вычислимо отделимой;*

*2. существует такое простое не гиперпростое $\alpha$, что над эквивалентностью $\eta_\alpha$ представима конечно порожденная (неэффективно бесконечная) алгебра;*

*3. если $\alpha$ гиперпросто и $\omega \setminus \alpha$ ретрассируемо, то $\eta_\alpha$ равномерно вычислимо отделимая позитивная эквивалентность;*

*4. для любого $\alpha$ с гипериммунным дополнением всякая алгебра представимая над $\eta_\alpha$ является локально конечной.*

Построенная выше конечно порожденная алгебра $A$ обладает равномерно вычислимо отделимой позитивной нумерацией $\mu$ с иммунной характеристической трансверсалью $tr(ker(\mu))$. Покажем, что всякое позитивно представимое обогащение алгебры $A$ является финитно аппроксимируемым.

Прежде всего заметим, что если $A^*$ – позитивно представимое обогащение алгебры $A$ и $\nu$ – любое позитивное представление этого обогащения, то, в силу вычислимой устойчивости относительно позитивных представлений конечно порожденных алгебр, эти представления вычислимо изоморфны, т.е. существуют такие вычислимые функции $f, g$, что $\mu = \nu f$ и $\nu = \mu g$. Поэтому нумерация $\mu$, с точностью до вычислимого изоморфизма, является также позитивным представлением обогащения $A^*$. Как было отмечено выше, $(A^*, \mu)$ аппроксимируется негативными алгебрами ввиду справедливости основной структурной теоремы теории вычислимо отделимых алгебр: нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

# Приложения

Пусть $a, b$ – различные элементы алгебры $A^*$. Тогда существуют эффективный на $\mu$-номерах сюръективный гомоморфизм $\varphi_{a,b}$ из $(A^*, \mu)$ на некоторую негативную алгебру $(B, \xi)$ (в сигнатуре алгебры $A^*$), различающий эти элементы (т.е. $\varphi_{a,b}(a) \neq \varphi_{a,b}(b)$), и такая вычислимая функция $h$, что $\varphi_{a,b}\mu = \xi h$. Ясно, что фактор-алгебра $A^*/\theta(a, b)$ (где через $\theta(a, b)$ обозначена конгруэнция, $\{\langle c, d\rangle | \varphi_{a,b}(c) = \varphi_{a,b}(d)\}$) изоморфна $B$.

Рассмотрим нумерованную алгебру $(A^*/\theta(a, b), \mu^*)$, где $\mu^* = \theta(a, b)\mu$, которая вычислимо изоморфна негативной алгебре $(B, \xi)$. При этом, вычислимый изоморфизм осуществляется сводящей функцией $h$. Т.к. $\mu^*(x) = \mu^*(y) \Leftrightarrow \xi h(x) = \xi h(y)$, а $\xi$ – негативная, то и $\mu^*$ также негативна. Теперь заметим, что $ker(tr(\mu^*)) \subseteq ker(tr(\mu))$, т.к. если эквивалентность $\eta_0$ расширяется эквивалентностью $\eta_1$, то характеристическая трансверсаль расширения $\eta_1$ является подмножеством характеристической трансверсали расширяемой эквивалентности $\eta_0$. Но $ker(tr(\mu)$ иммунна, а $ker(tr(\mu^*))$ перечислима (т.к. $\mu^*$ негативна). Следовательно, $ker(tr(\mu^*))$, а значит и $B$ конечна.

Таким образом, $A^*$ финитно аппроксимируема. Именно алгебра $A$ и является примером конечно порожденной позитивно представимой алгебры, никакое позитивно представимое обогащение которой не является инициальной ни в каком конечно базируемом многообразии. Предположим противное. Пусть $A^*$ – позитивно представимое обогащение алгебры $A$, инициальное в конечно базируемом многообразии, заданном конечной системой тождеств $E$. Через $T_\Sigma$ обозначим множество всех замкнутых термов конечной сигнатуры $\Sigma$ обогащения $A^*$. Инициальность означает свободность ранга 0, т.е. $A^*$ порождена сигнатурными константами. Ясно, что $A^*$ изоморфна $T_\Sigma / \equiv_E$, где $\equiv_E$ – конгруэнция на абсолютно свободной алгебре термов $T_\Sigma$, порожденная системой тождеств $E$, т.е. $A^* \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow E \vdash t_1 = t_2$. Очевидно, что для любой конечной $\Sigma$-алгебры $B$, порожденной $\Sigma$-константами можно эффективно проверить выполняется ли $E$ в $B$ или нет. Ясно также, что для всякого $n \in \omega$ имеется конечное число типов изоморфизма порожденных константами $\Sigma$-алгебр мощности $n$.

Поэтому множество типов изоморфизма конечных $\Sigma$-алгебр, порожденных константами и принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}$ порожденному системой $E$, является алгоритмически разрешимым. Если $A^* \models t_1 = t_2$, то этот факт подтвердится через конечное число шагов в силу позитивности инициальной системы любого эффективно аксиоматизируемого многообразия. Если же $A^* \models t_1 \neq t_2$, то, в силу финитной аппроксимируемости $A^*$, в последовательности конечных $\Sigma$-алгебр из многообразия $\mathfrak{M}$ обязательно найдется такая конечная $\Sigma$-алгебра $B$, порожденная константами, в которой $t_1 \neq t_2$, т.е. $A^*$ негативна, а значит и разрешима, что невозможно, т.к. $A^*$ не имеет разрешимых представлений. Противоречие. Таким образом, никакое обогащение алгебры $A$ не имеет конечной системы спецификаций в виде тождеств. Заметим, что можно говорить обо всех обогащениях этой алгебры не указывая позитивность, т.к. наличие такого обогащения автоматически обеспечивало бы его позитивность.

Отметим очень важный момент в этом доказательстве. Если, например, речь идет об инициальности в конечно базируемом квазимногообразии $\mathfrak{Q}$, заданном конечной системой квазитождеств $QE$ то метод не проходит, т.к. гомоморфные образы инициальной алгебры квазимногообразия не обязаны находиться в классе $\mathfrak{Q}$, поскольку квазитождества не являются устойчивыми относительно гомоморфизмов. Однако, как будет показано далее, в некоторых случаях возможно обобщение данного результата на более широкие классы формул, которые устойчивы относительно гомоморфизмов специальных видов.

Далее, под словом спецификация будем понимать вычислимо перечислимое множество предложений логики первого порядка. Спецификацию назовем хорновской (универсальной, экзистенциальной, индуктивной и т.д.), если каждое предложение из нее есть предложение хорновское (соответственно универсальное, экзистенциальное, индуктивное и т.д.).

## ДИП-формулы

### Определение ДИП-формулы

*Бесквантортная формула называется дизъюнктивно-импликативно-позитивной (ДИП-формулой), если она имеет один из следующих трех видов:*

*1.* $A_1 \vee \ldots \vee A_n \to \Phi$;

*2.* $A_1 \vee \ldots \vee A_n \to F$;

*3.* $\Phi$,

*где* $A_i$ *– атомарные,* $\Phi$ *– позитивная формулы, а* $F$ *– "ложь".*

ДИП-формулами являются, в частности, конъюнкции отрицаний атомарных ( случай 2), позитивные формулы (случай 3), а также бесквантторные части однопосылочных квазитождеств вида $A_1 \to B$ (при $n = 1$ и и атомарности $\Phi$). Универсальное замыкание ДИП-формулы называется универсальным ДИП-предложением.

# ДИП-характеризация

Негативные модели, опять-таки, образуют важный класс равномерно вычислимо отделимых моделей.

**Теорема об универсальной ДИП-характеризации равномерно вычислимо отделимых алгебр**

*Для нумерованной модели $(M, \nu)$ равносильны следующие условия:*
*1) $(M, \nu)$ – равномерно вычислимо отделимая модель;*
*2) если $\Phi$ – перечислимое множество универсальных ДИП-предложений, реализующееся в $M$, то $(M, \nu)$ равномерно аппроксимируется негативными $\Phi$-моделями (т.е. негативными моделями, в которых реализуется $\Phi$).*

Важность универсальных ДИП-формул для равномерно вычислимо отделимых алгебр с точки зрения аппроксимируемости связана с тем, что если универсальное ДИП-предложение истинно в модели, но на каком-то наборе ложна правая часть, то на этом наборе ложна и левая часть, т.е. ни один из атомарных дизъюнктивных членов левой части не может быть истинным и, следовательно, каждый из них можно "расщепить" с помощью алгоритма равномерной отделимости. Процесс итерируется. При этом, если, скажем, значения какой-то операции попадают в разные классы, а аргументы остаются "склеенными", то эти аргументы "расклеиваются", причем эту процедуру можно выполнять через трансляции (согласованность которых определяется однопосылочными квазитождествами, т.е. ДИП-предложениями). Предельная конструкция будет негативной конгруэнцией, в факторе по которой реализуется исходное множество ДИП-предложений. Заметим, что уже для квазитождеств вида $A \wedge B \Rightarrow C$ (не являющихся ДИП-предложениями) указанная процедура не работает, т.к. если $C$ ложно на некотором наборе, то на этом наборе не могут одновременно реализовываться и $A$, и $B$, однако, вообще говоря, нельзя определить, который из двух конъюнктивных атомарных членов в действительности ложен. В этой теореме нельзя заменить универсальные ДИП-предложения произвольными универсальными и экзистенциальными ДИП-предложениями, так же, как нельзя опустить условие равномерности.

**О конечно порожденных равномерно вычислимо отделимых неэффективно бесконечных алгебрах**

*Существует конечно порожденная равномерно вычислимо отделимая позитивная алгебра с иммунной характеристической трансверсалью.*

Общий метод построения таких систем приведен выше.

**Теорема о ДИП-неспецифицируемости**

*Существует конечно порожденная позитивно представимая алгебра конечной сигнатуры, никакое обогащение которой не является инициальной системой ни в каком конечно базируемом многообразии (квазимногообразии, задаваемом однопосылочными квазитождествами, позитивном классе).*

По поводу этой теоремы отметим, что она позволяет частично преодолеть трудности, связанные с неустойчивостью формул того или иного вида относительно гомоморфизмов.

# Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

*СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!*